Università di Pisa

Esame di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI I
Corso di Laurea in Ingegneria Civile, Ambientale e Edile

Esame di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI *- Parte I*
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale

(docente: Prof. Ing. Stefano Bennati)

Sintesi della soluzione della prova scritta dell'24 ottobre 2015

Problema. Nel sistema di figura 1 le travi *AC* e *CD* sono *flessibili* ma *inestensibili*, mentre le travi reticolari *BD* e *DE* sono *estensibili*. Sulle travi *AC* e *CD* agisce un carico distribuito uniforme di intensità p per unità di lunghezza della proiezione sull'orizzontale.

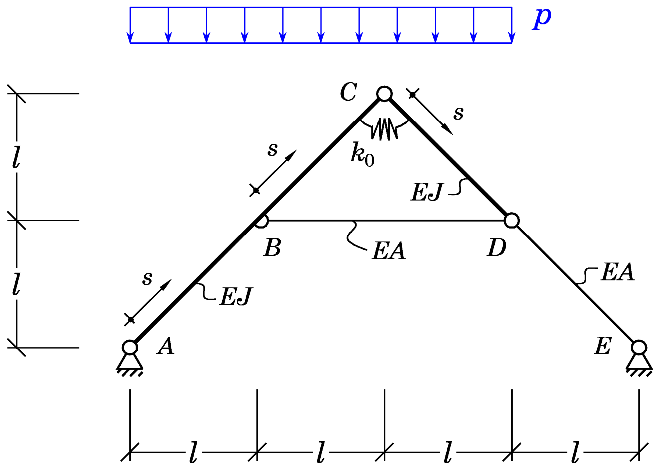

Figura 1

1) Con riferimento alla figura 2, la scomposizione del carico distribuito p agente su *AC* nella direzione trasversale e longitudinale della trave può essere ottenuta come segue:

$$p(s)\cdot \mathrm{d}s = \frac{1}{\sqrt{2}}\, p\cdot \mathrm{d}l\ ;\quad q(s)\cdot \mathrm{d}s = -\frac{1}{\sqrt{2}}\, p\cdot \mathrm{d}l\ ;\ \text{con}\ \ \mathrm{d}l = \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2}}\,.$$

Un ragionamento analogo conduce alla scomposizione del carico agente sulla trave *CD*.

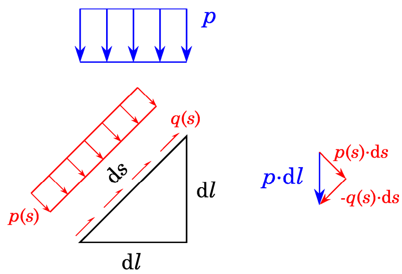

Figura 2

2) Il sistema è una volta *staticamente non determinato*. Nella risoluzione mediante il metodo delle forze, si sceglie come incognita iperstatica X_1 il valore dello sforzo normale nell'asta reticolare *BD*. Il sistema può allora essere decomposto nella somma seguente (fig. 3): $\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{F}^{(0)} + X_1\, \mathbf{F}^{(1)}$,

con: $w_D - w_B = 2l\left(X_1/EA\right)$, dove w_B e w_D sono gli spostamenti assiali, positivi nella direzione da *B* verso *D*, delle sezioni *B* e *D* dell'asta *BD*.

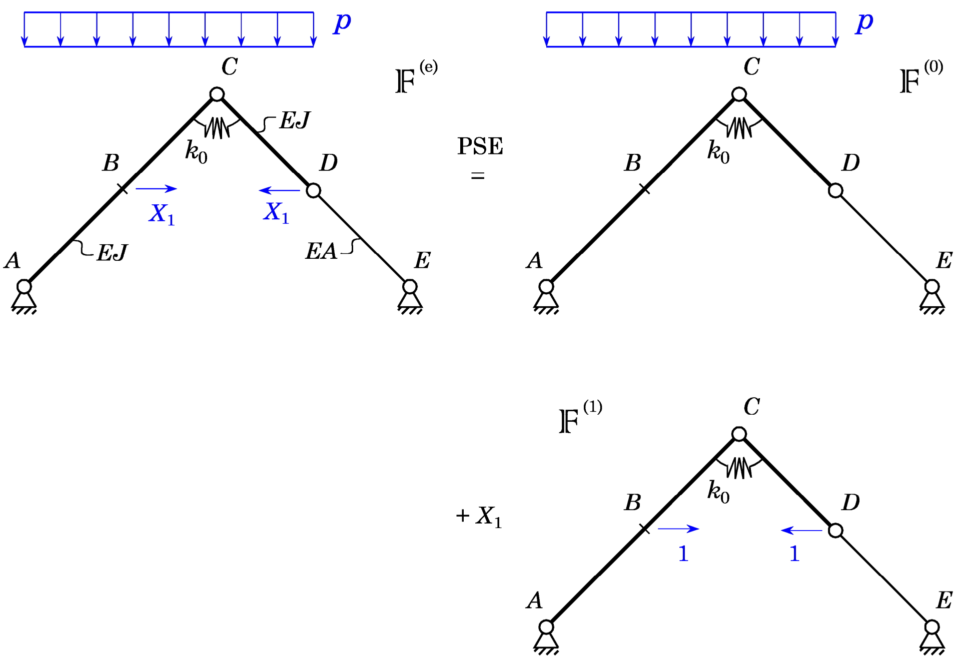

Figura 3

Considerazioni di equilibrio consentono di determinare facilmente le reazioni vincolari esterne per il sistema $\mathbf{F}^{(0)}$; quelle del sistema $\mathbf{F}^{(1)}$ sono nulle (il carico esterno è autoequilibrato!). I due sistemi sono rappresentati nelle figure 4 e 5.

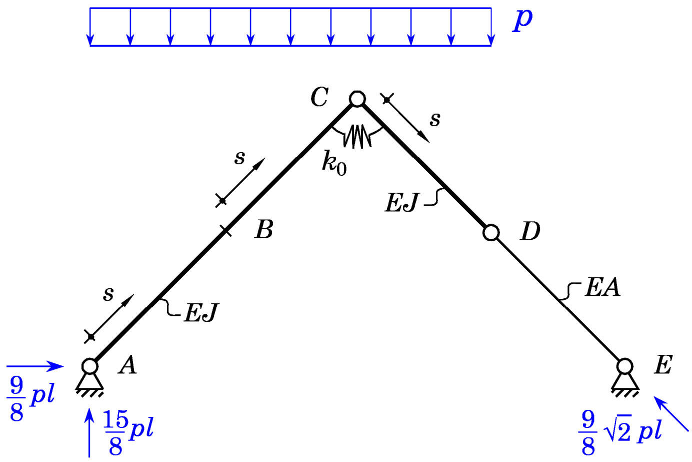

Figura 4: Sistema $\mathbf{F}^{(0)}$.

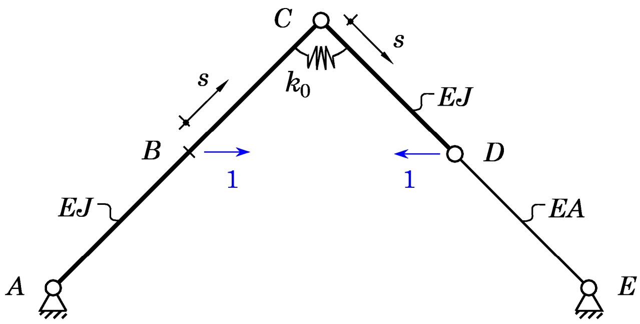

Figura 5: Sistema $\mathbf{F}^{(1)}$.

Le CdS nei vari tratti e nei sistemi $\mathbf{F}^{(0)}$ e $\mathbf{F}^{(1)}$ sono raccolte nella tabella seguente, nella quale, $s \in \left(0,\ l\sqrt{2}\right)$.

	N_0	T_0	M_0	N_1	T_1	M_1
AB	$\frac{p}{2}\left(s-3\sqrt{2}l\right)$	$\frac{p}{2}\left(\frac{3}{4}\sqrt{2}l-s\right)$	$\frac{ps}{4}\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}l-s\right)$	0	0	0
BC	$\frac{p}{2}\left(s-2\sqrt{2}l\right)$	$-\frac{p}{2}\left(s+\frac{\sqrt{2}}{4}l\right)$	$\frac{p}{4}\left(l^2-\frac{\sqrt{2}}{2}ls-s^2\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}s$
CD	$-\frac{p}{2}\left(\frac{5}{4}\sqrt{2}l+s\right)$	$\frac{p}{2}\left(\sqrt{2}l-s\right)$	$-\frac{p}{4}\left(\sqrt{2}l-s\right)^2$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(l\sqrt{2}-s\right)$
DE	$-\frac{9}{8}\sqrt{2}pl$	0	0	0	0	0

I diagrammi quotati delle CdS sono rappresentati nella figura 6.

I coefficienti di Müller-Breslau sono i seguenti:

$$\eta_1 = -\frac{X_1}{EA}2l\,; \qquad \eta_{10} = \frac{1}{2}\frac{pl^3}{k_0}+\frac{5\sqrt{2}}{24}\frac{pl^4}{EJ}\,; \qquad \eta_{11} = \frac{l^2}{k_0}+\frac{2}{3}\sqrt{2}\frac{l^3}{EJ}\,.$$

Conseguentemente,

$$X_1 = -\frac{\eta_{10}}{\eta_{11}+\frac{2l}{EA}}\,; \qquad \rightarrow \qquad X_1 = -\frac{\frac{l^2}{2k_0}+\frac{5\sqrt{2}}{24}\frac{l^3}{EJ}}{\frac{2l}{EA}+\frac{l^2}{k_0}+\frac{2}{3}\sqrt{2}\frac{l^3}{EJ}}pl\,.$$

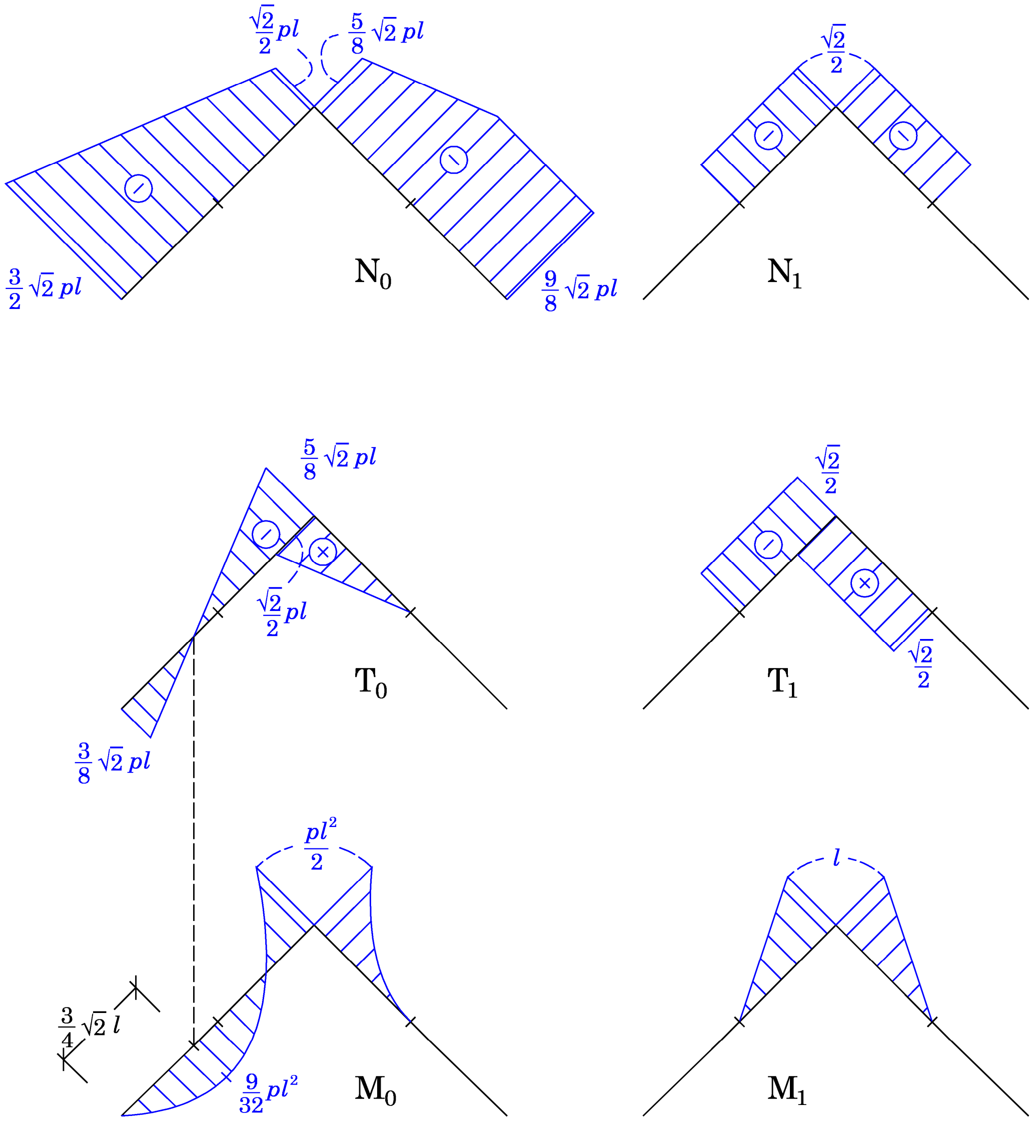

Figura 6

3) Le equazioni differenziali e le condizioni al bordo per i tratti *AB* (*tratto 1*), *BC* (*tratto 2*) e *CD* (*tratto 3*) che consentono di risolvere il problema mediante il metodo della linea elastica sono le seguenti (figura 7):

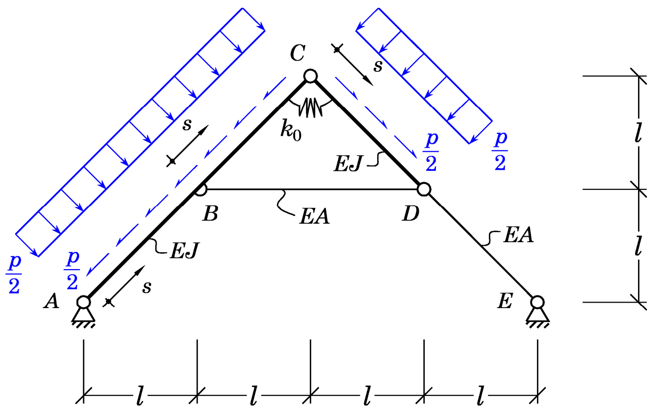

Figura 7

$EJv_i^{IV} = \dfrac{p}{2}$; per $i = 1, 2, 3$;

1. $v_1(0) = 0$;
2. $-EJv_1^{II}(0) = 0$;
3. $-EJv_1^{III}(0) = \dfrac{3\sqrt{2}}{8}\,pl$;
4. $v_1\left(l\sqrt{2}\right) = v_2(0)$;
5. $v_1^{I}\left(l\sqrt{2}\right) = v_2^{I}(0)$;
6. $-EJv_1^{II}\left(l\sqrt{2}\right) = -EJv_2^{II}(0)$;
7. $v_3(0) = 0$;
8. $-EJv_2^{II}\left(l\sqrt{2}\right) = -EJv_3^{II}(0)$;
9. $-EJv_3^{II}(0) = k_0\left[v_2^{I}\left(l\sqrt{2}\right) - v_3^{I}(0)\right]$;
10. $-EJv_3^{II}\left(l\sqrt{2}\right) = 0$;
11. $v_2\left(l\sqrt{2}\right) = \dfrac{9}{4}\dfrac{pl^2}{EA}$;
12. $-EJ\left[v_1^{III}\left(l\sqrt{2}\right) - v_2^{III}(0)\right] = \dfrac{EA}{4l}\left[v_2\left(l\sqrt{2}\right) - v_2(0) - v_3\left(l\sqrt{2}\right)\right]$.

Per scrivere le condizioni (11) e (12) si è determinato in precedenza l'espressione degli sforzi nelle aste estensibili in funzione degli spostamenti dei nodi *B* e *D* come:

$$N_{BD} = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{EA}{l}\left[v_2\left(l\sqrt{2}\right) - v_2(0) - v_3\left(l\sqrt{2}\right)\right]; \qquad N_{DE} = -\frac{EA}{l\sqrt{2}}v_2\left(l\sqrt{2}\right).$$

28 ottobre 2015.