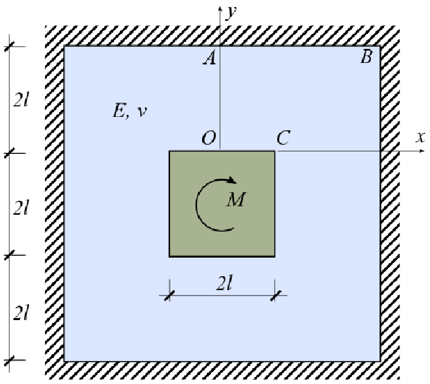
Esame di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

(docente: Prof. Ing. Stefano Bennati)

Soluzione della prova scritta del 24 ottobre 2015



Problema 1.

1) La struttura è simmetrica rispetto agli assi individuati dai segmenti *AO* e *BC* e a quelli ad essi ortogonali passanti per il baricentro della figura; osservando il carico agente si può concludere che siano assi di antisimmetria, per cui saranno nulle tutte le componenti degli spostamenti dirette lungo gli assi e le componenti delle tensioni ortogonali agli assi.

Condizioni al bordo:

AB: $u(x,2l)=0$; $v(x,2l)=0$.

AO: $v(0,y)=0$; $\sigma_x(0,y)=0$.

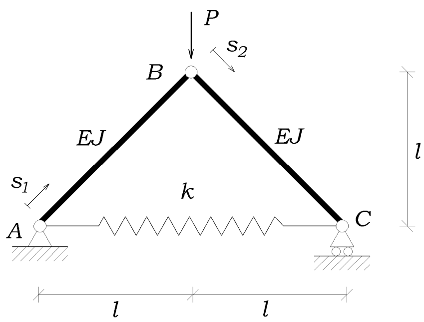
BC: $u(x,x-l)+v(x,x-l)=0$; $\sigma_n=(\sigma_x(x,x-l)+\sigma_y(x,x-l))/2-\tau_{xy}(x,x-l)=0$.

OC: $u(x,0)=l\theta$; $v(x,0)=-x\theta$, dove θ rappresenta la rotazione rigida infinitesima dell'elemento rigido centrale intorno al proprio baricentro.

2) Il campo di spostamento assegnato soddisfa a tutte le condizioni di vincolo sugli spostamenti ed è cinematicamente ammissibile.

3) $\sigma_x=3\lambda\theta l x/2(y+l)^2$, $\sigma_y=3(\lambda+2\mu)\theta l x/2(y+l)^2$, $\tau_{xy}=-3\mu\theta l/2(y+l)$, dove λ e μ sono le costanti di Lamé del materiale elastico.

Il campo così individuato (per $\theta\neq 0$) non verifica la condizione al bordo relativa alle tensioni sul tratto *BC*, non risultando perciò staticamente ammissibile.



Problema 2.

1) Equazioni differenziali: $EJv''''_1+\sqrt{2}/2Pv''_1=0$, $EJv''''_2+\sqrt{2}/2Pv''_2=0$; condizioni al bordo:

$v_1(0)=0$, $v_2(0)=0$, $v_2\left(l\sqrt{2}\right)=-v_1\left(l\sqrt{2}\right)$,

$v''_1(0)=0$, $v''_1\left(l\sqrt{2}\right)=v''_2(0)=0$, $v''_2\left(l\sqrt{2}\right)=0$,

$-EJv'''_2\left(l\sqrt{2}\right)+P\sqrt{2}/4+\sqrt{2}kv_2(l\sqrt{2})=0$.

2) Sì, possono insorgere fenomeni di instabilità legati alla possibilità che la struttura 'scatti' improvvisamente da una configurazione di equilibrio ad un'altra relativamente lontana dalla prima. Anche se non era richiesto fornire una descrizione analitica del fenomeno, nel seguito ne viene data comunque una spiegazione relativamente dettagliata.

Infatti, all'aumentare del carico il sistema si allontana progressivamente dalla configurazione iniziale e la molla si allunga di una quantità $\Delta=2\sqrt{2}l(\sin\theta-\sqrt{2}/2)$ (con $\theta-\pi/4$ non più $<<1$).

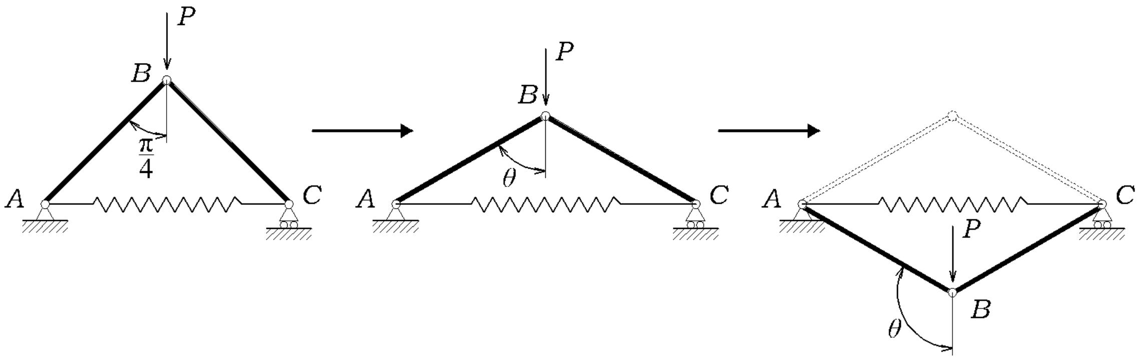


Fig.3

Per l'equilibrio nel nodo C si ottiene in direzione verticale che lo sforzo di compressione vale $N = P/2\cos\theta$, mentre in direzione orizzontale che $N = k\Delta/\sin\theta$, per cui:

$$P = 2k\Delta/\tan\theta = 4k\sqrt{2}l(\sin\theta - \sqrt{2}/2)/\tan\theta$$

In figura 4 è rappresentato l'andamento del diagramma $P-\theta$.

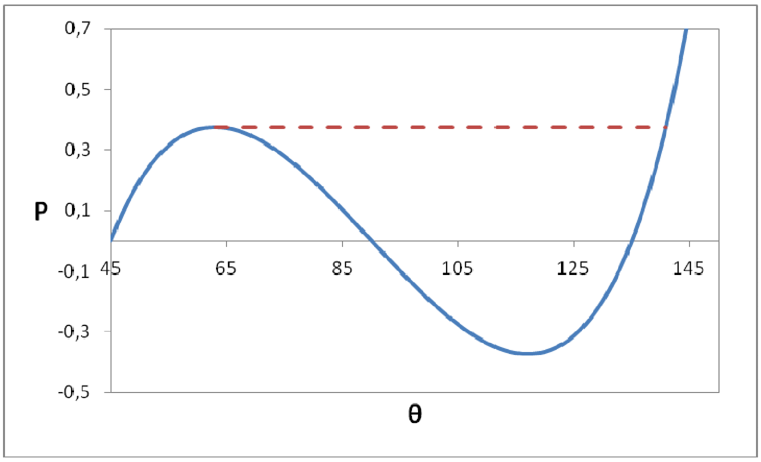


Fig.4

Per carico progressivamente crescente, la struttura segue la curva tratteggiata rossa a partire dal massimo relativo di P, "saltando" sul ramo della curva che è relativo al caso in cui le travi AB e BC si trovano al di sotto della linea AC (vedi anche fig. 3). Questo meccanismo è detto *instabilità a scatto* o *snap-through*. Il valore dell'angolo per cui avviene è:

$$\theta_{cr} = \arcsin(1/\sqrt[6]{2}) \approx 63°$$

Che fornisce un valore del carico critico pari a $P_{cr} \approx 0.375kl\sqrt{2}$.

N.B. Per le modalità di esame (validità della prova, etc.) consultare la pagina web del docente.