Università di Pisa

Esame di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI I
Corso di Laurea in Ingegneria Civile, Edile e Ambientale

Esame di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI *- Parte I*
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale

(docente: Prof. Ing. Stefano Bennati)

Sintesi della soluzione della prova scritta dell'12 settembre 2015

Problema. Nel sistema di figura le travi *AC* e *CD* sono *rigide*, *BC* e *CE* sono *flessibili* ma *inestensibili*, mentre *AB* e *DE* sono *estensibili*. Sulla trave *CE* agisce un carico distribuito trasversale uniforme, di intensità *p*, mentre in corrispondenza del nodo *B* agisce un carico concentrato, d'intensità *pl*. Infine, le travi *BC* e *CE* sono soggette alle variazioni termiche indicate, costanti nello spessore delle travi.

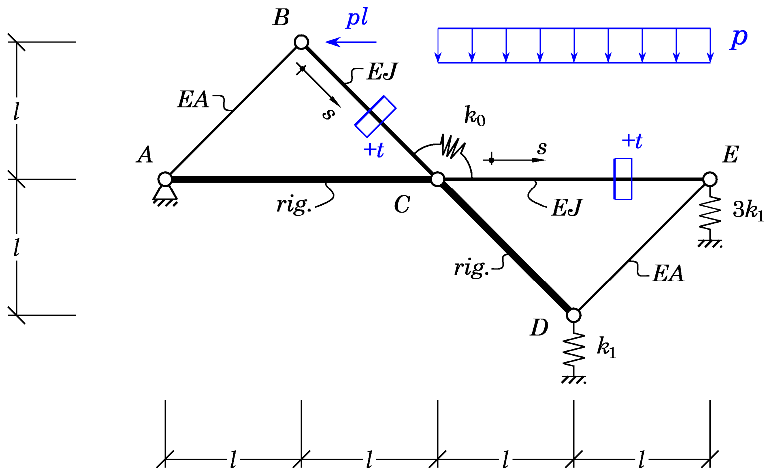

Figura 1

1) Il sistema è una volta *staticamente non determinato*. Nella risoluzione mediante il metodo delle forze, si sceglie come incognita iperstatica X_1 il valore della reazione esercitata dall'appoggio elastico in *E*. Il sistema effettivo può allora essere decomposto nella somma $\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{F}^{(0)} + X_1\,\mathbf{F}^{(1)}$,
con: $v_E = X_1/3k_1$, dove v_E è lo spostamento verticale, positivo nella direzione dall'alto verso il basso, del nodo *E*.

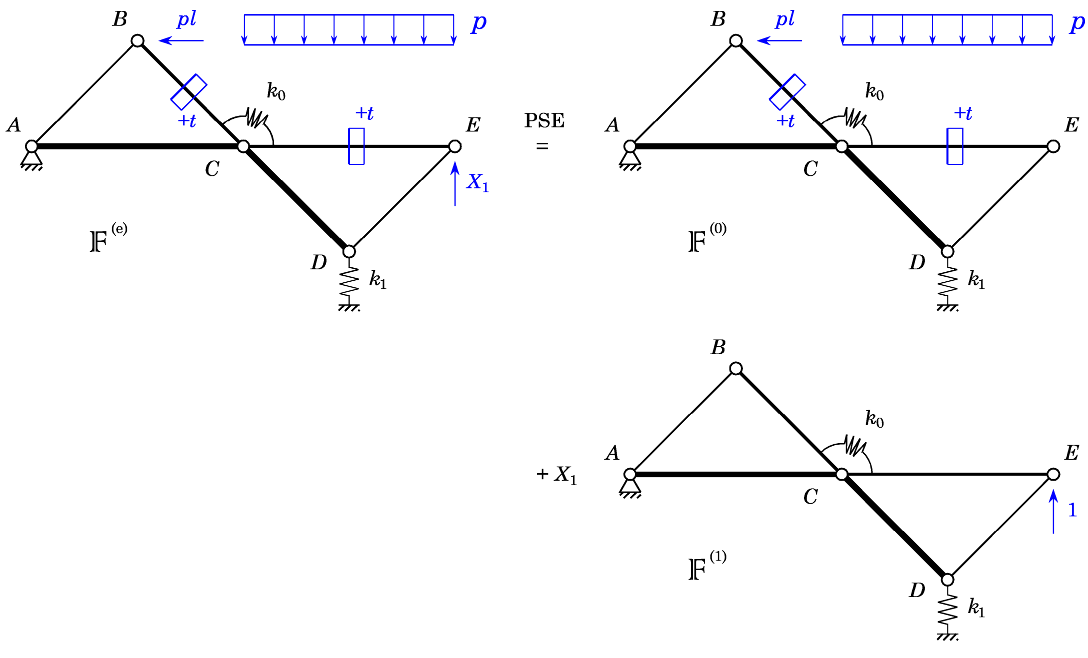

Figura 2

Considerazioni di equilibrio consentono di determinare facilmente le reazioni vincolari esterne per i sistemi $\mathbf{F}^{(0)}$ e $\mathbf{F}^{(1)}$. I due sistemi sono rappresentati nelle figure 3 e 4.

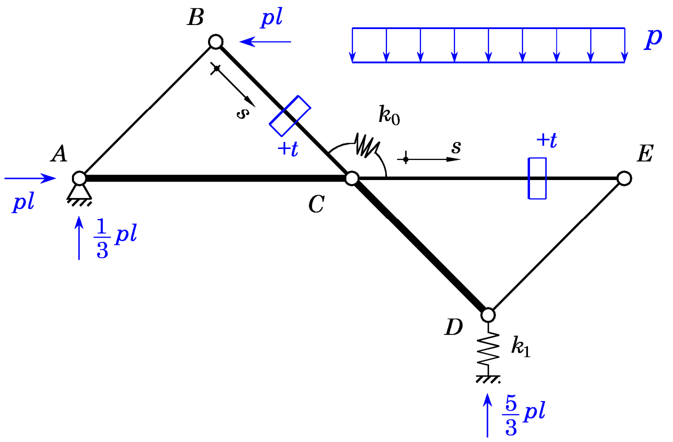

Figura 3: Sistema $\mathbf{F}^{(0)}$.

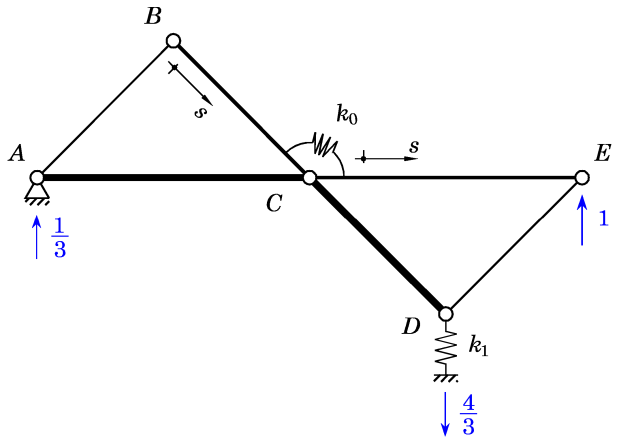

Figura 4: Sistema $\mathbf{F}^{(1)}$.

Le CdS nei vari tratti e nei sistemi $\mathbf{F}^{(0)}$ e $\mathbf{F}^{(1)}$ sono raccolte nella tabella seguente, nella quale, $s \in \left(0,\ l\sqrt{2}\right)$ per *BC* e $s \in \left(0,\ 2l\right)$ per *CE*.

	N_0	T_0	M_0	N_1	T_1	M_1
AB	$-\frac{\sqrt{2}}{3}pl$	0	0	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$	0	0
AC	$-\frac{2}{3}pl$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0
BC	$\frac{\sqrt{2}}{2}pl$	$-\frac{\sqrt{2}}{6}pl$	$-\frac{\sqrt{2}}{6}pls$	0	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}s$
CD	$-\frac{5}{6}\sqrt{2}pl$	0	0	$\frac{2}{3}\sqrt{2}$	0	0
CE	$\frac{5}{6}pl$	$\frac{7}{6}pl - ps$	$\frac{p}{2}(2l-s)\left(s-\frac{l}{3}\right)$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2l-s}{3}$
DE	$-\frac{5}{6}\sqrt{2}pl$	0	0	$\frac{2}{3}\sqrt{2}$	0	0

I diagrammi quotati delle CdS sono rappresentati nella figura 5.

I coefficienti di Müller-Breslau sono i seguenti:

$$\eta_1 = -\frac{X_1}{3k_1}; \qquad \eta_{10} = -\frac{20}{9}\frac{pl}{k_1} - \frac{8\sqrt{2}}{9}\frac{pl^2}{EA} - \frac{2}{9}\frac{pl^3}{k_0} - 2\frac{\sqrt{2}-1}{27}\frac{pl^4}{EJ} - \frac{4}{3}\alpha t l; \qquad \eta_{11} = \frac{16}{9}\frac{1}{k_1} + \frac{10\sqrt{2}}{9}\frac{l}{EA} + \frac{4}{9}\frac{l^2}{k_0} + 8\frac{\sqrt{2}+1}{27}\frac{l^3}{EJ}.$$

Conseguentemente,

$$X_1 = -\frac{\eta_{10}}{\eta_{11} + \frac{1}{3k_1}}; \qquad \rightarrow \qquad X_1 = \frac{2\left[10 + 4\sqrt{2}\frac{k_1 l}{EA} + \frac{k_1 l^2}{k_0} + \frac{\sqrt{2}-1}{3}\frac{k_1 l^3}{EJ}\right]pl + 12k_1\alpha t l}{19 + 10\sqrt{2}\frac{k_1 l}{EA} + 4\frac{k_1 l^2}{k_0} + 8\frac{\sqrt{2}+1}{3}\frac{k_1 l^3}{EJ}}.$$

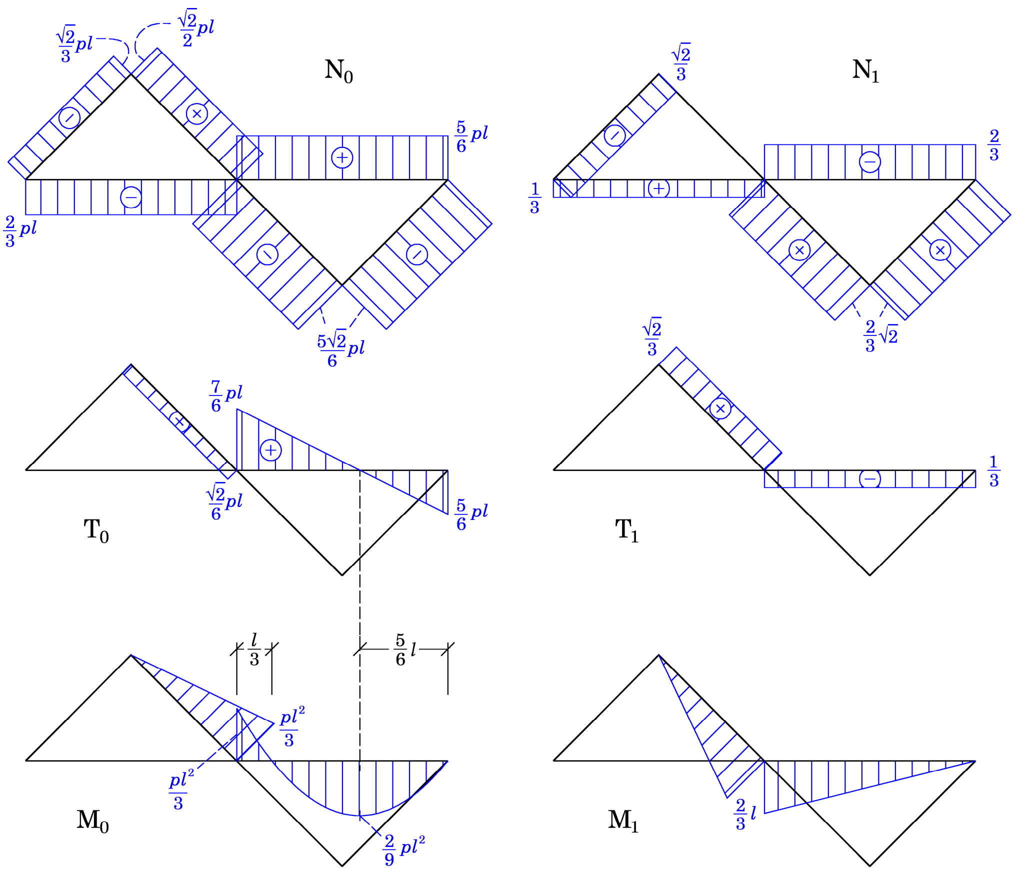

Figura 5

2) Si considerino *rigide* tutte le travi presenti nel sistema e si trascurino gli effetti derivanti dalla presenza delle variazioni termiche (figura 6). Sia inoltre $k_0 = k_1 l^2$.

Nella risoluzione del problema mediante il metodo degli spostamenti, adottiamo come parametri di spostamento le rotazioni θ_1 e θ_2 (*positive se orarie*) degli elementi rigidi *ABC* e *CDE* che consentono di descrivere univocamente la deformata del sistema. Le reazioni esercitate dai vincoli cedevoli sono:

$Y_D = lk_1\left(2\theta_1+\theta_2\right)$; $Y_3 = 6lk_1\left(\theta_1+\theta_2\right)$; $M_C = k_0\left(\theta_1-\theta_2\right)$.

Le due rotazioni possono essere determinate imponendo che siano rispettate le seguenti equazioni di equilibrio alla rotazione:

$$\begin{cases} 3lY_D + 4lY_E = 5pl^2 \\ lY_D + 2lY_E - M_C = 2pl^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 30k_1l^2\theta_1 + 27k_1l^2\theta_2 = 5pl^2 \\ \left(14k_1l^2 - k_0\right)\theta_1 + \left(13k_1l^2 + k_0\right)\theta_2 = 2pl^2 \end{cases}.$$

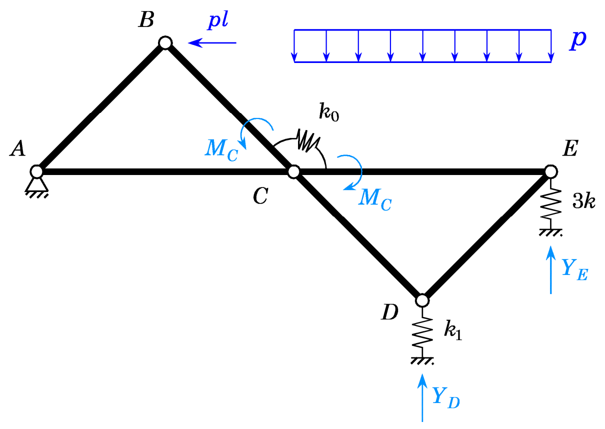

Figura 6

Il sistema può essere agevolmente risolto, ricordando anche che $k_0 = k_1 l^2$, ottenendo: $\theta_1 = \dfrac{16}{69}\dfrac{p}{k_1}$ e $\theta_2 = -\dfrac{5}{69}\dfrac{p}{k_1}$.

3) Il lavoro virtuale che le forze esterne compiono sugli spostamenti effettivi del sistema di figura 6 è

$$L_{v,e} = -pl \cdot l\theta_1 + \int_0^{2l} p\left(2l\theta_1 + s\theta_2\right)\mathrm{d}s = +\frac{38}{69}\frac{p^2l^2}{k_1}.$$

L'energia presente negli elementi elastici del sistema è esattamente la metà. Infatti,

$$U_{el} = \frac{k_1}{2}\left(2l\theta_1 + l\theta_2\right)^2 + \frac{3k_1}{2}\left(2l\theta_1 + 2l\theta_2\right)^2 + \frac{k_0}{2}\left(\theta_1 - \theta_2\right)^2 = +\frac{19}{69}\frac{p^2l^2}{k_1}.$$

Dunque, $L_{v,e} = 2U_{el}$, così come previsto dal Teorema di Clapeyron.

14 settembre 2015.