

Problema. Nel sistema di figura 1 le travi BC e CD sono flessibili ma inestensibili, mentre le altre travi sono estensibili. Sulle travi BC e CD agisce un carico distribuito trasversale uniforme, di intensità p ; inoltre, le travi AC e AD presentano i difetti di lunghezza indicati in figura 1.

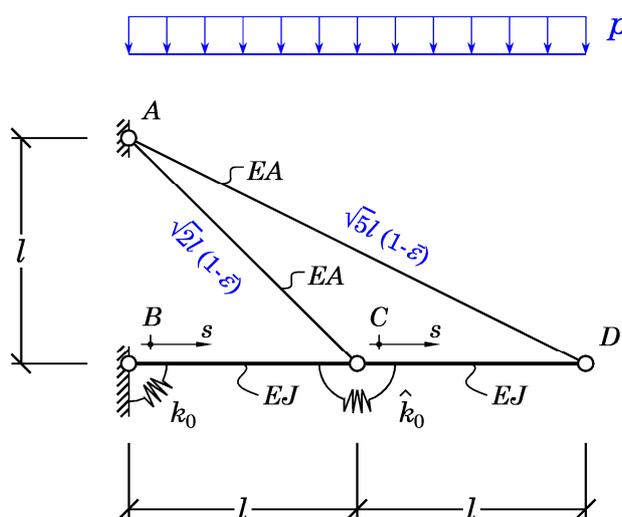


Figura 1

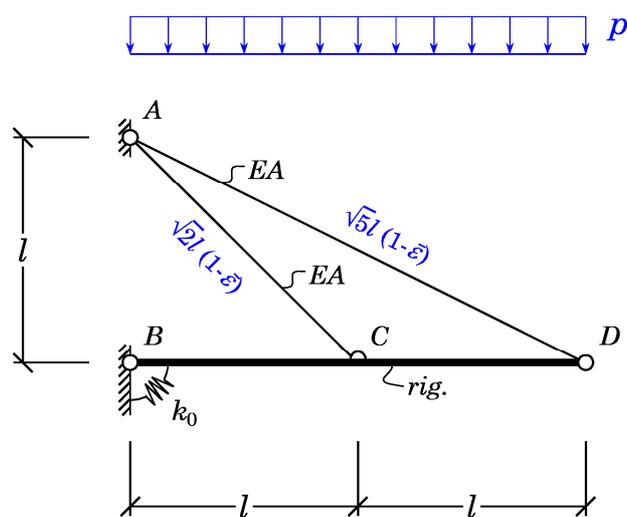


Figura 2

1) Si considerino rigide le travi BC e CD e si consideri infinita la rigidezza, \hat{k}_0 , della molla in C (fig. 2). Adottando la rotazione θ (positiva se oraria) della trave BCD come parametro di spostamento, è possibile esprimere in funzione di essa sia la coppia esercitata dalla molla in B, sia gli sforzi normali nelle aste reticolari AC e AD.

Dall'equilibrio alla rotazione della trave BD abbiamo:

$$k_0\theta + \frac{l}{\sqrt{2}} \underbrace{EA \left(\bar{\epsilon} + \frac{1}{2}\theta \right)}_{N_{AC}} + \frac{2l}{\sqrt{5}} \underbrace{EA \left(\bar{\epsilon} + \frac{2}{5}\theta \right)}_{N_{AD}} - 2pl^2 = 0.$$

Imponendo che θ sia nulla, ricaviamo il valore di $\bar{\epsilon}$:

$$\bar{\epsilon} = \frac{2}{3} (4\sqrt{5} - 5\sqrt{2}) \frac{pl}{EA}.$$

2) Il sistema è due volte staticamente non determinato. Nella risoluzione mediante il metodo delle forze, si sceglie come incognita iperstatica X_1 il valore dello sforzo normale dell'asta AC e come incognita iperstatica X_2 il valore della coppia esercitata dall'incastro elastico in C. Il sistema può allora essere decomposto nella somma seguente (fig. 3):

$$\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{F}^{(0)} + X_1 \mathbf{F}^{(1)} + X_2 \mathbf{F}^{(2)}$$

con:

$$w_C - w_A = l\sqrt{2} (X_1/EA - \bar{\epsilon}),$$

dove w_A e w_C sono gli spostamenti assiali, positivi nella direzione da A verso C, delle sezioni A e C dell'asta AC;

e

$$\varphi_C^+ - \varphi_C^- = X_2/\hat{k}_0,$$

dove φ_C^+ e φ_C^- sono le rotazioni (positive se orarie) della sezione C pensata come appartenente rispettivamente alle travi BC e CD. Nel testo era inoltre presente l'indicazione di supporre rigide le travi BC e CD.

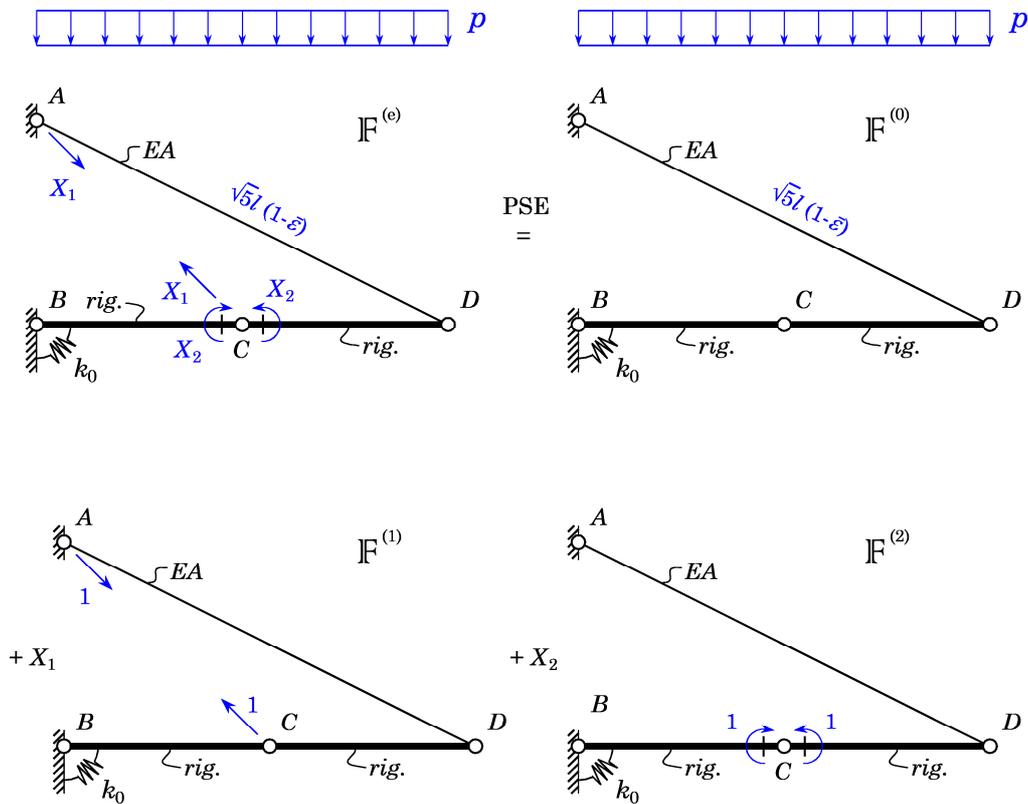


Figura 3

Considerazioni di equilibrio consentono di determinare facilmente le reazioni vincolari esterne per i sistemi $F^{(0)}$, $F^{(1)}$ e $F^{(2)}$.

I tre sistemi sono rappresentati nelle figure 4, 5 e 6.

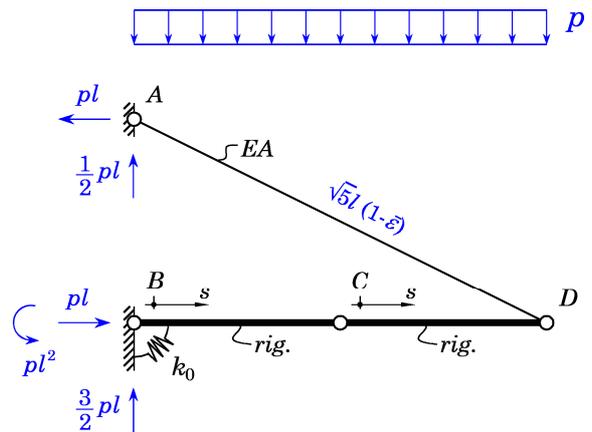


Figura 4: Sistema $F^{(0)}$.

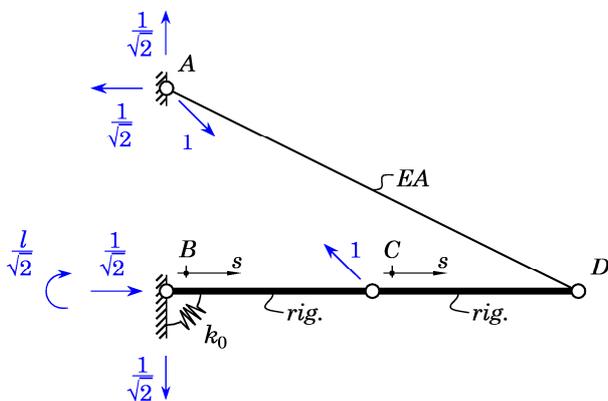


Figura 5: Sistema $F^{(1)}$.

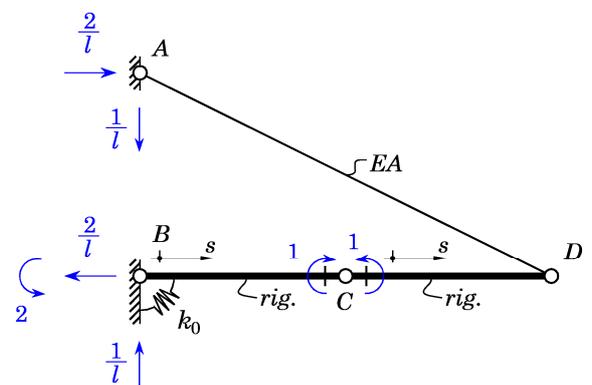


Figura 6: Sistema $F^{(2)}$.

Le CdS nei vari tratti e nei sistemi $\mathbf{F}^{(0)}$, $\mathbf{F}^{(1)}$ e $\mathbf{F}^{(2)}$ sono raccolte nella tabella seguente, nella quale, $s \in (0, l)$.

	N_0	T_0	M_0	N_1	T_1	M_1	N_2	T_2	M_2
<i>AD</i>	$\frac{\sqrt{5}}{2} pl$	0	0	0	0	0	$-\frac{\sqrt{5}}{l}$	0	0
<i>BC</i>	$-pl$	$p\left(\frac{3}{2}l-s\right)$	$\frac{ps}{2}(3l-s)-pl^2$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{l-s}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{l}$	$\frac{1}{l}$	$\frac{s}{l}-2$
<i>CD</i>	$-pl$	$p\left(\frac{l}{2}-s\right)$	$\frac{ps}{2}(l-s)$	0	0	0	$\frac{2}{l}$	$\frac{1}{l}$	$\frac{s}{l}-1$

I diagrammi quotati delle CdS sono rappresentati nella figura 7.

Il sistema costituito dalle equazioni di elasticità di Müller-Breslau è il seguente:

$$\begin{cases} \eta_1 = \eta_{10} + \eta_{11}X_1 + \eta_{12}X_2 \\ \eta_2 = \eta_{20} + \eta_{21}X_1 + \eta_{22}X_2 \end{cases}, \quad \text{con} \quad \eta_1 = -l\sqrt{2}(X_1/EA - \bar{\epsilon}), \quad \text{e} \quad \eta_2 = -X_2/\hat{k}_0,$$

mentre gli altri coefficienti, calcolati attraverso opportune applicazioni del teorema dei lavori virtuali, sono:

$$\begin{aligned} \eta_{10} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{pl^3}{k_0}; & \eta_{11} &= \frac{1}{2} \frac{l^2}{k_0}; & \eta_{12} &= \sqrt{2} \frac{l}{k_0}; \\ \eta_{20} &= 2 \frac{pl^2}{k_0} - \frac{5\sqrt{5}}{2} \frac{pl}{EA} + 5\bar{\epsilon}; & \eta_{21} &= \eta_{12}; & \eta_{22} &= \frac{4}{k_0} + \frac{5\sqrt{5}}{lEA}. \end{aligned}$$

Il valore delle incognite iperstatiche può infine essere calcolato risolvendo il sistema algebrico seguente, ad esempio attraverso la regola di Cramer:

$$\begin{bmatrix} \eta_{11} + \sqrt{2}l/EA & \eta_{12} \\ \eta_{12} & \eta_{22} + 1/\hat{k}_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}l\sqrt{2} - \eta_{10} \\ -\eta_{20} \end{pmatrix}.$$

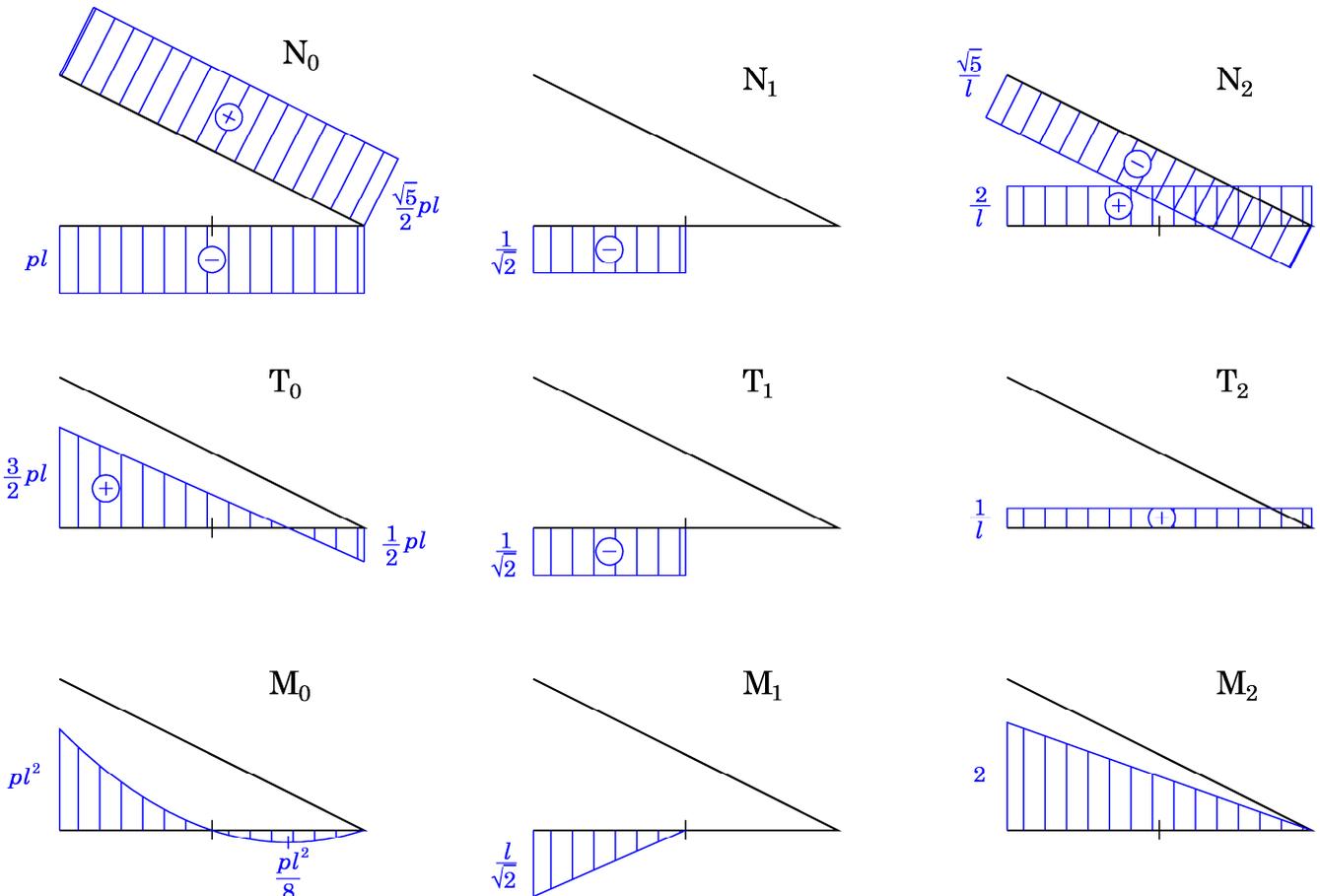


Figura 7

3) Le equazioni differenziali e le condizioni al bordo per i tratti AB (tratto 1) e BC (tratto 2) che consentono di risolvere il problema mediante il metodo della linea elastica sono le seguenti (figura 1):

$$EJv_i^{IV} = p;$$

per $i = 1, 2$;

1. $v_1(0) = 0$;
2. $k_0 v_1^I(0) - EJv_1^{II}(0) = 0$;
3. $v_1(l) = v_2(0)$;
4. $-EJv_2^{II}(0) = \hat{k}_0 [v_1^I(l) - v_2^I(0)]$;
5. $-EJv_1^{II}(l) = -EJv_2^{II}(0)$;
6. $-EJv_2^{II}(l) = 0$;
7. $-EJ[v_1^{III}(l) - v_2^{III}(0)] + \frac{\sqrt{2}}{2} N_{AC} = 0$;
8. $-EJv_2^{III}(l) + \frac{\sqrt{5}}{5} N_{AD} = 0$.

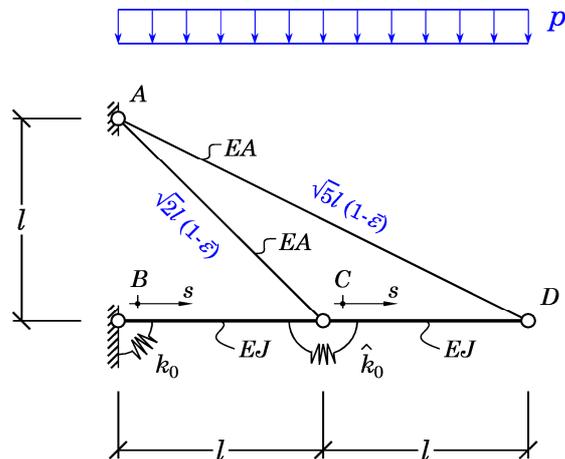


Figura 1

Gli sforzi normali N_{AC} e N_{AD} , presenti nella relazioni precedenti, possono essere espressi in funzione degli spostamenti delle sezioni di estremità delle travi BC e CD , ottenendo le seguenti espressioni:

$$N_{AC} = EA \left[\bar{\epsilon} + \frac{v_1(l)}{2l} \right]; \quad N_{AD} = EA \left[\bar{\epsilon} + \frac{v_2(l)}{5l} \right].$$