Università di Pisa

Esame di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI I
Corso di Laurea in Ingegneria Civile, Edile e Ambientale

Esame di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI *- Parte I*
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale

(docente: Prof. Ing. Stefano Bennati)

Sintesi della soluzione della prova scritta dell'11 luglio 2015

Problema. Nel sistema di figura 1 le travi di cornice *AC*, *CD*, *DI* e *GI* sono *flessibili* ma *inestensibili*, la trave *DE* è *rigida*, mentre le altre travi interne sono *estensibili*. In corrispondenza delle sezioni *A* e *G* agiscono dei carichi concentrati d'intensità *P*. Inoltre, le travi *BH* e *DE* presentano i difetti di lunghezza indicati in figura.

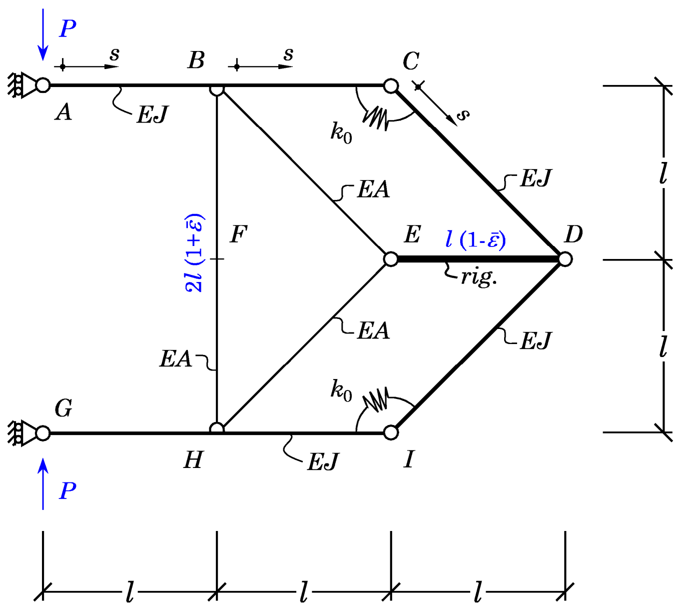

Figura 1

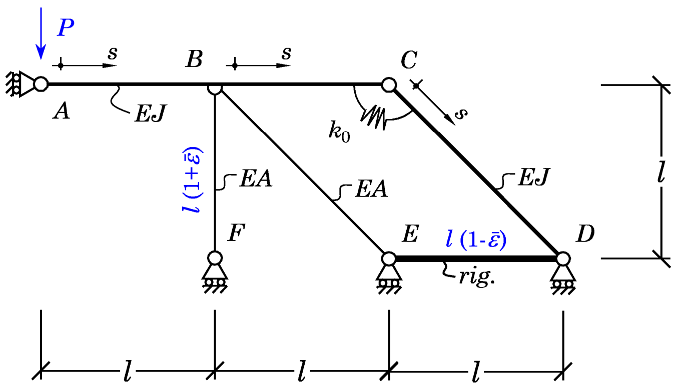

Figura 2

Considerazioni di simmetria, qui omesse per ragioni di brevità, consentono lo studio del sistema di figura 2.

1) Il sistema è una volta *staticamente non determinato*. Nella risoluzione mediante il metodo delle forze, si sceglie come incognita iperstatica X_1 il valore dello sforzo normale nell'asta *DE*. Il sistema può allora essere decomposto nella somma seguente [$\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{F}^{(0)} + X_1\,\mathbf{F}^{(1)}$]:

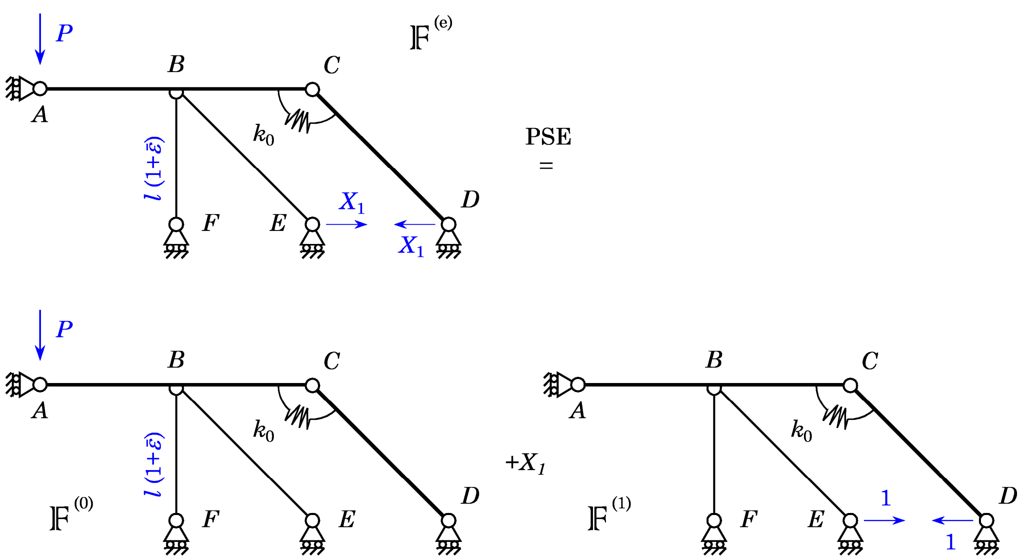

Figura 3

Considerazioni di equilibrio consentono di determinare facilmente le reazioni vincolari esterne per i sistemi $\mathbf{F}^{(0)}$ e $\mathbf{F}^{(1)}$. I due sistemi sono rappresentati nelle figure 4 e 5.

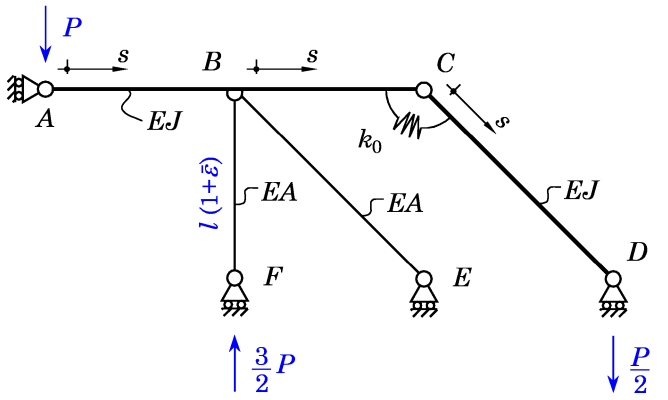

Figura 4: Sistema $\mathbf{F}^{(0)}$.

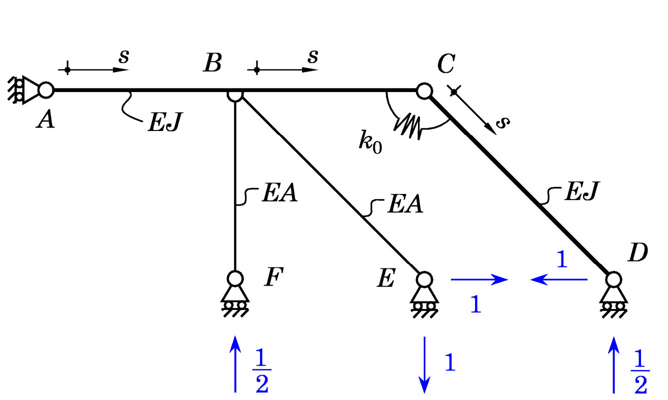

Figura 5: Sistema $\mathbf{F}^{(1)}$.

Le CdS nei vari tratti e nei sistemi $\mathbf{F}^{(0)}$ e $\mathbf{F}^{(1)}$ sono raccolte nella tabella seguente, nella quale, $s \in \left(0,\ l\right)$ per AB e BC e $s \in \left(0,\ \sqrt{2}l\right)$ per CD.

	N_1	T_1	M_1	N_2	T_2	M_2
AB	0	$-P$	$-Ps$	0	0	0
BC	0	$\frac{P}{2}$	$-Pl+\frac{P}{2}s$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{s}{2}$
CD	$\frac{\sqrt{2}}{4}P$	$\frac{\sqrt{2}}{4}P$	$-\frac{\sqrt{2}}{4}P\left(\sqrt{2}l-s\right)$	$-\frac{3}{4}\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{2}l-s\right)$
BE	0	0	0	$\sqrt{2}$	0	0
BF	$-\frac{3}{2}P$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	0

I diagrammi quotati delle CdS sono rappresentati nella figura 6.

I coefficienti di Müller-Breslau sono i seguenti:

$$\eta_1 = \bar{\varepsilon} l\,; \qquad \eta_{10} = \frac{1}{4}\frac{Pl^2}{k_0} + \frac{3}{4}\frac{Pl}{EA} + \frac{2+\sqrt{2}}{12}\frac{Pl^3}{EJ} - \frac{\bar{\varepsilon} l}{2}\,; \qquad \eta_{11} = \frac{1}{4}\frac{l^2}{k_0} + \left(\frac{1}{4}+2\sqrt{2}\right)\frac{l}{EA} + \frac{1}{4}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\frac{l^3}{EJ}\,.$$

Conseguentemente,

$$X_1 = \frac{\bar{\varepsilon} l - \eta_{10}}{\eta_{11}}\,; \quad \rightarrow \quad X_1 = \frac{6EA\,\bar{\varepsilon} - \left[3 + \frac{EAl}{k_0} + \frac{2+\sqrt{2}}{3}\frac{EAl^2}{EJ}\right]P}{1 + 8\sqrt{2} + \frac{EAl}{k_0} + \frac{3+\sqrt{2}}{3}\frac{EAl^2}{EJ}}\,.$$

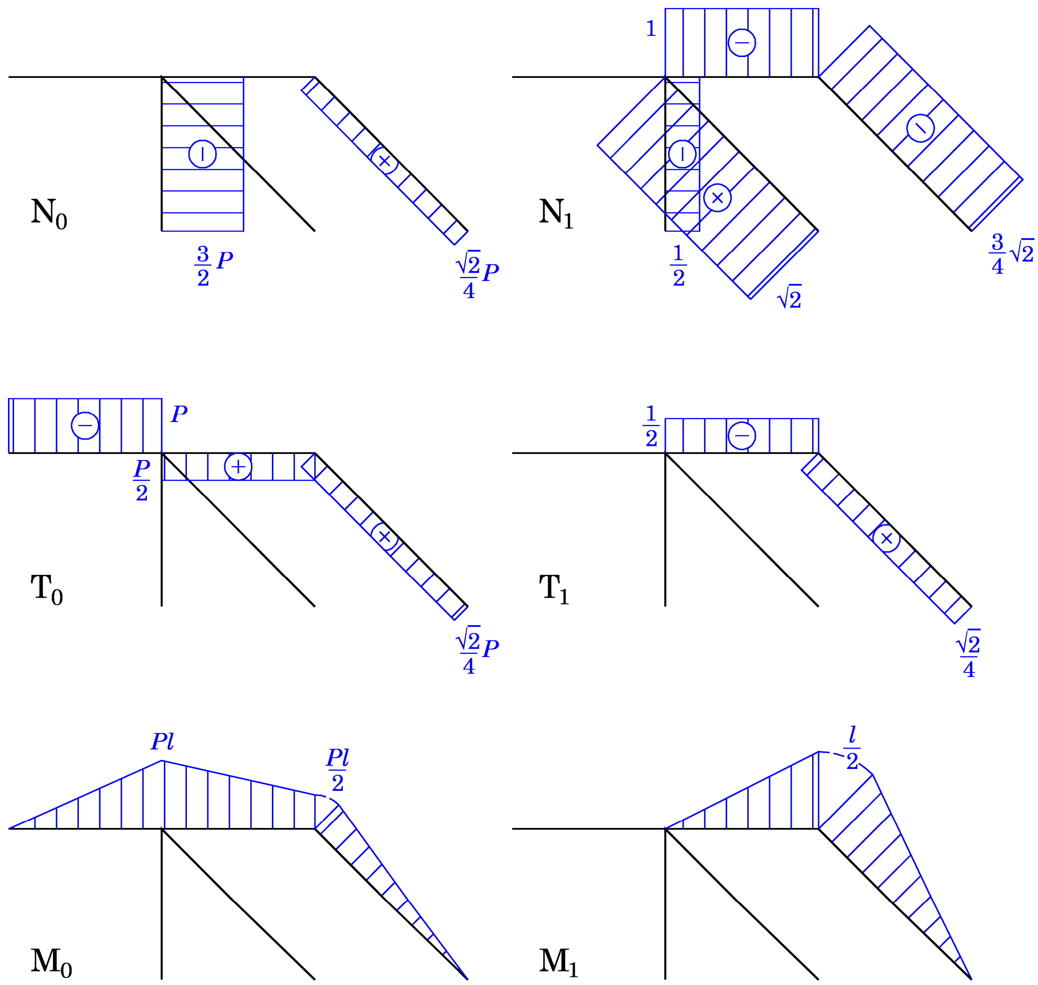

Figura 6

2) Le equazioni differenziali e le condizioni al bordo per i tratti *AB* (*tratto 1*), *BC* (*tratto 2*) e *CD* (*tratto 3*) che consentono di risolvere il problema mediante il metodo della linea elastica sono le seguenti (figura 2):

$EJv_i^{IV} = 0$; per i = 1, 2, 3;

1. $-EJv_1^{II}(0) = 0$;
2. $-EJv_1^{III}(0) = -P$;
3. $v_1(l) = v_2(0)$;
4. $v_1^{I}(l) = v_2^{I}(0)$;
5. $-EJv_1^{II}(l) = -EJv_2^{II}(0)$;
6. $v_3(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} v_2(l)$;
7. $-EJv_2^{II}(l) = -EJv_3^{II}(0)$;
8. $-EJv_3^{II}(0) = k_0\left[v_2^{I}(l) - v_3^{I}(0)\right]$;
9. $v_3(l) = -v_3(0)$;
10. $-EJv_3^{II}(l) = 0$;
11. $-EJ\left[v_1^{III}(l) - v_2^{III}(0)\right] = N_{BF} + \frac{\sqrt{2}}{2} N_{BE}$;
12. $-EJv_3^{III}(0) = \frac{N_{BE}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} EJv_2^{III}(l)$.

Gli sforzi N_{BE} e N_{BF}, presenti nelle relazioni precedenti, possono essere espressi facilmente in funzione degli spostamenti delle sezioni di estremità delle aste *BE* e *DF*:

$$N_{BE} = \frac{EA}{2l}\left[\bar{\varepsilon} l - \sqrt{2} v_3(l) - v_2(0)\right]; \qquad N_{BF} = -EA\left[\bar{\varepsilon} + \frac{v_2(0)}{l}\right].$$

Nel ricavare le relazioni precedenti si è tenuto conto: del fatto che la sezione *B* si può spostare solo verticalmente (a causa dell'inestensibilità della trave *AC* e della condizione di vincolo in *A*); del fatto che gli spostamenti orizzontali della sezione *F* non contribuiscono alla deformata estensionale della trave *BF*; del fatto che la sezione lo spostamento orizzontale della sezione *E*, u_E, può essere posto facilmente in relazione con lo spostamento orizzontale u_D della sezione *D*: $u_E = \bar{\varepsilon} l + u_D$, con $u_D = -\sqrt{2} v_3(l)$.

[*Nelle relazioni precedenti* u_E *e* u_D *sono, rispettivamente, le componenti degli spostamenti di E e di D nella direzione orizzontale orientata da E verso D*].

12 luglio 2015.