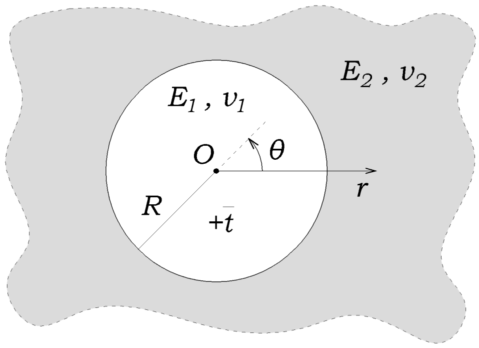


Problema 1.

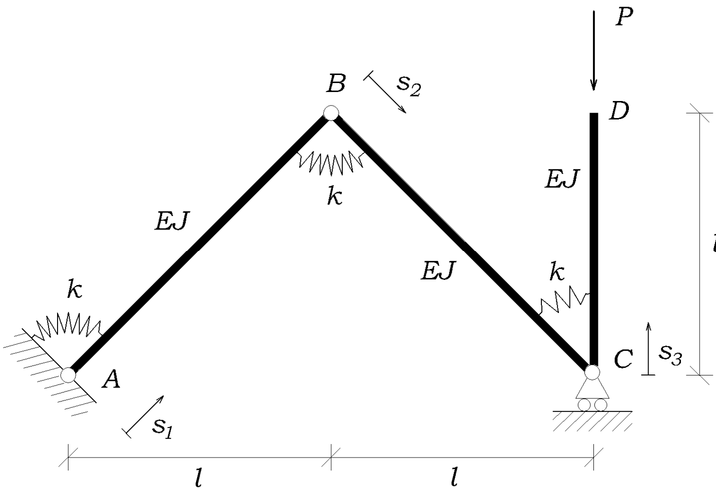
1) Dato che il sistema è dotato di simmetria polare, sia le tensioni che le deformazioni e gli spostamenti non dipendono dall'angolo θ, ma, al più, da r; ogni asse radiale è inoltre anche asse di simmetria ortogonale per il sistema, per cui sia le tensioni tangenziali $\tau_{r\theta}$ che la componente tangenziale v dello spostamento devono essere nulli $\forall r$.

2) $u_1(R) = u_2(R)$, $\sigma_{r1}(R) = \sigma_{r2}(R)$.

3) I campi di tensione assegnati verificano le equazioni indefinite di equilibrio in coordinate polari (per forze di volume nulle); inoltre non è presente alcuna superficie libera su cui dover verificare le equazioni ai limiti. Dunque, i campi di sforzo assegnati nel disco sono, se considerati separatamente da quelli assegnati nella lastra, staticamente ammissibili. Il campo di sforzo effettivo, per essere tale, deve però essere "completabile" attraverso un campo di spostamento che verifichi la continuità di spostamenti e tensioni in corrispondenza della circonferenza che separa il disco dalla lastra.

4) Per il legame costitutivo, $\varepsilon_{r1} = \frac{1}{E}(\sigma_{r1} - \nu\sigma_{\theta 1}) + \alpha\bar{t} = -\frac{p}{E}(1-\nu) + \alpha\bar{t} = 0$ per r=R (anche se in realtà vale $\forall r$…), da cui:

$$p = \frac{E}{1-\nu}\alpha\bar{t}$$



Problema 2.

1) Equazioni differenziali:

$EJv_1'''' = 0$, $EJv_2'''' = 0$, $EJv_3'''' + Pv_3'' = 0$;

condizioni al bordo:

$v_1(0) = 0$, $\quad v_2(0) = 0$,

$v_1(l\sqrt{2}) = \frac{v_3(0)}{\sqrt{2}}$,

$v_2(l\sqrt{2}) = -\frac{v_3(0)}{\sqrt{2}}$,

$-EJv_1''(0) + kv_1'(0) = 0$,

$v_1''(l\sqrt{2}) = v_2''(0)$, $\quad -EJv_2''(0) + k[v_2'(0) - v_1'(l\sqrt{2})] = 0$,

$v_2''(l\sqrt{2}) = v_3''(0)$, $\quad -EJv_3''(0) + k[v_3'(0) - v_2'(l\sqrt{2})] = 0$,

$v_3''(l) = 0$, $\quad EJv_3'''(l) + Pv_3'(l) = 0$, $\quad P[v_3(l) - v_3(0)] - kv_1'(0) + 2l\sqrt{2}EJv_1'''(0) = 0$

2) Si scrivono di seguito le equazioni di equilibrio alla rotazione intorno ai nodi C, B e A rispettivamente:

$Pl\theta_3 - k(\theta_2 + \theta_3) = 0$

$Pl\theta_3 + k(\theta_1 + \theta_2) - Rl(1 + \theta_2) = 0$

$Pl\theta_3 - k\theta_1 - Rl(2 + \theta_1 + \theta_2) = 0$

Facendo considerazioni geometriche si vede immediatamente che $\theta_1 = \theta_2$, per cui il sistema ha solo due gradi di libertà; eliminando R dal sistema si ottiene:

$Pl\theta_3 - k(\theta_1 + \theta_3) = 0$

$Pl\theta_3 + 5k\theta_1 = 0$

Da cui è immediato ottenere:

$P_{cr} = \frac{5}{6}\frac{k}{l}$.