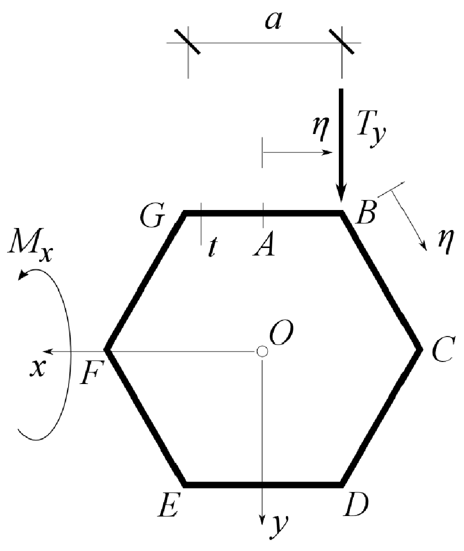


Università di Pisa
Esame di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale

(docente: Prof. Ing. Stefano Bennati)

Sintesi della soluzione della prova scritta del 7 febbraio 2015 – Parte II

Problema 1. La sezione chiusa di spessore sottile t avente la forma di un esagono regolare di lato a, mostrata in figura, è soggetta a uno sforzo di taglio T_y applicato parallelamente all'asse y e a un momento flettente d'intensità $M_x = T_y l$.

Gli assi x e y mostrati in figura sono direzioni principali d'inerzia della sezione in quanto assi di simmetria. D'altra parte la sezione ammette altri assi di simmetria distinti dai precedenti: dunque, per una nota proprietà delle direzioni principali, tutte le direzioni uscenti da O sono direzioni principali di inerzia.

Se non si tiene conto del fatto che la sezione è sottile,

$$J_x = \frac{5\sqrt{3}}{16}\left(\left(a + \frac{2\sqrt{3}}{6}t\right)^4 - \left(a - \frac{2\sqrt{3}}{6}t\right)^4\right)$$

Tenendone invece esplicitamente conto, abbiamo che

$$J_x = \frac{1}{6}\left(15a^3 t + a t^3\right) \approx \frac{5}{2}a^3 t$$

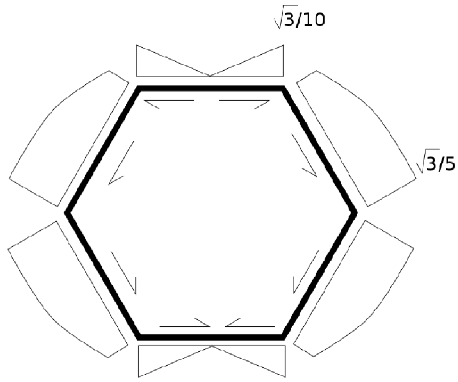
Volendo determinare l'andamento delle tensioni tangenziali prodotte dallo sforzo di taglio, utilizzando la formula di Jourawski, è facile provare che nei tratti AB e BC della linea media abbiamo:

tratto AB: $S_x^{'(AB)} = \eta t \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\tau_{z\eta}^{(AB)} = \frac{T_y S_x^{'(AB)}}{t J_x} = \frac{\sqrt{3}}{5}\frac{T_y}{a^2 t}\eta$;

tratto

BC: $S_x^{'(BC)} = \left[\frac{a}{2}t\frac{a\sqrt{3}}{2} + t\eta\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{\eta}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = \frac{\sqrt{3}}{4}t\left(a^2 + 2a\eta - \eta^2\right)$,

$$\tau_{z\eta}^{(BC)} = \frac{T_y S_x^{'(BC)}}{t J_x} = \frac{\sqrt{3}}{10}\frac{T_y}{a^3 t}\left(a^2 + 2a\eta - \eta^2\right).$$



La figura a lato mostra l'andamento delle tensioni tangenziali nei vari tratti della linea media.

Le tensioni tangenziali prodotte dal momento torcente d'intensità pari a $T_y a/2$ possono essere calcolate utilizzando la formula di Bredt, ottenendo per l'area racchiusa dalla linea media e per la tensione tangenziale diretta secondo la linea media (nel verso orario) e costante nello spessore i valori seguenti:

$$\Omega = \frac{3}{2}\sqrt{3}a^2$$

$$\overline{\tau}_{z\eta} = \frac{T_y}{6\sqrt{3}at}$$

Nei vertici *B* e *C* della linea media abbiamo, rispettivamente:

$$\sigma_{zz} = \frac{T_y l y}{J_x} \quad , \sigma_{zz}^B = \frac{T_y l}{J_x}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{5}\frac{T_y l}{a^2 t}\, , \; \sigma_{zz}^C = 0\, , \tau_{zy}^B = \frac{\sqrt{3}}{10}\frac{T_y}{at}\, , \left|\tau_{zy}^C\right| = \frac{\sqrt{3}}{5}\frac{T_y}{at}\, , \overline{\tau}_{zy} = \frac{T_y}{6\sqrt{3}at}$$

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 3\tau_{zy}^2}$$

$$\sigma_{id}^B = \frac{T_y}{5at}\sqrt{\frac{3l^2}{a^2} + \frac{49}{9}}$$

$$\sigma_{id}^C = \frac{23}{30}\frac{T_y}{at}$$

Osserviamo, incidentalmente che il valore della lunghezza *l* che rende i due valori della tensione ideale uguali tra loro è il seguente:

$$l = \frac{\sqrt{111}}{6}a$$

Problema 2. Nel problema di instabilità mostrato in figura, la trave flessibile e inestensibile *AB* è collegata alla trave rigida *BC* mediante un incastro cedevole di costante elastica k_0.

1) Scrivere l'equazione differenziale e le condizioni al bordo che permetterebbero di determinare il valore del carico critico.

$$EJv^{IV} + Pv^{II} = 0$$

$$v(0) = 0$$

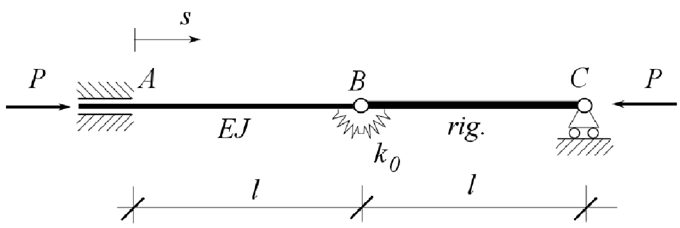
$$v^I(0) = 0$$

$$v(l) = -l\theta$$

$$k_0\left(\theta - v^I(l)\right) - EJv^{II}(l) = 0$$

$$-EJv^{III}(0)l - Pv(l) + k_0\left(\theta - v^I(l)\right) = 0$$

2) Con riferimento al caso limite in cui $k_0 = 0$, determinare l'equazione trascendente che, risolta, permette di calcolare il valore del carico critico. [12]



$$v(s) = C_1 \sin\alpha s + C_2 \cos\alpha s + C_3 s + C_4$$

$v(0) = 0$	$C_2 + C_4 = 0$
$v^I(0) = 0$	$\alpha C_2 + C_3 = 0$
$v(l) = -l\theta$	$C_1 \sin\alpha l + C_2 \cos\alpha l + C_3 l + C_4 = -l\theta$
$v^{II}(l) = 0$	$-\alpha^2(C_1 \sin\alpha l + C_2 \cos\alpha l) = 0$
$T(0)l - Pv(l) = 0$	$-EJ\alpha^3 C_1 l = -Pl\theta$

3) Infine, l'equazione trascendente nel caso limite in cui $k_0 = 0$, è la seguente:

$\sin\alpha l - 2\alpha l \cos\alpha l = 0$, ($\lambda^2 = P/EJ$).