Università di Pisa

Esame di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale

(docente: Prof. Ing. Stefano Bennati)

<u>Sintesi della soluzione della prova scritta straordinaria del 18 ottobre 2014 – Parte I</u>

Nel sistema di figura 1 le travi *AB* e *BC* sono *flessibili* ma *inestensibili*, le travi *AE* e *CE* sono *rigide*, mentre le altre sono *estensibili*. In corrispondenza dei nodi *B* e C agiscono dei carichi concentrati rispettivamente d'intensità *2P* e *P*, nelle direzioni indicate.

Utilizzando considerazioni di simmetria è facile dimostrare che è possibile limitare lo studio alla sola parte *ABCDE* a condizione di vincolare la sezione *D* con un semplice appoggio con piano di scorrimento verticale.

1) Nella soluzione mediante il metodo delle forze, scegliendo come incognita iperstatica X_1 il valore della reazione esercitata dall'appoggio in *D*, il sistema può essere decomposto nella somma seguente (figura 2): $\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{F}^{(0)} + X_1\,\mathbf{F}^{(1)}$.

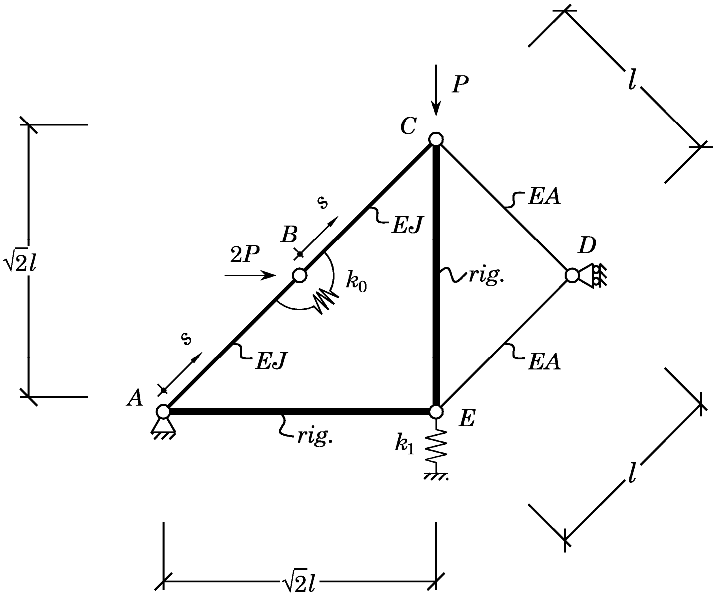

Figura 1

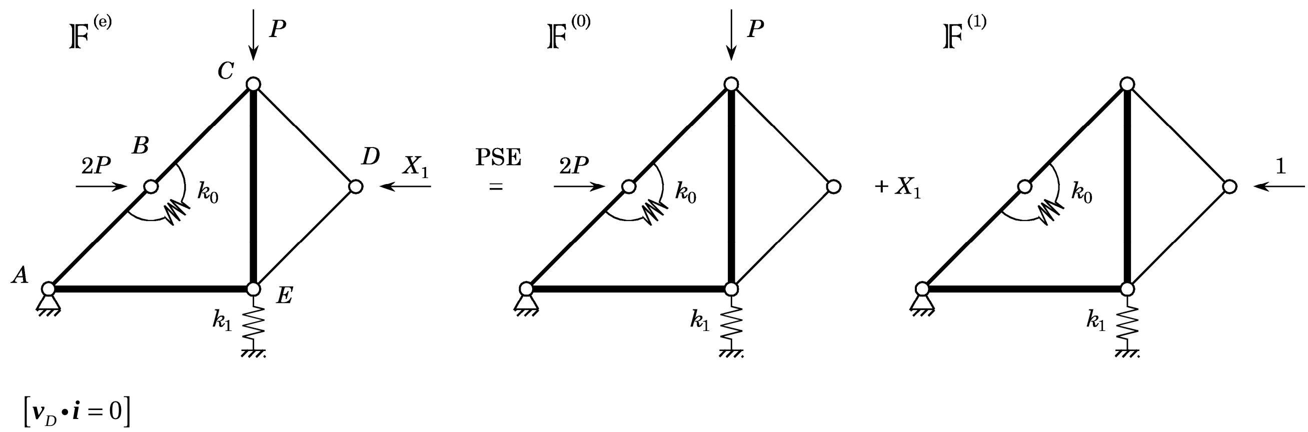

Figura 2

Semplici considerazioni di equilibrio consentono di determinare le reazioni vincolari esterne per i sistemi $\mathbf{F}^{(0)}$ e $\mathbf{F}^{(1)}$, rappresentati nelle figure 3 e 4.

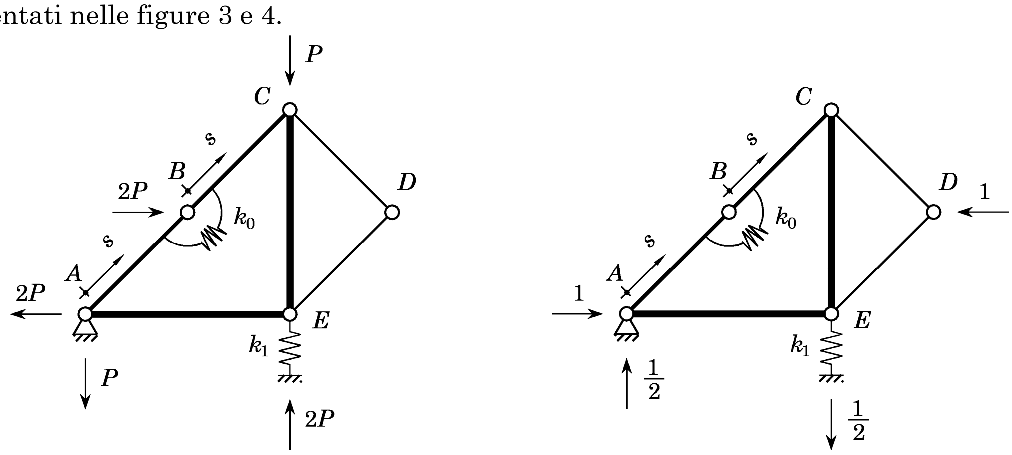

Figura 3 **Figura 4**

Le CdS nei vari tratti e nei sistemi $\mathbf{F}^{(0)}$ e $\mathbf{F}^{(1)}$ sono raccolte nella tabella seguente, nella quale $s \in (0,\ l)$.

	N_0	T_0	M_0	N_1
AB	$\frac{3\sqrt{2}}{2}P$	$\frac{\sqrt{2}}{2}P$	$\frac{\sqrt{2}}{2}Ps$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
AE	0	0	0	$-\frac{1}{2}$
BC	$\frac{\sqrt{2}}{2}P$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}P$	$\frac{\sqrt{2}}{2}P(l-s)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
CD	0	0	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
CE	$-2P$	0	0	0
DE	0	0	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

I diagrammi quotati delle CdS sono rappresentati in figura 5.
I coefficienti di Müller-Breslau sono i seguenti:

$$\eta_1 = 0\,; \qquad \eta_{10} = -\frac{P}{k_1}\,; \qquad \eta_{11} = \frac{1}{4k_1} + \frac{l}{EA}\,.$$

Conseguentemente,

$$X_1 = \frac{4}{1 + 4\dfrac{k_1 l}{EA}}P\,.$$

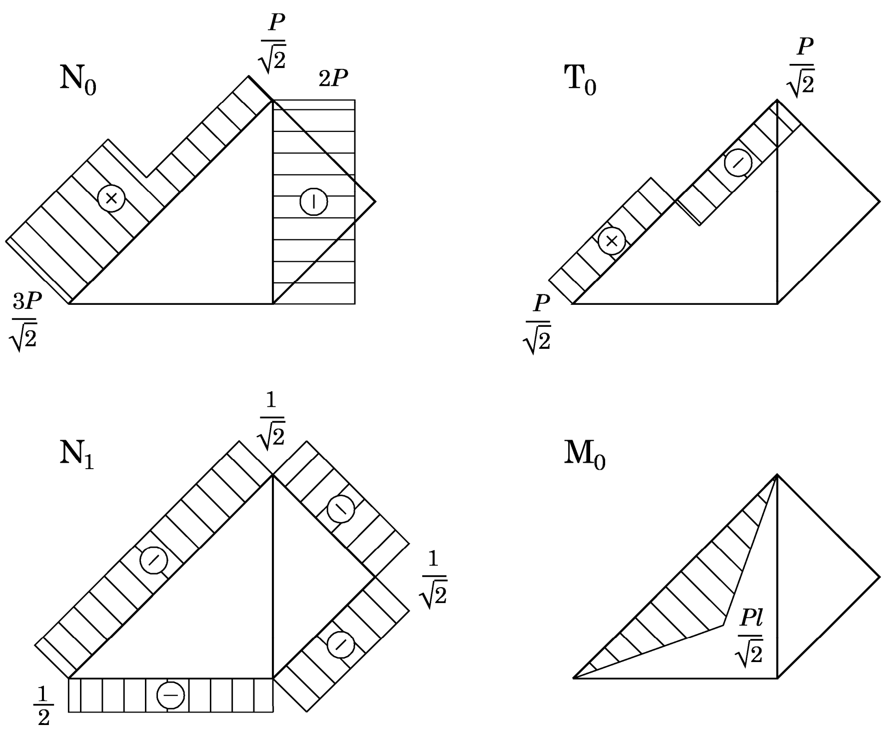

Figura 5

2) Utilizziamo come parametri incogniti lo spostamento trasversale della sezione *C* della trave *BC,* $v_2(l)$, e gli spostamenti verticali (*presi positivi verso il basso*) dei nodi D ed *E,* v_D e v_E.

[Nota: i parametri scelti corrispondono agli spostamenti effettivi dei nodi C, D ed E. Sapresti spiegare il perché?]

- Considerazioni di natura cinematica consentono di determinare che $v_2(l) = \sqrt{2} v_E$;
- Gli sforzi delle aste estensibili *CD* e *DE* sono:

$$N_{CD} = \frac{EA}{\sqrt{2}l}(v_D - 2v_E);$$

$$N_{DE} = -\frac{EA}{\sqrt{2}l}(v_D - v_E).$$

- Imponendo l'equilibrio in direzione orizzontale e verticale per il nodo *D* otteniamo:

$$v_D = \frac{3}{2} v_E;$$

$$X_D = \frac{EA}{2l} v_E.$$

- Possiamo determinare v_E imponendo l'equilibrio globale alla rotazione attorno ad *A*:

$$v_E = \frac{2}{1 + \frac{1}{4}\frac{EA}{k_1 l}} \frac{P}{k_1}.$$

- Le equazioni differenziali e le condizioni al bordo per i tratti *AB* (*tratto 1*) e *BC* (*tratto 2*) che consentono di risolvere il problema mediante il metodo della linea elastica sono, dunque:

$EJv_1^{\mathrm{IV}} = 0$; $EJv_2^{\mathrm{IV}} = 0$;

1. $v_1(0) = 0$;
2. $-EJv_1^{\mathrm{II}}(0) = 0$;
3. $v_1(l) = v_2(0)$;
4. $-EJv_1^{\mathrm{II}}(l) = -EJv_2^{\mathrm{II}}(0)$;
5. $-EJv_2^{\mathrm{II}}(0) = k_0\left[v_1^{\mathrm{I}}(l) - v_2^{\mathrm{I}}(0)\right]$;
6. $-EJ\left[v_1^{\mathrm{III}}(l) - v_2^{\mathrm{III}}(0)\right] = \sqrt{2}P$;
7. $v_2(l) = \dfrac{2\sqrt{2}}{1 + \frac{1}{4}\frac{EA}{k_1 l}} \dfrac{P}{k_1}$;
8. $-EJv_2^{\mathrm{II}}(l) = 0$.

18 ottobre 2014.