Università di Pisa

Esame di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale

(docente: Prof. Ing. Stefano Bennati)

Sintesi della soluzione della prova scritta del 19 settembre 2014 – Parte I

Problema. Nel sistema di figura 1 le travi AB e BC sono *flessibili* ed *inestensibili*, mentre le altre tre sono *estensibili*. Sulle travi AB e BC agisce un carico distribuito trasversale, variabile linearmente con la variabile s. Le stesse travi sono inoltre soggette ad una variazione termica variabile linearmente nello spessore H della sezione trasversale, mentre la trave BD è soggetta ad una variazione termica costante nello spessore delle trave stessa.

1) Scelta come incognita iperstatica X_1 il valore dello sforzo normale dell'asta BD, il sistema può essere decomposto nella somma seguente: $\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{F}^{(0)} + X_1\ \mathbf{F}^{(1)}$ (v. Fig. 2, nella quale si è indicato con δ_{BD} l'allungamento dell'asta BD).

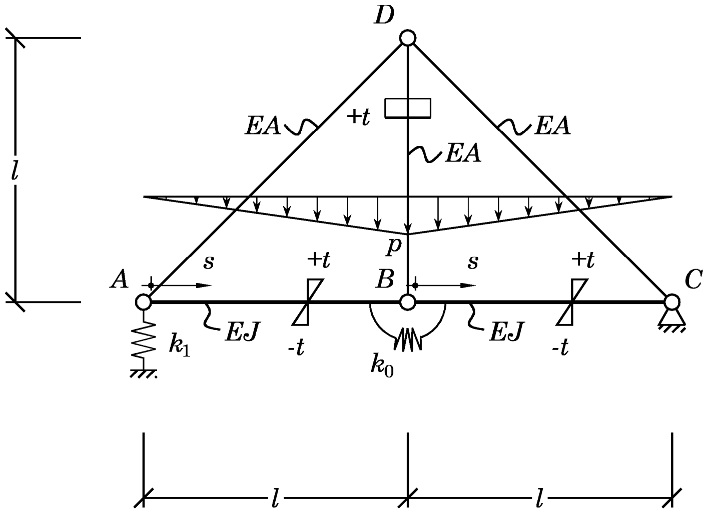
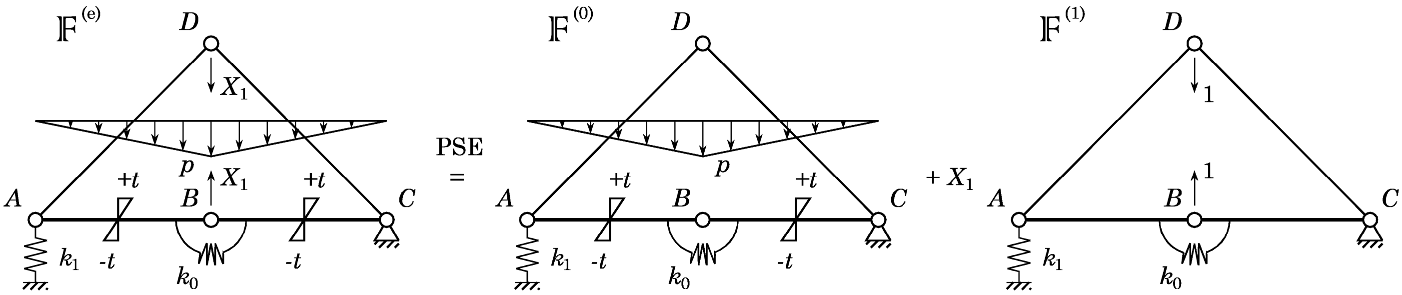


Figura 1



$$\left[\delta_{BD} = \frac{X_1}{EA} l + \alpha t l\right]$$

Figura 2

Semplici considerazioni di equilibrio consentono di determinare le reazioni esterne per il sistema $\mathbf{F}^{(0)}$, mentre il sistema $\mathbf{F}^{(1)}$ è esternamente scarico. I due sistemi sono rappresentati nelle figure 3 e 4.

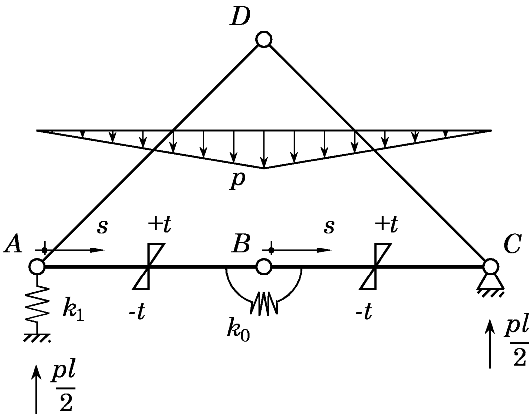


Figura 3

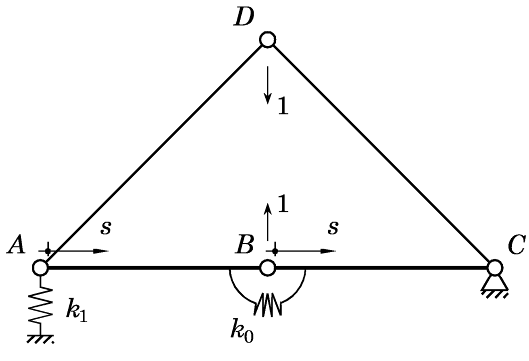


Figura 4

Le CdS nei vari tratti e nei sistemi $\mathbf{F}^{(0)}$ e $\mathbf{F}^{(1)}$ sono raccolte nella tabella seguente, nella quale $s \in (0,\ l)$.

	N_0	T_0	M_0	N_1	T_1	M_1
AB	0	$\frac{pl}{2}\left(1-\frac{s^2}{l^2}\right)$	$\frac{pls}{2}\left(1-\frac{s^2}{3l^2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{s}{2}$
AD	0	0	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	0
BC	0	$-ps\left(1-\frac{s}{2l}\right)$	$\frac{pl^2}{3}-\frac{ps^2}{2}\left(1-\frac{s}{3l}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{s}{2}-\frac{l}{2}$
CD	0	0	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	0

I diagrammi quotati delle CdS sono rappresentati in figura 5.
Facili calcoli mostrano che i coefficienti di Müller-Breslau sono

$$\eta_1 = -\frac{X_1}{EA} l - \alpha t l\,; \qquad \eta_{10} = -\frac{2}{15}\frac{pl^4}{EJ} - \frac{1}{6}\frac{pl^3}{k_0} + \frac{\alpha t l^2}{H}\,; \qquad \eta_{11} = \frac{1}{6}\frac{l^3}{EJ} + \frac{1}{4}\frac{l^2}{k_0} + \sqrt{2}\frac{l}{EA}\,.$$

Conseguentemente,

$$X_1 = \frac{\left[\frac{8}{5}\frac{EAl^2}{EJ} + 2\frac{EAl}{k_0}\right] pl - 12\left(1+\frac{l}{H}\right) EA\alpha t}{2\frac{EAl^2}{EJ} + 3\frac{EAl}{k_0} + 12\left(1+\sqrt{2}\right)}\,.$$

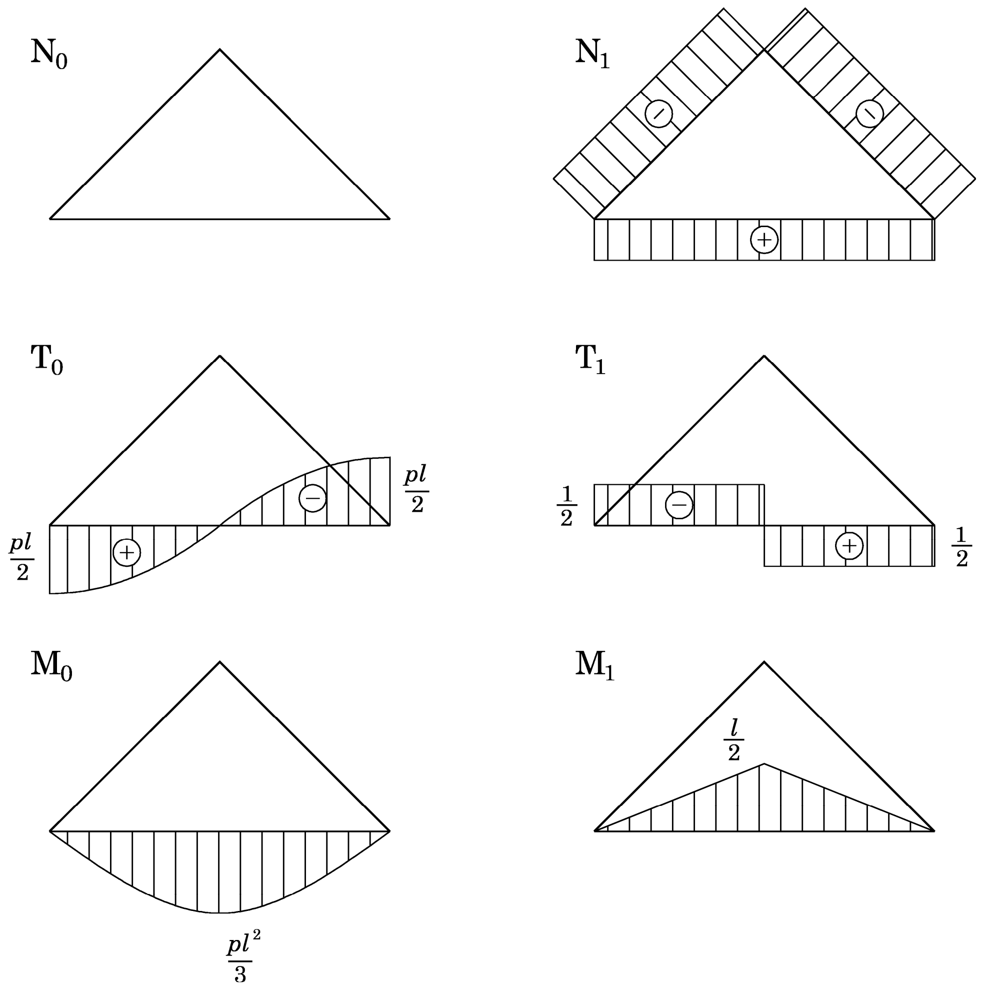


Figura 5

2) Introduciamo come parametri incogniti le componenti di spostamento: v_D, w_D, $v_1(0)$ e $v_2(0)$, indicate in figura 6.

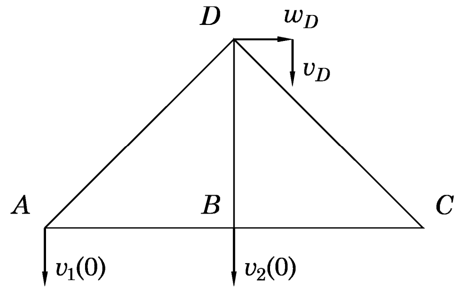


Figura 6

- Gli sforzi delle aste estensibili *AB*, *BD* e *CD* sono allora:

$$N_{AD} = \frac{EA}{2l}\left[v_1(0) + w_D - v_D\right];$$

$$N_{BD} = \frac{EA}{l}\left[v_2(0) - v_D - \alpha t l\right];$$

$$N_{CD} = -\frac{EA}{2l}\left(w_D + v_D\right).$$

- Imponendo l'equilibrio in direzione orizzontale e verticale per il nodo *D* otteniamo due equazioni ausiliarie che ci consentono di determinare v_D e w_D in funzione di $v_1(0)$ e $v_2(0)$:

$$w_D = -\frac{v_1(0)}{2}; \qquad v_D = \frac{\sqrt{2}-1}{2}v_1(0) + \left(2-\sqrt{2}\right)v_2(0) - \left(2-\sqrt{2}\right)\alpha t l.$$

Sostituendo nelle espressioni che forniscono gli sforzi assiali in termini di tutte le componenti di spostamento, abbiamo:

$$N_{AD} = N_{CD} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}\frac{EA}{l}\left[\frac{v_1(0)}{2} - v_2(0) + \alpha t l\right];$$

$$N_{BD} = -\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{EA}{l}\left[\frac{v_1(0)}{2} - v_2(0) + \alpha t l\right].$$

- Le equazioni differenziali e le condizioni al bordo per i tratti *AB* (tratto 1) e *BC* (tratto 2) che consentono di risolvere il problema mediante il metodo della linea elastica sono:

$$EJv_1^{\mathrm{IV}} = p\frac{s}{l}; \qquad EJv_2^{\mathrm{IV}} = p\left(1-\frac{s}{l}\right);$$

1. $v_1(0) = \frac{1}{2}\frac{pl}{k_1}$; 2. $v_1^{\mathrm{II}}(0) = \frac{2\alpha t}{H}$; 3. $v_1(l) = v_2(0)$; 4. $v_1^{\mathrm{II}}(l) = v_2^{\mathrm{II}}(0)$;

5. $-EJ\left[v_1^{\mathrm{II}}(0) - \frac{2\alpha t}{H}\right] = k_0\left[v_1^{\mathrm{I}}(l) - v_2^{\mathrm{I}}(0)\right]$; 6. $v_2(l) = 0$; 7. $v_2^{\mathrm{II}}(l) = \frac{2\alpha t}{H}$;

8. $-EJ\left[v_1^{\mathrm{III}}(l) - v_2^{\mathrm{III}}(0)\right] = \left(\sqrt{2}-1\right)\frac{EA}{l}\left[\frac{v_1(0)}{2} - v_2(0) + \alpha t l\right]$.

Fra le condizioni precedenti compare anche la (8), che è quella relativa al salto del taglio in *B* scritta in modo esplicito.

19 settembre 2014.