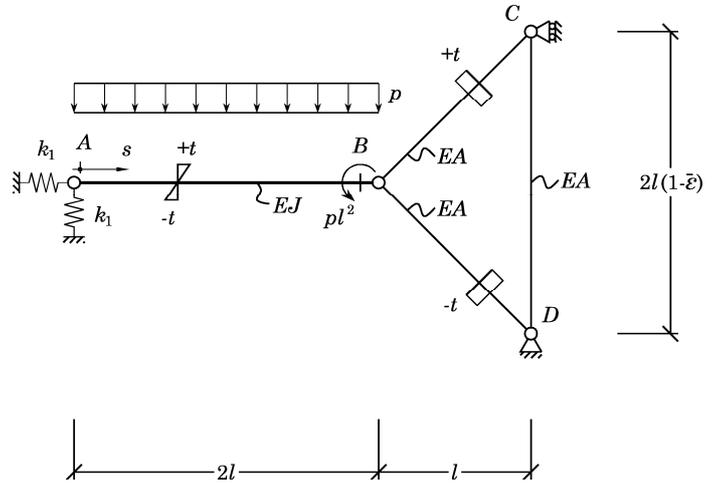


Università di Pisa  
 Esame di **SCIENZA DELLE COSTRUZIONI**  
 Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale  
 Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale

(docente: Prof. Ing. Stefano Bennati)

Sintesi della soluzione della prova scritta del 26 luglio 2014 – Parte I

**Problema.** Nel sistema di figura 1 la trave  $AB$  è flessibile ma inestensibile, mentre le altre tre sono estensibili. Sulla trave  $AB$  agiscono un carico distribuito trasversale costante di intensità  $p$  e, in corrispondenza della sezione  $B$ , una coppia di intensità  $pl^2$ . La trave  $AB$  è inoltre soggetta ad una variazione termica variabile linearmente nello spessore  $H$  della sezione trasversale, mentre  $BC$  e  $BD$  sono soggette a variazioni termiche costanti nello spessore delle travi stesse. Infine, la trave  $CD$  presenta il difetto di lunghezza indicato in figura.



**Figura 1**

1) Scelta come incognita iperstatica  $X_1$  il valore della reazione esercitata dall'appoggio in  $C$ , il sistema può essere decomposto nella somma seguente (Fig. 2):  $\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{F}^{(0)} + X_1 \mathbf{F}^{(1)}$ , con  $\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{i} = 0$ .

Semplici considerazioni di equilibrio consentono di determinare le reazioni esterne per i sistemi  $\mathbf{F}^{(0)}$  e  $\mathbf{F}^{(1)}$ . I due sistemi sono rappresentati nelle figure 3 e 4.

Le CdS nei vari tratti e nei sistemi  $\mathbf{F}^{(0)}$  e  $\mathbf{F}^{(1)}$  sono raccolte nella tabella seguente, nella quale  $s \in (0, 2l)$ .

	$N_0$	$T_0$	$M_0$	$N_1$
$AB$	$-\frac{pl}{2}$	$\frac{3}{2}pl - ps$	$\frac{ps}{2}(3l - s)$	$-2$
$BC$	$0$	$0$	$0$	$-\sqrt{2}$
$BD$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}pl$	$0$	$0$	$-\sqrt{2}$
$CD$	$0$	$0$	$0$	$1$

I diagrammi quotati delle CdS sono rappresentati nella Fig. 5.

I coefficienti di Müller-Breslau sono i seguenti:

$$\eta_1 = 0; \quad \eta_0 = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{l\sqrt{2}}{EA} \right) pl - 2l\bar{\epsilon}; \quad \eta_{11} = \frac{4}{k_1} + 2(1 + 2\sqrt{2}) \frac{l}{EA}.$$

Conseguentemente,

$$X_1 = \frac{2EA\bar{\epsilon} - \left( \frac{EA}{lk_1} + \sqrt{2} \right) pl}{\frac{4EA}{lk_1} + 2(1 + 2\sqrt{2})}.$$

2) Nella soluzione del problema con il metodo degli spostamenti, sono introdotti come parametri incogniti le componenti verticale e orizzontale dello spostamento del nodo  $B$ , indicate rispettivamente con  $v_B$  e  $w_B$  (assunte positive rispettivamente verso il basso e verso destra), oltre che dello spostamento del nodo  $C$ ,  $v_C$  (assunto positivo verso il basso).

- Gli sforzi delle aste estensibili  $BC$ ,  $BD$  e  $CD$  possono ora essere espressi in funzione dei parametri di spostamento introdotti, oltre che della variazione di temperature e del difetto di lunghezza:

$$N_{BC} = -EA \left( \alpha t + \frac{w_B + v_C - v_B}{2l} \right); \quad N_{BD} = EA \left( \alpha t - \frac{v_B + w_B}{2l} \right); \quad N_{CD} = EA \left( \bar{\epsilon} - \frac{v_C}{2l} \right).$$

- A loro volta, imponendo l'equilibrio del nodo  $B$  in direzione verticale ed orizzontale e quello, in direzione verticale, del nodo  $C$ , si ottengono tre equazioni le quali, tenuto conto delle relazioni precedenti, possono essere lette come tre equazioni lineari (linearmente indipendenti) nei parametri di spostamento incogniti:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (N_{BC} - N_{BD}) = -T_{AB} (2l) = \frac{pl}{2}; \quad \frac{\sqrt{2}}{2} (N_{BC} + N_{BD}) - k_1 w_B = 0; \quad N_{CD} + \frac{\sqrt{2}}{2} N_{BC} = 0.$$

3) L'equazione differenziale del secondo ordine e le due condizioni al bordo per il tratto  $AB$  che consentono di determinarne gli spostamenti dei punti della linea d'asse della trave sono (tenuto conto che risultano ora note la reazione verticale dell'appoggio in  $A$  e lo spostamento verticale di  $B$ ):

$$-v_1''(s) = \frac{M_1(s)}{EJ} - \frac{2\alpha t}{H} \quad \rightarrow \quad -v_1''(s) = -\frac{1}{2} \frac{p}{EJ} s^2 + \frac{3}{2} \frac{pl}{EJ} s - \frac{2\alpha t}{H}$$

$$1. \quad v_1(0) = \frac{3}{2} \frac{pl}{k_1}; \quad 2. \quad v_1(2l) = v_B.$$

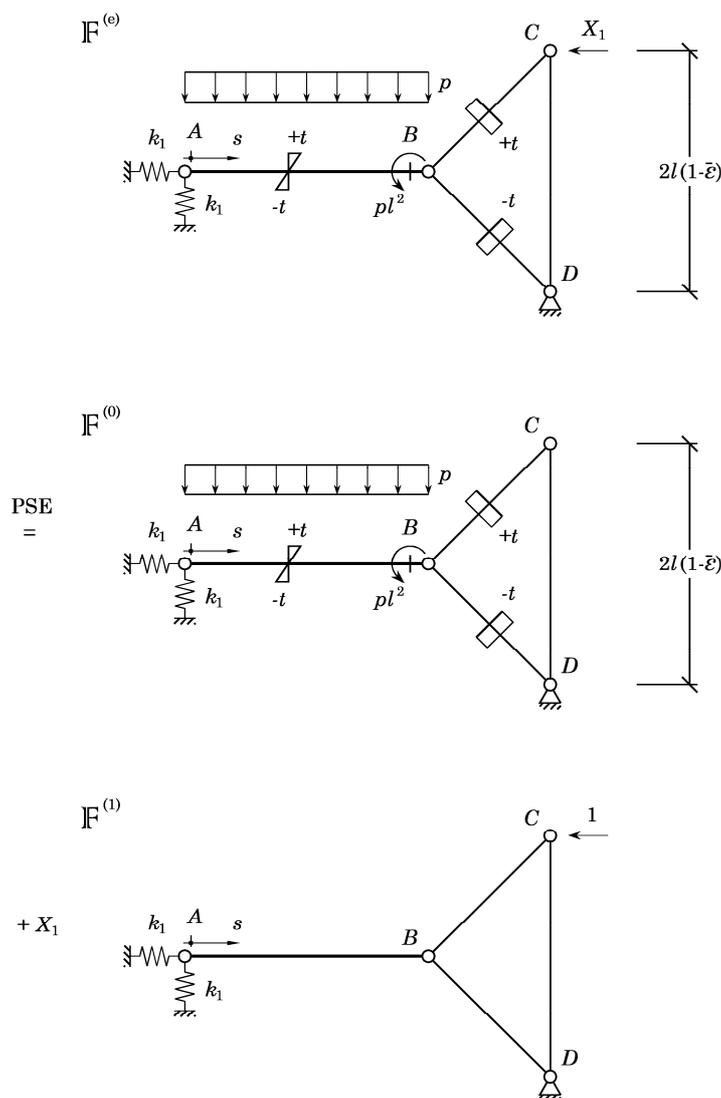


Figura 2

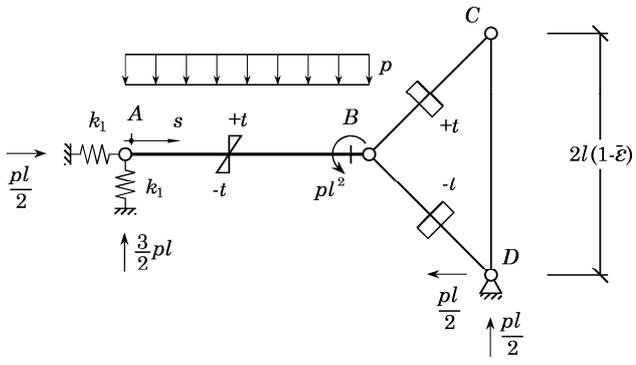


Figura 3

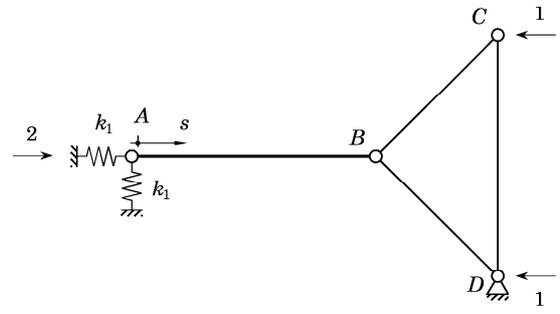


Figura 4

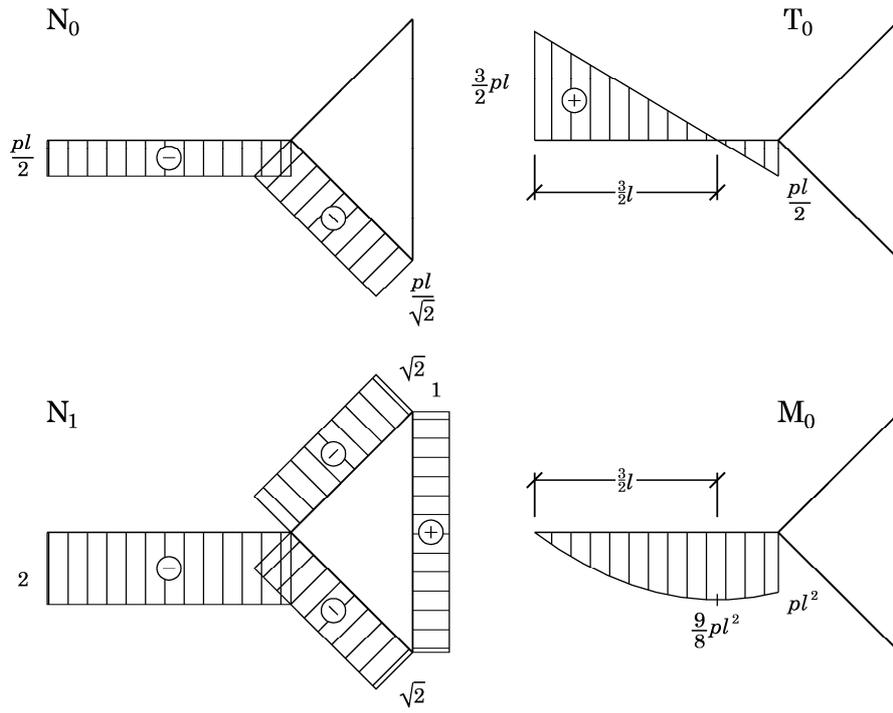


Figura 5

25 luglio 2014.