Università di Pisa
Esame di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale

(docente: Prof. Ing. Stefano Bennati)

Sintesi della soluzione della prova scritta del 5 luglio 2014

Problema. Nel sistema di Fig. 1 la trave CE è *rigida*, la trave DF è *flessibile* ma *inestensibile*, mentre le travi AC e BE sono *estensibili*. La trave CE è soggetta ad un carico distribuito assiale costante di intensità q.

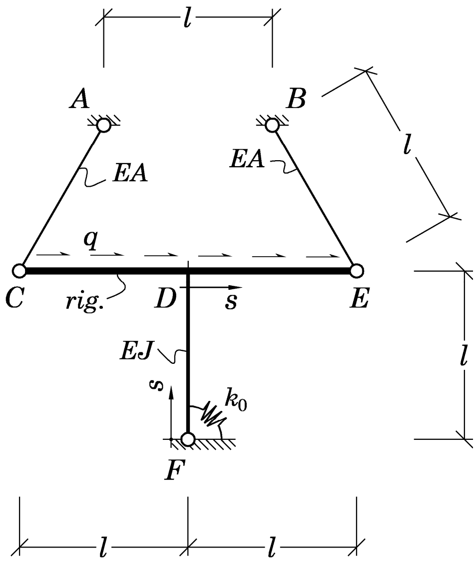

Figura 1

1) Sebbene il sistema sia due volte staticamente non determinato, considerazioni elementari basate sul fatto che il sistema è anti-simmetrico consentono di risolverlo mediante il metodo delle forze ricorrendo ad una sola incognita iperstatica. Scegliendo come tale la coppia X_1 espressa dall'incastro elastico in F, il il sistema può essere decomposto nella somma seguente (Fig. 2):

$\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{F}^{(0)} + X_1\,\mathbf{F}^{(1)}$, con $\phi_F = \dfrac{X_1}{k_0}$,

dove ϕ_F indica la rotazione della sezione trasversale in F, positiva se oraria.

Semplici considerazioni di equilibrio consentono di determinare le reazioni esterne per i due sistemi, rappresentati rispettivamente in Fig. 3 e 4.

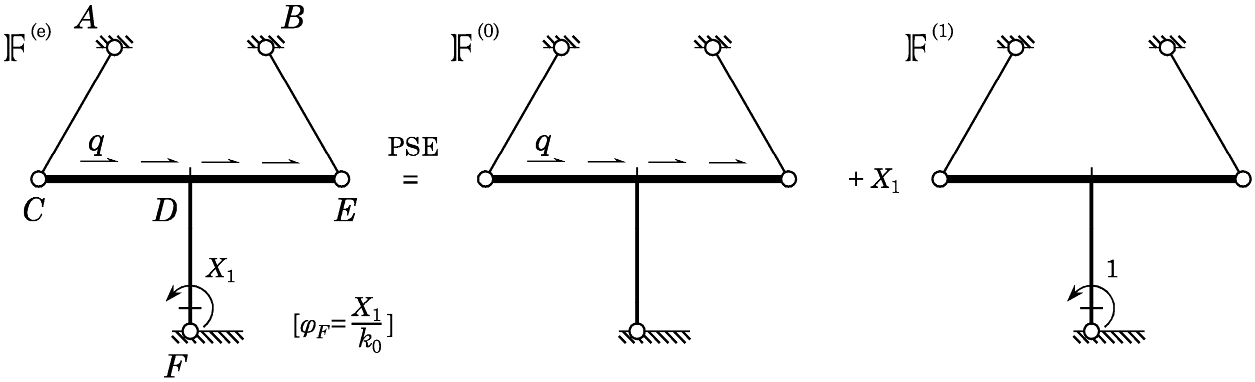

Figura 2

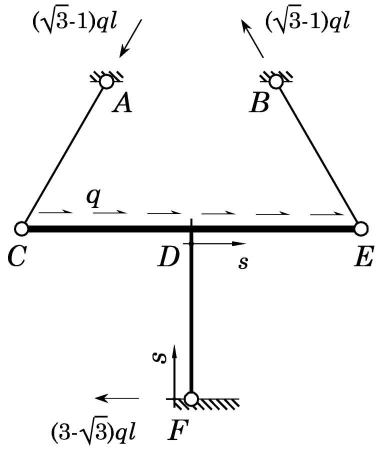

Figura 3

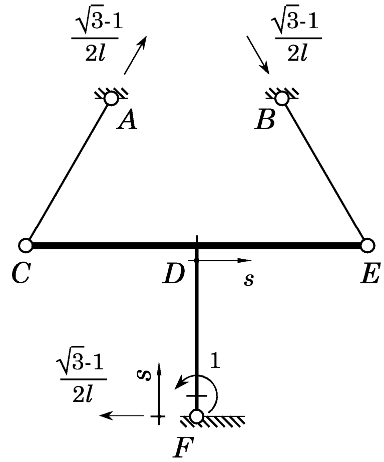

Figura 4

Le CdS nei vari tratti e nei sistemi $\mathbf{F}^{(0)}$ e $\mathbf{F}^{(1)}$ sono raccolte nella tabella seguente, nella quale $s \in (0,\ l)$.

	N_0	T_0	M_0	N_1	T_1	M_1
AC	$-\left(\sqrt{3}-1\right)ql$	0	0	$\frac{\sqrt{3}-1}{2l}$	0	0
BE	$\left(\sqrt{3}-1\right)ql$	0	0	$-\frac{\sqrt{3}-1}{2l}$	0	0
CD	$-\frac{\sqrt{3}-1}{2}ql+qs$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)ql$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)\left(l-s\right)ql$	$\frac{\sqrt{3}-1}{4l}$	$\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}-1}{4l}$	$-\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}-1}{4l}\left(l-s\right)$
DE	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}ql-qs$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)ql$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)\left(l-s\right)ql$	$-\frac{\sqrt{3}-1}{4l}$	$\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}-1}{4l}$	$\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}-1}{4l}\left(l-s\right)$
DF	0	$\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)ql$	$\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)qls$	0	$\frac{\sqrt{3}-1}{2l}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2l}s-1$

I diagrammi quotati delle CdS sono rappresentati nella Fig. 5.

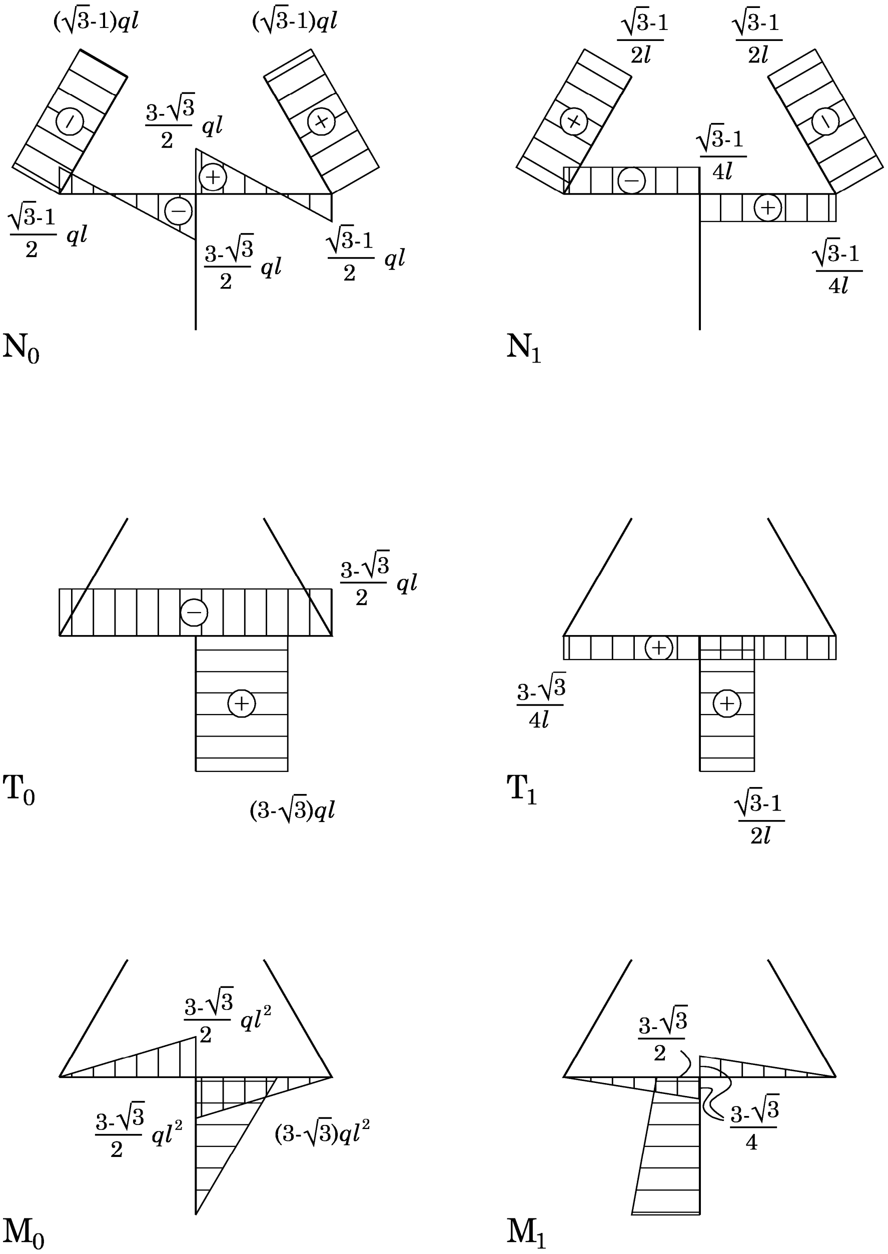

Figura 5

I coefficienti di di Müller-Breslau sono i seguenti:

$$\eta_1 = -\frac{X_1}{k_0}; \qquad \eta_{10} = -\frac{15-7\sqrt{3}}{6}\frac{ql^3}{EJ} - 2\left(2-\sqrt{3}\right)\frac{ql}{EA}; \qquad \eta_{11} = \frac{11-4\sqrt{3}}{6}\frac{l}{EJ} + \left(2-\sqrt{3}\right)\frac{1}{lEA}.$$

Conseguentemente,

$$X_1 = \frac{\dfrac{15-7\sqrt{3}}{6}\dfrac{l^2}{EJ} + 2\left(2-\sqrt{3}\right)\dfrac{1}{EA}}{\dfrac{l}{k_0} + \dfrac{11-4\sqrt{3}}{6}\dfrac{l^2}{EJ} + \left(2-\sqrt{3}\right)\dfrac{1}{EA}} ql^2.$$

2) Nella soluzione del problema con il metodo degli spostamenti, sono scelti come parametri di spostamento incogniti lo spostamento orizzontale δ (positivo se verso destra) e l'angolo di rotazione θ (positivo se orario) della trave rigida *CE*:

- Utilizzando il metodo della linea elastica per la trave *DF*, integriamo l'equazione differenziale $-EJv^{\mathrm{IV}} = 0$, completata dalla seguenti condizioni al contorno che consentono di determinare le costanti di integrazione:

1. $v(0) = 0$; 2. $v(l) = \delta$; 3. $v^{\mathrm{I}}(l) = \theta$; 4. $-EJv^{\mathrm{II}}(0) + k_0 v^{\mathrm{I}}(0) = 0$.

Le espressioni dello spostmento trasversale, della rotazione e delle sollecitazioni di taglio e momento nella trave *DF* in funzione di δ e θ sono (nel testo si suggeriva di adottare $k_0 l = 2EJ$):

$$v(s) = -\left(\frac{\delta}{l} - \frac{2}{3}\theta\right)\frac{s^3}{l^2} + \left(\frac{\delta}{l} - \frac{\theta}{3}\right)\frac{s^2}{l} + \left(\frac{\delta}{l} - \frac{\theta}{3}\right)s; \qquad v^{\mathrm{I}}(s) = -\left(3\frac{\delta}{l} - 2\theta\right)\frac{s^2}{l^2} + 2\left(\frac{\delta}{l} - \frac{\theta}{3}\right)\frac{s}{l} + \frac{\delta}{l} - \frac{\theta}{3};$$

$$M(s) = \frac{EJ}{l}\left[\left(6\frac{\delta}{l} - 4\theta\right)\frac{s}{l} - 2\left(\frac{\delta}{l} - \frac{\theta}{3}\right)\right]; \qquad T(s) = \frac{EJ}{l^2}\left(6\frac{\delta}{l} - 4\theta\right).$$

- Gli sforzi delle aste estensibili *AC* e *BE* sono:

$$N_{AC} = -\frac{EA}{2}\left(\frac{\delta}{l} + \sqrt{3}\theta\right); \qquad N_{BE} = \frac{EA}{2}\left(\frac{\delta}{l} + \sqrt{3}\theta\right).$$

- I parametri δ e θ possono essere determinati in funzioni dei dati del problema imponendo l'equilibrio alla traslazione orizzontale e alla rotazione per la trave *CE* e risolvendo il sistema algebrico che ne deriva:

$$\begin{cases} T_{DF}(l) - 2ql + \frac{1}{2}\left(N_{BE} - N_{AC}\right) = 0 \\ M_{DF}(l) + \frac{\sqrt{3}}{2}l\left(N_{AC} - N_{BE}\right) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \left(6\frac{EJ}{l^2} + \frac{EA}{2}\right)\frac{\delta}{l} - \left(4\frac{EJ}{l^2} - \frac{\sqrt{3}}{2}EA\right)\theta = 2ql \\ \left(4\frac{EJ}{l^2} - \frac{\sqrt{3}}{2}EA\right)\frac{\delta}{l} - \left(\frac{10}{3}\frac{EJ}{l^2} + \frac{3}{2}EA\right)\theta = 0 \end{cases}.$$

Conseguentemente:

$$\delta = \frac{20EJ + 9EAl^2}{12EJ + 4\left(8+3\sqrt{3}\right)EAl^2}\frac{ql^4}{EJ} \qquad \text{e} \qquad \theta = \frac{24EJ - 3\sqrt{3}EAl^2}{12EJ + 4\left(8+3\sqrt{3}\right)EAl^2}\frac{ql^3}{EJ}.$$

25 luglio 2014.