

Sintesi della soluzione della prova scritta in itinere del 13 giugno 2014

Problema. Nel sistema rappresentato in Fig. 1 le travi del corrente inferiore e di quello superiore della travatura reticolare sono *rigide*, mentre le aste diagonali e i montanti sono *estensibili*. I vincoli in A e in B subiscono un cedimento anelastico verso l'alto d'intensità $\bar{\delta}$, mentre l'appoggio in D subisce un cedimento anelastico verso il basso della stessa intensità. Infine, le aste CD, EG e FH presentano uno stesso difetto di lunghezza, così indicato in figura.

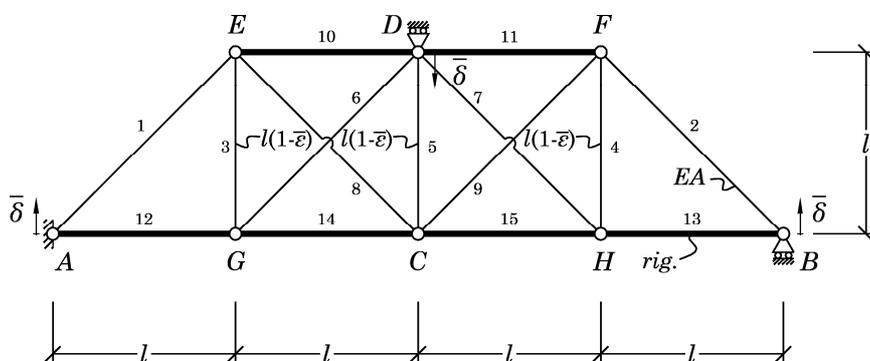


Figura 1

1) Sebbene il sistema sia tre volte staticamente non determinato, considerazioni di simmetria della soluzione statica (la reazione orizzontale in A è nulla per motivi di equilibrio) consentono di risolvere il problema mediante il metodo delle forze ricorrendo a due sole incognite iperstatiche. Scegliendo come incognita iperstatica X_1 la reazione esercitata dall'appoggio in D e come incognita iperstatica X_2 il valore degli sforzi normali delle aste CE e CF, il sistema può essere decomposto nella somma seguente (Fig. 2):

$$\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{F}^{(0)} + X_1 \mathbf{F}^{(1)} + X_2 \mathbf{F}^{(2)}$$

con: $v_D = \bar{\delta}$ e $\Delta l_{CE} = \Delta l_{CF} = \frac{X_2}{EA} l \sqrt{2}$,

dove v_D indica lo spostamento verticale di D, positivo se verso il basso. Le reazioni vincolari e gli sforzi normali sono tutti nulli nel sistema $\mathbf{F}^{(0)}$. Semplici considerazioni di equilibrio consentono di determinare le reazioni esterne per il sistema $\mathbf{F}^{(1)}$, riportate in Fig. 2. Il sistema $\mathbf{F}^{(2)}$, auto-equilibrato, ha invece reazioni vincolari esterne nulle.

Le caratteristiche della sollecitazione nelle varie aste, facilmente determinabili utilizzando il metodo dei nodi, sono riportate nella tabella seguente.

| | N_1 | N_2 |
|---------|-----------------------|-----------------------|
| 1 = 2 | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 0 |
| 3 = 4 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| 5 | 0 | $-\sqrt{2}$ |
| 6 = 7 | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 |
| 10 = 11 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ |

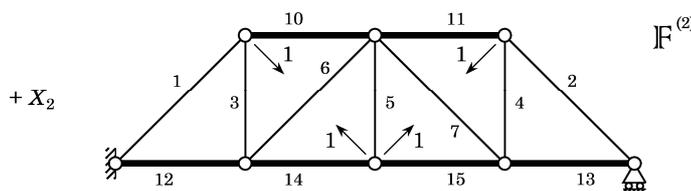
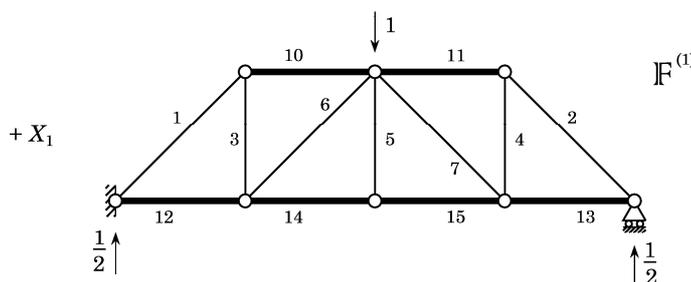
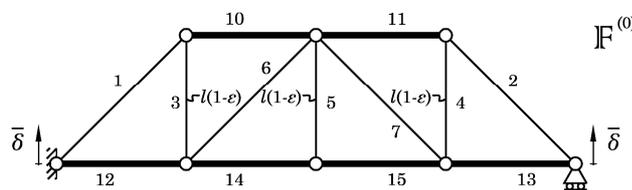
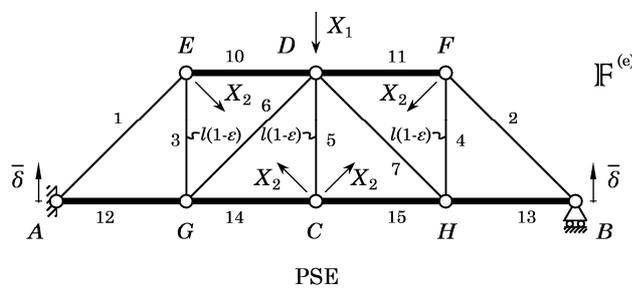


Figura 2

| | | |
|---------|---------------|-----------------------|
| 12 = 13 | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| 14 = 15 | 1 | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ |

Il sistema delle equazioni di elasticità è il seguente,

$$\begin{cases} \eta_1 = \eta_{10} + \eta_{11}X_1 + \eta_{12}X_2 \\ \eta_2 = \eta_{20} + \eta_{21}X_1 + \eta_{22}X_2 \end{cases},$$

dove i coefficienti di Müller-Breslau che vi compaiono possono essere facilmente calcolati, ottenendo:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \bar{\delta}; & \eta_{10} &= -\bar{\delta} - \bar{\epsilon}l; & \eta_{11} &= \frac{1+4\sqrt{2}}{2} \frac{l}{EA}; & \eta_{12} &= -\frac{4+\sqrt{2}}{2} \frac{l}{EA}; \\ \eta_2 &= -2\frac{X_2}{EA}l\sqrt{2}; & \eta_{20} &= 2\sqrt{2}\bar{\epsilon}l; & \eta_{21} &= \eta_{12}; & \eta_{22} &= (3+2\sqrt{2})\frac{l}{EA}. \end{aligned}$$

Conseguentemente,

$$\begin{pmatrix} \frac{1+4\sqrt{2}}{2} \frac{l}{EA} & -\frac{4+\sqrt{2}}{2} \frac{l}{EA} \\ -\frac{4+\sqrt{2}}{2} \frac{l}{EA} & (3+4\sqrt{2})\frac{l}{EA} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\bar{\delta} + \bar{\epsilon}l \\ -2\sqrt{2}\bar{\epsilon}l \end{Bmatrix}$$

che può essere risolto con il metodo di Cramer, ottenendo:

$$X_1 = \frac{EA}{l} \frac{4(3+4\sqrt{2})\bar{\delta} + 2\bar{\epsilon}l}{27+12\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad X_2 = \frac{EA}{l} \frac{2(4+\sqrt{2})\bar{\delta} - (12+\sqrt{2})\bar{\epsilon}l}{27+12\sqrt{2}}.$$

2) Lo spostamento del nodo C può essere correlato alla deformazione dell'asta 5.

$$\begin{cases} \epsilon_5 = \frac{v_c - \bar{\delta}}{l} = \frac{N_5}{EA} - \bar{\epsilon} \\ N_5 = N_5^{(0)} + X_1 N_5^{(1)} + X_2 N_5^{(2)} = -\sqrt{2}X_2 \end{cases}$$

Quindi,

$$v_c = 0 \rightarrow \bar{\epsilon} = \frac{23+4\sqrt{2}}{25} \frac{\bar{\delta}}{l}.$$

3) Utilizzando il metodo degli spostamenti e tenendo conto della simmetria della soluzione del sistema per quanto riguarda gli spostamenti verticali, è possibile adottare v_1 , v_2 e v_3 (spostamenti verticali dei nodi C, G ed E, indicati in Fig. 3) quali incognite del problema. Sono riportate di seguito le espressioni degli sforzi nelle aste diagonali e nei montanti in funzione di esse.

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{EA}{2l}(v_3 - \bar{\delta}); & N_2 &= N_1; & N_3 &= \frac{EA}{l}(v_2 + v_3 + \bar{\epsilon}l); & N_4 &= N_3; \\ N_6 &= \frac{EA}{2l}(v_2 - \bar{\delta}); & N_7 &= N_6; & N_8 &= \frac{EA}{2l}(v_1 + v_3); & N_9 &= N_8; \\ N_5 &= \frac{EA}{l}(v_1 - \bar{\delta} + \bar{\epsilon}l). \end{aligned}$$

Imponendo l'equilibrio in direzione verticale, ad esempio, dei nodi C, G ed E si ottiene:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & 1 & 1+\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1+\frac{\sqrt{2}}{4} & 1 \\ 1+\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4}\bar{\delta} - \bar{\epsilon}l \\ \frac{\sqrt{2}}{4}\bar{\delta} - \bar{\epsilon}l \\ \bar{\delta} - \bar{\epsilon}l \end{Bmatrix}$$

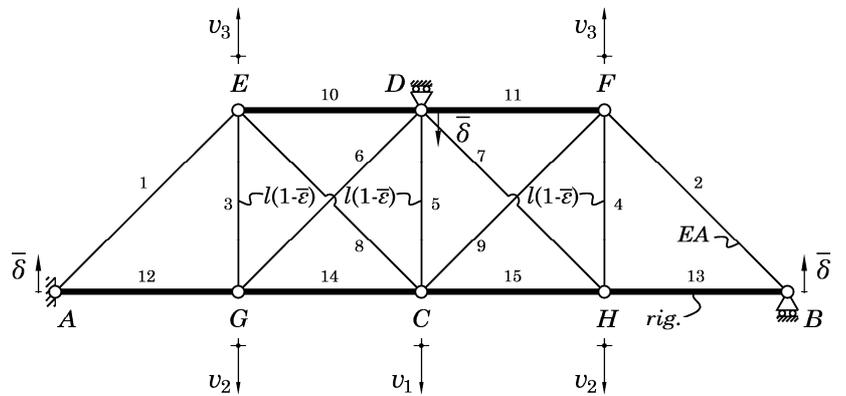


Figura 3

da cui è possibile determinare il valore di v_1 , v_2 e v_3 e completare, conseguentemente, la soluzione del problema.

14 giugno 2014.