Università di Pisa

Esame di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale

(docente: Prof. Ing. Stefano Bennati)

Sintesi della soluzione della prova scritta in itinere del 31 maggio 2014

Problema. Nel sistema rappresentato in figura le travi *BC* e *CD* sono *rigide*, mentre le altre aste sono tutte *estensibili*. Sui tratti *CH* e *CK* agisce un carico distribuito trasversale costante, di intensità p per unità di lunghezza, mentre sui tratti *BH* e *DK* agisce una variazione termica, lineare nello spessore *H* della trave.

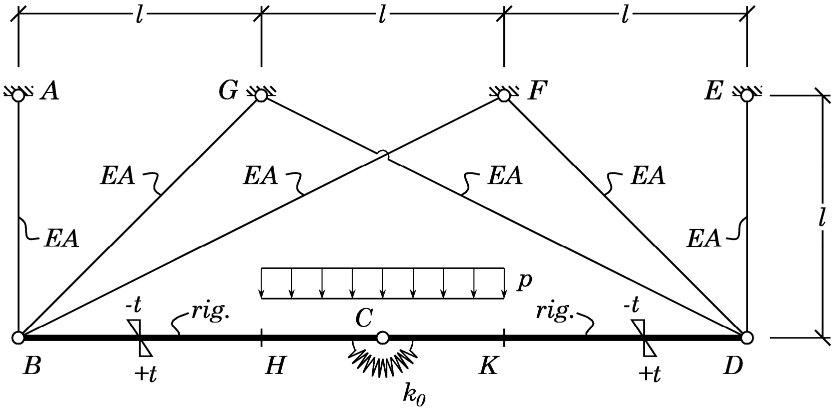

Figura 1

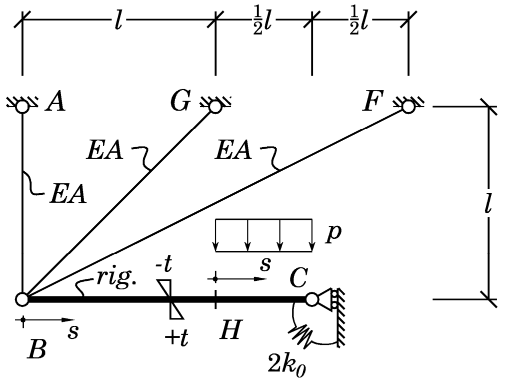

Figura 2

1) Il sistema in Fig. 1 è simmetrico rispetto all'asse verticale passante per *C*. Facili considerazioni di simmetria, qui omesse per ragioni di brevità, consentono di passare al sistema ridotto, nel quale è stata vincolata opportunamente la sezione *C* determinando il valore corretto della rigidezza del vincolo elastico equivalente.

2) Soluzione del sistema ridotto:

- $N_{AB} = EA\dfrac{v_B}{l}, \quad N_{BG} = EA\dfrac{v_B}{2l}, \quad N_{BF} = EA\dfrac{v_B}{5l}.$
- Dall'equilibrio in direzione verticale del nodo *B*, risulta:

$$v_B = \frac{pl^2}{EA}\frac{1}{2\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\dfrac{\sqrt{5}}{25}\right)} \simeq 0,347\frac{pl^2}{EA}.$$

- Le caratteristiche della sollecitazione nei vari tratti sono riportate nella tabella seguente, nella quale $s \in (0,\ l)$ per *BH* e $s \in (0,\ l/2)$ per *CH*.

	N	T	M
AB	$\sim 0,347\,pl$	0	0
BG	$\sim 0,174\,pl$	0	0
BF	$\sim 0,069\,pl$	0	0
BH	$\sim -0,184\,pl$	$\dfrac{pl}{2}$	$\dfrac{pl}{2}s$
CH	$\sim -0,184\,pl$	$p\left(\dfrac{l}{2}-s\right)$	$\dfrac{p}{2}\left(l^2+ls-s^2\right)$

I diagrammi delle CdS sono riportati in Fig. 3.

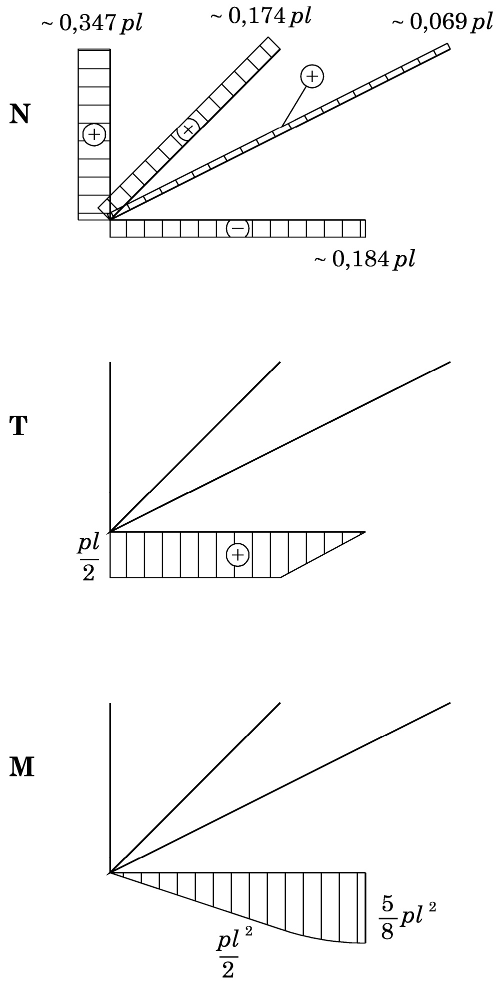

Figura 3

- Le equazioni differenziali e le relative condizioni al bordo che consentono di determinare le espressioni degli spostamenti e delle rotazioni nei tratti BH e CH sono:

$$v_1^{\mathrm{II}} = -\frac{2\alpha t}{H}; \qquad v_2^{\mathrm{II}} = 0;$$

1. $v_1(0) = v_B$; 2. $v_1(l) = v_2(0)$; 3. $v_1^{\mathrm{I}}(l) = v_2^{\mathrm{I}}(0)$; 4. $v_2^{\mathrm{I}}(l/2) = \frac{5}{8}\frac{pl^2}{2k_0}$.

Da cui:

$$v_1 = -\frac{\alpha t}{H}s^2 + \left(\frac{5}{8}\frac{pl^2}{2k_0} + \frac{2\alpha tl}{H}\right)s + v_B \qquad \text{e} \qquad v_2 = \frac{5}{8}\frac{pl^2}{2k_0}(l+s) + \frac{\alpha tl^2}{H} + v_B .$$

3) Nella risoluzione mediante il metodo delle forze, scegliendo come incognita iperstatica X_1 la reazione esercitata dall'appoggio in C e come incognita iperstatica X_2 il valore dello sforzo normale dell'asta BG, il sistema ridotto può essere decomposto nella somma seguente: $\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{F}^{(0)} + X_1\,\mathbf{F}^{(1)} + X_2\,\mathbf{F}^{(2)}$ (Fig. 4).

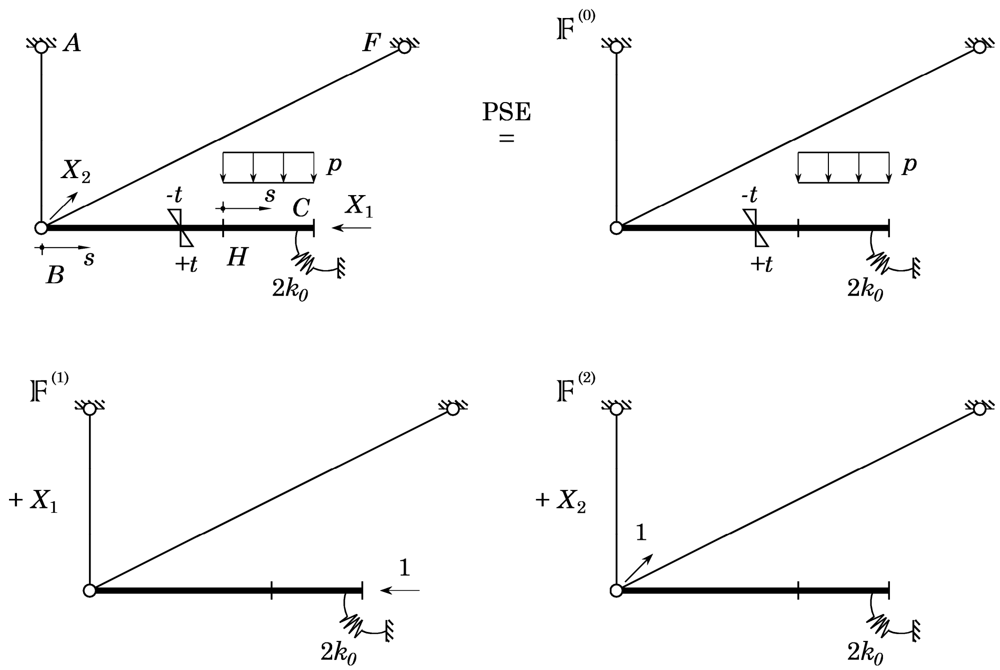

Figura 4

con: $w_C = 0$ e $\Delta l_{BG} = \frac{X_2}{EA} l\sqrt{2}$.

Semplici considerazioni di equilibrio consentono di determinare le reazioni esterne per i sistemi $\mathbf{F}^{(0)}$, $\mathbf{F}^{(1)}$ e $\mathbf{F}^{(2)}$. I tre sistemi sono rappresentati in Fig. 5.

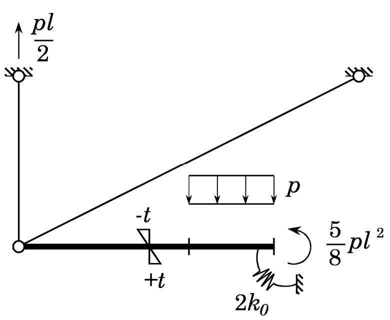

Fig. 5.a Sistema $\mathbf{F}^{(0)}$.

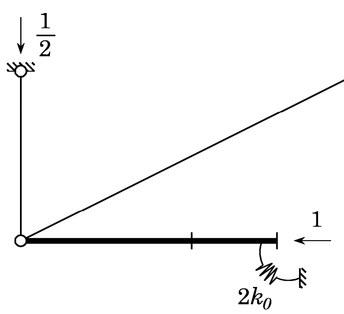

Fig. 5.b Sistema $\mathbf{F}^{(1)}$.

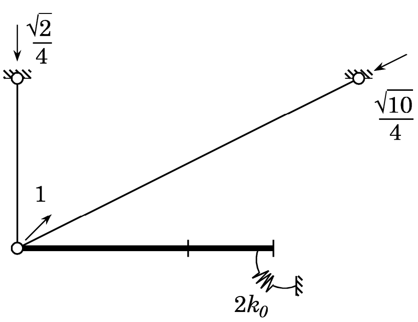

Fig. 5.c Sistema $\mathbf{F}^{(2)}$.

Le caratteristiche della sollecitazione nei vari tratti e per i sistemi $\mathbf{F}^{(0)}$, $\mathbf{F}^{(1)}$ e $\mathbf{F}^{(2)}$ sono riportate nella tabella seguente, nella quale $s \in (0,\ l)$ per *BH* e $s \in (0,\ l/2)$ per *CH*.

	N_0	T_0	M_0	N_1	T_1	M_1	N_2	T_2	M_2
AB	$\frac{pl}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	0	0
BF	0	0	0	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	0	0	$-\frac{\sqrt{10}}{4}$	0	0
BH	0	$\frac{pl}{2}$	$\frac{pl}{2}s$	-1	0	0	0	0	0
CH	0	$p\left(\frac{l}{2}-s\right)$	$\frac{p}{2}\left(l^2+ls-s^2\right)$	-1	0	0	0	0	0

I coefficienti di Müller-Breslau del problema elastico sono:

$$\eta_1 = 0\,; \qquad \eta_{10} = -\frac{1}{4}\frac{pl^2}{EA}\,; \qquad \eta_{11} = \frac{5\sqrt{5}+1}{4}\frac{l}{EA}\,; \qquad \eta_{12} = -\frac{\sqrt{2}}{8}\left(5\sqrt{5}-1\right)\frac{l}{EA}\,;$$

$$\eta_2 = -\frac{X_2}{EA}l\sqrt{2}\,; \qquad \eta_{20} = -\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{pl^2}{EA}\,; \qquad \eta_{21} = \eta_{12}\,; \qquad \eta_{22} = \frac{5\sqrt{5}+1}{8}\frac{l}{EA}\,.$$

Conseguentemente;

$$X_1 = \frac{8+5\sqrt{10}}{8+40\sqrt{5}+10\sqrt{10}}\,pl \simeq 0{,}184\,pl \qquad \text{e} \qquad X_2 = \frac{10\sqrt{5}}{8+40\sqrt{5}+10\sqrt{10}}\,pl \simeq 0{,}174\,pl\,.$$

Pisa, 30 maggio 2014.