Università di Pisa

Esame di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale

(docente: Prof. Ing. Stefano Bennati)

Sintesi della soluzione della prova scritta in itinere del 12 aprile 2014

Problema. Il sistema rappresentato in Fig. 1 presenta una ripetizione infinita dello stesso modulo. Le travi verticali sono *flessibili* ed *inestensibili*, mentre quelle orizzontali sono *rigide*. Gli incastri superiori subiscono tutti lo stesso cedimento verso destra di intensità δ.

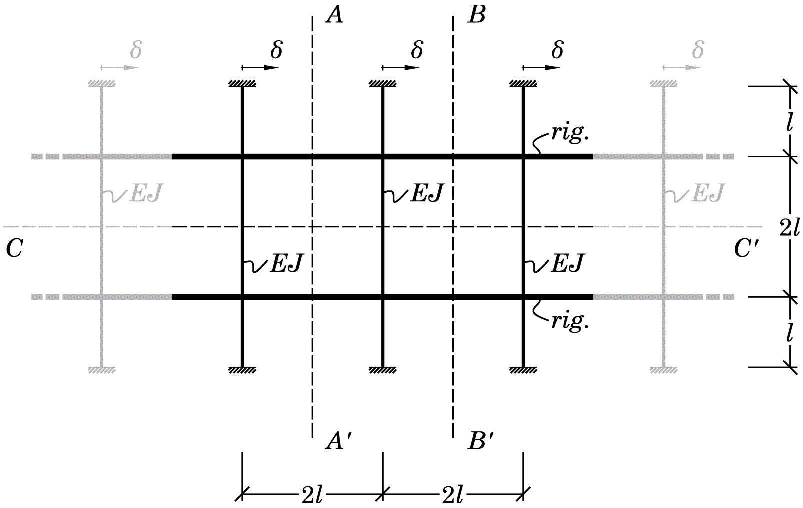

Fig. 1

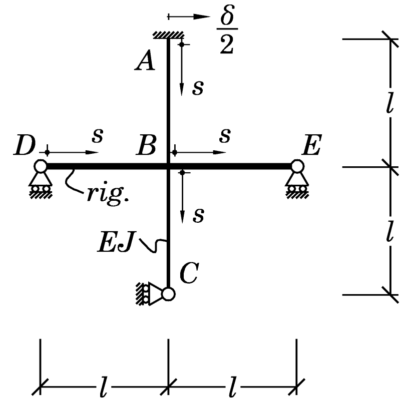

Fig. 2

1) Osserviamo subito che la struttura presenta infiniti assi di simmetria verticali, ciascuno disposto in corrispondenza di una trave verticale o della mezzeria tra una coppia contigua di travi verticali (di questi assi in figura sono indicati per semplicità due, *AA'* e *BB'*). La struttura presenta inoltre l'asse di simmetria orizzontale *CC'*. Inoltre, il sistema può essere facilmente decomposto nella somma di un sistema simmetrico rispetto all'asse *CC'* e di uno antisimmetrico sia rispetto a questo asse, sia rispetto agli assi verticali *AA'* e *BB'*). Il primo sistema risulta scarico, mentre il secondo consente di ridurre lo studio a quello del modulo rappresentato in Fig. 2.

2) Le equazioni differenziali e le condizioni al bordo per i tratti *AB* (tratto 1) e *BC* (tratto 2) che consentono di risolvere il problema mediante il metodo della linea elastica sono le seguenti (Fig. 2):

$EJv_1^{\mathrm{IV}} = 0$; $\quad EJv_2^{\mathrm{IV}} = 0$;

1. $v_1(0) = -\dfrac{\delta}{2}$; 2. $v_1^{\mathrm{I}}(0) = 0$; 3. $v_1(l) = v_2(0)$; 4. $v_1^{\mathrm{I}}(l) = v_2^{\mathrm{I}}(0)$;

5. $v_1^{\mathrm{I}}(l) = 0$; 6. $-EJv_1^{\mathrm{III}}(l) = -EJv_2^{\mathrm{III}}(0)$; 7. $v_2(l) = 0$; 8. $-EJv_2^{\mathrm{II}}(l) = 0$.

Integrando le equazioni differenziali e sostituendo le espressioni così ottenute nelle condizioni al bordo otteniamo un sistema algebrico, la cui soluzione consente di determinare le costanti di integrazioni. In definitiva, oteniamo le seguenti espressioni per $v_1(s)$ e $v_2(s)$:

$$v_1(s) = -\delta\left[\frac{1}{5}\left(\frac{s}{l}\right)^3 - \frac{3}{10}\left(\frac{s}{l}\right)^2 + \frac{1}{2}\right], \qquad \text{e} \qquad v_2(s) = -\frac{\delta}{5}\left[\left(\frac{s}{l}\right)^3 - 3\left(\frac{s}{l}\right)^2 + 2\right].$$

3) Nel caso in cui anche la trave *DE* sia flessibile ed abbia la stessa rigidezza flessionale *EJ* delle altre, se facessimo ricorso al metodo della linea elastica per risolvere il problema, in corrispondenza del nodo *B* dovremmo scrivere le otto seguenti condizioni al bordo:

1. $v_1(l) = v_2(0)$; 2. $v_3(l) = v_4(0)$; 3. $v_2^{\mathrm{I}}(0) = v_1^{\mathrm{I}}(l)$;

4. $v_3^{\mathrm{I}}(l) = v_1^{\mathrm{I}}(l)$; 5. $v_4^{\mathrm{I}}(0) = v_1^{\mathrm{I}}(l)$; 6. $-EJ\left[v_2^{\mathrm{II}}(l) - v_2^{\mathrm{II}}(0) + v_3^{\mathrm{II}}(l) - v_4^{\mathrm{II}}(0)\right] = 0$;

7. $-EJv_1^{\text{III}}(l) = -EJv_2^{\text{III}}(0)$; 8. $-EJv_3^{\text{III}}(l) = -EJv_4^{\text{III}}(0)$;

dove si è indicato il tratto AB come tratto 1, BC come tratto 2, DB come tratto 3 e BE come tratto 4.

4) Nonostante il sistema rappresentato in Fig. 2 sia tre volte staticamente non determinato, ulteriori considerazioni di anti-simmetria rispetto all'asse AC consentono di risolverlo mediante il metodo delle forze ricorrendo a due sole incognite iperstatiche. Infatti, si può scegliere come incognite iperstatiche la reazione orizzontale esercitata dall'appoggio in C, X_1, e come incognita X_2 la reazione verticale, opportunamente orientata, esercitate dagli appoggio in D ed E: le due reazioni verticali esercitate dagli appoggi in D ed E, devono, infatti, per l'antisimmetria rispetto all'asse AC essere uguali in modulo e di verso opposto Per il principio di sovrapposizione degli effetti, il sistema effettivo può essere dunque decomposto come rappresentato in Fig. 5.

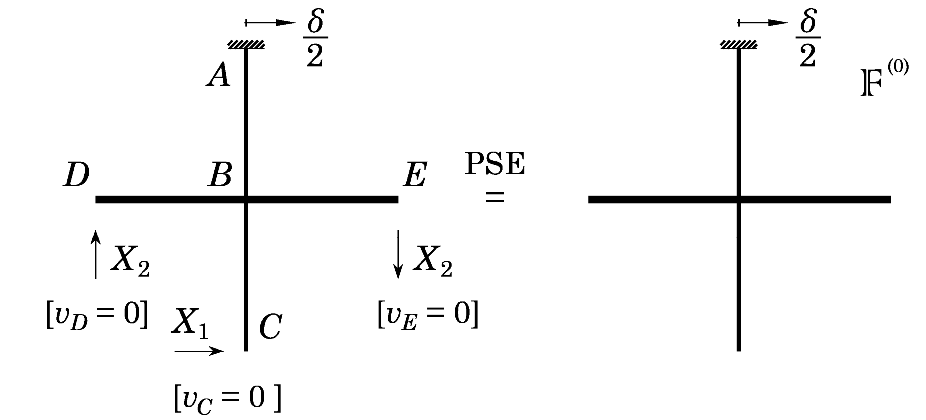

Fig. 5

Le reazioni vincolari e le sollecitazioni interne sono tutte nulle nel sottosistema $\mathbf{F}^{(0)}$, che non è rappresentato. Semplici considerazioni di equilibrio consentono, invece, di determinare le reazioni esterne per i sistemi $\mathbf{F}^{(1)}$ e $\mathbf{F}^{(2)}$, rappresentati, rispettivamente, nelle figure 6 e 7.

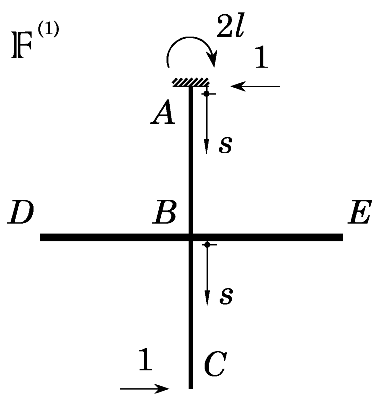

Fig. 6

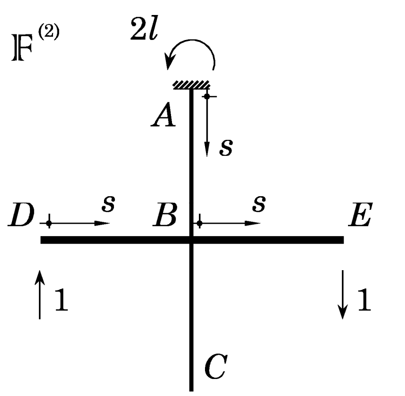

Fig. 7

Le CdS nei vari tratti e nei sistemi $\mathbf{F}^{(1)}$ e $\mathbf{F}^{(2)}$ sono raccolte nella tabella seguente, nella quale $s \in (0,\ l)$.

	N_1	T_1	M_1	N_2	T_2	M_2
AB	0	-1	$2l-s$	0	0	s
BC	0	-1	$l-s$	0	0	$-l+s$
DB	0	0	0	0	1	0
BE	0	0	0	0	1	$2l$

I diagrammi quotati delle CdS sono rappresentati nella Fig. 8.

Facili calcoli mostrano che i coefficienti delle due equazioni di Müller-Breslau sono i seguenti:

$$\eta_1 = 0\,; \qquad \eta_{10} = \frac{\delta}{2}\,; \qquad \eta_{11} = \frac{8}{3}\frac{l^3}{EJ}\,; \qquad \eta_{12} = \eta_{21} = -3\frac{l^3}{EJ}\,;$$

$$\eta_2 = 0\,; \qquad \eta_{20} = 0\,; \qquad \eta_{22} = 4\frac{l^3}{EJ}\,.$$

Conseguentemente,

$$X_1 = -\frac{6}{5}\frac{EJ}{l^3}\delta \qquad \text{e} \qquad X_2 = -\frac{9}{10}\frac{EJ}{l^3}\delta\,.$$

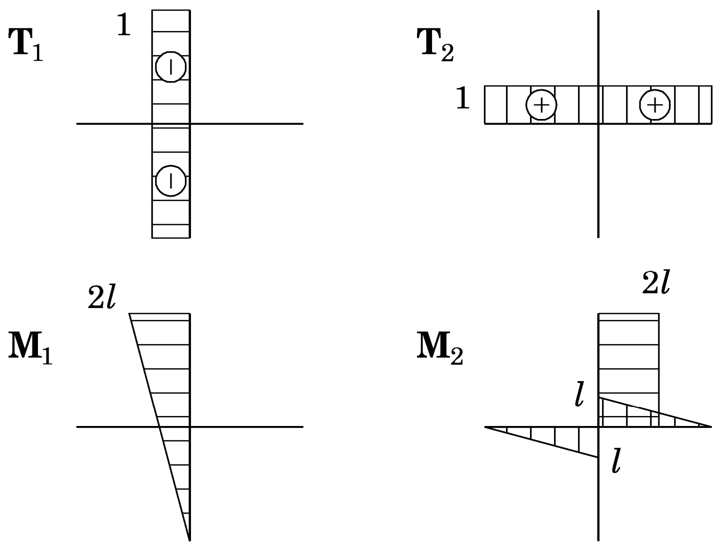

Fig. 8

Pisa, 30 aprile 2014