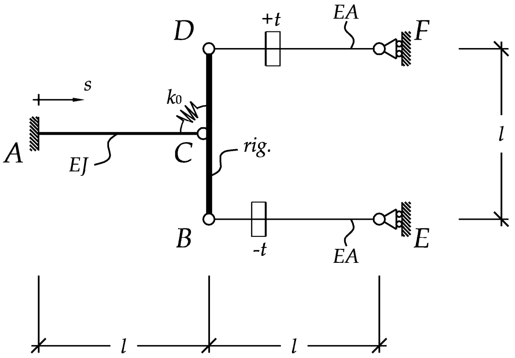
Università di Pisa
Esame di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale

(docente: Prof. Ing. Stefano Bennati)

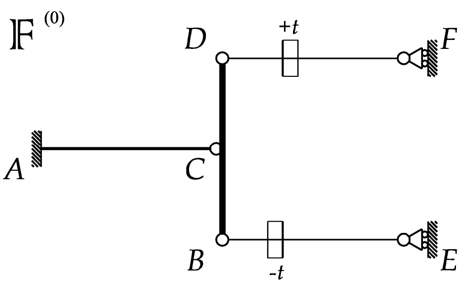
Sintesi della soluzione della prova scritta del 4 luglio 2013 – Parte I

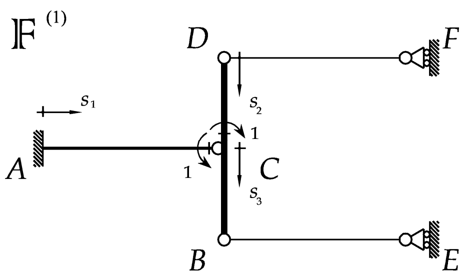
Problema. Nel sistema di figura la trave AC è *flessibile* ed *inestensibile*, la trave BD è *rigida*, mentre le travi BE e GF sono *estensibili*. Sulle travi BE e DF agiscono le variazioni termiche, costanti nello spessore della trave, indicate.



1) Scelto il valore della coppia interna della molla in C come incognita iperstatica X_1, il sistema effettivo può essere scomposto nella somma di F_0 e di X_1F_1, dove F_0 e F_1 sono i sistemi mostrati nella figura seguente:

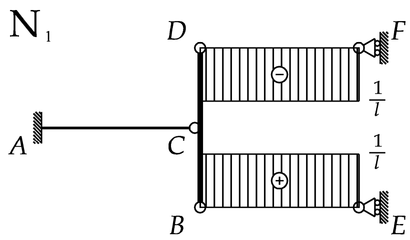
2)

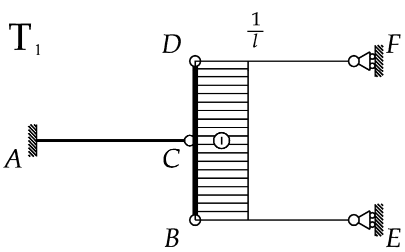




Il sistema F_0 è scarico. Le espressioni delle CdS ne sistema F_1 sono raccolte nella tabella seguente.

	N_1	T_1	M_1
AC	0	0	1
CB	0	$-\dfrac{1}{l}$	$\dfrac{1}{2}-\dfrac{s_3}{l}$
BE	$\dfrac{1}{l}$	0	0
DC	0	$-\dfrac{1}{l}$	$-\dfrac{s_2}{l}$
DF	$-\dfrac{1}{l}$	0	0

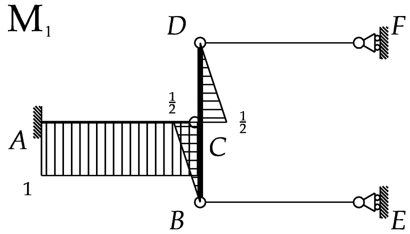




I diagrammi quotati delle *CdS* sono riportati nelle figure a lato.

I coefficienti di Müller-Breslau si calcolano con facilità:

$$\eta_1 = -\frac{X_1}{k_0}; \qquad \eta_{10} = -2\alpha t; \qquad \eta_{11} = \frac{l}{EJ} + \frac{2}{lEA};$$



conseguentemente: $$X_1 = 2\alpha t \Big/ \left(\frac{1}{k_0} + \frac{l}{EJ} + \frac{2}{l\,EA} \right).$$

3) Il problema può essere anche risolto ricorrendo a considerazioni di equilibrio e a una combinazione *del metodo degli spostamenti* e del *metodo della linea elastica*. Assunta la rotazione θ (positiva se antioraria) dell'elemento rigido BD come parametro, è possibile determinare lo stato di sollecitazione del sistema in funzione di quest'ultimo. Il problema risulterà interamente risolto individuando quale valore di θ corrisponda alla configurazione effettiva di equilibrio del sistema.

L'equazione che consente di determinare θ è l'equazione di equilibrio alla rotazione attorno al polo C dell'elemento rigido:

$$M_{AC}(l) - \frac{l}{2}\left(N_{BE} - N_{DF}\right) = 0,$$

dove $M_{AC}(l)$ è il momento flettente agente sulla trave AC in corrispondenza della sezione C e trasmesso al corpo rigido dalla molla, ed N_{BE} e N_{DF} sono gli sforzi normali agenti sulle aste BE e DF.

Per la trave AC l'equazione differenziale

$$v^{IV}(s) = 0$$

è completata dalle 4 condizioni al bordo seguenti:

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v^{I}(0) = 0 \\ v^{III}(0) = 0 \\ -EJ\,v^{II}(l) = k_0\left[v^{I}(l) + \theta\right] \end{cases}$$

Il problema differenziale, risolto, consente di determinare $M_{AC}(l)$ in funzione di θ:

$$M_{AC}(l) = -EJ\,v^{II}(l) = \frac{\theta}{\dfrac{1}{k_0} + \dfrac{l}{EJ}}.$$

D'altra parte, gli sforzi normali nelle aste sono facilmente esprimibili in funzione di θ e della variazione di temperatura:

$$N_{BE} = -EA\left(\frac{\theta}{2} - \alpha t\right), \quad \text{e} \quad N_{DF} = EA\left(\frac{\theta}{2} - \alpha t\right).$$

Sostituendo nell'equazione di equilibrio precedente si ottiene:

$$\theta = \frac{\alpha t\, l\, EA}{\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{k_0} + \dfrac{l}{EJ}\right)} + \dfrac{EA\,l}{2}}.$$

Infine, nell'ipotesi di rigidezza estensionale EA che tende all'infinito, è immediato verificare che

$$\theta\big|_{EA\to\infty} = 2\alpha t\,.$$

Conseguentemente, facendo uso della soluzione determinata in precedenza con il metodo della linea elastica per il tratto AC, è immediato ottenere:

$$v_C\big|_{EA\to\infty} = -\frac{\alpha t\, l^2}{EJ\left(\dfrac{1}{k_0} + \dfrac{l}{EJ}\right)}.$$