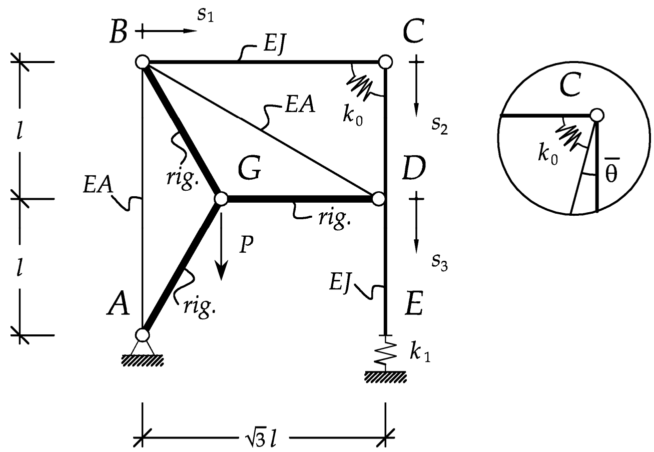
Università di Pisa
Esame di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI
Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale

(docente: Prof. Ing. Stefano Bennati)

Elementi della soluzione della prova scritta in itinere del 25 maggio 2013

Problema. Nel sistema di figura le travi BC, CD e DE sono *flessibili* ed *inestensibili*, le travi AB e BD *estensibili*, mentre le travi AG, BG e DG si possono ritenere *rigide*. In corrispondenza del nodo G è applicato un carico concentrato di intensità P, agente in direzione verticale; inoltre l'incastro elastico in C presenta il difetto angolare indicato.



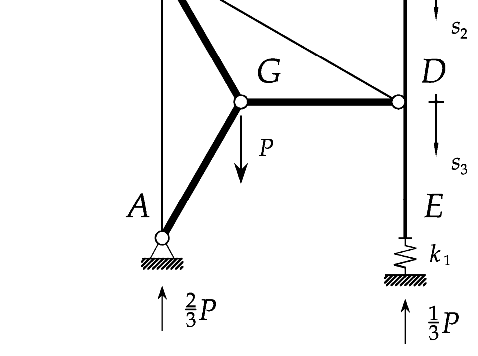
1) Le equazioni differenziali e le condizioni al bordo per i tratti BC, CD e DE che permetterebbero di risolvere il problema mediante il metodo della linea elastica sono:

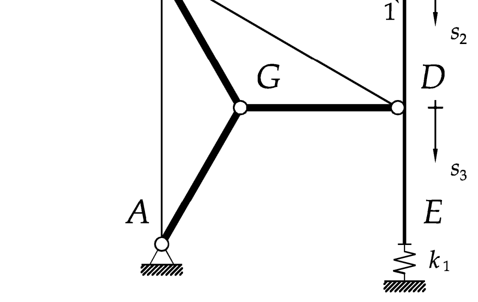
$-EJv_i^{IV}(s_i) = 0$ con $i = 1, 2, 3$.

1. $v_1(0) = \dfrac{4}{3}\dfrac{Pl}{EA}$;
2. $-EJv_1''(0) = 0$;
3. $v_1(\sqrt{3}l) = \dfrac{P}{3k_1}$;
4. $-EJv_1''(\sqrt{3}l) = -EJv_2''(0)$;
5. $-EJv_1''(\sqrt{3}l) - k_0\left[\bar{\theta} + v_1'(\sqrt{3}l) - v_2'(0)\right] = 0$;
6. $-EJv_1'''(\sqrt{3}l) + \dfrac{P}{3} + \dfrac{1}{2}N_{BD} = 0$;
7. $v_2(l) = v_3(0)$;
8. $v_2'(l) = v_3'(0)$;
9. $-EJv_2''(l) = -EJv_3''(0)$;
10. $-EJv_3'''(0) + EJv_2'''(l) + \dfrac{\sqrt{3}}{3}P + \dfrac{\sqrt{3}}{2}N_{BD} = 0$;
11. $-EJv_3''(l) = 0$;
12. $-EJv_3'''(l) = 0$;

dove $N_{BD} = \dfrac{EA}{4l}\left[v_1(\sqrt{3}l) - v_1(0) - \sqrt{3}\left(v_2(l) - v_2(0)\right)\right]$.

2) Facendo ricorso al metodo delle forze, il sistema effettivo può essere scomposto nei due sottosistemi seguenti, avendo scelto il valore della coppia espressa dall'incastro elastico in C come incognita iperstatica X_1.



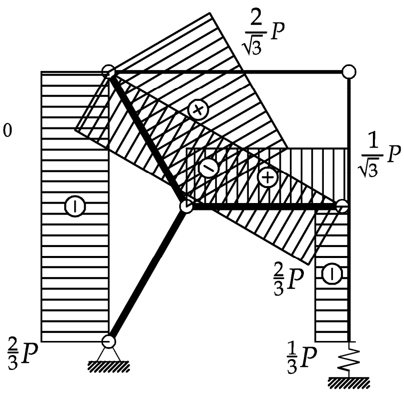


Le caratteristiche della sollecitazione sono (con $s_1 \in [0, \sqrt{3}\, l]$ e $s_2 \in [0, l]$):

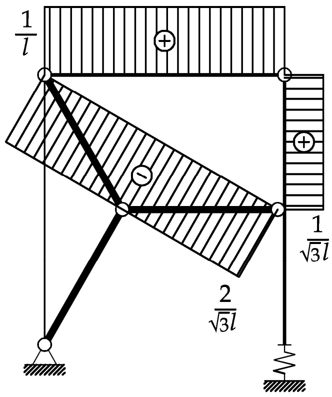
	N_0	T_0	M_0	N_1	T_1	M_1
AB	$-\frac{2}{3}P$	0	0	0	0	0
AG	0	0	0	0	0	0
BC	0	0	0	$\frac{1}{l}$	$\frac{\sqrt{3}}{3l}$	$\frac{\sqrt{3}}{3l}s_1$
BD	$-\frac{2}{3}P$	0	0	$-\frac{2\sqrt{3}}{3l}$	0	0
BG	$\frac{2\sqrt{3}}{3}P$	0	0	0	0	0
CD	0	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{3l}$	$-\frac{1}{l}$	$1-\frac{s_2}{l}$
DE	$-\frac{1}{3}P$	0	0	0	0	0
DG	$\frac{\sqrt{3}}{3}P$	0	0	0	0	0

Possono quindi essere tracciati i seguenti diagrammi quotati.

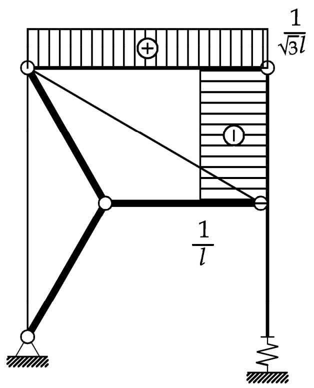
N_0



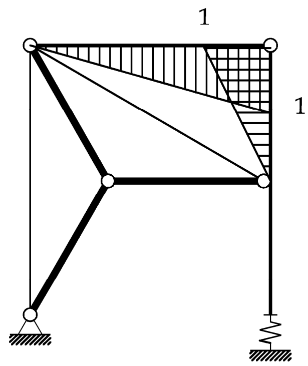
N_1



T_1



M_1



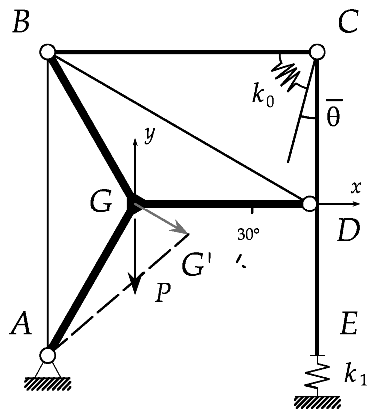
I coefficienti di Müller-Breslau sono:

$$\eta_1 = -\frac{X_1}{k_0} + \bar{\theta}\,; \quad \eta_{10} = \frac{8\sqrt{3}}{9}\frac{P}{EA}\,; \qquad \eta_{11} = \frac{8}{3lEA} + \frac{\sqrt{3}+1}{3}\frac{l}{EJ}\,;$$

da cui:
$$X_1 = \left(\bar{\theta} - \frac{8\sqrt{3}}{9}\frac{P}{EA}\right) \Bigg/ \left(\frac{1}{k_0} + \frac{8}{3lEA} + \frac{\sqrt{3}+1}{3}\frac{l}{EJ}\right).$$

3) Rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano *Gxy*, nell'ipotesi di piccoli spostamenti e nel caso in cui le travi rigide *AG*, *BG* e *DG* siano saldate in *G*, lo spostamento del punto *G* ha componenti:

$$v_{Gx} = \frac{\sqrt{3}}{9}\frac{P}{k_1} \qquad \text{e} \qquad v_{Gy} = -\frac{1}{9}\frac{P}{k_1}\,.$$



28 maggio 2013