

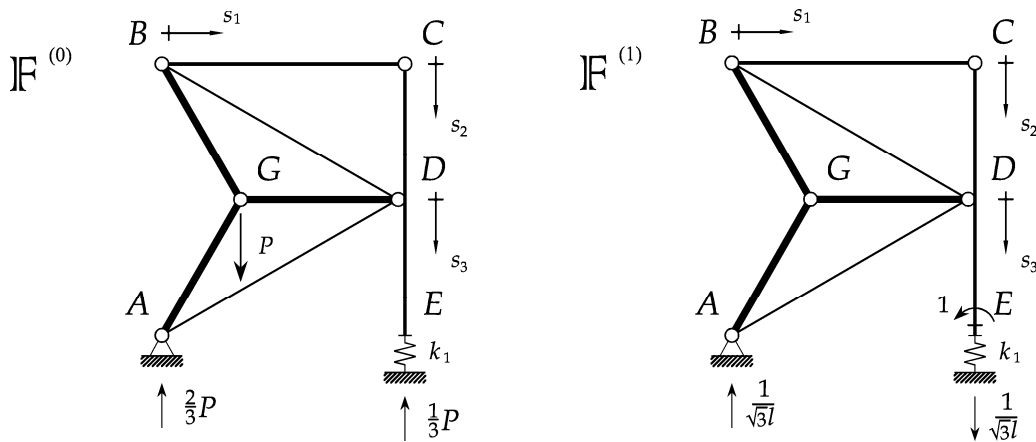
Università di Pisa
Esame di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

(docente: Prof. Ing. Stefano Bennati)

Elementi della soluzione della prova scritta in itinere del 25 maggio 2013

Problema. Nel sistema di figura le travi BC, CDE sono flessibili ed inestensibili, le travi AD e BD estensibili, mentre le travi AG, BG e DG si possono ritenere rigide. In corrispondenza del nodo G è applicato un carico concentrato di intensità P , agente in direzione verticale.

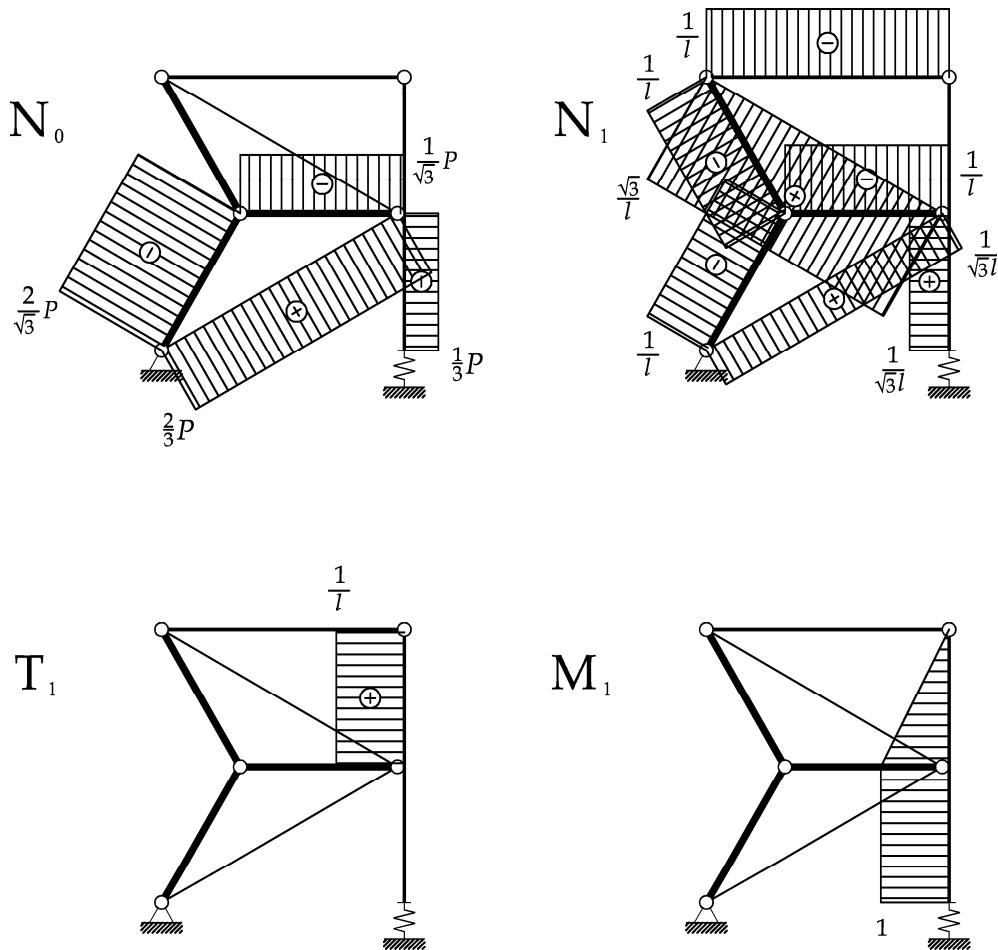
- 1) Facendo ricorso al metodo delle forze, il sistema effettivo può essere scomposto nei due sottosistemi seguenti, avendo scelto il valore della coppia espressa dal vincolo elastico in E come incognita iperstatica X_1 .



Le caratteristiche della sollecitazione sono (con $s_2 \in [0, l]$):

	N_0	T_0	M_0	N_1	T_1	M_1
AD	$\frac{2}{3}P$	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{3l}$	0	0
AG	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}P$	0	0	$-\frac{1}{l}$	0	0
BC	0	0	0	$-\frac{1}{l}$	0	0
BD	0	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{l}$	0	0
BG	0	0	0	$-\frac{1}{l}$	0	0
CD	0	0	0	0	$\frac{1}{l}$	$\frac{s_2}{l}$
DE	$-\frac{1}{3}P$	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{3l}$	0	1
DG	$-\frac{\sqrt{3}}{3}P$	0	0	$-\frac{1}{l}$	0	0

Possono quindi essere tracciati i seguenti diagrammi quotati.



I coefficienti di Müller-Breslau sono:

$$\eta_1 = -\frac{X_1}{k_0} + \bar{\theta}; \quad \eta_{10} = \frac{4\sqrt{3}}{9} \frac{P}{EA} - \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{P}{k_1 l}; \quad \eta_{11} = \frac{1}{3k_1 l^2} + \frac{20}{3lEA} + \frac{4l}{3EJ};$$

da cui:

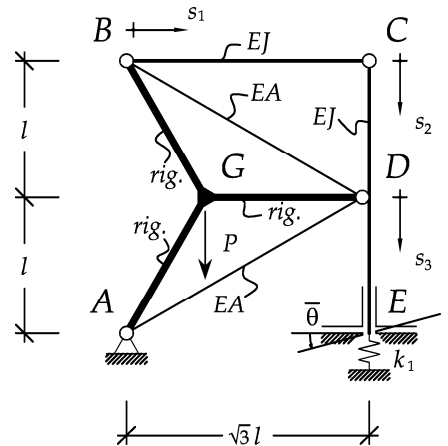
$$X_1 = \left(\bar{\theta} - \frac{4\sqrt{3}}{9} \frac{P}{EA} + \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{P}{k_1 l} \right) / \left(\frac{1}{k_0} + \frac{1}{3k_1 l^2} + \frac{20}{3lEA} + \frac{4l}{3EJ} \right).$$

2) Nel caso in cui le travi rigide AG , BG e DG siano saldate in G e la costante elastica dell'incastro scorrevole in E sia così grande da poterla ritenere infinita, le equazioni differenziali e le condizioni al bordo per i tratti BC , CD e DE che permetterebbero di risolvere il problema mediante il metodo della linea elastica sono:

$$-EJv_1''(s_1) = 0; \quad -EJv_2^{IV}(s_2) = 0; \quad -EJv_3^{IV}(s_3) = 0;$$

- | | |
|-------------------------------|---|
| 1. $v_1(0) = 0;$ | 2. $v_1(\sqrt{3}l) = \sqrt{3}l\vartheta_r;$ |
| 3. $v_2(0) = -2l\vartheta_r;$ | 4. $-EJv_2''(0) = 0;$ |
| 5. $v_2(l) = v_3(0);$ | 6. $v_2(l) = -l\vartheta_r;$ |
| 7. $v_2'(l) = v_3'(0);$ | 8. $-EJv_2''(l) = -EJv_3''(0);$ |
| 9. $v_3'(l) = -\bar{\theta};$ | 10. $-EJv_3'''(l) = 0;$ |

$$11. -\frac{\sqrt{3}}{3}Pl + \sqrt{3}lk_1v_1(\sqrt{3}l) - EJv_3''(l) = 0.$$



Un'undicesima condizione è necessaria per la determinazione dell'angolo di rotazione ϑ_r del corpo rigido $GABD$, introdotto per esprimere le condizioni al contorno sugli spostamenti.

Per il momento flettente del sistema effettivo può essere tracciato il diagramma qualitativo indicato a lato.

Inoltre, scelto come spostamento virtuale quello effettivo per il sistema, è possibile esprimere il lavoro virtuale esterno in funzione della rotazione ϑ_r dell'elemento rigido $GABD$ come:

$$L_v^{(e)} = P\vartheta_r \frac{\sqrt{3}}{3}l + 3k_1\vartheta_r^2 l^2 + \bar{M}\bar{\theta},$$

dove \bar{M} è la coppia espressa dall'incastro in E .

Il lavoro virtuale interno allora è:

$$L_v^{(i)} = \frac{4}{3} \frac{\bar{M}^2}{EJ}.$$

