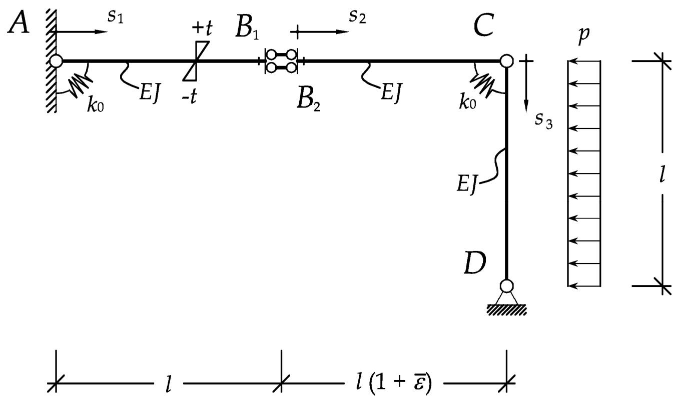
Università di Pisa

Esame di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

(docente: Prof. Ing. Stefano Bennati)

Elementi della soluzione della prova scritta in itinere del 27 aprile 2013



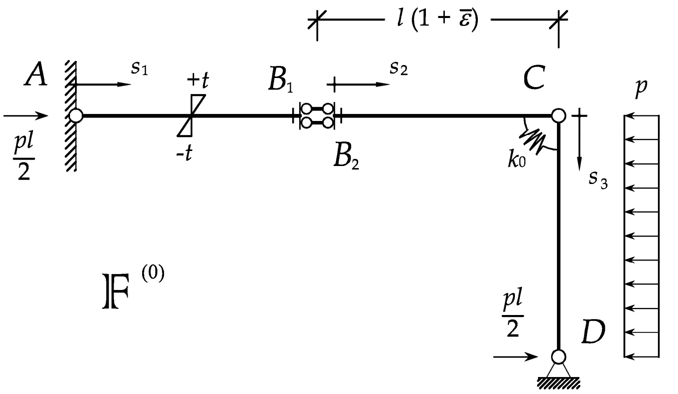
Problema. Nel sistema di figura tutte le travi sono flessibili ma inestensibili. La trave CD è soggetta a un carico distribuito trasversale costante d'intensità p per unità di lunghezza della linea d'asse; la trave AB è soggetta alla variazione termica indicata, variabile linearmente tra i valori $+t$ e $-t$ nello spessore H della sezione trasversale; infine, la trave BC presenta il difetto di lunghezza indicato.

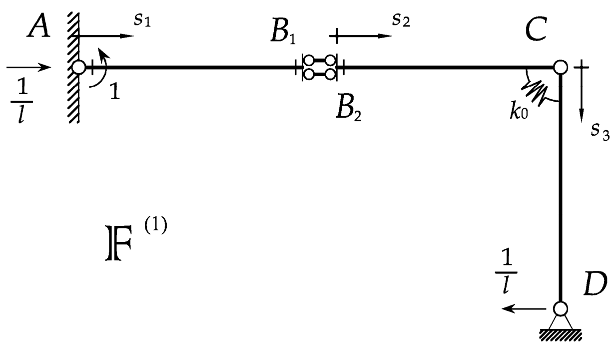
1) Le equazioni differenziali e le condizioni al bordo per i tratti AB, BC e CD che permetterebbero di risolvere il problema mediante il metodo della linea elastica sono:

$$-EJv_1^{IV}(s_1)=0\,,\ -EJv_2^{IV}(s_2)=0\,,\ -EJv_3^{IV}(s_3)=-p\,;$$

1. $v_1(0)=0\,;$
2. $-EJv_1''(0)+k_0v_1'(0)+\dfrac{2\alpha t}{H}EJ=0\,;$
3. $v_1'(l)=v_2'(0)\,;$
4. $-EJv_1''(l)+\dfrac{2\alpha t}{H}EJ=-EJv_2''(0)\,;$
5. $-EJv_1'''(l)=0\,;$
6. $-EJv_2'''(0)=0\,;$
7. $v_2(l)=0\,;$
8. $-EJv_2''(l)=-EJv_3''(0)\,;$
9. $v_3(0)=-l\bar{\varepsilon}\,;$
10. $-EJv_2''(l)-k_0\left[v_2'(l)-v_3'(0)\right]=0\,;$
11. $v_3(l)=0\,;$
12. $-EJv_3''(l)=0\,.$

2) Facendo ricorso al metodo delle forze, il sistema effettivo può essere scomposto nei due sottosistemi seguenti, avendo scelto il valore della coppia trasmessa dall'incastro elastico in A come incognita iperstatica X_1.

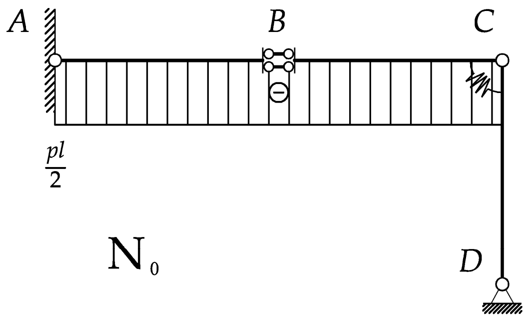


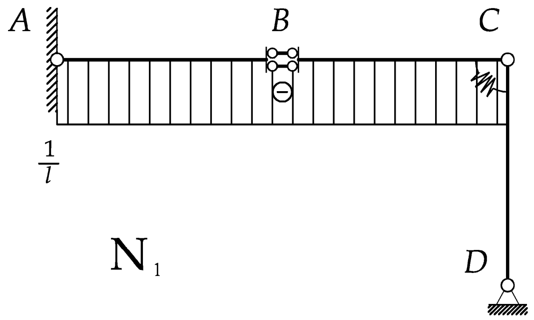


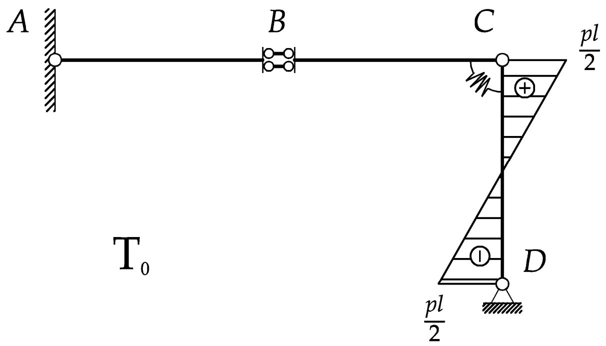
Le caratteristiche della sollecitazione sono (con s_1, s_2 e $s_3 \in [0, l]$):

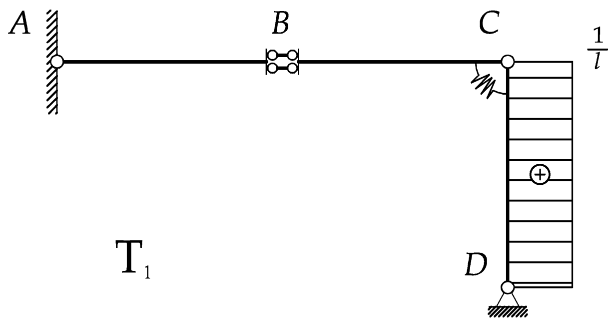
	N_0	T_0	M_0	N_1	T_1	M_1
AB	$-pl/2$	0	0	$-1/l$	0	-1
BC	$-pl/2$	0	0	$-1/l$	0	-1
CD	0	$\dfrac{pl}{2}-ps_3$	$\dfrac{ps_3}{2}(l-s_3)$	0	$1/l$	$-1+s_3/l$

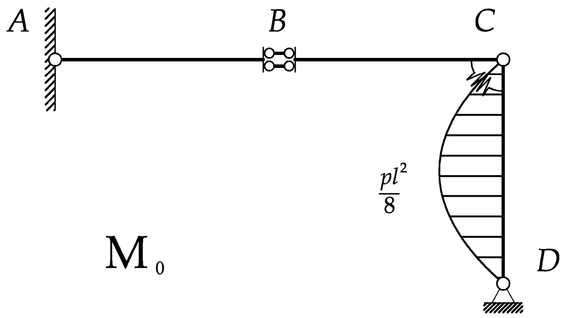
Possono quindi essere tracciati i seguenti diagrammi quotati:

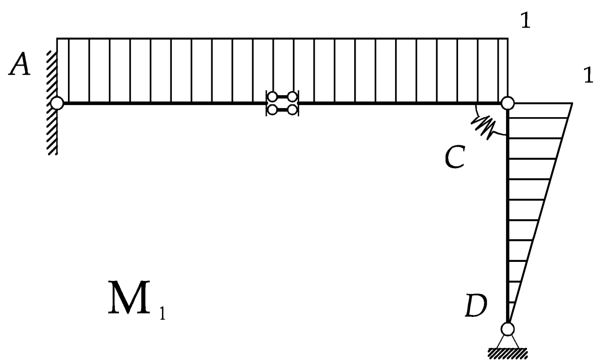












I coefficienti di Müller-Breslau sono:

$$\eta_1 = -\frac{X_1}{k_0},\ \eta_{10} = -\frac{pl^3}{24EJ} + \frac{2\alpha t}{H} l - \bar{\varepsilon},\ \eta_{11} = \frac{7l}{3EJ} + \frac{1}{k_0}, \text{ da cui: } X_1 = \left(\frac{pl^3}{24EJ} - \frac{2\alpha t}{H} l + \bar{\varepsilon}\right) \Big/ \left(\frac{7l}{3EJ} + \frac{2}{k_0}\right).$$

3) Lo spostamento in direzione trasversale della sezione B_1 può essere determinato facendo ricorso al metodo della linea elastica, integrando due volte l'equazione

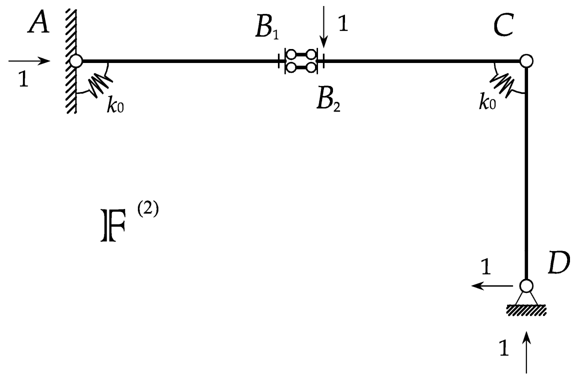
$$-v_1''(s_1) = \frac{M_{AB}^{(0)}(s_1) + X_1 M_{AB}^{(1)}(s_1)}{EJ} - \frac{2\alpha t}{H} \qquad \rightarrow \qquad v_1''(s_1) = \frac{X_1}{EJ} + \frac{2\alpha t}{H},$$

con le condizioni al bordo: 1. $v_1(0) = 0$ e 2. $v_1'(0) = \dfrac{X_1}{k_0}$.

Da cui:

$$v_1(l) = \left(\frac{l^2}{2EJ} + \frac{l}{k_0}\right) X_1 + l^2 \frac{\alpha t}{H}.$$

4) Determinare lo spostamento in direzione trasversale della sezione B_2 può essere facilmente ottenuto ricorrendo ad esempio al sistema F_2 indicato in figura.



Facendo uso del teorema dei lavori virtuali allora si trova:

$$v_{B_2} = -\frac{pl^4}{24EJ} + l\bar{\varepsilon} + \left(\frac{l}{k_0} - \frac{5}{6}\frac{l^2}{EJ} \right) X_1 \, .$$

6 maggio 2013 (versione rivista)