Università di Pisa

Esame di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

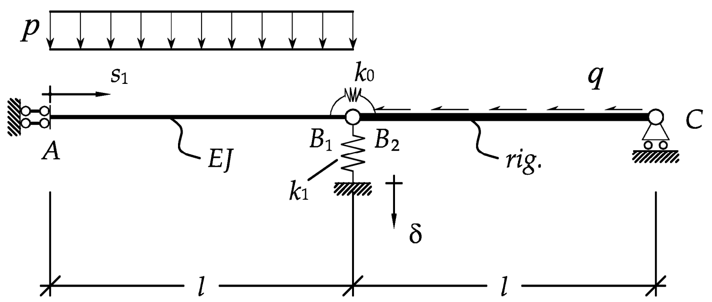
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale

(docente: Prof. Ing. Stefano Bennati)

Soluzione della prova scritta del 22 febbraio 2013 – parte I

Problema. Nel sistema di figura la trave *AB* è flessibile ma inestensibile e soggetta a un carico distribuito trasversale costante, d'intensità *p* per unità di lunghezza della linea d'asse. A sua volta, la trave *BC* è rigida e soggetta a un carico distribuito assiale costante d'intensità *q* per unità di lunghezza della linea d'asse.



1) L'equazione differenziale e le condizioni al bordo per il tratto *AB* che permetterebbero di risolvere il problema mediante il metodo della linea elastica sono:

$$-EJv_1^{IV}(s_1) = p$$

1) $v_1'(0) = 0$; 2) $-EJv_1'''(0) = 0$;

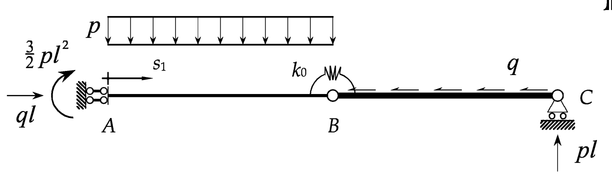
3) $-EJv_1''(l) = k_0\left[v_1'(l) + \dfrac{v_1(l)}{l}\right]$; 4) $-EJv_1''(0) - \dfrac{3}{2}pl^2 + k_1[v_1(l) - \delta]\,l = 0$.

La quarta condizione indicata è determinata attraverso considerazioni di equilibrio per il sistema *ABC*. In alternativa, imponendo che fosse nullo il momento risultante attorno alla sezione *C* per la trave *BC*, si sarebbe giunti alla seguente condizione, ad essa alternativa:

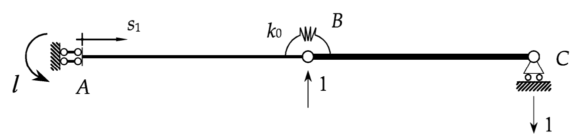
$4_{bis})$ $-EJv_1''(l) - lEJv_1'''(l) + k_1[v_1(l) - \delta]\,l = 0$.

2) Facendo ricorso al metodo delle forze, il sistema effettivo può essere scomposto nei due sottosistemi seguenti, avendo scelto il valore della reazione verticale dell'appoggio elastico quale incognita iperstatica X_1.

$\mathbb{F}^{(0)}$



$\mathbb{F}^{(1)}$

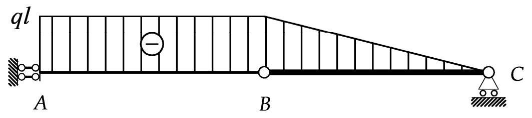


Le espressioni delle caratteristiche della sollecitazione sono:

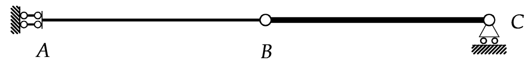
	N_0	T_0	M_0	N_1	T_1	M_1
AB	$-ql$	$-ps_1$	$\frac{3}{2}pl^2 - \frac{1}{2}ps_1^2$	0	0	$-l$
BC	$-q(2l - s_1)$	$-pl$	$pl(2l - s_1)$	0	1	$-2l + s_1$

con $s_1 \in [0, l]$ per il tratto *AB* e $s_1 \in [l, 2l]$ per il tratto *BC*, per le quali possono essere tracciati i seguenti diagrammi quotati:

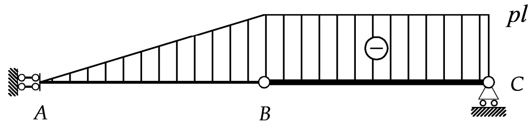
N_0



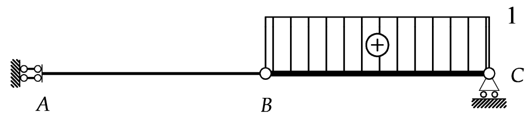
N_1



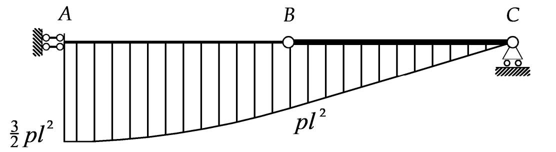
T_0



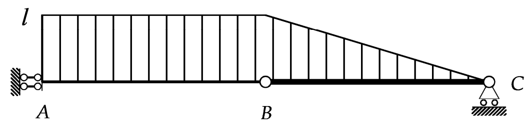
T_1



M_0



M_1



I coefficienti di Müller-Breslau sono:

$$\eta_1 = -\frac{X_1}{k_1} - \delta\,, \qquad \eta_{10} = -\frac{4}{3}\frac{pl^4}{EJ} - \frac{pl^3}{k_0}\,, \qquad \eta_{11} = \frac{l^3}{EJ} + \frac{l^2}{k_0}\text{, da cui: } X_1 = \frac{\frac{4}{3}\frac{pl^4}{EJ} + \frac{pl^3}{k_0} - \delta}{\frac{l^3}{EJ} + \frac{l^2}{k_0} + \frac{1}{k_1}}\,.$$

3) Nel caso limite nel quale le rigidezze delle molle k_0 e k_1 possano essere considerate infinite, l'espressione degli spostamenti per la trave *AB* può essere determinata integrando l'equazione differenziale $-EJv_1^{IV}(s_1) = p$ con le seguenti condizioni al contorno:

1) $v_1'(0) = 0$; 2) $-EJv_1'''(0) = 0$;

3) $v_1(l) = \delta$; 4) $v_1'(l) = -\dfrac{\delta}{l}$.

Lo spostamento verticale della sezione *A* allora risulta: $v_A = v_1(0) = \dfrac{3}{2}\delta + \dfrac{pl^4}{24EJ}$.