DOTTORATO LEONARDO DA VINCI
TEORIA DELLE DISTRIBUZIONI (docente Mario Poletti)

PROGRAMMA

Misura e integrale di Lebesgue: Sottinsiemi di $\mathbb{R}^n$ misurabili secondo Jordan e secondo Lebesgue. Funzioni a valori in $\mathbb{R}$ misurabili e integrabili secondo Riemann e secondo Lebesgue. Estensione a funzioni a valori in $\mathbb{C}$. Identificazione di funzioni uguali quasi ovunque: funzioni nel senso delle classi. Il Teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata. I Teoremi di Tonelli e di Fubini.

Spazi normati: Successioni convergenti, limiti, successioni di Cauchy; spazi completi o di Banach. Gli spazi L^p e la L^p-convergenza: completezza. Il Teorema di Hölder.

Spazi con famiglie separanti di seminorme: Successioni convergenti, limiti, successioni di Cauchy. Gli spazi L^1_{loc} su aperti di $\mathbb{R}^n$ e la L^1_{loc}-convergenza: completezza. Relazioni tra L^p-convergenza e L^1_{loc}-convergenza. Inadeguatezza degli spazi L^1_{loc} e della L^1_{loc}-convergenza come modelli per la descrizione di fenomeni fisici.

Convergenza in senso debole in L^1_{loc}: Esempi di seminorme in L^1_{loc} indotte da elementi di L^∞ a supporto compatto, dedotte da procedure fisiche di misura. Modello astratto: spazi vettoriali *di fenomeni*, funzionali leari come *procedure di misura lineare* (PDML), e relative *seminorme*, successioni convergenti e di Cauchy. Convergenza in senso debole in L^1_{loc}: lo spazio $\mathscr{D}$ delle funzioni C^∞ a supporto compatto, procedure di misura lineare e relative seminorme associate alle $\varphi \in \mathscr{D}$. Legame con la L^1_{loc}-convergenza. Incompletezza di L^1_{loc} rispetto alla convergenza s.d..

Predistribuzioni e distribuzioni su aperti di $\mathbb{R}^n$: Definizione di *predistribuzioni* e *distribuzioni*. Lo spazio $\mathscr{D}'$ delle distribuzioni. PDML e seminorme in $\mathscr{D}'$ legate agli elementi di $\mathscr{D}$. La $\mathscr{D}'$- convergenza. Immersione canonica di L^1_{loc} in $\mathscr{D}'$: $\mathscr{D}'$ come insieme di tutti e soli i limiti di successioni di Cauchy s.d. di elementi di L^1_{loc}. Convergenza nello spazio $\mathscr{D}$. Funzionali lineari e continui su $\mathscr{D}$: esempi, proprietà, caratterizzazione. Completezza di $\mathscr{D}'$ e densità di $\mathscr{D}$ in $\mathscr{D}'$. Descrizione del modello di Schwartz: descrizione dell'isomorfismo canonico di $\mathscr{D}'$ con il modello di Schwartz. Le Delta di Dirac, masse distribuite su varietà regolari.

Operazioni in $\mathscr{D}'$: *Moltiplicazione* tra elementi di C^∞ ed elementi di $\mathscr{D}'$: moltiplicazione delle delta per funzioni smooth. *Traslazione e dilatazione* di distribuzioni su $\mathbb{R}^n$: *la Delta di Dirac* e le sue traslate. *Derivazione ditribuzionale*: le derivate parziali distribuzionali come operatori lineari, invarianti per traslazioni nel caso di distribuzioni su $\mathbb{R}^n$, e continui. Esempi: derivate dei gradini e della funzione di Heaviside in $\mathbb{R}^n$. *Restrizione di distribuzioni a insiemi aperti:* partizioni dell'unità e incollamento di distribuzioni. *Suppor-*

to di una distribuzione: prolungabilità ad $\mathbb{R}^n$ delle distribuzioni a supporto compatto definite su un aperto.

Distribuzioni a supporto compatto: Lo spazio $\mathscr{E}'$ delle distribuzioni a supporto compatto. Lo spazio $\mathscr{E}$ delle funzioni C^∞ e la $\mathscr{E}$-convergenza. PDML e seminorme in $\mathscr{E}'$ associate agli elementi di $\mathscr{E}$: $\mathscr{E}'$-convergenza, caratterizzazione delle successioni di $\mathscr{E}'$-Cauchy, completezza di $\mathscr{E}'$ e densità di $\mathscr{D}$ in $\mathscr{E}'$. L'isomorfismo canonico tra $\mathscr{E}'$ e lo spazio dei funzionali lineari e continui su $\mathscr{E}$.

Distribuzioni temperate: Funzioni a crescita lenta e a decrescenza rapida in senso usuale (s.u) su $\mathbb{R}^n$: gli spazi $L^1_{\mathrm{loc/cl}}$, $\mathscr{O}_\mathrm{M}$, $L^1_{\mathrm{loc/dr}}$, $\mathscr{S}$. Convergenza in $\mathscr{S}$. Funzionali lineari e continui su $\mathscr{S}$: proprietà, caratterizzazione. Predistribuzioni temperate e distribuzioni temperate: lo spazio $\mathscr{S}'$. PDML e seminorme in $\mathscr{S}'$ associate ad elementi di $\mathscr{S}$: $\mathscr{S}'$-convergenza. Isomorfismo canonico di $\mathscr{S}'$ con il modello di Schwartz. Derivate in $\mathscr{S}'$: caratterizzazione degli elementi di $\mathscr{S}'$ come tutte e sole le derivate delle funzioni continue a crescita s.u.. Moltiplicatori: caratterizzazione come elementi di $\mathscr{O}_\mathrm{M}$, gli spazi L^p come sottospazi di $\mathscr{S}'$.

Prodotto di convoluzione: Definizione di convoluzione in L^1_{loc} e condizioni sufficienti di esistenza: un fattore a supporto compatto, il Teorema di Young per fattori L^p, condizioni di associatività. Convoluzione in $\mathscr{D}'$ con un fattore a supporto compatto: definizione, condizioni di associatività, esempi di non associatività. Convulzioni con δ, $\partial^q\delta$, $\delta(x-a)$: derivate e traslazioni di convoluzioni con *ogni fattore eccettuato al più uno* a supporto compatto. Gli operatori $f * \sharp$ con $f \in \mathscr{E}'$ come Sistemi Lineari, Shift-invarianti e Continui su segnali in $\mathscr{D}'$. La convoluzione come applicazione bilineare e continua su $\mathscr{E}' \times \mathscr{D}'$. Convoluzione con $\varphi \in \mathscr{D}$: appartenenza a C^∞, espressione tramite φ-misure, significato fisico. Caratterizzazione delle distribuzioni temperate in termini di convoluzione con funzioni $\mathscr{D}$. Lo spazio $\mathscr{O}'_\mathrm{C}$ delle distribuzioni *a decrescenza rapida*. Convoluzione in $\mathscr{S}'$ con un fattore in $\mathscr{O}'_\mathrm{C}$. Gli operatori $f * \sharp$ con $f \in \mathscr{O}'_\mathrm{C}$ come Sistemi Lineari, Shift-invarianti e Continui su segnali in $\mathscr{S}'$. La convoluzione come applicazione bilineare e continua su $\mathscr{E}' \times \mathscr{S}'$. Convoluzione per elementi $\varphi \in \mathscr{S}$: rappresentazione tramite φ-misure.

Trasformata di Fourier: Convenzione unificante per le varie versioni della FT. Trasformata ed Antitrasformata di Fourier in L^1: limitatezza, continuità, nullità all'infinito, Teorema di Reciprocità, comportamento rispetto alla convoluzione. FT e AFT in $\mathscr{S}$. FT e AFT in $\mathscr{S}'$ come automorfismi continui uno inverso dell'altro: Teorema di Reciprocità in $\mathscr{S}'$. FT e AFT come isomorfismi scambianti tra loro $\mathscr{O}'_\mathrm{C}$ e $\mathscr{O}_\mathrm{M}$: comportamento sulle convoluzioni $\mathscr{O}'_\mathrm{C} * \mathscr{S}'$ e sui prodotti $\mathscr{O}_\mathrm{M} \cdot \mathscr{S}'$. FT e AFT di Delta e di Funzioni circolari complesse.

Analisi e sintesi di segnali temperati tramite combinazioni lineari di Delta: Lo spazio Δ delle combinazioni lineari di Delta: densità in $\mathscr{S}'$, procedure di analisi e sintesi tramite approssimazioni con elementi di Δ.

Analisi e sintesi di segnali temperati tramite combinazioni lineari di Funzioni circolari complesse: Lo spazio Φ delle c.l. di funzioni circolari complesse. Uso della AFT per dedurre la densità di Φ in $\mathscr{S}'$ dalla densità di Δ in $\mathscr{S}'$. FT come isomorfismo canonico di $\mathscr{S}'$(*spazio-tempo*) in $\mathscr{S}'$(*frequenze*) che trasforma Funzioni circolari complesse in Delta. AFT come isomorfismo canonico di $\mathscr{S}'$(*frequenza*) in $\mathscr{S}'$(*spazio-tempo*) che trasforma Delta in Funzioni circolari complesse. Conseguente uso della AFT per ottenere procedure di analisi e sintesi in frequenza di segnali temperati dall'analisi e la sintesi in inpulsi della loro FT.

Sistemi Continui Lineari e Shift-invarianti: Risposta in frequenza. Risposta impulsiva. Caratterizzazione di tutte le procedure per l'elaborazione CLSI di segnali in $\mathscr{D}'$. Caratterizzazione di tutte le procedure per l'elaborazione CLSI di segnali in $\mathscr{S}'$.

Mario Poletti