DISTRIBUZIONI

Scuola di Dottorato in Ingegneria
“Leonardo da Vinci”

Mario Poletti

2013/14

Introduzione

La Teoria delle Distribuzioni è un modello matematico per descrivere:

- uno **spazio** in cui avvengono **fenomeni fisici**,
- un insieme di **fenomeni fisici** che avvengono in tale spazio,
- un insieme di **strumenti di misura** che danno informazioni **numeriche** su tali fenomeni.

La teoria è frutto di Laurent Schwartz, e può essere letta su:

▼ L.Schwartz, *Théorie des distributions*, Paris, Hermann, 1966

⧫ F.Treves, *Topological vector spaces, distributions and kernels*, New York, Academic Press, 1967

⧫ L.Hörmander, *Linear partial differential operators*, Berlin, Springer, 1963

⧫ V.S.Vladimirov, *Methods of the Theory of Generalized Functions*, London, Taylor and Francis, 2002

⧫ G. Gilardi, *Analisi tre*, Milano, McGraw-Hill, 1994

▲ J.M. Bony, *Cours d'analyse*, Paris, Ecole Politechnique - Département de Mathématiques, 1994

Informazioni di base possono essere trovate su:

▼ N.Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, Paris, Masson, 1981

⧫ C.L. DeVito, *Functional analysis*, New York, Academic Press, 1978

⧫ W.Rudin, *Real and complex analysis*, New Delhi, Tata McGraw-Hill, 1974

♦ G.E. Šilov, *Analisi matematica. Funzioni di una variabile*, Edizioni Mir, 1978

▲ H.Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Paris, Hermann, 1961

Schwartz, guardando le distribuzioni dall'empireo, le descrive come: "**i funzionali lineari e continui sullo spazio delle funzioni test**".

Questi appunti le guardano dalla terra in cui si formano e abituano gli occhi a vederle con gli occhi di Schwartz.

Indice

Capitolo 1

Gli spazi L^p e L^1_{loc}

1.1 Identificazione di funzioni uguali quasi ovunque

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile (qui e in tutto quanto segue, *misurabile* significa *misurabile secondo Lebesgue*).

Si consideri l'insieme $\mathscr{F}_{dqo}(A, \mathbb{C})$ delle funzioni complesse d.q.o. su A.

In $\mathscr{F}_{dqo}(A, \mathbb{C})$ si consideri la *relazione di equivalenza* $\sim$ definita da:

$$g \sim h \Leftrightarrow g(a) = h(a) \text{ per q.o. } a \in A \ ,$$

e si considerino le classi di equivalenza, ossia gli insiemi descritti da

$$[g(x)] = \big\{h(x) : A \to \mathbb{C} \text{ d.q.o}/h(x) \sim g(x)\big\} \ , \quad g(x) : A \to \mathbb{C} \text{ d.q.o.} \ ;$$

tali insiemi si dicono *funzioni nel senso delle classi* (s.c.) da A in $\mathbb{C}$.

Una funzioni nel senso delle classi si indica con un simbolo del tipo

$$f : A \to \mathbb{C} \ \text{ s.c.} \qquad f(x) : A \to \mathbb{C} \ \text{ s.c.} \ ;$$

una funzione

$$f_1(x) : A \to \mathbb{C} \ \text{ d.q.o.}$$

tale che

$$f(x) = [f_1(x)]$$

si dirà un *rappresentante* di $f(x)$. **Attenzione:** dato $a \in A$,

- il simbolo

  $$f_1(a)$$

  ha significato, purchè $f_1(x)$ sia definita in a,

- il simbolo
$$f(a)$$
è privo di significato.

Seguono alcuni esempi di come adattare alle funzioni s.c. nozioni note per funzioni d.q.o..

Siano:
$$f, g : A \to \mathbb{C} \ \text{ s.c.}, \quad c \in \mathbb{C}, \quad B \subset A \text{ un insieme misurabile },$$
e siano:
$$f_1, g_1 : A \to \mathbb{C} \ \text{ d.q.o. rappresentanti di } f, g \ ;$$
le definizioni che seguono sono buone definizioni:

- $f + g \triangleq [f_1 + g_1] \quad fg \triangleq [f_1 g_1] \quad cf \triangleq [cf_1] \overline{f} \triangleq [\overline{f_1}] \quad |f| \triangleq [|f_1|]$; (si osservi che: $|f|^2 = f\overline{f}$)
- f si dice *misurabile* su B se f_1 è misurabile su B;
- f si dice *integrabile* su B se f_1 è integrabile su B, e in tal caso si pone
$$\int_B f = \int_B f_1 \ ;$$
- f si dice *a valori reali* se $f_1(x) \in \mathbb{R}$ q.o. ;
- sia f a valori reali, e sia $\alpha \in \mathbb{R}$,
  - α si dice un *maggiorante* di f su B se
  $$f_1(x) \leqslant \alpha \text{ q.o. su } B \ ,$$
  - α si dice un *minorante* di f su B se
  $$\alpha \leqslant f_1(x) \text{ q.o. su } B \ ;$$

  ne seguono (attenzione al caso $\text{mis}\, B = 0$) le definizioni di
  $$\sup_B f \quad \inf_B f \quad f \textit{ limitata su } B \ ;$$
- siano f, g a valori reali; si dice che
$$f \leqslant g \textit{ su } B$$
se
$$f_1(x) \leqslant g_1(x) \text{ q.o. su } B \ ;$$

- la *restrizione* di f a B si definisce tramite

$$f_{\diagup B} \triangleq [f_{1\diagup B}] \ ;$$

  - sia f integrabile su B; si ha:

$$\int_B |f| = 0 \Leftrightarrow \int_B |f_1| = 0 \Leftrightarrow f_1(x) = 0 \text{ q.o. su } B \Leftrightarrow f_{\diagup B} = 0 \ ,$$

  - **1.1.1** sia f integrabile su A; si ha:

$$\int_A |f| = 0 \Leftrightarrow f = 0 \ ;$$

- sia $A = \mathbb{R}^n$; dati $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0,\ a \in \mathbb{R}^n$, si pone

$$f(\lambda x + a) \triangleq [f_1(\lambda x + a)]$$

Il seguente Teorema prova che il passaggio dalle funzioni alle classi *non identifica* funzioni continue diverse definite su un aperto.

1.1.2 Teorema. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, e siano

$$f, g \in C^0(\Omega) \ ;$$

si ha:

$$[f] = [g] \Leftrightarrow f = g \ .$$

Nota. Da qui innanzi tutte le funzioni sono funzioni nel senso delle classi; la precisazione "s.c." verrà sistematicamente omessa.

1.2 Seminorme

Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$.

Una applicazione

$$\begin{aligned} \|\cdot\| :\ & X \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \|x\| \end{aligned}$$

tale che per $\forall x, y \in X, c \in \mathbb{C}$ si abbia:

$$\begin{cases} \|x\| \geqslant 0 \\ \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \\ \|cx\| = |c| \cdot \|x\| \end{cases} ,$$

si dice un *seminorma* in X.

Nota: Se $\|\cdot\|$ è una seminorma in X, per $\forall x, y \in X$

- il numero reale non negativo $\|x\|$ si interpreta come una *stima della grandezza* di x,
- il numero reale non negativo $\|x-y\| = \|y-x\|$ si interpreta come una *stima della distanza* di x da y.

attenzione: possono esserci vettori *non nulli* aventi *grandezza nulla*; possono esserci vettori *diversi* aventi *distanza nulla*.

1.2.1 Teorema. Se $\|\cdot\|$ è una seminorma in X, per $\forall x, y \in X$ si ha:

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x-y\| \ ;$$

in particolare: vettori *molto vicini* hanno seminorme *molto vicine* (il viceversa è palesemente falso).

Cenno. Essendo

$$\|x\| = \|(x-y)+y\| \leqslant \|x-y\| + \|y\| \ ,$$

si ha

$$\|x\| - \|y\| \leqslant \|x-y\| \ ;$$

e quindi si ha anche

$$\|y\| - \|x\| \leqslant \|y-x\| = \|x-y\| \ .$$

■

1.3 Spazi normati e di Banach

Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$.

Una *norma* in X è una seminorma

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$$

verificante la proprietà:

$$\forall x \in X : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ ,$$

ossia una seminorma rispetto alla quale l'unico vettore avente *grandezza nulla* è il vettore 0.

Sia $\|\cdot\|$ una norma in X. Tale norma induce le definizioni che seguono.

Sia

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

una successione di elemeti di X;

◦ se esiste $x \in X$ tale che:

$$\lim_{k\to\infty} \|x - x_k\| = 0 \ ,$$

allora:

◇ $x_1, x_2, x_3, \ldots$ si dice una successione *convergente*

◇ se $y \in X$ è tale che:

$$\lim_{k\to\infty} \|y - x_k\| = 0 \ ,$$

allora: $y = x$;

Cenno. Per ogni k si ha:

$$\|y - x\| = \|(y - x_k) + (x_k - x)\| \leqslant \|y - x_k\| + \|x_k - x\| \ .$$

■

◇ si pone:

$$x = \lim_{k\to\infty} x_k \ ,$$

e si dice che $x_1, x_2, x_3, \ldots$ *converge* ad x;

◦ se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste k tale che per ogni $k_1, k_2 \geqslant k$ si ha

$$\|x_{k_2} - x_{k_1}\| < \varepsilon$$

allora:

◇ $x_1, x_2, x_3, \ldots$ si dice una successione *di Cauchy*;

si ha:

◇ $x_1, x_2, x_3, \ldots$ convergente $\Rightarrow x_1, x_2, x_3, \ldots$ di Cauchy.

Lo spazio X si dice uno spazio *completo* o *di Banach* se:

- $x_1, x_2, x_3, \ldots$ di Cauchy $\Rightarrow x_1, x_2, x_3, \ldots$ convergente.

1.4 Gli spazi di Banach L^p

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile di misura $\neq 0$ (porsi la domanda: "a cosa si riducono le considerazioni che seguono se mis $A = 0$? "), e sia $p \in \mathbb{R}$ tale che

$$1 \leqslant p \leqslant \infty \ .$$

Il simbolo $L^p(A)$ denota l'insieme delle funzioni (si ricordi: nel senso delle classi)

$$f : A \to \mathbb{C}$$

misurabili su A e tali che:

- se $1 \leqslant p < \infty$, la funzione $|f|^p$ è integrabile su A; in tal caso, per $\forall f \in L^p(A)$ si pone:

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \right)^{1/p} \in \mathbb{R} \ ;$$

- se $p = \infty$, la funzione $|f|$ è limitata su A; in tal caso, per $\forall f \in L^p(A) = L^\infty(A)$ si pone:

$$\|f\|_p = \|f\|_\infty = \sup_A |f| \in \mathbb{R} \ .$$

1.4.1 Teorema. Sussistono gli asserti:

a) $L^p(A)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$
(per $p = 1$ e $p = \infty$ l'asserto è banale; dimostrazione non banale, ed omessa, negli altri casi);
b) $\| \cdot \|_p$ è una norma in $L^p(A)$, detta *p-norma*
(per $p = 1$ e $p = \infty$ l'asserto è banale; dimostrazione non banale, ed omessa, negli altri casi).

(**Nota 1:** per $\forall f \in L^p(A)$, $\|f\|_p$ si dice la *p-norma di f*)
(**Nota 2:** l'implicazione

$$\|f\|_p = 0 \ \Rightarrow \ f = 0$$

è garantito dall'essere f una funzione nel senso delle classi; altrimenti tutte le funzioni nulle quasi ovunque su A avrebbero $\|f\|_p = 0$)

1.4.2 Definizioni. Si consideri lo spazio normato $L^p(A)$ con la p-norma; siano $f_1, f_2, f_3, \dots ,\ f$ rispettivamente una successione di elementi di $L^p(A)$ ed un elemento di $L^p(A)$:

- se la successione $f_1, f_2, f_3, \dots$ converge ad f
  - si dice che la successione è L^p*-convergente*,
  - si scrive $f = L^p\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k$;
- se la successione è di Cauchy, si dice che
  - la successione è *di* L^p*-Cauchy*.

1.4.3 Teorema. $L^p(A)$ è uno spazio di Banach (ossia è completo) rispetto alla p-norma.
(dimostrazione non banale, e omessa; si osservi che la completezza è garantita dal considerare funzioni misurabili secondo Lebesgue)

Il seguente Teorema dà informazioni sul prodotto tra funzioni L^p.

1.4.4 Teorema di Hölder. Siano $f \in L^p(A),\ g \in L^q(A)$. Se:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leqslant 1$$

(si ricordi che $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$), allora:

- esiste un unico r verificante:

$$1 \leqslant r \leqslant \infty \quad , \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$

  (verifica banale)
- si ha:

$$fg \in L^r(A) \quad , \quad \|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

  (dimostrazione non banale, omessa)

In generale non sussiste alcuna relazione di inclusione tra gli spazi $L^p(A)$; la situazione cambia quando A è un insieme di misura finita, e le informazioni sono date dal seeguente Teorema.

1.4.5 Teorema. Sia mis $A < +\infty$. Siano p, q tali che:

$$1 \leqslant q < p \leqslant \infty \ .$$

Si ponga:

$$\rho = \frac{pq}{p-q} \ ,$$

e si osservi che:

$$q \leqslant \rho < \infty \quad , \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{q} \ .$$

Si consideri la funzione costante

$$1 : A \to \mathbb{C} \ ,$$

e si osservi che, essendo mis $A < +\infty$, si ha:

$$1 \in L^\rho(A) \quad , \quad \|1\|_\rho = (\text{mis } A)^{1/\rho} = (\text{mis } A)^{(p-q)/pq} \ .$$

Sussistono gli assert seguenti:

a) sia $f \in L^p(A)$; siccome

$$f = f \cdot 1 \quad , \quad f \in L^p(A) \ , \ 1 \in L^\rho(A) \ ,$$

per il Teorema di Hölder 1.4.4 si ha

$$f \in L^q(A) \quad , \quad \|f\|_q \leqslant \|f\|_p \cdot \|1\|_\rho = (\text{mis } A)^{(p-q)/pq} \|f\|_p \ ;$$

b) in particolare: $q < p \Rightarrow L^p(A) \subset L^q(A)$

c) in particolre: per $\forall p$ con $1 < p \leqslant \infty$ si ha (per l'item a. con $q = 1$):
  - $L^p(A) \subset L^1(A)$
  - $f \in L^p(A) \Rightarrow \|f\|_1 \leqslant (\text{mis } A)^{(p-1)/p} \|f\|_p$.

1.5 Spazi con famiglie di seminorme

Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, e sia

$$\| \cdot \|_j \qquad j \in J$$

una famiglia di seminorme in X.

Se

- per ogni $x \in X$ si ha:

$$\text{“}\|x\|_j = 0 \text{ per } \forall j \in J\text{”} \Rightarrow x = 0 \ ,$$

ossia se l'*unico* vettore avente tutte le seminorme *nulle* è il vettore *nullo*, allora:

- $\|\cdot\|_j \quad j \in J$ si dice un famiglia *separante* di seminorme in X.

Sia

$$\|\cdot\|_j \qquad j \in J$$

una famiglia separante di seminorme in X.

Tale famiglia induce in X le seguenti definizioni di successioni convergenti e successioni di Cauchy. Sia

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

una successione di elementi di X:

- se esiste $x \in X$ tale che per ogni $j \in J$ si ha:

  $$\lim_{k\to\infty} \|x - x_k\|_j = 0 \ ,$$

  allora:

  - $x_1, x_2, x_3, \dots$ si dice una successione *convergente*,
  - se $y \in X$ è tale che per ogni $j \in J$ si ha:

    $$\lim_{k\to\infty} \|y - x_k\|_j = 0$$

    allora si ha $y = x$,

    Cenno. Sia $j \in J$; per ogni k si ha

    $$\|y - x\|_j = \|(y - x_k) + (x_k - x)\|_j \leqslant \|y - x_k\|_j + \|x - x_k\|_j \ ,$$

    ne segue

    $$\|y - x\|_j = 0 \text{ per ogni } j \in J$$

    e quindi $x - y = 0$. ■
  - si pone:

    $$x = \lim_{k\to\infty} x_k$$

    e si dice che $x_1, x_2, x_3, \dots$ *converge* ad x;

- se per ogni $j \in J$ si ha:

  - per ogni $\varepsilon > 0$ esiste k tale che, per ogni $k_1, k_2 \geqslant k$ si ha

    $$\|x_{k_2} - x_{k_1}\|_j < \varepsilon \ ,$$

allora:

- $\diamond$ $x_1, x_2, x_3, \ldots$ si dice una successione *di Cauchy.* ;

- $\circ$ si ha:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots \ \text{ convergente} \Longrightarrow x_1, x_2, x_3, \ldots \ \text{ di Cauchy}$$

Se X verifica anche la condizione:

- $\circ$ per ogni successione $x_1, x_2, x_3, \ldots$ di elementi di X, si ha

$$x_1, x_2, x_3, \ldots \ \text{ di Cauchy} \Longrightarrow x_1, x_2, x_3, \ldots \ \text{ convergente} \ ,$$

allora:

- $\circ$ X si dice uno spazio *completo* rispetto alla famiglia di seminorme.

1.6 Gli spazi L^1_{loc}. Seminorme indotte da compatti: convergenza nel senso di L^1_{loc}

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto.

Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tale che

- $\circ$ per ogni compatto $K \subset \Omega$, f è integrabile su K,

si dice una funzione *localmente integrabile* su Ω; l'insieme delle funzioni localmente integrabili su Ω si denota con

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \ ;$$

$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$.

Sia $\mathscr{K}$ l'insieme di tutti i sottinsiemi compatti K di Ω. Per ogni $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ed ogni $K \in \mathscr{K}$, si ponga

$$\|f\|_K = \int_K |f| \ .$$

Si ha:

- $\circ$ per $\forall K \in \mathscr{K}$, $\|\cdot\|_K : L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ è una seminorma in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$;
- $\circ$ $\|\cdot\|_K \quad K \in \mathscr{K}$ è una famiglia separante di seminorme in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Sia $f_1, f_2, f_3, \ldots$ una successione di elementi di $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$;

- se:
  - $f_1, f_2, f_3, \ldots$ è convergente relativamente alla famiglia separante di seminorme
$$\|\cdot\|_K \qquad K \in \mathscr{K} \ ,$$
    e $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ è il limite di tale famiglia,

  allora:
  - $f_1, f_2, f_3, \ldots$ si dice una successione L^1_{loc}-*convergente*,
  - si pone:
$$f = L^1_{\text{loc}}\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k \ ;$$
- se:
  - $f_1, f_2, f_3, \ldots$ è di Cauchy relativamente alla famiglia separante di seminorme
$$\|\cdot\|_K \qquad K \in \mathscr{K} \ ,$$

  allora:
  - $f_1, f_2, f_3, \ldots$ si dice una successione *di* L^1_{loc}-*Cauchy*.

Si ha:

- $f_1, f_2, f_3, \ldots$ è L^1_{loc}-convergente $\Longleftrightarrow$ per ogni compatto $K \subset \Omega$
$$f_{1\diagup K}, f_{2\diagup K}, f_{3\diagup K}, \ldots$$
  è L^1-convergente in $L^1(K)$,
- $f_1, f_2, f_3, \ldots$ è di L^1_{loc}-Cauchy $\Longleftrightarrow$ per ogni compatto $K \subset \Omega$
$$f_{1\diagup K}, f_{2\diagup K}, f_{3\diagup K}, \ldots$$
  è di L^1-Cauchy in $L^1(K)$;

tenuto conto della L^1-completezza di ogni $L^1(K)$, si ha:

- $f_1, f_2, f_3, \ldots$ è L^1_{loc}-convergente $\Longleftrightarrow$ $f_1, f_2, f_3, \ldots$ è di L^1_{loc}-Cauchy;

ne segue che:

- $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ è uno spazio completo rispetto alla famiglia separante di seminorme
$$\|\cdot\|_K \qquad K \in \mathscr{K} \ .$$

Il Teorema seguente prova che ciascuno spazio $L^p(\Omega)$ è sottospazio di $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, e che ogni successione L^p-convergente di elementi di $L^p(\Omega)$ è anche L^1_{loc}-convergente in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ed ha lo stesso limite.

1.6.1 Teorema. Sia $p \in \mathbb{R}$ tale che $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Sussitono gli asserti:

a) Sia $f \in L^p(\Omega)$. Per ogni compatto $K \subset \Omega$, per il Teorema 1.4.5, si ha:
$$f_{/K} \in L^p(K) \subset L^1(K) \ ,$$
e si ha anche:
$$\|f\|_K = \|f_{/K}\|_1 \leqslant (\mathrm{mis}\ K)^{(p-1)/p}\|f_{/K}\|_p \leqslant (\mathrm{mis}\ K)^{(p-1)/p}\|f\|_p \ .$$

b) $L^p(\Omega) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ (segue dal primo asserto di a)).

c) Siano $f_1, f_2, f_3, \dots \ , \ f$ rispettivamente una successione di elementi di $L^p(\Omega)$ ed un elemento di $L^p(\Omega)$ tali che
$$f = L^p\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k \ ,$$
allora si ha
$$f = L^1_{\mathrm{loc}}\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k$$
(segue dal secondo asserto di a)).

- **Attenzione.** Possono esistere successioni di elementi di $L^p(\Omega)$ che sono L^1_{loc}-convergenti ma che non sono L^p-convergenti: ad esempio, in $L^p(\mathbb{R})$ la successione
$$f_k(x) = k\chi_{[k,k+1/k]}(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad , \quad k = 1, 2, 3, \dots$$
(ove $\chi_{[k,k+1/k]}$ = "*funzione caratteristica dell'ntervallo* $[k, k+1/k]$") verifica le proprietà:
  - ◇ è una successione L^1_{loc}-convergente, e si ha $L^1_{\mathrm{loc}}\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k = 0$,
  - ◇ non è di L^p-Cauchy, e pertanto non è L^p-convergente.

Capitolo 2

Distribuzioni

2.1 Pregi, limitazioni e indicazioni di ampliamento degli spazi L^1_{loc}

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto; si consideri lo spazio $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ dotato della L^1_{loc}-convergenza.

Pregi:

- ogni $L^p(\Omega)$ è sottospazio di $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$,
- ogni successione L^p-convergente in $L^p(\Omega)$ resta convergente in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e mantiene lo stesso limite,
- $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ è completo, ossia ogni successione che *sembra* convergere (ossia ogni successione di L^1_{loc}-Cauchy), converge *veramente* (ossia è una successione L^1_{loc}-convergente).

Limitazioni:

- solo per le $f \in C^1(\Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ si ha una definizione sistematica, e per poche altre artificiosa, di *derivazione parziale*; questa limitazione verrà rimossa dalle *distribuzioni*,
- la derivazione parziale su $C^1(\Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ ha un *pessimo comportamento* rispetto alla L^1_{loc}-convergenza; ad esempio, in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$
  - la successione
$$f_k(x) = \frac{1}{k} \sin kx$$

verifica

$$L^1_{\text{loc}}\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k = 0 \ ,$$

e quindi è una successione L^1_{loc}-convergente,

- ∘ la successione delle derivate

$$Df_k(x) = \cos kx$$

non è una successione di L^1_{loc}-Cauchy.

Cenno. Per $\forall k$ si ha infatti:

$$\begin{aligned}\|Df_{2k} - Df_k\|_{[0,2\pi]} &= \int_0^{2\pi} |\cos 2kx - \cos kx| = \\ &= k\int_0^{2\pi/k} |\cos 2kx - \cos kx| = \\ &= k\frac{1}{k}\int_0^{2\pi} |\cos 2x - \cos x| = \int_0^{2\pi} |\cos 2x - \cos x| \ ,\end{aligned}$$

e l'ultimo integrale non dipende da k ed è $\neq 0$. ■

questa limitazione verrà rimossa dalle *distribuzioni*.

Indicazioni di ampliamento:

- introdurre in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ una famiglia separante di seminorme *di tipo nuovo* (concettualmente più vicine a *procedimenti fisici di misura* che a usuali *stime matematiche di grandezza*) rispetto alla quale:
  - ∘ **2.1.1** tutte le *vecchie* successioni L^1_{loc}-convergenti restino convergenti e il relativo limite non cambi,
  - ∘ **2.1.2** compaiano *nuove* successioni di Cauchy,
- completare $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (con procedimento analogo a quello che fa passare da $\mathbb{Q}$ ad $\mathbb{R}$), ossia costruire un sovraspazio di $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e prolungare a tale sovraspazio la famiglia di *nuove* seminorme in modo che:
  - ∘ **2.1.3** nel *completamento* tutte le *nuove* successioni di Cauchy di elementi di $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ abbiano limite,
  - ∘ **2.1.4** ogni elemento del *completamento* sia limite di successioni di Cauchy di elementi di $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (ossia che il completamento non possieda elemeti *superflui*),

- scegliere la famiglia separante di *nuove* seminorme in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ in modo che:
  - **2.1.5** il quantitativo di nuove successioni di Cauchy di $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ sia sufficientemente grande da garantire che tra i loro limiti nel sovraspazio si trovino elementi che ragionevolmente svolgano nuovi ruoli, ad esempio quello di "modellare masse concentrate in un punto (*delta di Dirac*)" o di "fornire *derivate* a tutti gli elementi di $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$",
  - **2.1.6** il completamento sia a sua volta *completo* (ossia tale che ogni sua successione di Cauchy vi abbia limite).

2.2 Idee guida per nuove seminorme in L^1_{loc}

Le considerazioni che seguono indicano un modo di interpretare gli elementi di L^1_{loc} come *fenomeni* :

- consideriamo un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$;
- come *veri* fenomeni su Ω consideriamo i campi elettrici stazionari $E(x)$ aventi *risultante* su ogni sottinsieme compatto di Ω, ossia tali che le loro componenti

$$E_1(x), E_2(x), E_3(x)$$

  appartengono ad $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$;
- in tale contesto logico gli elementi di $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ *divengono a loro volta* fenomeni poiché assumono il ruolo di *componenti* di campi elettrici stazionari.

Le considerazioni che seguono indicano un modo di definire *procedure di misura* sullo spazio $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ coerenti con il ruolo che $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ sta svolgendo:

- come *strumento di misura* consideriamo una carica stazioneria campione C in Ω di densità

$$\varphi(x) \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \quad ,$$

  ossia tale che per ciascun sottinsieme compatto di Ω sia determinato il *quantitativo di carica* in esso contenuto;

- ogni campo elettrico stazionario $E(x)$ con componenti

$$E_1(x), E_2(x), E_3(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \ ,$$

  assoggetta la *carica campione* C al campo di forze $F(x)$ in Ω di componenti

$$F_1(x) = E_1(x)\varphi(x),\ F_2(x) = E_2(x)\varphi(x),\ F_3(x) = E_3(x)\varphi(x) \ ;$$

  le forze esercitate dal campo $E(x)$ su C ammettono quindi *risultante* se e solo se

$$E_1(x)\varphi(x),\ E_2(x)\varphi(x),\ E_3(x)\varphi(x) \ \in L^1(\Omega);$$

- *scegliamo* quindi come *strumento di misura* una carica campione C *tale che* $\forall E(x)$ a componenti in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ eserciti su C un campo di forze *dotato di risultante*;
  - lo *strumento di misura* C si identifica con la densità φ;
  - la *procedura di misura* che, per $\forall f(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, interpretata come componente h-esima di un campo $E(x)$, associa la componente h-esima della risultante del conseguente campo di forze agente su C, si dentifica con l'applicazione

$$\mu_\varphi : L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \to \mathbb{C}$$

    definita da

$$\mu_\varphi(f) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \ ;$$

  - tenuto conto che la procedura di misura μ_φ è lineare, l'applicazione

$$\|\cdot\|_\varphi : L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \Rightarrow \mathbb{R}$$

    definita da

$$\|f\|_\varphi = |\mu_\varphi(f)| = \Big| \int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \Big|$$

    è una *seminorma* in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

2.3 Gli spazi L^∞_{sc} : nuove seminorme in L^1_{loc}

Le idee guida della Sezione 2.2 attribuiscono significato fisico alle definizioni e nozioni che seguono.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}$ un aperto.

Per ogni funzione

$$\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$$

poniamo:

$$\begin{aligned} &\Gamma_\varphi = \big\{a \in \Omega : \exists I(a,r) \subset \Omega \text{ tale che } \varphi_{\diagup I(a,r)} = 0\big\} \\ &\text{supp } \varphi = \Omega \setminus \Gamma_\varphi = \big\{a \in \Omega : \forall I(a,r) \subset \Omega,\ \varphi_{\diagup I(a,r)} \neq 0\big\} \end{aligned} \quad ;$$

si osservi che:

- Γ_φ è il massimo sottinsieme aperto di Ω la restrizione al quale della funzione φ è nulla; si chiama l'*insieme di nullità* di φ;
- supp φ è, per definizione, un sottinsieme di Ω; si chiama il *supporto* di φ ;
- se $\Omega = \mathbb{R}^n$ allora supp φ è un insieme chiuso.

Indichiamo con

$$L^\infty_{\text{sc}}(\Omega) \qquad (\text{“sc” sta per “supporto compatto”})$$

lo spazio vettoriale delle funzioni

$$\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$$

tali che

$$\begin{cases} \varphi \in L^\infty(\Omega) \\ \text{supp } \varphi \text{ è compatto} \end{cases} .$$

Il Teorema seguente caratterizza il ruolo degli elementi di $L^\infty_{\text{sc}}(\Omega)$.

2.3.1 Teorema. Sia $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione; sono equivalenti gli asserti:

a) per $\forall f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ si ha $f\varphi \in L^1(\Omega)$,

b) $\varphi \in L^\infty_{\text{sc}}(\Omega)$.

Per la dimostrazione vedi Capitolo 10

Il Teorema 2.3.1 prova che gli elementi di $L^\infty_{\mathrm{sc}}(\Omega)$ sono tutte e sole le funzioni

$$\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$$

per le quali ha senso la Definizione seguente.

2.3.2 Definizione. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Per ogni

$$\varphi(x) \in L^\infty_{\mathrm{sc}}(\Omega) \quad ,$$

- indichiamo con
$$\mu_\varphi : L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \to \mathbb{C}$$
l'applicazione definta da:
$$\mu_\varphi(f) \triangleq \int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \ ;$$
si osservi che μ_φ è lineare;
- indichiamo con
$$\|\cdot\|_\varphi : L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \to \mathbb{R}$$
l'applicazione definita da:
$$\|f\|_\varphi \triangleq |\mu_\varphi(f) = \left| \int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \right| \ ;$$
tenuto conto che μ_φ è lineare, l'applicazione $\|\cdot\|_\varphi$ è una seminorma in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

2.3.3 Definizione. Coerentemente con la Definizione 2.3.2, le

$$\varphi \in L^\infty_{\mathrm{sc}}(\Omega)$$

verranno chiamate *strumenti di misura* su $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

2.4 Un linguaggio unificante

Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$; i suoi elementi verranno chiamati *fenomeni* e pensati come *fenomeni.*

I fenomeni fisici sono assoggettabili a procedure di misura (brevemente: *PDM*) che forniscono *un risultato numerico*; una *PDM* si identifica quindi con l'applicazione definita da:

$$\textit{fenomeno fisico} \longmapsto \textit{risultato della PDM applicata al fenomeno} \ ;$$

la *PDM* si dice *lineare* se tale applicazione è lineare.

I *funzionali lineari su* X, ossia

- le applicazioni lineari

$$\mu : X \to \mathbb{C} \ ,$$

verranno chiamati *PDM lineari su* X e pensati come *PDM lineari* (brevemente: *PDML*) *su* X.

Ogni *PDML* su X

$$\mu : X \to \mathbb{C}$$

induce una seminorma in X, e precisamente la seminorma definita da:

$$\|x\|_\mu \triangleq |\mu(x)| \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in X \ .$$

Una *famiglia di PDML* su X

$$\mu_j \qquad j \in J$$

si dirà *separante* se la famiglia di seminorme in X

$$\| \cdot \|_j \triangleq \| \cdot \|_{\mu_j} \qquad j \in J$$

è separante.

Il seguente Teorema caratterizza le famiglie separanti di *PDML*.

2.4.1 Teorema. Sia

$$\mu_j \qquad j \in J$$

una famiglia di *PDML* in X. Sono equivalenti gli asserti:

a) la famiglia $\mu_j \ \ j \in J$ è separante,

b) per $\forall x \in X$ si ha:

$$(\forall j \in J, \ \ \mu_j(x) = 0) \Rightarrow (x = 0) \ .$$

(*Dimostrazione ovvia.*)

Sia

$$\mu_j \qquad j \in J$$

una famiglia separante di *PDML* su X, e sia

$$\| \cdot \|_j \triangleq \| \cdot \|_{\mu_j} \qquad j \in J$$

la corrispondente famiglia separante di seminorme in X.

Consideriamo in X la convergenza indotta da tale famiglia separante di seminorme; tale convergenza si dirà anche *indotta dalla famiglia separante di PDML*.

Il Teorema seguente fornisce la caratterizzazione delle successioni convergenti e delle successioni di Cauchy, in termini di *PDML*.

2.4.2 Teorema. Siano $x_1, x_2, x_3, \dots\,,\ x$ rispettivamente una sucessione di elementi di X ed un elemento di X. Si ha:

a) Sono equivalenti gli asserti:

- $\lim_{k\to\infty} x_k = x$,
- per $\forall j \in J$, in $\mathbb{C}$ si ha:

$$\lim_{k\to\infty} \mu_j(x_k) = \mu_j(x)\ .$$

b) Sono equivalenti gli asserti:

- $x_1, x_2, x_3, \dots$ è una successione di Cauchy,
- per $\forall j \in J$, in $\mathbb{C}$ esiste (solo per evitare interpretazioni erronee precisiamo: *finito*)

$$\lim_{k\to\infty} \mu_j(x_k)$$

Cenno. a). Si osservi che: $\|x - x_k\|_j = |\mu_j(x - x_k)| = |\mu_j(x) - \mu_j(x_k)|$.
b). Si osservi che: $\|x_h - x_k\|_j = |\mu_j(x_h - x_k)| = |\mu_j(x_h) - \mu_j(x_k)|$. ■

2.5 Insiemi separanti di elementi di L^∞_{sc}

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto.

Un sottinsieme J di $L^\infty_{\mathrm{sc}}(\Omega)$ (cui fare riferimento come insieme di *strumenti di misura* su $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$) si dirà *separante* se la famiglia (vedi Sezione 2.3)

$$\mu_\varphi \qquad \varphi \in J$$

di *PDML* su $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ è separante, o equivalentemente se la famiglia

$$\|\cdot\|_\varphi \qquad \varphi \in J$$

di seminorne in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ è separante. Ciascun $J(\subset L^\infty_{\mathrm{sc}}(\Omega))$ separante determina quindi una convergenza in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

2.5.1 Teorema. Sia $J \subset L^\infty_{\mathrm{sc}}(\Omega)$ un insieme separante; indichiamo con il prefisso "J-" la corrispondente nozione di convergenza.

Dati comunque una successione ed un elemento $f_1, f_2, f_3, \dots\,,\quad f$ di $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, si ha:

$$L^1_{\mathrm{loc}}\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k = f \ \Rightarrow\ J\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k = f\ .$$

Cenno. Per $\forall \varphi \in L^\infty_{\text{sc}}(\Omega)$ si ha

$$\left| \int_\Omega f_k\varphi - \int_\Omega f\varphi \right| = \left| \int_\Omega (f_k - f)\varphi \right| =$$

$$= \left| \int_{\text{supp }\varphi} (f_k - f)\varphi \right| \leqslant (\sup|\varphi|)\|f_k - f\|_{\text{supp }\varphi} \quad .$$

■

Il precedente Teorema 2.5.1 prova che comunque venga scelto un insieme separante J di *strumenti di misura*, tutte le vecchie successioni L^1_{loc}-convergenti restano convergenti e il loro limite non cambia (vedi richiesta 2.1.1).

2.5.2 Teorema. Siano $\Lambda, J \subset L^\infty_{\text{sc}}(\Omega)$ due insiemi separanti; indichiamo con i prefissi "Λ-, J-" le rispettive nozioni di convergenza.

Se

$$\Lambda \subset J ,$$

allora dati comunque una successione ed un elemento $f_1, f_2, f_3, \ldots ,\ \ f$ di $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, sussistono gli asserti (dimostrazione ovvia):

- $f_1, f_2, f_3, \ldots$ di J-Cauchy $\Rightarrow$ $f_1, f_2, f_3, \ldots$ di Λ-Cauchy,
- $J\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f \ \Rightarrow\ \Lambda\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$.

Il precedente Teorema 2.5.2 prova che comunque un insieme separante J di strumenti di misura venga sostituito da un suo *sottinsieme* separante Λ:

- ◦ tutte le vecchie successioni di J-Cauchy restano di Cauchy,
- ◦ tutte le vecchie successioni J-convergenti restano convergenti e il loro limite non cambia;

ne segue che:

- ◦ per incrementare il quantitativo di successioni di Cauchy con ulteriori successioni, potenziali approssimanti di futuri elementi svolgenti nuovi ruoli (vedi richiesta 2.1.5), è *buona norma* ridurre il quantitativo di strumenti di misura,
- ◦ tali riduzioni nulla fanno perdere di situazioni positive già acquisite.

La Sezione seeguente descrive i sottinsiemi separante di $L^\infty_{\text{sc}}(\Omega)$ più comunemente usati nella Teoria delle Distribuzioni.

2.6 Gli spazi $\mathscr{D}$ e $\mathscr{D}^m$

Le considerazioni che seguono provano che esistono funzioni C^∞ su $\mathbb{R}^n$ *non nulle* aventi supporto compatto; più precisamente provano che per $\forall a \in \mathbb{R}^n$ e $\forall \varepsilon > 0$ esistono funzioni C^∞ aventi per supporto $\overline{I(a,\varepsilon)}$.

2.6.1 Nota. Sia $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, e sia

$$\sigma(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

la funzione definita da

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leqslant 0 \\ P(1/t)e^{-1/t} & \text{per } 0 < t \end{cases} .$$

Si ha:

a) $\sigma(t)$ è continua

b) $\sigma(t)$ è derivabile

c) $\exists Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ tale che

$$\sigma^{(1)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leqslant 0 \\ Q(1/t)e^{-1/t} & \text{per } 0 < t \end{cases}$$

Ne segue che: $\sigma(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Cenno. a). $\lim\limits_{t\to 0^+} \sigma(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} P(1/t)e^{-1/t} = \lim\limits_{\tau\to +\infty} P(\tau)/e^\tau = 0$.

b). $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\sigma(t)-\sigma(0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0^+} (1/t)P(1/t)e^{-1/t} = \lim\limits_{\tau\to +\infty} \tau P(\tau)/e^\tau = 0$.

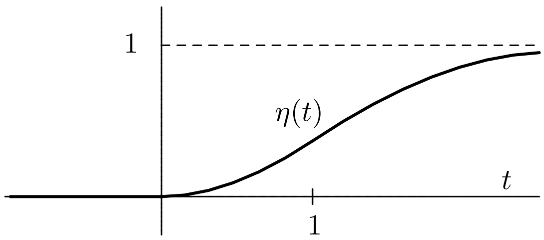
c). Usare $Q(x) = x^2\bigl(P(x) - P^{(1)}(x)\bigr)$. ■

Si consideri la funzione

$$\eta(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definita da

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & t \leqslant 0 \\ e^{-1/t} & 0 < t \end{cases}$$



si verifichi che

▼ $\eta(t) \geqslant 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$

⧫ supp $\eta = [0, +\infty)$

▲ $\eta(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ (usare la Nota 2.6.1)

Si consideri la funzione

$$\psi(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

definita da

$$\psi(x) = \eta\left(1 - \|x\|^2\right) = \eta\left(1 - \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)\right) \; ;$$

nel caso di $n = 1, 2$ si disegni il grafico di $\psi(x)$; in generale si ha:

▼ $\psi(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$

⧫ supp $\psi(x) = \overline{I(0,1)}$

▲ $\psi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (prodotto di composizione di funzioni C^∞)

Siano $a \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0$; si consideri la funzione

$$\varphi(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

definita da

$$\varphi(x) = \psi\left(\frac{1}{\varepsilon}(x - a)\right) \; ;$$

nel caso di $n = 1, 2$ si disegni il grafico di $\varphi(x)$; in generale si ha:

▼ $\varphi(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$

⧫ supp $\varphi = \overline{I(a, \varepsilon)}$

▲ $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (prodotto di composizione di funzioni C^∞)

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto.
Si denota con $\mathscr{D}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni

$$\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$$

- dotate di derivate parziali continue di tutti gli ordini (ossia delle funzioni C^∞),

- aventi supporto compatto (si ricordi che supp φ è per definizione un sottinsieme di Ω).

Per $\forall m \in \mathbb{N}$, si denota con $\mathscr{D}^m(\Omega)$ lo spazio delle funzioni

$$\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$$

- dotate di derivate parziali continue fino all'odine m-esimo incluso (ossia delle funzioni C^m),
- aventi supporto compatto;

Si osservi che:

- $\mathscr{D}^0(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni continue su Ω aventi supporto compatto,
- $\mathscr{D}^0(\Omega) \supset \mathscr{D}^1(\Omega) \supset \mathscr{D}^2(\Omega) \supset \cdots \supset \mathscr{D}(\Omega)$,
- $\mathscr{D}(\Omega) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathscr{D}^m(\Omega)$.

Si considerino gli spazi $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathscr{D}^m(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni, rispettivamente C^∞ e C^m, definite su tutto $\mathbb{R}^n$ aventi supporto compatto. Si osservi che (facile dimostrazione):

- $\mathscr{D}(\Omega)$ è l'insieme delle restrizioni ad Ω delle funzioni $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tali che supp $\varphi \subset \Omega$,
- $\mathscr{D}^m(\Omega)$ è l'insieme delle restrizioni ad Ω delle funzioni $\varphi \in \mathscr{D}^m(\mathbb{R}^n)$ tali che supp $\varphi \subset \Omega$.

Si ricordi che per $\forall a \in \mathbb{R}^n$ e $\forall \varepsilon > 0$ esistono funzioni C^∞ aventi per supporto $\overline{I(a,\varepsilon)}$.

Ne segue che tutti gli spazi $\mathscr{D}(\Omega)$, $\mathscr{D}^m(\Omega)$ possiedono elementi non nulli (risultato ben noto; per le funzioni di classe C^m quasi ovvio, per le funzioni di classe C^∞ assolutamente non evidente).

Il Teorema seguente (per la dimostrazione vedi Vladimirov: Lemma, pg 15) prova che gli insiemi

$$\mathscr{D}(\Omega),\ \mathscr{D}^m(\Omega) \subset L^\infty_{\text{sc}}(\Omega)$$

sono insiemi separanti di strumenti di misura lineari su $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (vedi Teorema 2.4.1).

2.6.2 Lemma(Du Bois-Reymond)**.** Sia $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Sussiste l'asserto:

$$(\int_\Omega f\varphi = 0 \text{ per } \forall\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)) \Longrightarrow (f = 0) \ .$$

Tenuto conto del Teorema 2.5.2 e delle cosiderazioni seguenti, tra gli insiemi separanti

$$\mathscr{D}(\Omega),\ \mathscr{D}^m(\Omega) \subset L^\infty_{\text{sc}}(\Omega)$$

quello che dà luogo al maggior quantitativo di successioni di Cauchy è il più piccolo, ossia $\mathscr{D}(\Omega)$; la convergenza relativa indotta in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ è analizzata nella Sezione seguente.

2.7 *PDML* e seminorme indotte da $\mathscr{D}$ in L^1_{loc}: convergenza in senso debole

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto.

In $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ si consideri (vedi Sezioni 2.3 e 2.4) la convergenza indotta dall'insieme separante di strumenti di misura $\mathscr{D}(\Omega)$, ossia indotta dalla famiglia di *PDML*

$$\mu_\varphi(f) = \int_\Omega f\varphi \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \ ,$$

o equivalentemente dalla famiglia separante di seminorme

$$\|f\|_\varphi = \left|\int_\Omega f\varphi\right| \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \ .$$

Tale convergenza si chiama *convergenza in senso debole* (brevemente: s.d.).

Siano $f_1, f_2, f_3, \ldots\ ,\ \ f$ rispettivamente una successione ed un elemento di $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$:

- se f è il *limite in s.d.* della successione $f_1, f_2, f_3, \ldots$, si scrive
$$f = \lim_{k\to\infty} \text{s.d. } f_k \ ;$$
- se $f_1, f_2, f_3, \ldots$ è una *successione di Cauchy in s.d.* si dice che $f_1, f_2, f_3, \ldots$ è una successione *di Cauchy s.d.*;
- per il Teorema 2.4.2 sono equivalenti gli asserti:

  a) $\lim\limits_{k\to\infty} \text{s.d. } f_k = f$,

b) per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ si ha

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \varphi = \int_\Omega f \varphi \ ;$$

- ancora per il Teorema 2.4.2 sono equivalenti gli asserti:

  a) $f_1, f_2, f_3, \ldots$ è una successione di Cauchy s.d.
  b) per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, in $\mathbb{C}$ esiste finito

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \varphi$$

2.8 Confronto tra L^1_{loc}-convergenza e convergenza s.d.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto; si consideri le spazio $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Il Teorema 2.5.1 prova che tutte le successioni L^1_{loc}-convergenti restano convergenti in s.d. e il loro limite non cambia; tenuto conto della L^1_{loc}-completezza, ovviamente tutte le successioni di L^1_{loc}-Cauchy sono anche di Cauchy s.d..

La Nota seguente prova che esistono successioni convergenti in s.d. ma no di L^1_{loc}-Cauchy e quindi no L^1_{loc}-convergenti.

2.8.1 Nota. Nella Sezione 2.1, al 2° Item della voce "Limitazioni" si è considerata la seguente successione di elementi di $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$

$$f_k(x) = \frac{1}{k} \sin kx$$

e, come limitazione della L^1_{loc}-convergenza, si è provato che

- $L^1_{\text{loc}}\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k = 0$,
- mentre la successione delle derivate

$$D f_k(x) = \cos kx$$

  non è una successione di L^1_{loc}-Cauchy.

Rispetto alla convergenza s.d. si ha invece:

- la successione $D f_k$ è una successione convergente s.d., e precisamente si ha:

$$\lim_{k\to\infty} \text{s.d. } D f_k = 0 \ .$$

Cenno. Sia $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, e siano $a < b$ tali che supp $\varphi \subset [a, b]$. Si ha:

$$\int_{\mathbb{R}} Df_k(x))\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} (\cos kx)\varphi(x) = \int_a^b (\cos kx)\varphi(x) =$$
$$= \left[\frac{1}{k}(\sin kx)\varphi(x)\right]_a^b - \frac{1}{k}\int_a^b (\sin kx)\varphi^{(1)}(x) =$$
$$= -\frac{1}{k}\int_a^b (\sin kx)\varphi^{(1)}(x) \ ;$$

Ne segue:

$$\left|\int_{\mathbb{R}} (Df_k(x))\varphi(x)\right| \leqslant \frac{1}{k}\int_a^b |\varphi^{(1)}(x)| \ .$$

■

Le considerazioni seguenti provano che $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ non è completo rispetto alla convergenza s.d., ossia che esistono successioni di Cauchy s.d. che non sono convergenti s.d., ossia successioni che misurate con $\forall\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ danno luogo a successioni numeriche di misure convergenti (in $\mathbb{C}$), ma che non convergono in senso debole a nessun elemento di $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

2.8.2 Sia $a \in \Omega$;

▼ sia $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$ una successione di insiemi tale che

$$\forall \Gamma_k \begin{cases} \subset \Omega \\ \ni a \\ \text{è compatto} \\ \text{mis } \Gamma_k \neq 0 \end{cases} \qquad \lim_{k\to\infty} \text{diametro}(\Gamma_k) = 0$$

ad esempio: scelto $\overline{I(a,\varepsilon)} \subset \Omega$, si può porre

$$\Gamma_k = \overline{I(a, \varepsilon/k)}$$

♦ sia $f_1, f_2, f_3, \ldots$ una successione di funzioni tale che

$$\forall f_k \begin{cases} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \\ \geqslant 0 \\ \text{supp } f_k \subset \Gamma_k \ \text{(quindi } f_k \in L^1(\Omega)) \\ \displaystyle\int_\Omega f_k = 1 \end{cases}$$

ad esempio: si può porre

$$f_k = (1/\text{mis}\ \Gamma_k)\, \chi_{\Gamma_k}$$

ove χ_{Γ_k} è la funzione caratteristica di Γ_k;

da *un punto di vista* fisico:

- ♦ se ciascuna delle funzioni $f_1, f_2, f_3, \ldots$ rappresenta una *densità di massa* in Ω,
- ♦ **2.8.3** allora la successione $f_1, f_2, f_3, \ldots$ descrive una *successsione di tentativi* di distribuire la massa 1 in Ω, concentrandola sempre più vicino ad a;

relativamente alla convergenza s.d. sussistono gli asserti:

- ♦ **2.8.4** per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ si ha

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \varphi = \varphi(a)$$

Cenno. Sia $\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua a valori reali; si ha

$$f_k \alpha \in L^1(\Omega)$$

$$\int_\Omega f_k \alpha = \int_{\Gamma_k} f_k \alpha \begin{cases} \geqslant (\min_{\Gamma_k} \alpha) \displaystyle\int_{\Gamma_k} f_k = \min_{\Gamma_k} \alpha \\ \leqslant (\max_{\Gamma_k} \alpha) \displaystyle\int_{\Gamma_k} f_k = \max_{\Gamma_k} \alpha \end{cases}$$

e quindi

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \alpha = \alpha(a)$$

Si applichi tale uguaglianza alla parte reale ed alla parte immaginaria di φ. ■

- ♦ **2.8.5** la successione $f_1, f_2, f_3, \ldots$
  - ▽ è di Cauchy s.d. (segue dal precedente item)
  - △ non è convergente s.d.

Cenno. *Per assurdo:* sia $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tale che

$$\lim_{k\to\infty} \text{s.d. } f_k = f$$

Per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ si ha (vedi item precedente)

$$\int_\Omega f\varphi = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega f_k\varphi = \varphi(a)$$

In particolare, per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega \setminus \{a\})$ si ha

$$\int_{\Omega\setminus\{a\}} f\varphi = 0$$

e quindi, per il Lemma 2.6.2, si ha $f_{\diagup(\Omega\setminus\{a\})} = 0$, da cui segue $f = 0$; *assurdo:* per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ si avrebbe

$$0 = \int_\Omega 0 = \int_\Omega f\varphi = \varphi(a)$$

■

si conclude che

▲ $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ non è completo rispetto alla famiglia di seminorme

$$\|\cdot\|_\varphi \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$$

Le Sezioni seguenti provano che la *converganza s.d.* soddisfa le Richieste 2.1.5 e 2.1.6.

2.9 Predistribuzioni, l'insieme $\mathscr{D}'$ delle distribuzioni

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto.

Una riga infinita

$$(f_1, f_2, f_3, \ldots)$$

tale che

▼ $f_1, f_2, f_3, \ldots$ sia una successione di Cauchy s.d. in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$

si dirà

▲ una *predistribuzione* su Ω

Siano

$$(f_1, f_2, f_3, \ldots),\ (g_1, g_2, g_3, \ldots)$$

predistribuzioni su Ω; ovviamente sono equivalenti gli asserti

a) per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ si ha

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - g_k\|_\varphi = 0 \ ,$$

b) per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ si ha

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k\varphi = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega g_k\varphi \ ;$$

in tal caso

▼ diremo che

$$(f_1, f_2, f_3, \ldots),\ (g_1, g_2, g_3, \ldots)$$

sono predistribuzioni *equivalenti*

⧫ scriveremo

$$(f_1, f_2, f_3, \ldots) \sim (g_1, g_2, g_3, \ldots) \ ;$$

ovviamente

▲ $\sim$ è una relazione di equivalenza nell'insieme di tutte le predistribuzioni su Ω.

Per ogni predistribuzione

$$(f_1, f_2, f_3, \ldots)$$

su Ω si consideri la sua classe di equivalenza

$$[(f_1, f_2, f_3, \ldots)] = \big\{(g_1, g_2, g_3, \ldots) \text{ predistribuzione su } \Omega : (g_1, g_2, g_3, \ldots) \sim (f_1, f_2, f_3, \ldots)\big\} \ ;$$

date comunque predistribuzioni su Ω

$$(f_1, f_2, f_3, \ldots),\ (g_1, g_2, g_3, \ldots) \ ,$$

essendo $\sim$ una relazione di equivalenza, si ha:

▼ $(f_1, f_2, f_3, \ldots) \sim (g_1, g_2, g_3, \ldots) \Longrightarrow [(f_1, f_2, f_3, \ldots)] = [(g_1, g_2, g_3, \ldots)]$

▲ $(f_1, f_2, f_3, \ldots) \nsim (g_1, g_2, g_3, \ldots) \Longrightarrow [(f_1, f_2, f_3, \ldots)] \cap [(g_1, g_2, g_3, \ldots)] = \emptyset \ ;$

pertanto le classi di equivalenza sono una partizione dell'insieme delle predistribuzioni su Ω.

Ciascuna di tali classi di equivalenza si dirà una *distribuzione* su Ω. L'insieme delle distribuzioni su Ω si denota con

$$\mathscr{D}'(\Omega)$$

Una distribuzione su Ω si denota con un simbolo del tipo

$$f \qquad \text{o} \qquad f(x)$$

attenzione: il simbolo $f(x)$ serve solo a ricordare che una distribuzione su Ω è un elemento costruito utilizzando funzioni su Ω; dato $a \in \Omega$, il simbolo $f(a)$ è privo di significato.

Sia $f(x) \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Una predistribuzione $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$ su Ω tale che

$$f(x) = [(f_1, f_2, f_3, \ldots)]$$

si dirà

- un *rappresentante* di $f(x)$.

2.10 $\mathscr{D}'$ come spazio con *PDML* legate a $\mathscr{D}$; $\mathscr{D}'$-convergenza

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Si consideri l'insieme $\mathscr{D}'(\Omega)$ delle distribuzioni su Ω.

Le definizioni che seguono introducono in $\mathscr{D}'(\Omega)$ una struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{C}$:

▼ siano $f(x), g(x) \in \mathscr{D}'(\Omega)$, e sia $c \in \mathscr{D}'(\Omega)$,

▲ scelti comunque rappresentanti

$$(f_1, f_2, f_3, \ldots),\ (g_1, g_2, g_3, \ldots)$$

rispettivamente di $f(x),\ g(x)$), si pone

▽ $f(x) + g(x) = [(f_1 + g_1, f_2 + g_2, f_3 + g_3, \ldots)]$

△ $cf(x) = [(cf_1, cf_2, cf_3, \ldots)]$

(sono *buone definizioni* ossia il risultato è indipendente dalle particolari scelte di rappresentanti).

La definizione che segue introduce, per $\forall\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ (cui fare riferimento come strumenti di misura), una *PDML* μ_φ e la relativa seminorma in $\mathscr{D}'(\Omega)$:

▼ sia $\varphi(x) \in \mathscr{D}(\Omega)$,

▲ per $\forall f(x) \in \mathscr{D}'(\Omega)$, scelto comunque un rappresentante

$$(f_1, f_2, f_3, \dots) ,$$

di $f(x)$, si pone

▽ $\mu_\varphi(f) \triangleq \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k\varphi$ (è una buone definizione),

◊ $\mu_\varphi(f)$ si denota con i seguenti simboli aventi *l'aspetto grafico di integrali* (per ricordarne l'origine logica), modificato con *l'iserimento del simbolo* • (per ricordare che non sono integrali):

$$\int_\Omega f(x) \bullet \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega f \bullet \varphi ,$$

◊ si ha quindi

$$\mu_\varphi(f) = \int_\Omega f(x) \bullet \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega f \bullet \varphi = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k\varphi ,$$

△ $\|f\|_\varphi = |\mu_\varphi(f)| = \left| \int_\Omega f \bullet \varphi \right|$.

Il seguente Teorema prova che le famiglie di *PDML* e di seminorme

$$\mu_\varphi,\ \|\cdot\|_\varphi \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$$

sono separanti in $\mathscr{D}'(\Omega)$.

2.10.1 Sia $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Se per $\forall\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ si ha

$$\int_\Omega f \bullet \varphi = 0 ,$$

allora si ha $f = 0$.

Cenno. Sia $(f_1, f_2, f_3, \dots)$ un rappresentante di f. Si consideri la distribuzione $0 \in \mathscr{D}'(\Omega)$, ossia la distribuzione un cui rappresentante è

$$(0, 0, 0, \dots) .$$

La condizione implica che

$$(f_1, f_2, f_3, \dots) \sim (0, 0, 0, \dots) ;$$

pertanto si ha $f = 0$. ■

La convergenza indotta in $\mathscr{D}'(\Omega)$ dalle famiglie separanti di *PDML* e di seminorme

$$\mu_\varphi, \ \|\cdot\|_\varphi \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$$

si chiama $\mathscr{D}'$-convergenza.

Siano $f_1, f_2, f_3, \dots, \ \ f$ rispettivamente una successione ed un elemento di $\mathscr{D}'(\Omega)$. Per il Teorema 2.4.2 si ha:

▼ sono equivalenti gli asserti

a) $\mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k = f$,

b) per $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ si ha

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \bullet \varphi = \int_\Omega f \bullet \varphi \ ;$$

▲ sono equivalenti gli asserti

a) $f_1, f_2, f_3, \dots$ è una successione di $\mathscr{D}'$-Cauchy,

b) per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, in $\mathbb{C}$ esiste

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \bullet \varphi \ .$$

2.11 L^1_{loc} come sottospazio di $\mathscr{D}'$

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Si considerino gli spazi $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Ovviamente nessun $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ è *una classe di equivalenza di predistribuzioni su* Ω: quindi $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *non è un sottinsieme* di $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Le considerazioni seguenti provano che tale *negazione* è puramente formale, ed indica un modo naturale *per trasformare* $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ in *un sottinsieme di* $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Sia $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$; ovviamente si ha:

▼ $(f, f, f, \dots)$ è una predistribuzione su Ω;

si ponga

▲ $f^* = [(f, f, f, \dots)] \in \mathscr{D}'(\Omega)$

Per $\forall f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, per $\forall c \in \mathbb{C}$, e per $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, si ha

▼ $(f^* = g^*) \Longleftrightarrow (f = g)$ (usare 2.6.2),

- ♦ $(f+g)^* = f^* + g^*, \quad (cf)^* = c \cdot f^*,$
- ♦ $\displaystyle\int_\Omega f^* \bullet \varphi = \int_\Omega f\varphi,$
- ▲ $\|f^*\|_\varphi = \|f\|_\varphi.$

Tali risultati provano che:

- ▼ l'insieme
$$\left\{f^* : f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)\right\}$$
con le operazioni
$$f^* + g^*, \quad c \cdot f^*, \quad \int_\Omega f^* \bullet \varphi, \quad \|f^*\|_\varphi \ ,$$
è una *copia* in $\mathscr{D}'(\Omega)$ dell'insieme
$$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$$
con le operazioni
$$f+g, \quad c \cdot f, \quad \int_\Omega f\varphi, \quad \|f\|_\varphi \ ;$$
- ▲ la convenzione di *identificare*
$$f^* \qquad\qquad \text{con} \qquad\qquad f \ ,$$
ossia
$$[(f,f,f,\dots)] \qquad\qquad \text{con} \qquad\qquad f \ ,$$
non porta ambiguità.

Con tale convenzione (*adottata da qui in avanti*) si ha:

- ▼ **2.11.1** $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *diviene* un sottospazio di $\mathscr{D}'(\Omega)$; di conseguenza, tutti i sottospazi di $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, in particolare:
$$C^h(\Omega), \ \mathscr{D}^m(\Omega) \quad m \in \mathbb{N}$$
$$C^\infty(\Omega), \mathscr{D}(\Omega)$$
$$L^p(\Omega) \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty$$
divengono sottospazi di $\mathscr{D}'(\Omega)$;

▲ **2.11.2** per ogni $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, e ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$

▽ $\displaystyle\int_\Omega f \bullet \varphi = \int_\Omega f\varphi,$

△ le seminorme:

$$\|f\|_\varphi = \left|\int_\Omega f \bullet \varphi\right| \quad \text{come definita in } \mathscr{D}'(\Omega)$$

$$\|f\|_\varphi = \left|\int_\Omega f\varphi\right| \quad \text{come definita in } L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$$

coincidono;

di conseguenza, se $f_1, f_2, f_3, \ldots$ è una successione di elementi di $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, e $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, si ha (provare per esercizio)

▽ $(\lim\limits_{k\to\infty} \text{s.d. } f_k = f \text{ in } L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)) \Longleftrightarrow (\mathscr{D}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f \text{ in } \mathscr{D}'(\Omega)),$

△ $f_1, f_2, f_3, \ldots$ di Cauchy s.d. in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \Longleftrightarrow$

$f_1, f_2, f_3, \ldots$ di $\mathscr{D}'$-Cauchy in $\mathscr{D}'(\Omega)$,

2.12 $\mathscr{D}'$ come completamento di L^1_{loc} s.d.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Si considerino gli spazi

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega) \ .$$

Il Teorema seguente prova che ogni successione di Cauchy s.d. di elementi di $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ha $\mathscr{D}'$-limite in $\mathscr{D}'(\Omega)$.

2.12.1 Teorema. Sia $f_1, f_2, f_3, \ldots$ una successione di Cauchy s.d. di elementi di $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Sussistono gli asserti:

▽ $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$ è una predistribuzione su Ω,

△ posto $f = [(f_1, f_2, f_3, \ldots)] \in \mathscr{D}'(\Omega)$, si ha

$$\mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k = f \ .$$

Cenno. Per $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ si ha:

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega f_k \bullet \varphi = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega f_k\varphi = \int_\Omega f \bullet \varphi \ .$$

■

Il Teorema seguente prova che ogni elemento di $\mathscr{D}'(\Omega)$ è il $\mathscr{D}'$-limite di una successione di Cauchy s.d. di elementi di $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, ossia che $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ è $\mathscr{D}'$-denso in $\mathscr{D}'(\Omega)$.

2.12.2 Teorema. Sia $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Dato comunque un rappresentante

$$(f_1, f_2, f_3, \ldots)$$

di f, sussitono gli asserti:

- $\triangledown$ $f_1, f_2, f_3, \ldots$ è una successione di Cauchy s.d. di elementi di $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$,
- $\vartriangle$ si ha (stesse considerazioni della dimostrazione del Teorema precedente):
$$f = \mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k \ .$$

Il Corollario seguente (ovvia riformulazione di 2.12.2) consente di operare sulle distribuzioni in Ω in due modi equivalenti:

1°) sia scegliendone un rappresentante,

2°) sia scegliendo una successione di Cauchy s.d. di elementi di L^1_{loc} ad esse $\mathscr{D}'$-convergente.

2.12.3 Corollario. Sia $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Dati

$$f_1, f_2, f_3, \ldots \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \ ,$$

sono equivalenti gli asserti:

- $\triangledown$ $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$ è un rappresentante di f ,
- $\vartriangle$ $f = \mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k$.

2.13 Convergenza in $\mathscr{D}$. Funzionali lineari e continui su $\mathscr{D}$

NOTA: Per alcune dimostrazioni sui funzionali lineari e continui su $\mathscr{D}$, in questa Sezione vengono fatti rimandi al testo di Vladimirov. Nel leggere tali dimostrazioni si tenga conto in tale testo il simbolo $\mathscr{D}'$ viene usato per indicare lo spazio dei funzionali lineari e continui su $\mathscr{D}$.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto.

Da qui in avanti useremo le seguenti Notazioni.

2.13.1 Notazioni. Per $\forall q = (q_1, \ldots, q_n)$ poniamo:

- $|q| = q_1 + \cdots + q_n$,
- $\partial^q \triangleq \dfrac{\partial^{q_1+\cdots+q_n}}{\partial x_1^{q_1} \cdots \partial x_n^{q_n}}$,
- $x^q = (x_1, \ldots, x_n)^q \triangleq x_1^{q_1} \cdots x_n^{q_n}$.

La seguente Definizione introduce una nozione di convergenza per successioni nello spazio $\mathscr{D}(\Omega)$.

2.13.2 Definizione. Siano $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$, φ rispettivamente una successione ed un elemento di $\mathscr{D}(\Omega)$.

Se:

- esiste un compatto $K \subset \Omega$ tale che
$$\forall \text{supp } \varphi_k \subset K, \quad \text{supp } \varphi \subset K \ ,$$
- per $\forall q \in \mathbb{N}^n$ la successione $\partial^q\varphi_1, \partial^q\varphi_2, \partial^q\varphi_3, \ldots$ converge uniformemente a $\partial^q\varphi$ su K (e quindi anche su Ω),

allora:

- si dice che $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ *$\mathscr{D}$-converge a φ*,
- si scrive $\mathscr{D}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi$.

Un funzionale lineare
$$T : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$$
si dice *continuo* se per ogni successione $\varphi_k \in \mathscr{D}(\Omega)$ e per ogni elemento $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ si ha:
$$\mathscr{D}\text{-}\lim_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} T(\varphi_k) = T(\varphi) \ .$$

I seguenti asserti forniscono le proprietà fondamentali di tali funzionali.

2.13.3 Teorema. Sia T_k una successione di funzionali lineari e continui su $\mathscr{D}(\Omega)$ tale che:

- per $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ esiste: $\lim\limits_{k\to\infty} T_k(\varphi)$.

Allora:

a) il funzionale $T : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ definito da:

$$T(\varphi) \triangleq \lim_{k\to\infty} T_k(\varphi) \ ,$$

è lineare e continuo;

b) per ogni $\varphi = \mathscr{D}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k$ si ha: $\lim\limits_{k\to\infty} T_k(\varphi_k) = T(\varphi)$.

Cenno. a). L'asserto segue da Vladimirov (Theorem, pg 12) applicato ai funzionali T_k e T .

b). Per $\forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esiste $C_\varphi > 0$ tale che $\forall\,|T_k(\varphi)| < C_\varphi$. Per Vladimirov (Lemma pg 12) si ha allora:

$$\lim_{k\to\infty} |T_k(\varphi - \varphi_k)| = 0 \ ,$$

ossia:

$$\lim_{k\to\infty} |T_k(\varphi) - T_k(\varphi_k)| = 0 \ ;$$

siccome $\lim\limits_{k\to\infty} T_k(\varphi) = T(\varphi)$, si ottiene l'asserto. ■

2.13.4 Teorema. Per $\forall f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, il funzionale su $\mathscr{D}(\Omega)$ definito da:

$$\varphi \mapsto \int_\Omega f\varphi$$

è lineare e continuo.

Cenno. Applicazione banale del Teorema di Lebesgue sulla convergenza limitatata. ■

2.13.5 Teorema. Sia $T : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ un funzionale lineare e continuo. Esiste una successione $\eta_k \in \mathscr{D}(\Omega)$ tale che per $\forall\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ si ha:

$$T(\varphi) = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \eta_k \varphi \ .$$

Cenno. Per la dimostrazione vedi Vladimorov (Theorem pg 65). ■

2.14 Completezza di $\mathscr{D}'$

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto.

Il Lemma e il Teorema seguente provano che $\mathscr{D}'(\Omega)$ è uno spazio *completo*.

2.14.1 Lemma. Per $\forall f \in \mathscr{D}'(\Omega)$, il funzionale su $\mathscr{D}(\Omega)$ definito da:

$$\varphi \mapsto \int_\Omega f \bullet \varphi$$

è lineare e continuo.

Cenno. Sia $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$ un rappresentante di f. Per il Teorema 2.13.4 i funzionali

$$T_k(\varphi) = \int_\Omega f_k \varphi$$

sono lineari e continui.

Per $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ si ha:

$$\varphi \mapsto \int_\Omega f \bullet \varphi = \lim_{k\to\infty} T_k(\varphi) \ ;$$

allora l'asserto segue dal Teorema 2.13.3. ■

2.14.2 Teorema. Sia $f_1, f_2, f_3, \ldots \in \mathscr{D}'(\Omega)$ una successione di $\mathscr{D}'$-Cauchy. Si ha:

a) esiste $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ tale che: $f = \mathscr{D}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k$;

b) per $\forall \varphi = \mathscr{D}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k$ si ha: $\lim\limits_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \bullet \varphi_k = \int_\Omega f \bullet \varphi$.

Cenno. a). Per il Lemma 2.14.1 i funzionali

$$T_k(\varphi) = \int_\Omega f_k \varphi$$

sono lineari e continui.

Essendo $f_1, f_2, f_3, \ldots$ una successione di $\mathscr{D}'$-Cauchy, per il Teorema 2.13.3 il funzionale definito da:

$$T(\varphi) \triangleq \lim_{k\to\infty} T_k(\varphi)$$

è lineare e continuo.

Per il Teorema 2.13.5 esiste una successione $\eta_k \in \mathscr{D}(\Omega)$ tale che per $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ si ha:

$$T(\varphi) = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \eta_k \varphi \ ;$$

ne segue che:

- $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots)$ è una predistribuzione su Ω,
- posto $f = [(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots)] \in \mathscr{D}'(\Omega)$, si ha

$$\mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k = f \ .$$

b). Usare i funzionali T_k, T precedentemente definiti; l'asserto segue dal Teorema 2.13.3. ■

Il Teorema seguente prova che lo spazio $\mathscr{D}(\Omega)$ è *denso* in $\mathscr{D}'(\Omega)$, e che di conseguenza anche ciascuno degli spazi

$$C^m(\Omega), \mathscr{D}^m(\Omega), C^\infty(\Omega), L^p(\Omega)$$

è denso in $\mathscr{D}'(\Omega)$.

2.14.3 Teorema. Per $\forall f \in \mathscr{D}'(\Omega)$, esiste una successione

$$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots \ \in \mathscr{D}(\Omega)$$

tali che $f = \mathscr{D}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} \eta_k$.

Cenno. Si consideri il funzionale lineare e continuo definito da: $T(\varphi) \triangleq \displaystyle\int_\Omega f \bullet \varphi$. Per il Teorema 2.13.5 esiste una successione $\eta_k \in \mathscr{D}(\Omega)$ tale che per $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ si ha:

$$T(\varphi) = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \eta_k \varphi \ ;$$

tale successione verifica banalmente l'asserto. ■

2.15 Distribuzioni come funzionali lineari e continui su $\mathscr{D}$

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto.

Sia $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Interpretando f come un *fenomeno su* Ω e gli elementi di $\mathscr{D}(\Omega)$ come strumenti di misura sui fenomeni, si ottiene la famiglia

$$\int_\Omega f \bullet \varphi \in \mathbb{C} \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$$

dei risultati di *tutte le misure effettuabili su* f. La Definizione seguente formalizza tale nozione.

2.15.1 Definizione. Sia $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$; indichiamo con

$$T_f : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$$

il funzionale lineare e continuo definito da (vedi Lemma 2.14.1):

$$T_f(\varphi) \triangleq \int_\Omega f \bullet \varphi \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \ .$$

La Nota che segue ricorda la *definizione di distribuzioni su* Ω *nella visione di Schwartz.*

2.15.2 Nota(distribuzioni secondo Schwartz)**.** Denotiamo con

$$\mathscr{T}\mathscr{D}(\Omega)$$

lo spazio dei *funzionali lineari e continui* su $\mathscr{D}(\Omega)$ ossia lo spazio delle applicazioni lineari e continue

$$T : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C} \ ,$$

con la convergenza indotta dalle famiglie *ovviamente* separanti di *PDML* e di seminorme associate:

$$\mu^*_\varphi(T) \triangleq T(\varphi) \ , \ \|T\|^*_\varphi \triangleq \left|\mu^*_\varphi(T)\right| = |T(\varphi)| \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \ .$$

Si osservi che:

- le $T \in \mathscr{T}\mathscr{D}(\Omega)$ sono le *distribuzioni secondo Schwartz*,
- $\mathscr{T}\mathscr{D}(\Omega)$ è lo spazio delle *distribuzioni secondo Schwartz*,
- la convergenza indotta dalle *PDML* e dalle seminorme associate è la nozione di *convergenza per successioni di distribuzioni secondo Schwartz.*

Il Teorema seguente descrive *l'isomorfismo canonico* tra $\mathscr{D}'(\Omega)$ con la $\mathscr{D}'$-convergenza e $\mathscr{T}\mathscr{D}(\Omega)$ con la convergenza sopra definita.

2.15.3 Teorema. Si consideri l'applicazione

$$\mathbf{T} : \mathscr{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathscr{T}\mathscr{D}(\Omega)$$

definita da (vedi Definizione 2.15.1)

$$\mathbf{T}(f) = T_f \qquad \forall f \in \mathscr{D}'(\Omega).$$

Sussistono gli asserti:

a) $\mathbf{T}$ è un isomorfismo di spazi vettoriali;

b) per $\forall f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e per $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ si ha:

$$\mu_\varphi^*(T_f) = \mu_\varphi(f) \ , \quad \|T_f\|_\varphi^* = \|f\|_\varphi \ ;$$

c) $\mathbf{T}$ è un isomorfismo di spazi vettoriali con famiglie separanti di *PDML* e di seminorme ad indici in $\mathscr{D}(\Omega)$.

Cenno. a). Linearità ed iniettività sono ovvie. Sia quindi $T \in \mathscr{T}\mathscr{D}(\Omega)$. Per il Teorema 2.13.5 esiste una successione $\eta_k \in \mathscr{D}(\Omega)$ tale che:

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) : T(\varphi) = \lim_{k \to \infty} \int_\Omega \eta_k \varphi \ ;$$

pertanto si ha:

- ◦ $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots)$ è una predistribuzione su Ω,
- ◦ posto $f \triangleq [(n_1, n_2, n_3, \ldots)] \in \mathscr{D}'(\Omega)$, si ha: $T = T_f$.

b). Segue dall'essere

$$\int_\Omega f \bullet \varphi = T_f(\varphi) \ .$$

c). Segue da a) e da b). ■

L'isomorfismo canonico $\mathbf{T}$ definito dal precedente Teorema consente di identificare gli spazi $\mathscr{D}'(\Omega)$ e $\mathscr{T}\mathscr{D}(\Omega)$. Tale identificazione rimuove l'ambiguità del simbolo $\mathscr{D}'(\Omega)$, da noi usato *a priori impropriamente* per indicare le *distribuzioni come completamento di* $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ s.d., simbolo che in letteratura denota invece le distribuzioni su Ω secondo Schwartz, ossia lo spazio delle *vere distribuzioni su* Ω, spazio che in questa sezione era stato *prudentemente* indicato con il simbolo $\mathscr{T}\mathscr{D}(\Omega)$.

L'isomorfismo $\mathbf{T}$ consente quindi di guardare le *distribuzioni su* Ω

- sia dalle altezze di Schwartz, vedendole come fenomeni che fanno reagire tutti gli strumenti di misura dislocati in Ω (gli elementi di $\mathscr{D}(\Omega)$), generandoci dislocazioni numeriche di risultati di misura coerenti con le operazioni di somma, multiplo e limite tra strumenti;

- sia dal basso di Ω, vedendole come fenomeni limite di successioni di Cauchy s.d. di elementari fenomeni L^1_{loc} su Ω.

Operativamente, data una distribuzione $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$,

- il simbolo alternativo $f(x)$ ricorda la sua genesi come $\mathscr{D}'$-limite di una successione $f_k(x)$ di vere funzioni L^1_{loc} su Ω;
- l'identificazione di f con T_f consente di indicare f con il simbolo $f(\varphi)$ considerandola come funzionale su $\mathscr{D}(\Omega)$, ossia considerandola come una vera funzione
  - che però non assume valori sui singoli punti di Ω,
  - mentre assume valori sui singoli strumenti di misura (gli elementi di $\mathscr{D}(\Omega)$) dislocati in Ω.

Le Sezioni seguenti forniscono esempi.

2.16 Esempi: le delta di Dirac

Questa Sezione introduce i $\mathscr{D}'$-limiti delle successioni di Cauchy s.d., ma non convergenti s.d. in L^1_{loc}, descritte in 2.8.2, ossia delle successioni di densità L^1_{loc} corrispondenti a *tentativi di concentrare una massa unitaria sempre più vicino ad un punto.*

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto; si consideri $\mathscr{D}'(\Omega)$.

2.16.1 Definizione (*delta di Dirac*). Sia $a \in \Omega$. Siano

$$\begin{array}{ll} \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots & \text{una successione di sottinsiemi di } \Omega \\ f_1, f_2, f_3, \ldots & \text{una successione di funzioni } L^1_{\text{loc}} \text{ su } \Omega \end{array}$$

scelte con il criterio descritto in 2.8.2; si ha:

▼ $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$ è una predistribuzioni su Ω,

♦ la distribuzione

$$\delta_a \in \mathscr{D}'(\Omega) \ ,$$

definita da

$$\delta_a \triangleq [(f_1, f_2, f_3, \ldots)] \ ,$$

è indipendente dalle particolari scelte di $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots,\ f_1, f_2, f_3, \ldots$ verificanti 2.8.2,

♦ δ_a si dice la *delta di Dirac* in a,

- ⧫ attribuendo alle funzioni $f_1, f_2, f_3, \dots$ il significato di *densità di massa* in Ω, la δ_a è la *distribuzione della massa* 1 *in* Ω, *concentrata in* a;
- ⧫ per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, tenuto conto di 2.8.4, si ha

$$\int_\Omega \delta_a(x) \bullet \varphi(x) \mathrm{d}x = \varphi(a) \ ;$$

- ⧫ δ_a *è quindi* il funzionale

$$\delta_a : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$$

definito da:

$$\delta_a(\varphi) = \int_\Omega \delta_a \bullet \varphi = \varphi(a)$$

- ▲ $\delta_a(x) \notin L^1_{\text{loc}}(\Omega)$

Cenno. Se fosse $\delta_a \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, essendo per $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \varphi = \int_\Omega \delta_a \bullet \varphi = \int_\Omega \delta_a \varphi \ ,$$

si avrebbe $\delta_a = \lim\limits_{k\to\infty} \text{s.d. } f_k$, e quindi $f_1, f_2, f_3, \dots$ sarebbe convergente s.d.; assurdo per 2.8.5. ■

Il Teorema seguente prova che la famiglia

$$\delta_a \qquad a \in \Omega$$

delle delta di Dirac di Ω è linearmente indipendente.

2.16.2 Teorema. Siano $a_1, \dots, a_h \in \Omega$, a due a due diversi. La famiglia

$$\delta_{a_1}, \dots, \delta_{a_h}$$

è linearmente indipendente.

Cenno. Siano $c_1, \dots, c_h \in \mathbb{C}$ tali che

$$\sum_{j=1}^h c_j \delta_{a_j} = 0 \ ;$$

sia $I(a_1, \varepsilon) \subset \Omega$ tale che

$$a_2, \dots, a_h \notin I(a_1, \varepsilon) \ ;$$

sia $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ tale che $\operatorname{supp} \varphi \subset I(a_1, \varepsilon)$, $\varphi(a_1) \neq 0$. Allora si ha

$$0 = \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{h} c_j \delta_{a_j} \right) \bullet \varphi = \sum_{j=1}^{h} c_j \int_\Omega \delta_{a_j} \bullet \varphi = \sum_{j=1}^{h} c_j \varphi(a_j) = c_1 \varphi(a_1) \ ,$$

da cui segue $c_1 = 0$. Analogamente, $c_2 = \cdots = c_h = 0$. ■

La Definizione il Lemma e il Teorema seguenti provano che le combinazioni lineari di delta consentono di *approssimare in senso opportuno* qualsiasi distribuzione. Tali approssimazioni giocano un ruolo determinante nella Teoria dei sistemi lineari.

2.16.3 Definizione. Indichiamo con $\Delta(\Omega)$ il sottospazio di $\mathscr{D}'(\Omega)$ definito da

$$\Delta(\Omega) = \langle \delta_a : a \in \Omega \rangle \ ,$$

ossia il sottospazio avente per base la famiglia

$$\delta_a \qquad (a \in \Omega) \ .$$

2.16.4 Lemma. Sia $\eta \in \mathscr{D}(\Omega)$. Esiste una successione

$$g_k \in \langle \delta_a : a \in \operatorname{supp} \eta \rangle \subset \Delta(\Omega)$$

tale che: $\eta = \mathscr{D}'\text{-}\lim\limits_{k \to \infty} g_k$.

Cenno. Ad esempio:

- per $\forall k \in \mathbb{N}$ $(k > 0)$ sia J_k l'insieme dei

  $$j = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{N}^n$$

  tali che:
  - ⋄ $\forall h : 0 \leqslant j_h \leqslant 2k^2 - 1$,
  - ⋄ $\exists a_{kj} \in (\operatorname{supp} \eta) \cap \left(\prod_{h=1}^{n} \left[-k + \frac{j_h}{k} \ , -k + \frac{j_h + 1}{k} \right] \right) \subset \Omega$;
- per $\forall k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ si ponga: $g_k(x) = \sum_{j \in J_k} \frac{1}{k^n} \eta(a_{kj}) \delta_{a_{kj}}(x)$;
- ovviamente $\forall a_{kj} \in \operatorname{supp} \eta$, e per $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ si ha:

$$\lim_{k \to \infty} \int_\Omega g_k \bullet \varphi = \lim_{k \to \infty} \sum_{j \in J_k} \frac{1}{k^n} \eta(a_{kj}) \varphi(a_{kj}) = \int_\Omega \eta \varphi = \int_\Omega \eta \bullet \varphi \ .$$

■

2.16.5 Teorema. Sia $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Esistono:

- una successione $K_k \subset \Omega$ di compatti,
- una famiglia $g_{kh} \quad (k, h \in \mathbb{N})$ di distribuzioni,

tali che:

- $\forall k: \ g_{k1}, g_{k2}, g_{k3}, \dots \in \langle \delta_a : a \in K_k \rangle$,
- $f = \mathscr{D}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} \left(\mathscr{D}'\text{-}\lim\limits_{h\to\infty} g_{kh} \right)$.

Cenno. Per il Teorema 2.14.3 esiste una successione $\eta_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tale che $f = \mathscr{D}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} \eta_k$. È sufficiente porre $K_k = \operatorname{supp} \eta_k$, ed applicare a ciascun η_k il precednte Lemma 2.16.4. ■

2.17 Esempi: masse concentrate su sottovarietà

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto.

Le delta di Dirac sono esempi di distribuzioni legate a masse concentrate in sottovarietà (singoli punti) di Ω.

In queta Sezione, a titolo di esempio, esaminiamo masse concentrate su curve di Ω.

▽ Sia $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ una curva semplice con estremi, di classe C^1 e regolare (ossia dotata di una parametrizzazione

$$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$$

iniettiva, di classe C^1 e regolare), e sia

$$\mu : \Gamma \to \mathbb{C}$$

una funzione continua.

Consideriamo il funzionale

$$T_{(\Gamma,\mu)} : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$$

definito dall'integrale curvilineo su Γ del prodotto tra μ per φ, ossia da:

$$T_{(\Gamma,\mu)}(\varphi) \triangleq \int_\Gamma \mu\varphi \mathrm{d}s$$
$$\left(= \int_0^1 \mu(\gamma(t))\varphi(\gamma(t)) \cdot \|\gamma^{(1)}(t)\| \mathrm{d}t \right) \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \ .$$

◊ Argomentazioni usuali provano che:

- $T_{(\Gamma,\mu)}$ è un funzionale lineare e continuo, e pertanto è una distribuzione su Ω;
- il comportamento della distribuzione

$$T_{(\Gamma,\mu)} \in \mathscr{D}'(\Omega)$$

rispetto alle misure in $\mathscr{D}(\Omega)$ è dato da:

$$\int_\Omega T_{(\Gamma,\mu)} \bullet \varphi = \int_\Gamma \mu\varphi \mathrm{d}s \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \; .$$

△ Le considerazioni che seguono *suggeriscono* una interpretazione fisica della distribuzione $T_{(\Gamma,\mu)}$.

- Consideriamo in Ω *la massa* $M_{(\Gamma,\mu)}$ *concentrata su* Γ *con denistà di linea* μ.
- Per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, interpretiamo φ come uno *strumento di misura per masse in* Ω, ad esempio:
  - un *campo gravitazionale unidirezionale in* Ω di *intensità* $\varphi(x)$,
  - una *bilancia* che misura l'*intensità* della risultante delle forze agenti su masse in Ω.
- Se M è una massa in Ω di densità $f(x) \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, la misura di M fornita dallo strumento φ è quindi:

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \; .$$

- La massa $M_{(\Gamma,\mu)}$ *non è descrivibile* tramite una densità in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.
- Ciascuno strumento φ *misura comunque tale massa* e *ovviamente* il risultato della *misura* è:

$$\int_\Gamma \mu\varphi \mathrm{d}s = T_{(\Gamma,\mu)}(\varphi) \; .$$

- Tali considerazioni attribuiscono alla distribuzione

$$T_{(\Gamma,\mu)} \in \mathscr{D}'(\Omega)$$

i significati e quindi i nomi di

- ◇ "*distribuzione di massa in* Ω *concentrata su* Γ *con densità di linea* μ",
- ◇ "*densità distribuzionale in* Ω *della massa di densità di linea* μ *concentrata su* Γ".

Nota: L'esempio dato è generalizzabile a varietà opportune $\Gamma \subset \Omega$ di dimensione d con $1 < d \leqslant n$, e a opportune densità μ di tipo distribuzionale.

2.18 Esempi di distribuzioni su $\mathbb{R}$

Esempio 1). Per $k = 1, 2, 3, \dots$, in $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ si ponga

$$f_k(x) = k\chi_{(0,1/k)}(x) \qquad g_k(x) = (k/2)\chi_{(-1/k,1/k)}(x) \ ;$$

per la Definizione 2.16.1 si ha:

▽ $(f_1, f_2, f_3, \dots), (g_1, g_2, g_3, \dots)$ sono predistribuzioni equivalenti su $\mathbb{R}$;

△ $[(f_1, f_2, f_3, \dots)] = [(g_1, g_2, g_3, \dots)] = \delta_0(x) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Esempio 2). Per $k = 1, 2, 3, \dots$, in $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ si ponga

$$f_k(x) = k^2\chi_{(0,1/k)}(x) - k^2\chi_{(1/k,2/k)}(x) \ ;$$

si ha:

▽ $(f_1, f_2, f_3, \dots)$ è una predistribuzione su $\mathbb{R}$;

Cenno. Sia $\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, e sia $\Phi(x)$ una primitiva di $\varphi(x)$; applicando la regola di L'Hopital alla parte reale e alla parte immaginaria di ciascuna delle forme indeterminate $0/0$ che seguono, si ha

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \\
&\qquad \lim_{h\to 0^+}\frac{\Phi(h) - \Phi(0) - \Phi(2h) + \Phi(h)}{h^2} = \\
&\qquad \lim_{h\to 0^+}\frac{\varphi(h) - 2\varphi(2h) + \varphi(h)}{2h} = \\
&\qquad \lim_{h\to 0^+}\frac{\varphi^{(1)}(h) - 4\varphi^{(1)}(2h) + \varphi^{(1)}(h)}{2} = -\varphi^{(1)}(0)
\end{aligned}$$

■

△ posto $f = [(f_1, f_2, f_3, \ldots)] \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}} f \bullet \varphi = -\varphi^{(1)}(0) \ .$$

Esempio 3). Per $k = 1, 2, 3, \ldots$, in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ si ponga

$$f_k(x) = k^3 \chi_{(0,1/k)}(x) - 2k^3 \chi_{(1/k,2/k)}(x) + k^3 \chi_{(2/k,3/k)}(x) \ ,$$
$$g_k(x) = k^3 \chi_{(0,2/k)}(x) - 2k^3 \chi_{(2/k,3/k)}(x) \ ;$$

si ha:

▽ $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$ è una predistribuzione su $\mathbb{R}$ (metodo: usare Cenno Esempio 1.);

◊ posto $f = [(f_1, f_2, f_3, \ldots)] \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, per $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ si ha (usare calcolo item precedente)

$$\int_{\mathbb{R}} f \bullet \varphi = \varphi^{(2)}(0) \ ;$$

△ $(g_1, g_2, g_3, \ldots)$ non è una predistribuzione su $\mathbb{R}$.

Cenno. Usare $\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ tale che $\varphi(x) \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e che $\varphi^{(1)}(0) \neq 0$. ■

Esempio 4). Si consideri $\dfrac{1}{x}$ come funzione definita q.o. su $\mathbb{R}$; si osservi che:

▽ $\dfrac{1}{x} \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ (ad esempio, non è integrabile sul compatto $[-1, 1]$);

△ le uniche funzioni $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definite q.o. che sono state identificate ad elementi di $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ sono le $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$; ne segue che

$$\frac{1}{x} \notin \mathscr{D}'(\mathbb{R}) \ .$$

Per $k = 1, 2, 3, \ldots$, si ponga

$$f_k(x) = \frac{1}{x} \Big(1 - \chi_{(-1/k,1/k)}(x)\Big) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \ .$$

Sia $\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Scelto $r > 0$ tale che $\operatorname{supp} \varphi \subset (-r, r)$, si ha:

▽ la funzione
$$\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ d.q.o.}$$
è prolungabile per continuità ad una funzione C^0 su $\mathbb{R}$;

◊ ne segue
$$\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \ ;$$

△ si ha
$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_k\varphi = \int_{-r}^{r} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\mathrm{d}t \ .$$

Cenno. Si ha
$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_k\varphi = \lim_{k\to\infty}\left(\int_{-r}^{-1/k}\frac{\varphi(x)}{x} + \int_{1/k}^{r}\frac{\varphi(x)}{x}\right) =$$
$$\text{essendo } \int_{-r}^{-1/k}\frac{\varphi(0)}{x} + \int_{1/k}^{r}\frac{\varphi(0)}{x} = 0$$
$$= \lim_{k\to\infty}\left(\int_{-r}^{-1/k}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} + \int_{1/k}^{r}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{}\right) =$$
$$= \int_{-r}^{r}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} \ .$$

■

Se ne deduce che:

▽ $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$ è una predistribuzione su $\mathbb{R}$;

△ posto
$$\mathrm{pv}\ \frac{1}{x} = \ \textit{valore principale di}\ \frac{1}{x} = [(f_1, f_2, f_3, \ldots)] \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}) \ ,$$
per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, e per ogni $r > 0$ tale che
$$\operatorname{supp}\varphi \subset (-r, r)$$
si ha
$$\int_{\mathbb{R}}\left(\mathrm{pv}\ \frac{1}{x}\right) \bullet \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{-r}^{r}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\mathrm{d}x \ .$$

Attenzione: Il procedimento applicato alla funzione $1/x$ non è generalizzabile: ad esempio $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$, ove

$$f_k(x) = \frac{1}{x^2}\Big(1 - \chi_{(-1/k,1/k)}(x)\Big) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \ ,$$

non è una predistribuzione su $\mathbb{R}$.

Capitolo 3

Prodotto, traslazioni e dilatazioni, derivate, restrizioni

3.1 Prodotto tra funzioni C^∞ e distribuzioni

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto.

Il seguente proplema è tuttora aperto:

> **Problema.** Trovare le coppie $(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ di sottospazi di $\mathscr{D}'(\Omega)$ tali che per ogni $\zeta \in \mathscr{H},\ f \in \mathscr{K}$ sia definibile un elemento di $\mathscr{D}'(\Omega)$ da poter *ragionevolmente* definire *prodotto di ζ per f* e quindi indicare con il simbolo "ζf".
>
> **Nota.** L'avverbio *ragionevolmente* sottintende una lista (omessa) di richieste estremamente tecniche.

Ne sono note poche soluzioni. La Definizione che segue fornisce quella più elementare e più usata

3.1.1 Definizione(di prodotto tra funzioni C^∞ e distribuzioni)**.** Siano

$$\zeta \in C^\infty(\Omega),\ f \in \mathscr{D}'(\Omega)\ .$$

Sussistono gli asserti:

a) La definizione seguente:

- scegliere un rappresentante $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$ di f,

∘ porre

$$\zeta f \triangleq [(\zeta f_1, \zeta f_2, \zeta f_3, \dots)] \in \mathscr{D}'(\Omega) ,$$

è una buona definizione.

b) per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, si ha

$$\int_\Omega (\zeta f) \bullet \varphi = \int_\Omega f \bullet (\zeta\varphi) .$$

NOTA. Per b), la definizione di ζf data in a) è coerente con la definizione data da Schwartz (vedi Chapitre V, §1, Definition).

Cenno. Per $\forall k$ si ha $\zeta f_k \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$; inoltre per $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ si ha

$$\zeta\varphi \in \mathscr{D}(\Omega) ,$$
$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega (\zeta f_k)\varphi = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(\zeta\varphi) = \int_\Omega f \bullet (\zeta\varphi) ;$$

ne seguono entrambi gli asserti. ■

Il seguente Teorema fornisce le proprietà essenziali dell'operazione sopra definita.

3.1.2 Teorema. Sussistono gli asserti:

a) L'applicazione

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\Omega) \times \mathscr{D}'(\Omega) & \longrightarrow & \mathscr{D}'(\Omega) \\ (\zeta, f) & \longrightarrow & \zeta f \end{array}$$

è bilineare.

b) Per $\forall \zeta, \eta \in C^\infty(\Omega)$ e $\forall f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ si ha

$$(\zeta\eta) f = \zeta(\eta f) .$$

c) Per $\forall \zeta \in C^\infty(\Omega)$ l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{D}'(\Omega) & \longrightarrow & \mathscr{D}'(\Omega) \\ f & \longrightarrow & \zeta f \end{array}$$

è *continua*, ossia: *per* $\forall f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *e per* $\forall f_1, f_2, f_3, \dots \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *si ha*

$$f = \mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k \Longrightarrow \zeta f = \mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \zeta f_k .$$

Cenno. a),b). Verifiche banali. Quanto a c), per $\forall\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ si ha:

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega (\zeta f_k)\bullet\varphi = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega f_k\bullet(\zeta\varphi) = \int_\Omega f\bullet(\zeta\varphi) = \int_\Omega (\zeta f)\bullet\varphi \ .$$

■

Il seguente Teorema fornisce il prodotto tra funzioni C^∞ e delta di dirac.

3.1.3 Teorema. Sia $a \in \Omega$, e sia $\zeta(x) \in C^\infty(\Omega)$. Si ha:

$$\zeta(x)\delta_a(x) = \zeta(a)\delta_a(x) \ .$$

Cenno. Per ogni $\varphi(x) \in \mathscr{D}(\Omega)$ si ha

$$\int_\Omega \zeta(x)\delta_a(x)\bullet\varphi(x) = \int_\Omega \delta_a(x)\bullet\zeta(x)\varphi(x) = \zeta(a)\varphi(a)$$
$$\int_\Omega \zeta(a)\delta_a(x)\bullet\varphi(x) = \zeta(a)\int_\Omega \delta_a(x)\bullet\varphi(x) = \zeta(a)\varphi(a)$$

■

La seguente Nota evidenzia un prodotto significativo in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

3.1.4 Nota. In $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ si ha: $x\left(\text{pv}\ \dfrac{1}{x}\right) = 1$.

Cenno. Si usi il rappresentante $(f_1, f_2, f_3, \dots)$ di pv $\dfrac{1}{x}$ definito da

$$f_k(x) = \frac{1}{x}\left(1 - \chi_{(-1/k,1/k)}(x)\right) \ ,$$

e si verifichi che $(xf_1(x), xf_2(x), xf_3(x), \dots) \sim (1, 1, 1, \dots)$. ■

3.2 Traslazioni e dilatazioni in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$

La Definizione che segue introduce le nozioni di *traslazioni e dilatazioni* per distribuzioni in $\mathbb{R}^n$.

3.2.1 Definizione. Sia $f(x) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, e siano $a \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$. Sussitono gli asserti:

a) La definizione seguente:

- ∘ scegliere un rappresentente $(f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots)$ di $f(x)$,
- ∘ porre

$$f(\lambda x + a) \triangleq [(f_1(\lambda x + a), f_2(\lambda x + a), f_3(\lambda x + a), \dots)] \ ,$$

è una buona definizione.

b) Per ogni $\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda x + a) \bullet \varphi(x) = \frac{1}{|\lambda|^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bullet \varphi\left(\frac{1}{\lambda}x - \frac{1}{\lambda}a\right) .$$

NOTA. Per b), la definizione di $f(\lambda x + a)$ data in a) è coerente con la definizione di traslazione data da Schwartz (vedi Chapitre II, §5, considerazioni nella Dimostrazione del Théorèm IV) e con generalizzazioni usuali in letteratura (vedi Vladimirov, Section 1.9, pg 21).

Cenno. Per $\forall k$ si ha $f_k(\lambda x + a) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$; inoltre per $\forall \varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ si ha:

$$\begin{aligned}
&\varphi\left(\frac{1}{\lambda}x - \frac{1}{\lambda}a\right) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \ , \\
&\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(\lambda x + a)\varphi(x) = \\
&\qquad = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(\lambda x + a)\varphi\left(\frac{1}{\lambda}(\lambda x + a) - \frac{1}{\lambda}a\right) = \\
&\qquad = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|\lambda|^n} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\varphi\left(\frac{1}{\lambda}x - \frac{1}{\lambda}a\right) = \\
&\qquad = \frac{1}{|\lambda|^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bullet \varphi\left(\frac{1}{\lambda}x - \frac{1}{\lambda}a\right) \ ;
\end{aligned}$$

ne seguono entrambi gli asserti. ■

Il seguente Teorema prova che traslazioni e dilatazioni sono operazioni continue.

3.2.2 Teorema. Siano $a \in \mathbb{R}^n, \ \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$. L'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \\ f(x) & \longrightarrow & f(\lambda x + a) \end{array}$$

è *continua*, ossia *per* $\forall f(x) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ *e per* $\forall f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ *si ha*

$$f(x) = \mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k(x) \Longrightarrow f(\lambda x + a) = \mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k(\lambda x + a) \ .$$

Cenno. Tenuto conto di b) della Definizione precedente, per $\forall\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ si ha:

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f_k(\lambda x + a) \bullet \varphi(x) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{|\lambda|^n}\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) \bullet \varphi\left(\frac{1}{\lambda}x - \frac{1}{\lambda}a\right) =$$

$$= \frac{1}{|\lambda|^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bullet \varphi\left(\frac{1}{\lambda}x - \frac{1}{\lambda}a\right) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda x + a) \bullet \varphi(x) \ .$$

■

La seguente Definizione introduce "*la*" delta di Dirac in $\mathbb{R}^n$ e ne determina le traslate e dilatate.

3.2.3 Definizione(*la* delta di Dirac in $\mathbb{R}^n$)**.** La distribuzione

$$\delta(x) \triangleq \delta_0(x) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$$

si dice *la delta di Dirac in* $\mathbb{R}^n$. Sussistono gli asserti:

a) per $\forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) \bullet \varphi(x) = \varphi(0) \ ;$$

b) siano $a \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$; per $\forall\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(\lambda x + a) \bullet \varphi(x) = \frac{1}{|\lambda|^n}\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) \bullet \varphi\left(\frac{1}{\lambda}x - \frac{1}{\lambda}a\right) = \frac{1}{|\lambda|^n}\varphi\left(-\frac{1}{\lambda}a\right) \ ;$$

ne segue che:

- $\delta(\lambda x + a) = \dfrac{1}{|\lambda|^n}\delta_{(-1/\lambda)a}(x)$,
- $\delta(\lambda x) = \dfrac{1}{|\lambda|^n}\delta(x)$,
- $\delta(x - a) = \delta_a(x)$, ossia: $\delta(x-a)$ *è la delta di Dirac in* a.

3.3 Derivate distribuzionali

In questa Sezione proviamo che per ogni distribuzione è possibile definire distribuzioni che ragionevolmente svolgano il ruolo di loro derivate; in particolare proviamo che la scelta della convergenza s.d. in L^1_{loc} soddisfa la richiesta 2.1.5.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto.

La definizione di derivazione distribuzionale richiede i seguenti due Lemmi.

3.3.1 Lemma. Sia $f \in C^1(\Omega)$ una funzione a supporto compatto. Per $j = 1, \ldots, n$ si ha

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$$

Cenno. Supponiamo $j = 1$. Sia $\widetilde{f}$ il prolungamento banale di f ad $\mathbb{R}^n$; essendo supp f compatto si ha che $\widetilde{f} \in C^1(\mathbb{R}^n)$, essendo inoltre supp $\partial\widetilde{f}/\partial x_1$ compatto si ha che $\partial\widetilde{f}/\partial x_1$ è integrabile su $\mathbb{R}^n$. Per il Teorema di Fubini si ha

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_1} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_1} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_1} (x_1, x_2, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \right] \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n$$

Per le ipotesi di regolarità e compattezza, per ogni $(x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_1} (x_1, x_2, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 = 0 \ .$$

Ne segue l'asserto. ■

3.3.2 Lemma. Siano $f, g \in C^1(\Omega)$ due funzioni, una delle quali a supporto compatto. Per $j = 1, \ldots, n$ si ha

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot g = - \int_\Omega f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

Cenno. Si ha $fg \in C^1(\Omega)$; inoltre supp fg è compatto. Applicando 3.3.1 ad fg, si ottiene l'asserto. ■

La Definizione seguente introduce le derivate distribuzionali prime di ogni distribuzione.

3.3.3 Definizione(di derivate distribuzionali)**.** Sia $f(x) \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Sussistono gli asserti:

a) Per $j = 1, \ldots, n$, la definizione seguente:
   - scegliere un rappresentante $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$ di f tale che

     $$\forall f_k \in C^1(\Omega)$$

     (esiste per il Teorema 2.14.3),
   - porre

     $$\frac{\partial f}{\partial x_j} \triangleq \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}, \frac{\partial f_2}{\partial x_j}, \frac{\partial f_3}{\partial x_j}, \ldots \right) \right] \in \mathscr{D}'(\Omega) \ ,$$

è una buona definizione.

a') La definizione precedente *non introduce ambiguità*; precisamente, se $f \in C^1(\Omega)$, la distribuzione

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \triangleq \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}, \frac{\partial f_2}{\partial x_j}, \frac{\partial f_3}{\partial x_j}, \dots \right) \right]$$

coincide con la usuale derivata parziale prima di f rispetto ad x_j.

b) Per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ si ha

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j} \bullet \varphi = -\int_\Omega f \bullet \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

(si osservi che $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_j} \in \mathscr{D}(\Omega)$).

Le distribuzioni

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \in \mathscr{D}'(\Omega)$$

si dicono le *derivate parziali distribuzionali prime* di $f(x)$.

NOTA. Per b), la definizione di $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ data in a) è coerente con la definizione data da Schwartz (vedi Chapitre II, §1, Formule (II,1;6)).

Cenno. a),b). Ovviamente

$$\forall \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \ ;$$

inoltre per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, tenuto conto del Lemma 3.3.2, si ha

$$\lim_{k \to \infty} \int_\Omega \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \varphi = -\lim_{k \to \infty} \int_\Omega f_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = -\int_\Omega f \bullet \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \ .$$

Ne seguono facilmente entrambi gli asserti.

a'). Usare come rappresentante di f la predistribuzione $(f, f, f, \dots)$. ∎

Il Teorema seguente dà le proprietà del prodotto di composizione tra operatori di derivazione prima.

3.3.4 Teorema. Sia $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Sussistono gli asserti:

a) per $\forall j, l \in \{1, \dots, n\}$ si ha

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_j} f = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_l} f \ ;$$

b) per $\forall j_1, \ldots, j_h \in \{1, \ldots, n\}$, applicando ad f gli operatori

$$\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{j_h}}$$

in un qualsiasi ordine, si ottiene sempre lo stesso risultato;

c) ogni *derivata distribuzionale h-esima* di $f(x)$ si può scrivere nella forma

$$\frac{\partial^{q_1+\cdots+q_n}}{\partial x_1^{q_1} \cdots \partial x_n^{q_n}} f = \partial^q f$$

con $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{N}^n$ tale che $|q| = h$;

d) per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ si ha

$$\int_\Omega (\partial^q f) \bullet \varphi = (-1)^{|q|} \int_\Omega f \bullet (\partial^q \varphi)$$

(si osservi che $\partial^q \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$);

e) se $f \in C^h(\Omega)$, i significati distribuzionale e classico di $\partial^q f$ coincidono.

Cenno. a). Sia $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$ un rappresentantre di f, con ogni $f_k \in C^2(\Omega)$; per il Teorema di Schwarz, per ogni k si ha

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_j} f_k = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_l} f_k \ .$$

b),c),d). Seguono banalmente da a).
e). Segue dall'item a') della Definizione 3.3.3. ■

Il seguente Teorema estende alle distribuzioni le usuali regole di derivazione di un prodotto.

3.3.5 Teorema. Per $\forall \zeta \in C^\infty(\Omega)$ e per $\forall f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ si ha

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\zeta f) = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_j}\right) f + \zeta \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \ .$$

Cenno. Sia $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$ un rappresentante C^1 di f; allora $(\zeta f_1, \zeta f_2, \zeta f_3, \ldots)$ è un rappresentante C^1 di ζf; pertanto

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\zeta f) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(\zeta f_1), \frac{\partial}{\partial x_j}(\zeta f_2), \frac{\partial}{\partial x_j}(\zeta f_3), \ldots\right)\right] \ .$$

Ne segue l'asserto. ■

Il seguente Teorema prova che gli operatori di derivazione sono lineari e continui, e che per $\Omega = \mathbb{R}^n$ sono anche invarianti per traslazione.

3.3.6 Teorema. Si consideri l'applicazione

$$\frac{\partial}{\partial x_j} : \mathscr{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathscr{D}'(\Omega) \ .$$

Sussistono gli asserti:

a) $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ è lineare;

b) $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ è *continua*, ossia: *per* $\forall f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *e per* $\forall f_1, f_2, f_3, \ldots \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *si ha*

$$f = \mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j} = \mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \ ;$$

c) se $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ è *invariante per traslazioni*, ossia: *per* $\forall a \in \mathbb{R}^n$ *si ha*

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(x-a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x-a)$$

Cenno. a). Ovvio.
b). Per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ si ha

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \bullet \varphi = -\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \bullet \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} =$$
$$-\int_\Omega f \bullet \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j} \bullet \varphi$$

c). Per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ si ha

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} f(x-a) \bullet \varphi(x) = -\int_\Omega f(x-a) \bullet \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) =$$
$$-\int_\Omega f(x) \bullet \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x+a) = -\int_\Omega f(x) \bullet \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x+a) =$$

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \bullet \varphi(x+a) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}(x-a) \bullet \varphi(x)$$

3.4 Derivate distribuzionali in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$: esempi

3.4.1 Rappresentanti di δ e delle sue derivate. Sia $\varphi(x)$ una qualsiasi funzione verificante le condizioni:

$$\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \ \varphi(x) \geqslant 0, \quad \operatorname{supp} \varphi \subset \overline{I(0,1)}, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1 \ ;$$

ad esempio la funzione definita da (vedi Sezione 2.6):

$$\varphi(x) = \begin{cases} ce^{-1/(1-\|x\|^2)} & , \quad \|x\| < 1 \\ 0 & , \quad \|x\| \geqslant 1 \end{cases} ,$$

con $c \in \mathbb{R}$ tale da normalizzare ad 1 l'integrale di φ.

Sia

$$\partial^q, \quad |q| = h \in \mathbb{N}$$

un operatore di derivazione h-esima. Sussistono gli asserti:

a) Per la Definizione 2.16.1,

$$(k^n \varphi(kx) : k = 1, 2, 3, \dots)$$

è un rappresentante di $\delta(x)$.

b) Per a) e per il Corollario 2.12.3 si ha: $\delta(x) = \mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} k^n \varphi(kx)$.

c) Per la continuità di ∂^q (vedi Teorema 3.3.6) si ha:

$$\partial^q \delta(x) = \mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} k^n \partial^q(\varphi(kx)) = \mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} k^n k^{q_1} \cdots k^{q_n} (\partial^q \varphi)(kx) \ .$$

d) Per c) e per il Corollario 2.12.3,

$$\left(k^{n+h} (\partial^q \varphi)(kx) : k = 1, 2, 3, \dots\right)$$

è un rappresentante di $\partial^q \delta(x)$.

3.4.2 Funzioni "gradino" e loro derivate. Usiamo la seguente terminologia:

- $(e_1, \dots, e_n)$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$;
- $E_\nu \triangleq \langle e_\nu \rangle^\perp = \langle e_1, \dots, e_{\nu-1}, e_{\nu+1}, \dots, e_n \rangle$;

- $H_\nu(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ è *la funzione gradino in direzione* e_ν, ossia la funzione definita da:
$$H_\nu(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_\nu < 0 \\ 1 & \text{se } x_\nu \geqslant 0 \end{cases} \quad ;$$
(**nota:** per $n = 1$ la funzione gradino $H_1(x)$ è l'usuale funzione di Heaviside $H(x)$ in $\mathbb{R}$)
- $\delta_{E_\nu}(x) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ è la *distribuzione di massa in* $\mathbb{R}^n$ *concentrata in* E_ν *con densità* $(n-1)$*-dimensionale unitaria costante*, ossia la distribuzione in $\mathbb{R}^n$ definita da (vedi Sezione 2.17):
$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta_{E_\nu}(x) \bullet \varphi(x) = \int_{E_\nu} \varphi \mathrm{d}\sigma =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(x_1, \ldots, x_{\nu-1}, 0, x_{\nu+1}, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{\nu-1} \cdot \mathrm{d}x_{\nu+1} \cdots \mathrm{d}x_n$$
$$\text{per } \forall \varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \ .$$

Sussiste l'asserto: per $j = 1, \ldots, n$ si ha:
$$\frac{\partial H_\nu}{\partial x_j}(x) = \begin{cases} \delta_{E_\nu}(x) & , \quad j = \nu \\ 0 & , \quad j \neq \nu \end{cases} \ .$$

Cenno. Consideriamo ad esempio il caso: $\nu = 1, \ j = 1$. Per $\forall \varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ si ha:
$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial H_1}{\partial x_1}(x) \bullet \varphi(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} H_1(x) \bullet \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) =$$
$$= -\int_{\mathbb{R}^n} H_1(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \mathrm{d}x = -\int_{\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0\}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \mathrm{d}x =$$
$$= -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[\int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \right] \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n =$$
$$= -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[-\varphi(0, x_2, \ldots, x_n) \right] \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n = \int_{\mathbb{R}^n} \delta_{E_1}(x) \bullet \varphi(x) \ .$$
I rimanenti casi hanno dimostrazione analoga. ■

È esperienza comune che misurando con un oscilloscopio (senza variarne le tarature) l'ampiezza di *segnali sinusoidali di ampiezza costante*, al crescere della frequenza le *ampiezze misurate risultanti tendono a svanire.* Il seguente Esempio prova che le misure relative alle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ si comportano rispetto alle funzioni circolari in modo analogo alle misure effettuate con oscilloscopi.

3.4.3 Evanescenza delle funzioni cirolari al crescere della frequenza. Per $\forall\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$, la funzione $\mathrm{circ}_\omega(x)$ della variabile $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definita da

$$\mathrm{circ}_\omega(x) \triangleq e^{i(\omega \cdot x)} = e^{i(\omega_1 x_1 + \cdots + \omega_n x_n)} \ ,$$

si dirà la *funzione circolare complessa in* $\mathbb{R}^n$ di *pulsazione* ω.

Sia

$$\omega_k = (\omega_{k1}, \ldots, \omega_{kn}) \in \mathbb{R}^n \ , \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

una sucessione di *pulsazioni* tale che

$$\lim_{k\to\infty} \|\omega_k\| = +\infty \ ;$$

sussitono gli asserti seguenti:

a) si ha $\mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \mathrm{circ}_{\omega_k}(x) = 0$;
b) per ogni polinomio complesso $P(X) = P(X_1, \ldots, X_n)$ nelle indeterminate $X = (X_1, \ldots, X_n)$, si ha

$$\begin{aligned}&\mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} P(\omega_k)\mathrm{circ}_{\omega_k}(x) = \\ &\qquad = \mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} P(\omega_{k1}, \ldots, \omega_{kn}) e^{i(\omega_{k1}x_1 + \cdots + \omega_{kn}x_n)} = 0 \ .\end{aligned}$$

Cenno. a-*caso particolare*). Supponiamo che $\exists j$ tale che $\lim_{k\to\infty} \omega_{kj} = \infty$. In tale caso si ha:

$$L^\infty\text{-}\lim_{k\to\infty} \frac{1}{i\omega_{kj}} \mathrm{circ}_{\omega_k}(x) = 0 \ ;$$

il Teorema 1.6.1 prova che la L^∞-convergenza implica la L^1_{loc}-converganza, il Teorema 2.5.1 prova che la L^1_{loc}-convergenza implica la convergenza s.d.; di conseguenza si ottiene:

$$\mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \frac{1}{i\omega_{kj}} \mathrm{circ}_{\omega_k}(x) = 0 \ ;$$

tenuto conto che

$$\mathrm{circ}_{\omega_k}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{i\omega_{kj}} \mathrm{circ}_{\omega_k}(x)\right)$$

e che $\partial/\partial x_j$ è un operatore continuo, si conclude che:

$$\mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \mathrm{circ}_{\omega_k}(x) = 0 \ ,$$

ossia che a) sussiste sotto la particolare ipotesi considerata.

a-*caso generale*). Siccome $\lim_{k\to\infty} \|\omega_k\| = \infty$, esistono

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \in \{1, \ldots, n\}$$

tali che

$$\lim_{k\to\infty} \omega_{k\lambda_k} = \infty \ .$$

Per $j = 1, \ldots, n$ siano

$$k_{1j} < k_{2j} < k_{3j} < \cdots$$

gli indici k tali che $\lambda_k = j$; per tutti i j per i quali tali indici sono in numero infinito, tenuto conto di a-*caso particolare*), si ha

$$\mathscr{D}'\text{-}\lim_{\nu\to\infty} \operatorname{circ}_{\omega_{k_{\nu j}}}(x) = 0 \ ;$$

tenuto conto che, a parte un eventuale numero finito di k, ogni k figura in una delle al più n successioni relative a tali j, si conclude che

$$\mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \operatorname{circ}_{\omega_k}(x) = 0 \ .$$

b-*caso particolare*). Supponiamo che $P(X)$ sia un monomio monico, ossia che

$$P(X) = X_1^{q_1} \cdots X_n^{q_n} \ ;$$

in tal caso si ha:

$$P(\omega_k)\operatorname{circ}_{\omega_k}(x) = \frac{1}{i^{q_1+\cdots+q_n}} \frac{\partial^{q_1+\cdots+q_n}}{\partial x_1^{q_1} \cdots \partial x_n^{q_n}} \operatorname{circ}_{\omega_k}(x) \ ;$$

per l'item a) e per la continuità degli operatori di derivazione si ottiene:

$$\mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} P(\omega_k)\operatorname{circ}_{\omega_k}(x) = 0 \ .$$

b-*caso generale*). Conseguenza banale del caso precedente. ■

3.5 Restrizioni di distribuzioni

Siano $\Gamma \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperti.

3.5.1 Definizione(di restrizione di una distribuzione)**.** Sia $f(x) \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Sussisstono gli asserti:

a) La definizione seguente:
   - ∘ scegliere un rappresentante $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$ di f ,
   - ∘ porre
   $$f_{\diagup\Gamma} \triangleq [(f_{1\diagup\Gamma}, f_{2\diagup\Gamma}, f_{3\diagup\Gamma}, \ldots)]$$

   è una buona definizione.

b) Per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\Gamma)$ si ha
$$\int_\Gamma f_{\diagup\Gamma} \bullet \varphi = \int_\Omega f \bullet \varphi \ .$$

La distribuzione $f_{\diagup\Gamma}$ si dice la *restrizione di* f *a* Γ.

Cenno. Ovviamente $\forall f_{k\diagup\Gamma} \in L^1_{\text{loc}}(\Gamma)$. Inoltre, per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\Gamma)$, tenuto conto che $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, si ha:
$$\lim_{k\to\infty} \int_\Gamma (f_{k\diagup\Gamma})\, \varphi = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \varphi = \int_\Omega f \bullet \varphi \ .$$

Ne seguono entrambi gli asserti. ■

Il seguente Teorema evidenzia che l'operazione di restrizione è coerente con il prodotto per funzioni C^∞ e con gli operatori di derivazione, ed è continua.

3.5.2 Teorema. Sussistono gli asserti:

a) Per $\forall \zeta \in C^\infty(\Omega)$ e per $\forall f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ si ha:
$$(\zeta f)_{\diagup\Gamma} = \zeta_{\diagup\Gamma} f_{\diagup\Gamma} \ .$$

b) Per $\forall f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e per $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$ si ha:
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_{\diagup\Gamma} = \frac{\partial\,(f_{\diagup\Gamma})}{\partial x_j} \ .$$

c) L'applicazione
$$\begin{array}{ccc} \mathscr{D}'(\Omega) & \longrightarrow & \mathscr{D}'(\Gamma) \\ f & \longrightarrow & f_{\diagup\Gamma} \end{array}$$

   è lineare e continua.

Cenno. Verifiche dirette. ■

La nozione di restrizione consente di considerare le proprietà di una distribuzione sui sottinsiemi aperti del dominio ove è definita. Si adotta la terminologia seguente.

3.5.3 Terminologia. Siano $f, g \in \mathscr{D}'(\Omega)$.

a) Se $f_{\diagup\Gamma} = g_{\diagup\Gamma}$, ossia se per $\forall\varphi \in \mathscr{D}(\Gamma)$ si ha
$$\int_\Omega f \bullet \varphi = \int_\Omega g \bullet \varphi \ ,$$
allora f e g si dicono *uguali su* Γ.

b) Se $f_{\diagup\Gamma} = 0$, ossia se per $\forall\varphi \in \mathscr{D}(\Gamma)$ si ha
$$\int_\Omega f \bullet \varphi = 0 \ ,$$
allora f si dice *nulla su* Γ.

c) Se $f_{\diagup\Gamma} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Gamma)$, allora f si dice L^1_{loc} *su* Γ.

d) Se $f_{\diagup\Gamma} \in C^0(\Gamma)$, allora f si dice C^0 *su* Γ.

e) etc.

3.5.4 Esempi.

a) Sia $a \in \Omega$; si consideri $\delta_a \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Per ogni aperto $\Gamma \subset \Omega$ sono equivalenti gli asserti:
   - δ_a è nulla su Γ,
   - $a \notin \Gamma$.

b) In $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, la distribuzione $\mathrm{pv}\dfrac{1}{x}$ è sia L^1_{loc} sia C^∞ su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3.6 Incollamento di distribuzioni

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Il Lemma seguente è alla base del teorema di incollamento tra distribuzioni.

3.6.1 Lemma(partizioni dell'unità)**.** Sia $\Gamma_j, \ \ j \in J$, una famiglia di aperti tale che:
$$\bigcup_{j\in J} \Gamma_j = \Omega \ .$$
Esiste una famiglia di funzioni $\alpha_j \in C^\infty(\Omega), \ \ j \in J$, tale che:

- per $\forall j \in J$ si ha: $\alpha_j(x) \geqslant 0$ per $\forall x \in \Omega$,
- per $\forall j$ si ha: supp $\alpha_j \subset \Gamma_j$,
- per ogni insieme compatto $K \subset \Omega$, *quasi tutte* le α_j (ossia: tutte, eccetto un numero finito) sono nulle su K,
- per $\forall x \in \Omega$ si ha:

$$\sum_{j \in J} \alpha_j(x) = 1$$

  (si osservi che per $\forall x \in \Omega$, in tale somma quasi tutti gli addendi sono nulli).

Una tale famiglia di funzioni si dice una *partizione dell'unità* su Ω associata alla famiglia di aperti Γ_j.

(Per la dimostrazione, vedi Schwartz, Théorème II, Chapitre I) ■

Il Teorema seguente precisa il significato di *incollamento di distribuzioni*.

3.6.2 Teorema. Sia $\Gamma_j, \quad j \in J$, una famiglia di aperti tale che:

$$\bigcup_{j \in J} \Gamma_j = \Omega \ .$$

Sia $f_j \in \mathscr{D}'(\Gamma_j), \quad j \in J$, una famiglia di distribuzioni. Se:

a) per $\forall i, j \in J$ tali che $\Gamma_i \cap \Gamma_j \neq \emptyset$, le restrizioni di f_i ed f_j a $\Gamma_i \cap \Gamma_j$ coincidono.

allora:

b) esiste una ed una sola $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ tale che $f_{/\Gamma_j} = f_j$ per $\forall j \in J$.

Cenno. Sia $\alpha_j, \ j \in J$, una partizione dell'unità associata alla famiglia di aperti Γ_j. Per $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ si ha:

- $\forall \varphi\alpha_j \in \mathscr{D}(\Gamma_j)$,
- quasi tutte le $\varphi\alpha_j$ sono nulle sul compatto supp φ,
- $\varphi = \sum_{j \in J} \varphi\alpha_j$ (si osservi che quasi tutti gli addendi sono nulli).

Supponiamo in primo luogo che esista una distribuzione $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ tale che $\forall f_{\diagup \Gamma_j} = f_j$. Per $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ si ha:

$$\int_\Omega f \bullet \varphi = \int_\Omega f \bullet \sum_{j\in J} \varphi\alpha_j = \sum_{j\in J} \int_\Omega f \bullet \varphi\alpha_j = \sum_{j\in J} \int_{\Gamma_j} f_j \bullet \varphi\alpha_j \ .$$

Consideriamo quindi il funzionale su $\mathscr{D}(\Omega)$ definito da

$$\varphi \longmapsto \sum_{j\in J} \int_{\Gamma_j} f_j \bullet \varphi\alpha_j \ ;$$

tale funzionale verifica le proprietà seguenti (per i dettagli delle dimostrazioni, vedi Schwartz, Théorème IV, Chapitre I):

- è lineare e continuo, pertanto è una distribuzione $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$,
- come conseguenza delle ipotesi sulle f_j e della scelta delle α_j, per $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Gamma_i)$ si ha
$$\int_\Omega f \bullet \varphi = \int_{\Gamma_i} f \bullet \varphi \ .$$

Le considerazioni precedenti provano l'asserto. ■

Il seguente Corollario prove che se una distribuzione è nulla su tutti gli elementi di una famiglia di aperti, allora è nulla anche sulla loro unione.

3.6.3 Corollario. Sia $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$, e sia

$$\Gamma_j \subset \Omega, \quad j \in J$$

una famiglia di aperti tale che $f_{\diagup \Gamma_j} = 0$ per ogni $j \in J$.

Posto

$$\Gamma = \bigcup_{j\in J} \Gamma_j \ ,$$

si ha $f_{\diagup \Gamma} = 0$.

Cenno. Entrambe le distribuzioni $f_{\diagup \Gamma}$, $0 \in \mathscr{D}'(\Gamma)$ hanno nulla la restrizione a ciascun Γ_j. Per il Teorema precedente, si ha allora $f_{\diagup \Gamma} = 0$. ■

3.7 Supporto di una distribuzione

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, e sia $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Si pone (vedi Sezione 2.3):

$$\begin{aligned}
&\Gamma_f = \{a \in \Omega : \text{esiste } I(a,\varepsilon) \subset \Omega \text{ tale che } f_{\diagup I(a,\varepsilon)} = 0\} \\
&\operatorname{supp} f = \textit{supporto di } f = \Omega \setminus \Gamma_f = \\
&\qquad\qquad = \{a \in \Omega : \text{per ogni } I(a,\varepsilon) \subset \Omega, \text{ si ha } f_{\diagup I(a,\varepsilon)} \neq 0\}
\end{aligned}$$

Sia $a \in \Omega$; si ha:

- sono equivalenti gli asserti:
  a) $a \in \Gamma_f$,
  b) esiste $I(a,\varepsilon) \subset \Omega$ tale che per $\forall \varphi \in \mathscr{D}(I(a,\varepsilon))$ si ha
  $$\int_\Omega f \bullet \varphi = 0 \ ;$$
- sono equivalenti gli asserti:
  a') $a \in \operatorname{supp} f$,
  b') per ogni $I(a,\varepsilon) \subset \Omega$, esiste $\varphi \in \mathscr{D}(I(a,\varepsilon))$ tale che
  $$\int_\Omega f \bullet \varphi \neq 0 \ .$$

Si osservi che:

- se $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, allora il *supporto di* f *come elemento di* $\mathscr{D}'(\Omega)$ e il *supporto di* f *come elemento di* $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ coincidono;
- $\Gamma_f \subset \Gamma_{\frac{\partial f}{\partial x_j}} \qquad \operatorname{supp} \dfrac{\partial f}{\partial x_j} \subset \operatorname{supp} f$;
- per ogni $a \in \Omega$ si ha $\operatorname{supp} \delta_a(x) = \{a\}$.

Il seguente Teorema prova che Γ_f è il massimo sottinsieme aperto di Ω sul quale f è nulla.

3.7.1 Teorema. Sussistono gli asserti:

- Γ_f è aperto,
  Cenno. Per $\forall a \in \Gamma_f$ sia $\Gamma_a = I(a,\varepsilon_a) \subset \Omega$ un intorno sferico aperto di a sul quale f è nulla. Si verifichi che $\Gamma_f = \bigcup_{a \in \Gamma_f} \Gamma_a$. ■

- f è nulla su Γ_f,
  Cenno. Si applichi il Corollario 3.6.3 a Γ_f e alla famiglia Γ_a dell'item precedente. ■
- Γ_f è il massimo sottinsieme aperto di Ω su cui f è nulla.
  Cenno. Segue dai due item precedenti. ■

Il seguente Teorema prova che se una $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ è nulla su un aperto che $\supset \operatorname{supp} f$, allora la φ-misura di f è nulla.

3.7.2 Teorema. Sia $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Si ha:

1) Sono equivalenti gli asserti:
   a) $\varphi \in \mathscr{D}(\Gamma_f)$,
   b) φ è nulla su un aperto $\supset \operatorname{supp} f$,
   c) $(\operatorname{supp} f) \cap (\operatorname{supp} \varphi) = \emptyset$.

   Cenno. a) $\Rightarrow \operatorname{supp} \varphi \subset \Gamma_f \Rightarrow \Gamma_\varphi \supset \operatorname{supp} f \Rightarrow$ b).
   b) $\Rightarrow$ esiste un aperto Δ tale che $\operatorname{supp} f \subset \Delta \subset \Omega$ e che $\varphi_{/\Delta} = 0 \Rightarrow \Gamma_\varphi \supset \Delta \Rightarrow \Gamma_\varphi \supset \operatorname{supp} f \Rightarrow$ c).
   c) $\Rightarrow (\operatorname{supp} f) \cap (\Omega \setminus \Gamma_\varphi) = \emptyset \Rightarrow \operatorname{supp} f \subset \Gamma_\varphi \Rightarrow \operatorname{supp} \varphi \subset \Gamma_f \Rightarrow$ a). ■

2) Se φ è nulla su un aperto $\supset \operatorname{supp} f$, allora si ha $\displaystyle\int_\Omega f \bullet \varphi = 0$.
   Cenno. Per il Teorema 3.7.1, f è nulla su Γ_f. L'ipotesi su φ, per 1) implica che $\varphi \in \mathscr{D}(\Gamma_f)$. ■

Attenzione: l'ipotesi che φ sia nulla su $\operatorname{supp} f$ non è sufficiente a garantire che la φ-misura di f sia nulla; ad esempio:

- si consideri $\delta^{(1)}(x) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, e sia $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ la funzione definita da (vedi Sezione 2.6):

$$\varphi(x) = \begin{cases} xe^{-1/(1-x^2)} & , \quad |x| < 1 \\ 0 & , \quad |x| \geqslant 1 \end{cases} ,$$

- $\varphi(0) = 0$, pertanto φ è nulla su $\operatorname{supp} \delta^{(1)} = \{0\}$,
- si ha però:

$$\int_{\mathbb{R}} \delta^{(1)} \bullet \varphi = -\int_{\mathbb{R}} \delta \bullet \varphi^{(1)} = -\varphi^{(1)}(0) = -1/e \neq 0 \ .$$

Il Corollario seguente prova che se una funzione $\zeta \in C^\infty(\Omega)$ ha valore costante 1 su un aperto $\supset$ supp f, allora $\zeta f = f$.

3.7.3 Corollario. Sia $\zeta(x) \in C^\infty(\Omega)$ tale che $\zeta(x) = 1$ su un aperto $\supset$ supp f. Si ha: $\zeta f = f$.

Cenno. Per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, essendo $(1-\zeta)\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ nulla su un aperto $\supset$ supp f, ed applicando 3.7.2, si ha

$$\int_\Omega (1-\zeta)f \bullet \varphi = \int_\Omega f \bullet (1-\zeta)\varphi = 0 \ ;$$

ne segue $(1-\zeta)f = 0$, e quindi $f = \zeta f$. ■

Capitolo 4

Distribuzioni a supporto compatto

4.1 Alcune nozioni topologiche in $\mathbb{R}^n$

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto.

Il seguente Lemma prova che Ω è l'unione di una famiglia crescente di aperti limitati ciascuno maggiore della chiusura del precedente.

4.1.1 Lemma. Sussistono gli asserti:

a) Esiste una successione Ω_k di aperti limitati tale che:

$$\Omega_1 \subset \overline{\Omega_1} \subset \Omega_2 \subset \overline{\Omega_2} \subset \Omega_3 \subset \overline{\Omega_3} \subset \cdots \subset \Omega, \qquad \Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$$

b) Sia Ω_k una tale successione. Per ogni compatto $K \subset \Omega$, esiste k tale che: $K \subset \Omega_k$.

Per la dimostrazione vedi Capitolo 10.

Il seguente Teorema prova l'esistenza di $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ aventi comportamenti opportuni rispetto a compatti $K \subset \Omega$.

4.1.2 Teorema. Siano K un compatto ed U un aperto tali che:

$$K \subset U \subset \Omega \, .$$

Esiste $\zeta \in \mathscr{D}(\Omega)$ tale che:

◇ supp $\zeta \subset U$,

◇ $\zeta = 1$ su un aperto $\supset K$.

Cenno. Per il Lemma 4.1.1 applicato ad U, esistono aperti limitati A, B tali che:

$$K \subset A \subset \overline{A} \subset B \subset \overline{B} \subset U \ .$$

Si considerino gli aperti:

$$\Gamma_1 = B, \quad \Gamma_2 = \Omega \setminus \overline{A} \ ;$$

si ha: $\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Sia $\alpha_1, \alpha_2 \in C^\infty(\Omega)$ un partizione dell'unità su Ω associata a Γ_1, Γ_2 (vedi Lemma 3.6.1).

Si ha: supp $\alpha_1 \subset \Gamma_1 = B \subset \overline{B}$; essendo $\overline{B}$ compatto, si ha $\alpha_1 \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Inoltre: essendo supp $\alpha_2 \subset \Gamma_2 = \Omega \setminus \overline{A}$, si ha (vedi Sezione 2.3) $\Gamma_{\alpha_2} \supset \overline{A}$, pertanto $\alpha_2(x) = 0$ per $\forall x \in A$; essendo $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) = 1$ per $\forall x \in \Omega$, ne segue che $\alpha_1(x) = 1$ per $\forall x \in A$.

Ponendo $\zeta = \alpha_1$, si ottiene l'asserto. ■

4.2 Lo spazio $\mathscr{E}'$ delle distribuzioni a supporto compatto

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto.

Il seguente Teorema fornisce condizioni equivalenti a che una distribuzione su Ω abbia supporto compatto.

4.2.1 Teorema. Sia $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Sono equivalenti gli asserti:

a) supp f è compatto;

b) esiste $\zeta \in \mathscr{D}(\Omega)$ tale che $\zeta f = f$;

c) esiste un rappresentante *a supporto compatto* di f, *ossia* un rappresentante $(f_1, f_2, f_3, \dots)$ di f per il quale esiste un compatto $K \subset \Omega$ tale che $\forall$supp $f_k \subset K$.

Cenno. a)⇒b). Per il Teorema 4.1.2 applicato al compatto supp $f \subset \Omega$, esiste $\zeta \in \mathscr{D}(\Omega)$ tale che $\zeta(x) = 1$ su un aperto $\supset$ supp f. Per il Corollario 3.7.3 si ha $\zeta f = f$.

b)⇒c). Sia $(g_1, g_2, g_3, \dots)$ un rappresentante di f; si ponga:

$$(f_1, f_2, f_3, \dots) \triangleq (\zeta g_1, \zeta g_2, \zeta g_3, \dots) \ .$$

$(f_1, f_2, f_3, \ldots)$ è un rappresentante di ζf; essendo $\zeta f = f$, $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$ è un rappresentante di f. Siccome $\forall$supp $f_k =$ supp $(\zeta g_k) \subset$ supp ζ , e supp ζ è compatto, $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$ è a supporto compatto.

c)$\Rightarrow$a). Siano $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$, K come in c). Sia $a \in \Omega \setminus K$, e sia $I(a, \varepsilon) \subset \Omega$ tale che $I(a, \varepsilon) \cap K = \emptyset$; per $\forall \varphi \in \mathscr{D}(I(a, \varepsilon))$ si ha $\forall f_k \varphi = 0$: ne segue

$$\int_\Omega f \bullet \varphi = \lim_{k \to \infty} \int_\Omega f_k \varphi = 0 \ ;$$

ne segue $a \in \Gamma_f$. Pertanto $\Omega \setminus K \subset \Gamma_f$, e di conseguenza supp $f \subset K$. ■

Il seguente Teorema prova che ogni distribuzione a supporto compatto su Ω ammette un prolungamento banale a tutto $\mathbb{R}^n$.

4.2.2 Teorema. Sia $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ una distribuzione a supporto compatto. Esiste una ed una sola distribuzione su $\mathbb{R}^n$ verificante le proprietà seguenti:

- ha supporto contenuto in Ω,
- la sua restrizione ad Ω è f.

Tale ditribuzione si dice il *prolungamento banale* di f ad $\mathbb{R}^n$, e si denota con f, ossia con la stessa sigla della distribuzione di cui è prolungamento banale.

Cenno. Si applichi il Teorema 3.6.2 agli aperti e alle distribuzioni:

$$\Gamma_1 = \Omega, \ \Gamma_2 = \mathbb{R}^n \setminus \text{supp } f; \ f_1 = f \in \mathscr{D}'(\Gamma_1), \ f_2 = 0 \in \mathscr{D}'(\Gamma_2) \ .$$

■

4.2.3 Definizione. $\mathscr{E}'(\Omega)$ denota l'insieme delle distribuzioni $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ tali che supp f è compatto.

In particolare $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ denota l'insieme delle distribuzioni su $\mathbb{R}^n$ aventi supporto compatto.

Per il Teorema 4.2.2, $\mathscr{E}'(\Omega)$ è l'insieme delle restrizioni ad Ω delle $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ tali che supp $f \subset \Omega$.

4.2.4 Teorema. Sussitono gli asserti seguenti:

a) $\mathscr{E}'(\Omega)$ è un sottospazio di $\mathscr{D}'(\Omega)$;
b per $\forall f \in \mathscr{E}'(\Omega)$ e $\forall \varphi \in C^\infty(\Omega)$ si ha $\varphi f \in \mathscr{E}'(\Omega)$;
c per $\forall f \in \mathscr{E}'(\Omega)$ e $\forall q \in \mathbb{N}^n$ si ha $\partial^q f \in \mathscr{E}'(\Omega)$.

Cenno. a). Usare rappresentanti a supporto compatto.
b). Usare un rappresentante a supporto compatto di f.
c). Si ha: supp $\partial f \subset$ supp f (vedi Sezione 3.7). ■

4.3 Lo spazio $\mathscr{E}$. *PDML* e seminorme indotte da $\mathscr{E}$ in $\mathscr{E}'$

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto.

Al fine di adottare la terminologia usata da Schwartz poniamo:

$$\mathscr{E}(\Omega) \triangleq C^\infty(\Omega) \ .$$

La Definizione che segue introduce, per $\forall\varphi \in \mathscr{E}(\Omega)$ (cui fare riferimento come strumenti di misura), una *PDML* μ_φ e la relativa seminorma $\|\cdot\|_\varphi$ in $\mathscr{E}'(\Omega)$.

4.3.1 Definizione. Sia $\varphi \in \mathscr{E}(\Omega)$. Per $\forall f \in \mathscr{E}'(\Omega)$, scelti comunque:

- ◦ $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$ rappresentante a supporto compatto di f (vedi Teorema 4.2.1),
- ◦ $\zeta \in \mathscr{D}(\Omega)$ tale che $\zeta = 1$ su un aperto $\supset$ supp f,

si ha:

a) $\forall f_k\varphi \in L^1(\Omega), \quad \zeta\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$,

b) $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\int_\Omega f_k\varphi = \int_\Omega f \bullet \zeta\varphi$;

si pone:

- ◦ $\displaystyle\int_\Omega f \bullet \varphi \triangleq \lim_{k\to\infty}\int_\Omega f_k\varphi = \int_\Omega f \bullet \zeta\varphi$
  (per l'item b), tale definizione è una buona definizione ossia non dipendente dalla scelta di $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$ e di ζ, inoltre se $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ tale simbolo non diviene ambiguo),
- ◦ $\displaystyle\mu_\varphi(f) \triangleq \int_\Omega f \bullet \varphi$,
- ◦ $\displaystyle\|f\|_\varphi = |\mu_\varphi(f)| = \left|\int_\Omega f \bullet \varphi\right|$.

L'applicazione $\displaystyle\int_\Omega \bullet : \mathscr{E}'(\Omega) \times \mathscr{E}(\Omega) \to \mathbb{C}$ è ovviamente bilineare; in particolare μ_φ è una *PDML* in $\mathscr{E}'(\Omega)$.

Dimostrazione di b). Sia $K \subset \Omega$ un compatto $\supset \forall$supp f_k; si osservi che allora si ha anche $K \supset$ supp f. Sia $\eta \in \mathscr{D}(\Omega)$ tale che $\eta = 1$ su un aperto $\supset K$, e quindi in particolare su un aperto $\supset \forall$supp f_k. Si ha:

- $\forall \eta f_k = f_k$, $\eta\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$,
- $\lim\limits_{k\to\infty}\int_\Omega f_k\varphi = \lim\limits_{k\to\infty}\int_\Omega (\eta f_k)\varphi = \lim\limits_{k\to\infty}\int_\Omega f_k(\eta\varphi) = \int_\Omega f \bullet \eta\varphi,$
- tenuto conto che $(\zeta - \eta)\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ è nulla su un aperto che $\supset \operatorname{supp} f$, per il Teorema 3.7.2 si ha:

$$\int_\Omega f \bullet \zeta\varphi - \int_\Omega f \bullet \eta\varphi = \int_\Omega f \bullet (\zeta - \eta)\varphi = 0 \ .$$

■

Il seguente Terema prova che l'operazione $\int\bullet$ ha il comportamento atteso rispetto agli operatori di moltiplicazione per funzioni C^∞ e di derivazione.

4.3.2 Teorema. Sussitono gli asserti:

a) per $\forall f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$, $\forall \eta \in C^\infty(\Omega)$, $\forall \varphi \in \mathscr{E}(\Omega)$ si ha:

$$\int_\Omega \eta f \bullet \varphi = \int_\Omega f \bullet \eta\varphi \ ;$$

b) $\displaystyle\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} f \bullet \varphi = -\int_\Omega f \bullet \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi \ .$

Cenno. a). Calcolare primo e secondo membro usando ζ come nella Definizione 4.3.1.

b). Sia ζ come nella Definizione 4.3.1. Si osservi che

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} f \bullet \varphi &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} f \bullet \zeta\varphi = -\int_\Omega f \bullet \frac{\partial}{\partial x_j}(\zeta\varphi) = \\ &= -\int_\Omega f \bullet \zeta\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi - \int_\Omega f \bullet \varphi\frac{\partial}{\partial x_j}\zeta \ ,\end{aligned}$$

e che $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\zeta \in \mathscr{D}(\Omega)$ è nulla su un aperto che $\supset \operatorname{supp} f$. ■

4.4 $\mathscr{E}'$-convergenza in $\mathscr{E}'$

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto.

Il seguente Teorema prova che le famiglie di *PDML* e di seminorme (vedi Definizione 4.3.1)

$$\mu_\varphi,\ \|\cdot\|_\varphi \qquad \varphi \in \mathscr{E}(\Omega)$$

sono separanti in $\mathscr{E}'(\Omega)$.

4.4.1 Sia $f \in \mathscr{E}'(\Omega)$. Se per $\forall\varphi \in \mathscr{E}(\Omega)$ si ha

$$\int_\Omega f \bullet \varphi = 0 \ ,$$

allora si ha $f = 0$.

Cenno. Dall'ipotesi segue che per $\forall\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ si ha $\int_\Omega f \bullet \varphi = 0$. L'asserto segue quindi dal Teorema 2.10.1. ■

La convergenza indotta in $\mathscr{E}'(\Omega)$ dalle famiglie separanti di *PDML* e di seminorme

$$\mu_\varphi, \ \|\cdot\|_\varphi \qquad \varphi \in \mathscr{E}(\Omega)$$

si chiama $\mathscr{E}'$-convergenza.

Siano $f_1, f_2, f_3, \dots \ , \ f$ rispettivamente una successione ed un elemento di $\mathscr{E}'(\Omega)$. Per il Teorema 2.4.2 si ha:

- sono equivalenti gli asserti:
  - a) $\mathscr{E}'\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k = f$,
  - b) per $\forall\varphi \in \mathscr{E}(\Omega)$ si ha: $\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \bullet \varphi = \int_\Omega f \bullet \varphi$;
- sono equivalenti gli asserti:
  - a') $f_1, f_2, f_3, \dots$ è una successione di $\mathscr{E}'$-Cauchy,
  - b') per ogni $\varphi \in \mathscr{E}(\Omega)$, in $\mathbb{C}$ esiste $\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \bullet \varphi$.

Il seguente Teorema caratterizza le successioni di $\mathscr{E}'$-Cauchy in termini di $\mathscr{D}'$-convergenza e di condizioni topologiche sui supporti.

4.4.2 Teorema. Sia $f_1, f_2, f_3, \dots$ una successione di elementi di $\mathscr{E}'(\Omega)$; sono equivalenti gli asserti:

a) $f_1, f_2, f_3, \dots$ è una successione di $\mathscr{E}'$-Cauchy;

b) $f_1, f_2, f_3, \dots$ è una successione di $\mathscr{D}'$-Cauchy, ed esiste un compatto $K \subset \Omega$ tale che $\forall \operatorname{supp} f_k \subset K$.

Per la dimostrazione vedi Capitolo 10.

I seguenti Teoremi provano che $\mathscr{E}'(\Omega)$ è completo e che $\mathscr{D}(\Omega)$ è $\mathscr{E}'$-denso in $\mathscr{E}'(\Omega)$.

4.4.3 Teorema. Sia $f_1, f_2, f_3, \ldots \in \mathscr{E}'(\Omega)$ una successione di $\mathscr{E}'$-Cauchy. Sussistono gli asserti:

- per il Teorema 4.4.2 esiste $f = \mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k \in \mathscr{D}'(\Omega)$,
- $f \in \mathscr{E}'(\Omega)$,
- $\mathscr{E}'\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k = f$.

In particolare: lo spazio $\mathscr{E}'(\Omega)$ è completo rispetto alla famiglia di seminorme

$$\|\cdot\|_\varphi \qquad \varphi \in \mathscr{E}(\Omega)\ .$$

Cenno. Sia $K \subset \Omega$ un compatto tale che $\forall$supp $f_k \subset K$, e sia $\zeta \in \mathscr{D}(\Omega)$ tale che $\zeta = 1$ su un aperto $\supset K$. Si ha

$$\zeta f = \mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \zeta f_k = \mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k = f$$

quindi $f \in \mathscr{E}'(\Omega)$.

Per $\forall\varphi \in \mathscr{E}(\Omega)$ si ha

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega f_k \bullet \varphi = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega \zeta f_k \bullet \varphi = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega f_k \bullet \zeta\varphi =$$
$$= \int_\Omega f \bullet \zeta\varphi = \int_\Omega \zeta f \bullet \varphi = \int_\Omega f \bullet \varphi\ .$$

■

4.4.4 Teorema. $\mathscr{D}(\Omega)$ è $\mathscr{E}'$-denso in $\mathscr{E}'(\Omega)$.

Cenno. Sia $f \in \mathscr{E}'(\Omega)$ e sia $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \in \mathscr{D}(\Omega)$ una successione tale che

$$f = \mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \varphi_k\ .$$

Sia $\zeta \in \mathscr{D}(\Omega)$ tale che $\zeta f = f$. Si ha

$$f = \zeta f = \mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \zeta\varphi_k\ .$$

Ovviamente $\forall\zeta\varphi_k \in \mathscr{D}(\Omega)$; inoltre, essendo $\forall$supp $\zeta\varphi_k \subset$ supp ζ, per il Teorema 4.4.2 si ha:

$$f = \mathscr{E}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \zeta\varphi_k\ .$$

■

Il Lemma e il Teorema seguenti riformulano il Lemma 2.16.4 e il Teorema 2.16.5 (relativi all'approsssimazione di distribuzioni tramite combinazioni lineari di delta di Dirac) in termini di $\mathscr{E}'$-convergenza.

4.4.5 Osservazione. Sussitono gli asserti:

- per $\forall a \in \Omega$ si ha:
  - supp $\delta_a = \{a\}$,
  - $\delta_a \in \mathscr{E}'(\Omega)$;
- $\Delta(\Omega) \subset \mathscr{E}'(\Omega)$.

4.4.6 Lemma. Sia $\eta \in \mathscr{D}(\Omega)$. Esiste una successione $g_k \in \Delta(\Omega)$ tale che:

- $\forall$supp $g_k \subset$ supp η,
- $\eta = \mathscr{E}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} g_k$.

4.4.7 Teorema. Sia $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ (risp. $f \in \mathscr{E}'(\Omega)$). Esiste una famiglia g_{kh} $(k, h \in \mathbb{N})$ di distribuzioni tale che:

- $\forall k, h$: $g_{kh} \in \Delta(\Omega)$,
- $f = \mathscr{D}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty}\left(\mathscr{E}'\text{-}\lim\limits_{h\to\infty} g_{kh}\right)$ (risp. $f = \mathscr{E}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty}\left(\mathscr{E}'\text{-}\lim\limits_{h\to\infty} g_{kh}\right)$).

Cenno. Per la parte del secondo item relativa ad una $f \in \mathscr{E}'(\Omega)$, si tenga conto del Teorema 4.4.4. ■

NOTE: Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto.

1) Sia $a \in \Omega$. Si consideri $\delta_a \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Si ha:
   - per $\forall \varphi \in \mathscr{E}(\Omega)$ si ha: $\displaystyle\int_\Omega \delta_a \bullet \varphi = \varphi(a)$ (usare $\zeta \in \mathscr{D}(\Omega)$ tale che $\zeta = 1$ su un aperto $\supset$ supp δ_a, ed applicare la Definizione 4.3.1);
   - il prolungamento banale di $\delta_a \in \mathscr{E}'(\Omega)$ a $\mathbb{R}^n$ è $\delta_a = \delta(x-a) \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$.

2) Siano $f_1, f_2, f_3, \ldots \in \mathscr{E}'(\Omega)$, $f \in \mathscr{E}'(\Omega)$. Si ha:

$$\mathscr{E}'\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k = f \Longrightarrow \mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k = f \ .$$

3) Sia $a \in \Omega$ e sia $a_1, a_2, a_3, \ldots \in \Omega$ una successione tale che

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a \ .$$

Si ha: $\mathscr{E}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \delta_{a_k} = \delta_a$ (usare la Nota 1).

4) Sia $b \notin \Omega$ e sia $a_1, a_2, a_3, \ldots \in \Omega$ una successione tale che

$$\lim_{k\to\infty} a_k = b \ .$$

Si considerino: in $\mathscr{E}'(\Omega)$ la successione δ_{a_k}, e in $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ la successione $\delta_{a_k}(x) = \delta(x - a_k)$ dei corrispondenti prolungamenti banali ad $\mathbb{R}^n$. Si ha:

- in $\mathscr{E}'(\Omega)$ la successione δ_{a_k} *non è* di $\mathscr{E}'$-Cauchy;
- in $\mathscr{D}'(\Omega)$ si ha: $\mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \delta_{a_k} = 0 \in \mathscr{D}'(\Omega)$;
- in $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ si ha: $\mathscr{E}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \delta_{a_k} = \delta_b \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$.

4.5 Convergenza in $\mathscr{E}$: distribuzioni a supporto compatto come funzionali lineari e continui su $\mathscr{E}$

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto.

La seguente definizione introduce in $\mathscr{E}(\Omega)$ una nozione di convergenza per successioni.

4.5.1 Definizione. Siano $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$, φ rispettivamente una successione ed un elemento di $\mathscr{E}(\Omega)$; se per

$$\forall \partial^q, \quad q \in \mathbb{N}^n$$

e per ogni compatto $K \subset \Omega$ la successione $\partial^q\varphi_1, \partial^q\varphi_2, \partial^q\varphi_3, \ldots$ converge uniformemente su K a $\partial^q\varphi$, allora:

- si dice che la successione $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ $\mathscr{E}$*-converge* a φ
- si scrive $\mathscr{E}\text{-}\lim_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi$.

Il seguente Lemma prova che lo spazio $\mathscr{D}(\Omega)$ è denso in $\mathscr{E}(\Omega)$.

4.5.2 Lemma. Sia $\varphi \in \mathscr{E}(\Omega)$. Esiste una successione

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \in \mathscr{D}(\Omega)$$

tale che:

$$\varphi = \mathscr{E}\text{-}\lim_{k\to\infty} \varphi_k \ .$$

Cenno. Per il Lemma 4.1.1 esiste una successione Ω_k di aperti limitati tale che:

$$\Omega_1 \subset \overline{\Omega_1} \subset \Omega_2 \subset \overline{\Omega_2} \subset \Omega_3 \subset \overline{\Omega_3} \subset \cdots \subset \Omega, \qquad \Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k \ .$$

Per il Teorema 4.1.2 esistono $\zeta_k \in \mathscr{D}(\Omega)$ tali che:

- ◦ supp $\zeta_k \subset \Omega_{k+1}$,
- ◦ $\zeta_k = 1$ su un aperto $\supset \overline{\Omega_k}$.

La successione $\varphi_k \triangleq \zeta_k \varphi$ verifica la condizione richiesta. ■

Il Teorema seguente Teorema mette in relazione la $\mathscr{E}'$-convergenza con la $\mathscr{E}$-convergenza.

4.5.3 Teorema. Sussistono gli asserti:

a) se $\mathscr{E}'\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k = f$ e $\mathscr{E}\text{-}\lim_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi$, allora si ha

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \bullet \varphi_k = \int_\Omega f \bullet \varphi \ ;$$

b) per $\forall f \in \mathscr{E}'(\Omega)$, il funzionale

$$\varphi \mapsto \int_\Omega f \bullet \varphi, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{E}(\Omega)$$

è lineare e continuo su $\mathscr{E}(\Omega)$, cioè:

$$\mathscr{E}\text{-}\lim_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi \implies \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f \bullet \varphi_k = \int_\Omega f \bullet \varphi \ .$$

Cenno. a). Sia $K \subset \Omega$ un compatto tale che

$$K \supset \forall \text{supp } f_k, \ K \supset \text{supp } f \ ,$$

e sia $\zeta \in \mathscr{D}(\Omega)$ tale che $\zeta = 1$ su un aperto $\supset K$.

Si ha: $\mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k = f$, $\mathscr{D}\text{-}\lim_{k\to\infty} \zeta\varphi_k = \zeta\varphi$. Per il Teorema 2.14.2 si ha:

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega f_k \bullet \zeta\varphi_k = \int_\Omega f \bullet \zeta\varphi \ ;$$

l'asserto ne segue osservando che:

$$\forall \int_\Omega f_k \bullet \varphi_k \triangleq \int_\Omega f_k \bullet \zeta\varphi_k, \quad \int_\Omega f \bullet \varphi \triangleq \int_\Omega f \bullet \zeta\varphi \ .$$

b). Applicare a. alla successione costante $f_k \triangleq f$ e alla successione φ_k.

■

La Nota che segue ricorda il *significato attribuito da Schwartz al simbolo "$\mathscr{E}'$"*.

4.5.4 Nota. Denotiamo con

$$\mathscr{T}\mathscr{E}(\Omega)$$

lo spazio dei *funzionali lineari e continui* su $\mathscr{E}(\Omega)$ ossia lo spazio delle applicazioni lineari e continue

$$T : \mathscr{E}(\Omega) \to \mathbb{C} \ ,$$

con la convergenza indotta dalle famiglie *ovviamente* separanti di *PDML* e di seminorme associate:

$$\mu^*_\varphi(T) \triangleq T(\varphi) \ , \ \|T\|^*_\varphi \triangleq \left|\mu^*_\varphi(T)\right| = |T(\varphi)| \qquad \varphi \in \mathscr{E}(\Omega) \ .$$

Si osservi che:

- $\mathscr{T}\mathscr{E}$ è lo spazio chiamato "$\mathscr{E}'$" da Schwartz,
- la convergenza indotta dalle *PDML* e dalle seminorme associate è la nozione di *convergenza per successioni in "$\mathscr{E}'$" secondo Schwartz.*

Sia $f \in \mathscr{E}'(\Omega)$. Interpretando f come un *fenomeno su* Ω e gli elementi di $\mathscr{E}(\Omega)$ come strumenti di misura sui fenomeni, si ottiene la famiglia

$$\int_\Omega f \bullet \varphi \in \mathbb{C} \qquad \varphi \in \mathscr{E}(\Omega)$$

dei risultati di *tutte le misure effettuabili su f*. La Definizione seguente formalizza tale nozione.

4.5.5 Definizione. Sia $f \in \mathscr{E}'(\Omega)$; indichiamo con

$$T_f : \mathscr{E}(\Omega) \to \mathbb{C}$$

il funzionale lineare e continuo definito da (vedi b. del Teorema 4.5.3):

$$T_f(\varphi) = \int_\Omega f \bullet \varphi \qquad \forall \varphi \in \mathscr{E}(\Omega) \; .$$

Il Teorema seguente descrive *l'isomorfismo canonico* tra $\mathscr{E}'(\Omega)$ con la $\mathscr{E}'$-convergenza e $\mathscr{T}\mathscr{E}(\Omega)$ con la convergenza sopra definita.

4.5.6 Teorema. Si consideri l'applicazione

$$\mathbf{T} : \mathscr{E}'(\Omega) \longrightarrow \mathscr{T}\mathscr{E}(\Omega)$$

definita da (vedi Definizione 4.5.5)

$$\mathbf{T}(f) = T_f \qquad \forall f \in \mathscr{E}'(\Omega).$$

Sussistono gli asserti:

a) $\mathbf{T}$ è un isomorfismo di spazi vettoriali;
b) per $\forall f \in \mathscr{E}'(\Omega)$ e per $\forall \varphi \in \mathscr{E}(\Omega)$ si ha:

$$\mu_\varphi^*(T_f) = \mu_\varphi(f) \; , \quad \|T_f\|_\varphi^* = \|f\|_\varphi \; ;$$

c) $\mathbf{T}$ è un isomorfismo di spazi vettoriali con famiglie separanti di *PDML* e di seminorme ad indici in $\mathscr{E}(\Omega)$.

Per la dimostrazione vedi Capitolo 10.

L'isomorfismo canonico $\mathbf{T}$ definito dal precedente Teorema consente di identificare gli spazi $\mathscr{E}'(\Omega)$ e $\mathscr{T}\mathscr{E}(\Omega)$. Tale identificazione rimuove l'ambiguità del simbolo $\mathscr{E}'(\Omega)$, da noi usato *a priori impropriamente* per indicare le *distribuzioni a supporto compatto su* Ω, simbolo che in letteratura denota invece lo spazio dei funzionali lineari e continui su $\mathscr{E}(\Omega)$, spazio che in questa Sezione era stato da noi *prudentemente* indicato con il simbolo $\mathscr{T}\mathscr{E}(\Omega)$.

Capitolo 5

Distribuzioni temperate (a crescita lenta)

5.1 Funzioni a crescita lenta e a decrescenza rapida. Gli spazi $L^1_{\mathrm{loc/cl}}$, $\mathscr{O}_{\mathrm{M}}$, $\mathscr{S}$

La seguente Definizione introduce la nozione di funzioni a crescita lenta.

5.1.1 Definizione. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ una funzione.

- f si dice una *funzione a crescita lenta s.u.* ("*s.u.*" sta per "*in senso usuale*") se esistono $C > 0$, $h \geqslant 0$ tali che

$$|f(x)| \leqslant C \left(\sqrt{1 + \|x\|^2}\right)^h = (1 + \|x\|^2)^{h/2} \ .$$

- f si dice una *funzione* L^1_{loc} *a crescita lenta* se:
  - $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$,
  - f è a crescita lenta s.u. ;

  lo spazio delle funzioni L^1_{loc} a crescita lenta si denota con $L^1_{\mathrm{loc/cl}}(\mathbb{R}^n)$.
- f si dice una *funzione* C^∞ *a crescita lenta* se:
  - $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$,
  - $\partial^q f$ è a crescita lenta s.u. per $q \in \mathbb{N}^n$;

  lo spazio delle funzioni C^∞ a crescita lenta si denota con $\mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n)$.

La seguente Definizione introduce la nozione di funzioni a decrescenza rapida.

5.1.2 Definizione. sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ una funzione.

- f si dice una *funzione a decrescenza rapida s.u.* se per $\forall h \in \mathbb{N}$ si ha:

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \|x\|^h f(x) = 0 \ .$$

- f si dice una *funzione* L^1_{loc} *a decrescenza rapida* se:
  - $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$,
  - f è a decrescenza rapida s.u. ;

  lo spazio delle funzioni L^1_{loc} a decrescenza rapida si denota con $L^1_{\text{loc/dr}}(\mathbb{R}^n)$; ovviamente $L^1_{\text{loc/dr}}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$.
- f si dice una *funzione* C^∞ *a decrescenza rapida* se:
  - $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
  - $\partial^q f$ è a decrescenza rapida s.u. per ogni $q \in \mathbb{N}^n$.

Lo spazio delle funzioni C^∞ a decrescenza rapida si denota con $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

5.1.3 NOTE:

1) $\mathbb{C}[X] \subset \mathscr{O}_{\text{M}}(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{\text{loc/cl}}(\mathbb{R}^n)$ ($\mathbb{C}[X]$ è l'anello dei polinomi in n indeterminate, qui considerato come anello delle funzioni polinomiali).
2) $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\quad e^{-\|x\|^2} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.
3) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ è a crescita lenta s.u., allora f è limitata su ogni insieme limitato.
4) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ è a decrescenza rapida s.u. si ha:
   - esiste $\rho > 0$ tale che f è limitata su $\mathbb{R}^n \setminus I(0, \rho)$,
   - f può essere non limitata su insiemi limitati.
5) Gli spazi $L^1_{\text{loc/cl}}(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{O}_{\text{M}}(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ sono chiusi rispetto alla moltiplicazione.
6) $L^1_{\text{loc/cl}}(\mathbb{R}^n) \cdot \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, $\quad \mathscr{O}_{\text{M}}(\mathbb{R}^n) \cdot \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

5.2 Convergenza in $\mathscr{S}$. Funzionali lineari e continui su $\mathscr{S}$

NOTA: Per alcune dimostrazioni sui funzionali lineari e continui su $\mathscr{S}$, in questa Sezione vengono fatti rimandi al testo di Vladimirov. Nel leggere *tali dimostrazioni si tenga conto in tale testo il simbolo $\mathscr{S}'$ viene usato per indicare lo spazio dei funzionali lineari e continui su $\mathscr{S}$.*

La seguente Definizione introduce in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ una nozione di convergenza per successioni.

5.2.1 Definizione. Siano $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$, φ rispettivamente una successione ed un elemento di $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Se:

- per $\forall \nu, q \in \mathbb{N}^n$ la successione

$$x^\nu \partial^q \varphi_k(x)$$

  converge uniformemente su $\mathbb{R}^n$ a $x^\nu \partial^q \varphi(x)$,

allora:

- si dice che $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ $\mathscr{S}$*-converge a* φ,
- si scrive $\mathscr{S}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi$.

Il seguente Lemma prova che $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ è denso in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

5.2.2 Lemma. Sia $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Esiste una successione

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$$

tale che:

$$\varphi = \mathscr{S}\text{-}\lim_{k\to\infty} \varphi_k \ .$$

Cenno. Sia $\eta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tale che $\eta = 1$ su $I(0,1)$. Si ponga

$$\eta_k(x) = \eta\left((1/k)x\right) \ .$$

La successione $\varphi_k = \eta_k \varphi$ verifica le condizioni richieste (vedi Vladimirov pg 75 di Section 5.1). ■

Per la Nota 6. di 5.1.3 si ha $L^1_{\mathrm{loc/cl}} \cdot \mathscr{S} \subset L^1$; il seguente Lemma prova che ad ogni funzione $L^1_{\mathrm{loc/cl}}$ è associato un funzionale lineare e continuo su $\mathscr{S}$ coerente con tale inclusione.

5.2.3 Lemma. Sia $f \in L^1_{\text{loc/cl}}(\mathbb{R}^n)$; l'applicazione:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi & \mapsto & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f\varphi \end{array}$$

è un funzionale lineare e continuo.

Cenno. Essendo $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, esistono $C > 0, h > 0$ tali che $\|f(x)\| \leqslant C\left(1 + \|x\|^2\right)^{h/2}$; posto $\nu = h/2 + n$, si ha allora:

$$\frac{\|f(x)\|}{(1 + \|x\|^2)^\nu} \in L^1(\mathbb{R}^n) \ .$$

Siano $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi$ rispettivamente una successione ed un elemento di $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ tali che $\mathscr{S}\text{-}\lim_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi$. Tale ipotesi implica in particolare che la successione $(1+\|x\|^2)^\nu \varphi_k(x)$ converge uniformemente su $\mathbb{R}^n$ a $(1+\|x\|^2)^\nu \varphi(x)$. Ne segue che la successione:

$$\varepsilon_k(x) \triangleq (1 + \|x\|^2)^\nu (\varphi_k(x) - \varphi(x))$$

converge uniformemente su $\mathbb{R}^n$ a 0, e quindi in particolare che $\exists H > 0$ tale che: $|\varepsilon_k(x)| < H$ per $\forall k,\ \forall x$.

Si considerino in $L^1(\mathbb{R}^n)$ la successione $f\varphi_k$ e l'elemento $f\varphi$; si ha:

- per $\forall x \in \mathbb{R}^n$ si ha: $\lim_{k\to\infty} f(x)\varphi_k(x) = f(x)\varphi(x)$,
- per $\forall k$ si ha:

$$\begin{aligned} |f(x)\varphi_k(x)| &= \left| f(x)\varphi(x) + \varepsilon_k(x) \frac{f(x)}{(1 + \|x\|^2)^\nu} \right| \leqslant \\ &\leqslant |f(x)\varphi(x)| + H \left| \frac{f(x)}{(1 + \|x\|^2)^\nu} \right| \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad . \end{aligned}$$

Per il Teorema di Lebesgue sulla convergenza limitata si ha allora:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi_k = \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi \ .$$

■

Sussiste il seguente Lemma tecnico sulle successioni di funzionali lineari e continui su $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

5.2.4 Lemma. Sia $T_k : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ una successione di funzionali lineari e continui tale che:

- per $\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ esiste $\lim\limits_{k\to\infty} T_k(\varphi)$.

Allora:

a) il funzionale lineare $T : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ definito da:

$$T(\varphi) \triangleq \lim_{k\to\infty} T_k(\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

è continuo;

b) se $\varphi = \mathscr{S}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k$, si ha: $\lim\limits_{k\to\infty} T_k(\varphi_k) = T(\varphi)$.

Cenno. a). Per la dimostrazione, vedi Vladimirov (Corollary 3, pg 78).

b). Per $\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ esiste $C_\varphi > 0$ tale che $\forall\, |T_k(\varphi)| < C_\varphi$. Per Vladimirov (Theorem(L.Schwartz), pg 77) si ha allora:

$$\lim_{k\to\infty} |T_k(\varphi - \varphi_k)| = 0 \ ,$$

ossia:

$$\lim_{k\to\infty} |T_k(\varphi) - T_k(\varphi_k)| = 0 \ ;$$

siccome $\lim\limits_{k\to\infty} T_k(\varphi) = T(\varphi)$, si ottiene l'asserto. ■

Il seguente Lemma prova che ogni funzionale lineare e continuo su $\mathscr{S}$ può essere descritto in tale maniera tramite una successione di funzionali associati (nel senso del precedente Lemma 5.2.3) a funzioni $\mathscr{D}$.

5.2.5 Lemma. Sia $T : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ un funzionale lineare e continuo. Esiste una successione $\zeta_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tale che:

- $T(\varphi) = \lim\limits_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \zeta_k \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\Omega)$.

Cenno. Per la Dimostrazione del Corollario pg 85 (Vladimirov), esiste una successione $\xi_k \in \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n)$ tale che:

$$T(\varphi) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \xi_k \varphi, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \ ;$$

si consideri la successione di funzionali lineari e continui (vedi Lemma 5.2.3):

$$T_k(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \xi_k \varphi \ .$$

Sia $\eta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tale che $\eta = 1$ su $I(0,1)$, e si ponga:

$$\begin{aligned} \eta_k(x) &= \eta((1/k)x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \\ \zeta_k(x) &= \xi_k(x)\eta_k(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \ . \end{aligned}$$

Per $\forall\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si ha:

- $\mathscr{S}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} \eta_k\varphi = \varphi$ (vedi la Dimostrazione del Lemma 5.2.2),
- $\lim\limits_{k\to\infty} T_k(\varphi) = T(\varphi)$.

Allora, per b. del Lemma 5.2.4, per ogni $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si ha:

- $\lim\limits_{k\to\infty} T_k(\eta_k\varphi) = T(\varphi)$, cioè: $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} \xi_k\eta_k\varphi = T(\varphi)$,

da cui segue:

- $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} \zeta_k\varphi = \lim\limits_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} \xi_k\eta_k\varphi = T(\varphi)$. ■

5.3 Distribuzioni temperate. Lo spazio $\mathscr{S}'$

La seguente Definizione introduce una particolare classe di predistribuzioni su $\mathbb{R}^n$.

5.3.1 Definizione. Sia $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$ una predistribuzione su $\mathbb{R}^n$; se:

- ogni $f_k \in L^1_{\mathrm{loc/cl}}(\mathbb{R}^n)$,
- per ogni $\forall\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, esiste finito

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f_k\varphi$$

(si ricordi che $f_k\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ − vedi Nota 6. di 5.1.3),

allora:

- $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$ si dirà una *predistribuzione temperata* su $\mathbb{R}^n$.

La seguente Definizione introduce la nozione di *distribuzioni temperate* (o *distribuzioni a crescita lenta*) su $\mathbb{R}^n$.

5.3.2 Definizione. Sia $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Se:

- esiste un rappresentante temperato $(f_1, f_2, f_3, \dots)$ di f,

allora:

- f si dirà una *distribuzione temperata* su $\mathbb{R}^n$.

Il sottospazio di $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ i cui elementi sono le distribuzioni temperate si denota con $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

La seguente Nota indica alcuni sottospazi di $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

5.3.3 Nota. Sussistono gli asserti:

a) $L^1_{\text{loc/cl}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

b) $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n),\ \mathscr{S}(\mathbb{R}^n),\ L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

c) $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Cenno. a). Sia $f \in L^1_{\text{loc/cl}}(\mathbb{R}^n)$; allora $(f, f, f, \dots)$ è un rappresentante temperato di f.

b). I tre spazi considerati sono sottospazi di $L^1_{\text{loc/cl}}(\mathbb{R}^n)$.

c). Sia $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$; per il Teorema 4.4.4 esiste un rappresentante a supporto compatto $(f_1, f_2, f_3, \dots)$ di f con ogni $f_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Ogni $f_k \in L^1_{\text{loc/cl}}(\mathbb{R}^n)$; inoltre per la Definizione 4.3.1, per $\forall \varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^n) \supset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ esiste finito $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \varphi$; pertanto $(f_1, f_2, f_3, \dots)$ è un rappresentante temperato di f. ■

5.4 *PDML* e seminorme indotte da $\mathscr{S}$ in $\mathscr{S}'$

La Definizione che segue introduce, per $\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ (cui fare riferimento come strumenti di misura), una *PDML* μ_φ e la relativa seminorma $\|\cdot\|_\varphi$ in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

5.4.1 Definizione. Sia $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Per $\forall f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, scelto comunque un rappresentante temperato $(f_1, f_2, f_3, \dots)$ di f (vedi Definizione 5.3.2), si ha:

- $\forall f_k \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$,
- $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \varphi$;

si pone:

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f \bullet \varphi \triangleq \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \varphi$, e si ha:
  a) la definizione di $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f \bullet \varphi$ è una buona definizione, ossia non dipende dal particolare rappresentante temperato $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$,
  b) il simbolo $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f \bullet \varphi$ non diviene ambiguo quando $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$,
  c) il simbolo $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f \bullet \varphi$ non diviene ambiguo quando $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$,
  d) se $f \in L^1_{\mathrm{loc/cl}}(\mathbb{R}^n)$ è: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f \bullet \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi$;
- $\displaystyle\mu_\varphi(f) \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} f \bullet \varphi$,
- $\displaystyle\|f\|_\varphi = |\mu_\varphi(f)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} f \bullet \varphi\right|$.

L'applicazione $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \bullet : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ è ovviamente bilineare; in particolare μ_φ è una *PDML* in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Cenno. a). Siano $(f_1, f_2, f_3, \ldots), (g_1, g_2, g_3, \ldots)$ rappresentanti temperati di f; siano

$$F, G : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$$

le applicazioni definite da

$$F(\sigma) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k \sigma,\ G(\sigma) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_k \sigma \qquad \forall \sigma \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Si ha:

- per i Lemmi 5.2.3, 5.2.4, F e G sono funzionali lineari e continui,
- per $\forall \sigma \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ si ha $\displaystyle F(\sigma) = G(\sigma) = \int_{\mathbb{R}^n} f \bullet \sigma$.

Essendo $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, per il Lemma 5.2.2 esiste una successione $\sigma_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tale che $\varphi = \mathscr{S}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_k$; si ha quindi:

$$F(\varphi) = \lim_{k\to\infty} F(\sigma_k),\ G(\varphi) = \lim_{k\to\infty} G(\sigma_k)\ ;$$

siccome per ogni σ_k è $F(\sigma_k) = G(\sigma_k)$, si ha $F(\varphi) = G(\varphi)$.

b). Ovvio.

c). Usare un rappresentante $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$ a supporto compatto di f ed applicare la Definizione 4.3.1.

d). $(f, f, f, \ldots)$ è un rappresentante temperato di f. ■

5.5 $\mathscr{S}'$-convergenza in $\mathscr{S}'$

Il seguente Teorema prova che le famiglie di *PDML* e di seminorme

$$\mu_\varphi,\ \|\cdot\|_\varphi \qquad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

sono separanti in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

5.5.1 Sia $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Se per $\forall\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \bullet \varphi = 0\ ,$$

allora si ha $f = 0$.

Cenno. Dall'ipotesi segue che per $\forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ si ha $\int_{\mathbb{R}^n} f \bullet \varphi = 0$. L'asserto segue quindi dal Teorema 2.10.1. ■

La convergenza indotta in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ dalle famiglie separanti di *PDML* e di seminorme

$$\mu_\varphi,\ \|\cdot\|_\varphi \qquad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

si chiama $\mathscr{S}'$-convergenza.

Siano $f_1, f_2, f_3, \dots\ ,\ \ f$ rispettivamente una successione ed un elemento di $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Per il Teorema 2.4.2 si ha:

- sono equivalenti gli asserti:
  - a) $\mathscr{S}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$,
  - b) per $\forall\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si ha: $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f_k \bullet \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} f \bullet \varphi$;
- sono equivalenti gli asserti:
  - a') $f_1, f_2, f_3, \dots$ è una successione di $\mathscr{S}'$-Cauchy,
  - b') per ogni $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, in $\mathbb{C}$ esiste $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f_k \bullet \varphi$.

I seguenti Teoremi provano che $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ è $\mathscr{S}'$-completo e che $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ è $\mathscr{S}'$-denso in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

5.5.2 Teorema. Sia $f_1, f_2, f_3, \dots \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ una successione di $\mathscr{S}'$-Cauchy. Si ha:

- $\exists f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ tale che: $f = \mathscr{S}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k$.

In particolare: lo spazio $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ è completo rispetto alla $\mathscr{S}'$-convergenza.

Cenno. Si consideri il funzionale $T : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ definito da:

$$T(\varphi) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \bullet \varphi \ ;$$

si ha:

- per la dimostrazione di a) della Definizione 5.4.1, i funzionali

  $$\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f_k \bullet \varphi \ , \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

  sono lineari e continui;
- essendo f_k una successione di $\mathscr{S}'$-Cauchy, per il Lemma 5.2.4 anche il funzionale T è lineare e continuo;
- per il Lemma 5.2.5 esiste una successione $\zeta_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tale che:

  $$T(\varphi) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \zeta_k \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\Omega) \ ;$$

- $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots)$ è ovviamente una predistribuzione temperata, e posto

  $$f = [(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots)] \ ,$$

  ovviamente si ha: $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{S}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$. ∎

5.5.3 Teorema. Sia $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Esiste una successione $\zeta_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tale che: $f = \mathscr{S}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} \zeta_k$.

Cenno. Si consideri il funzionale $T : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ definito da:

$$T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f \bullet \varphi \ ;$$

si ha:

- per la dimostrazione di a) della Definizione 5.4.1, T è lineare e continuo;
- per il Lemma 5.2.5 esiste una successione $\zeta_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tale che:

  $$T(\varphi) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \zeta_k \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\Omega) \ ;$$

- ovviamente si ha: $f = \mathscr{S}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} \zeta_k$. ■

Il Teorema seguente rilegge $\Delta(\mathbb{R}^n)$ come spazio generato dalle traslate della delta di Dirac e, tenuto conto del Teorema 5.5.3, adatta il Teorema 4.4.7 all'approssimazione di distribuzioni temperate tramite combinazioni lineari di traslate della delta di Dirac. Ricordiamo che tale risultato gioca un ruolo determinante nella Teoria dei Sistemi lineari.

5.5.4 Teorema. Sussitono gli asserti:

- $\Delta(\mathbb{R}^n) = \langle \delta(x-a) : a \in \mathbb{R}^n \rangle$;
- per $\forall f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ esiste una famiglia $g_{kh} \in \Delta(\mathbb{R}^n)$ $(k, h \in \mathbb{N})$ tale che:
$$f = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(\mathscr{E}'\text{-}\lim_{h\to\infty} g_{kh}\right).$$
(**Nota:** una dimostrazione più complessa prova che $\forall f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ è $\mathscr{S}'$-limite di una *successione* di elementi di $\Delta(\mathbb{R}^n)$: vedi Teorema 7.3.7.)

NOTE:

1) Sia $f_k \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ una successione. Se:
   - ◇ f_k è di $\mathscr{S}'$-Cauchy,

   allora:
   - ◇ f_k è di $\mathscr{D}'$-Cauchy,
   - ◇ $\mathscr{S}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k = \mathscr{D}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k$.

2) Sia $a \in \mathbb{R}^n,\ a \neq 0$; si consideri la successione: $e^{k^2}\delta(x-ka) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Si ha:
   - ◇ $\mathscr{D}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} e^{k^2}\delta(x-ka) = 0$,
   - ◇ $e^{k^2}\delta(x-ka)$ non è di $\mathscr{S}'$-Cauchy (se lo fosse, per la Nota 1. si avrebbe:
   $$\mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} e^{k^2}\delta(x-ka) = 0\ ;$$
   usando $\varphi(x) = e^{-\|x\|^2/\|a\|^2} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ se ne dedurrebbe un ovvio assurdo).

3) Sia $a \in \mathbb{R}^n,\ a \neq 0$, e sia $m \in \mathbb{N}$. In $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ si consideri *la serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^m \delta(x - ka) \ ,$$

ossia *la successione* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\nu} k^m \delta(x - ka) \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots\ )$. Si ha:

◇ tale serie è *convergente in* $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$; si pone:

$$\mathscr{D}'\text{-}\sum_{k=0}^{\infty} k^m \delta(x - ka) \triangleq \mathscr{D}'\text{-}\lim_{\nu\to\infty} \sum_{k=0}^{\nu} k^m \delta(x - ka) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \ ;$$

◇ tale serie è *convergente in* $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$; si pone:

$$\mathscr{S}'\text{-}\sum_{k=0}^{\infty} k^m \delta(x - ka) \triangleq \mathscr{S}'\text{-}\lim_{\nu\to\infty} \sum_{k=0}^{\nu} k^m \delta(x - ka) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \ ;$$

◇ si ha: $\displaystyle\mathscr{S}'\text{-}\sum_{k=0}^{\infty} k^m \delta(x - ka) = \mathscr{D}'\text{-}\sum_{k=0}^{\infty} k^m \delta(x - ka)$.

4) Sia $a \in \mathbb{R}^n,\ a \neq 0$. Si ha:

◇ la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{k^2} \delta(x - ka)$ è convergente in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$,

◇ la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{k^2} \delta(x - ka)$ non è convergente in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ (se lo fosse, utilizzando $\varphi(x) = e^{-\|x\|^2/\|a\|^2} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, si otterrebbe un ovvio assurdo).

5.6 Distribuzioni temperate come funzionali lineari e continui su $\mathscr{S}$

Sia $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Interpretando f come un *fenomeno su* $\mathbb{R}^n$ e gli elementi di $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ come strumenti di misura sui fenomeni, si ottiene la famiglia

$$\int_\Omega f \bullet \varphi \in \mathbb{C} \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$$

dei risultati di *tutte le misure effettuabili su* f. La Definizione seguente formalizza tale nozione.

5.6.1 Definizione. Sia $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$; indichiamo con

$$T_f : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$$

l'applicazione definita da:

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f \bullet \varphi \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \ .$$

I Teoremi seguenti forniscono le proprietà basilari dei funzionali T_f.

5.6.2 Teorema. Sussistono gli asserti:

a) per $\forall f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, T_f è un funzionale lineare e *continuo* su $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

b) se $\mathscr{S}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$ e $\mathscr{S}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi$, allora si ha

$$\lim_{k\to\infty} T_{f_k}(\varphi_k) = T_f(\varphi) \ ,$$

ossia

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \bullet \varphi_k = \int_{\mathbb{R}^n} f \bullet \varphi \ .$$

Cenno. Gli asserti seguono dal Lemma 5.2.4. ■

La seguente Nota ricorda la *definizione di distribuzioni temperate su* $\mathbb{R}^n$ *nella visione di Schwartz.*

5.6.3 Nota(distribuzioni temperate secondo Schwartz)**.** Denotiamo con

$$\mathscr{T}\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

lo spazio dei *funzionali lineari e continui* su $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ossia lo spazio delle applicazioni lineari e continue

$$T : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C} \ ,$$

con la convergenza indotta dalle famiglie *ovviamente* separanti di *PDML* e di seminorme associate:

$$\mu^*_\varphi(T) \triangleq T(\varphi) \ , \ \|T\|^*_\varphi \triangleq \left|\mu^*_\varphi(T)\right| = |T(\varphi)| \qquad \varphi \in \mathscr{S}(\Omega) \ ;$$

si osservi che:

- le $T \in \mathscr{T}\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ sono le *distribuzioni temperate secondo Schwartz*,

- $\mathscr{T}\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ è lo spazio delle *distribuzioni temperate secondo Schwartz*,
- la convergenza indotta dalle *PDML* e dalle seminorme associate è la nozione di *convergenza per successioni di distribuzioni temperate secondo Schwartz*.

Il Teorema seguente descrive *l'isomorfismo canonico* tra $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ con la $\mathscr{S}'$-convergenza e $\mathscr{T}\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ con la convergenza sopra definita.

5.6.4 Teorema. Si consideri l'applicazione

$$\mathbf{T} : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{T}\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

definita da (vedi Definizione 5.6.1)

$$\mathbf{T}(f) = T_f \qquad \forall f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Sussistono gli asserti:

a) $\mathbf{T}$ è un isomorfismo di spazi vettoriali;

b) per $\forall f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ e per $\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si ha:

$$\mu^*_\varphi(T_f) = \mu_\varphi(f)\ , \quad \|T_f\|^*_\varphi = \|f\|_\varphi\ ;$$

c) $\mathbf{T}$ è un isomorfismo di spazi vettoriali con famiglie separanti di *PDML* e di seminorme ad indici in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Cenno. a). Linearità ed iniettività sono ovvie. Sia quindi $T \in \mathscr{T}\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$; per il Lemma 5.2.5 esiste una successione $\zeta_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tale che:

$$T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \zeta_k \varphi, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\ ;$$

si verifica banalmente che:

- ∘ $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots)$ è una predistribuzione temperata,
- ∘ posto $f \triangleq [(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots)] \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, si ha: $T = \mathbf{F}(f)$.

b). Segue dall'essere

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \bullet \varphi = T_f(\varphi)\ .$$

c). Segue da a) e da b). ∎

L'isomorfismo canonico $\mathbf{T}$ definito dal precedente Teorema consente di identificare gli spazi $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\mathscr{T}\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Tale identificazione rimuove l'ambiguità del simbolo $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, da noi usato *a priori impropriamente* per indicare *lo spazio delle distribuzioni su* $\mathbb{R}^n$ *dotate di un rappresentante temperato*, simbolo che in letteratura denota invece lo spazio delle distribuzioni temperate su $\mathbb{R}^n$ secondo Schwartz, ossia lo spazio delle *vere distribuzioni temperate su* $\mathbb{R}^n$, spazio che in questa sezione era stato *prudentemente* indicato con il simbolo $\mathscr{T}\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

L'isomorfismo $\mathbf{T}$ consente quindi di guardare le *distribuzioni temperate su* $\mathbb{R}^n$

- sia dalle altezze di Schwartz, vedendole come fenomeni che fanno reagire tutti gli strumenti di misura a decrescenza rapida dislocati in $\mathbb{R}^n$ (gli elementi di $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$), generandoci dislocazioni numeriche di risultati di misura coerenti con le operazioni di somma, multiplo e limite tra strumenti;
- sia dal basso di $\mathbb{R}^n$, vedendole come fenomeni limite di successioni di Cauchy, relative a tali strumenti, di elementari fenomeni $L^1_{\mathrm{loc/cl}}$ su $\mathbb{R}^n$.

Operativamente, data una distribuzione $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$,

- il simbolo alternativo $f(x)$ ricorda la sua genesi come $\mathscr{S}'$-limite di una successione $f_k(x)$ di vere funzioni $L^1_{\mathrm{loc/cl}}$ su $\mathbb{R}^n$;
- l'identificazione di f con T_f consente di indicare f con il simbolo $f(\varphi)$ considerandola come funzionale su $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, ossia considerandola come una vera funzione
  - ◦ che però non assume valori sui singoli punti di $\mathbb{R}^n$,
  - ◦ mentre assume valori sui singoli strumenti di misura a decrescenza rapida (gli elementi di $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$) dislocati in $\mathbb{R}^n$.

La Sezione seguente caratterizza intrinsecamente le distribuzioni temperate su $\mathbb{R}^n$.

5.7 Derivate in $\mathscr{S}'$. Caratterizzazione di $\mathscr{S}'$

Il seguente Teorema prova che $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ è chiuso rispetto alle operazioni di derivazione.

5.7.1 Teorema. Sia $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$; si considerino

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \ .$$

Per $\forall j$ si ha:

- $\circ$ $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$,
- $\circ$ per $\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si ha $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \bullet \varphi = -\int_{\mathbb{R}^n} f \bullet \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$.

Cenno. Sia $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots)$ un rappresentante temperato di f con $\forall \zeta_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ (esiste per il Teorema 5.5.3).

Ovviamente un rappresentante di $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ è:

$$\left(\frac{\partial \zeta_k}{\partial x_j} : j = 1, 2, 3, \dots \right) \ ,$$

ed $\forall \dfrac{\partial \zeta_k}{\partial x_j} \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Inoltre per $\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si ha (vedi il Lemma 3.3.2 e la Definizione 5.4.1):

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial \zeta_k}{\partial x_j} \right) \varphi = -\lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \zeta_k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = -\int_{\mathbb{R}^n} f \bullet \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) \ .$$

Ne segue che:

- $\circ$ $\left(\dfrac{\partial \zeta_k}{\partial x_j} : j = 1, 2, 3, \dots \right)$ è una predistribuzione temperata,
- $\circ$ $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ verifica entrambi gli asserti. ■

Il seguente Teorema prova che gli operatori di derivazione in $\mathscr{S}'$ sono continui.

5.7.2 Teorema. Per $\forall j = 1, \dots, n$, l'applicazione

$$\frac{\partial}{\partial x_j} : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$$

è continua.

Cenno. Sia $f = \mathscr{S}'\text{-}\lim\limits_{k \to \infty} f_k$. Per $\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si ha:

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \bullet \varphi = -\lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \bullet \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = -\int_{\mathbb{R}^n} f \bullet \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \bullet \varphi \ .$$

■

Il seguente Teorema fornisce una prima caratterizzazione di $\mathscr{S}'$ (una seconda verrà fornita nel Capitolo sulla Convoluzione: vedi a) della Definizione 6.6.1) come *insieme delle derivate* (di ogni ordine) *delle funzioni continue a crescita lenta s.u.*.

In particolare prova che $\mathscr{S}'$ è il piu piccolo tra i sottospazi $\mathscr{N}$ di $\mathscr{D}'$ verificanti le condizioni:

- $\mathscr{N}$ possiede tutte le funzioni continue a crescita lenta s.u.,
- $\mathscr{N}$ è chiuso rispetto alla derivazione.

5.7.3 Teorema. Sia $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$; sono equivalenti gli asserti:

a) $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$,

b) esistono $g \in C^0(\mathbb{R}^n)$ a crescita lenta s.u. e $q \in \mathbb{N}^n$ tali che $f = \partial^q g$.

Cenno. a)⇒b). Per la dimostrazione, particolarmente tecnica e profonda, vedi Schwartz (Chapitre VII, Section 4, Théorèm VI).

b)⇒a). $g \in L^1_{\text{loc/cl}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Allora, per il Teorema 5.7.1, si ha $f = \partial^q g \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. ■

Il seguente Esempio mostra come $\delta(x) \in \mathscr{S}'$ sia la derivata di una funzione continua a crescita lenta s.u..

5.7.4 Esempio. Sia $H(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ la *funzione di Heaviside in* $\mathbb{R}^n$ (vedi Schwartz, Ch. IV, §5, Example 3), ossia la funzione definita da:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0 \\ 0 & \text{per ogni altro } x \end{cases} .$$

Sussistono gli asserti:

a) $H(x) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$;

b) $\dfrac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} H(x) = \delta(x)$;

c) $x_1 \cdots x_n \cdot H(x)$ è una funzione continua a crescita lenta s.u ;

d) $\dfrac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}(x_1 \cdots x_n \cdot H(x)) = H(x)$;

e) $\dfrac{\partial^{2n}}{\partial^2 x_1 \cdots \partial^2 x_n}(x_1 \cdots x_n \cdot H(x)) = \delta(x)$.

Cenno. a),c) sono ovvii. b),d) si verificano direttamente. e) segue da b),d). ■

NOTE.

1) La presente Nota è un Lemma per la Nota 2).

Sia $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Per $j = 1, \ldots, n$ poniamo

$$G_j(x) = \int_0^{x_j} g(x_1, \ldots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \ldots, x_n)\mathrm{d}t \ .$$

Si ha (vedi Schwartz (Chapitre II, §5, Théorèm V, e relativa dimostrazione)):

- ◇ G_j è definita q.o.,
- ◇ $G_j \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$,
- ◇ $g = \dfrac{\partial G_j}{\partial x_j}$ (derivata distribuzionale).

Si ha inoltre:

- ◇ se $g \in C^0(\mathbb{R}^n)$, allora $G_j \in C^0(\mathbb{R}^n)$ (usare il Teorema di Lebesgue sulla Convergenza dominata),
- ◇ se $g \in L^1_{\mathrm{loc/cl}}(\mathbb{R}^n)$, allora $G_j \in L^1_{\mathrm{loc/cl}}(\mathbb{R}^n)$ (usare una maggiorazione $|f(x)| \leqslant C(1 + \|x\|^2)^{h/2}$, e dedurne una maggiorazione polinomiale per $|G_j(x)|$).

2) Le seguenti considerazioni provano che *ogni distribuzione temperata ammette primitive temperate.*

Sia $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Per $\forall j = 1, \ldots, n$ esiste $F_j \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ tale che $f = \dfrac{\partial F_j}{\partial x_j}$. Infatti:

- ◇ per il Teorema 5.7.3 esistono $g \in C^0(\mathbb{R}^n)$ a crescita lenta s.u. e $q \in \mathbb{N}^n$ tali che $f = \partial^q g$;
- ◇ per la precedente Nota 1), esiste G_j continua e a crescita lenta s.u. tale che $g = \dfrac{\partial G_j}{\partial x_j}$;
- ◇ per il Teorema 5.7.1, $F_j \triangleq \partial^q G_j \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$;
- ◇ si ha allora: $f = \partial^q g = \partial^q \left(\dfrac{\partial}{\partial x_j} G_j \right) = \dfrac{\partial}{\partial x_j} (\partial^q G_j) = \dfrac{\partial F_j}{\partial x_j}$.

3) Ovviamente si ha $e^x \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$; però $e^x \notin \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

Cenno. Siano $g(x) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}),\ h \in \mathbb{N}$ tali che $g^{(h)}(x) = e^x$. Per Schwartz (Chapitre II, §4, Corollaire al Théorèm I) esiste $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ di grado $h-1$ tale che $g(x) = e^x + P(x)$. Tali $g(x)$ sono funzioni C^0 ma nessuna di esse è a crescita lenta s.u.. L'asserto segue allora da 5.7.3.

Nota. Più in generale si ha: $e^{x_1+\cdots+x_n} \notin \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Per una dimostrazione elegante occorre la Trasformata di Fourier. ■

4) Si consideri la serie $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!}$. Si ha:

- ◇ Per $\forall k \in \mathbb{N}$ si ha: $\sum_{\nu=0}^{k} \frac{x^\nu}{\nu!} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.
- ◇ $\mathscr{D}'$-$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!} = e^x$ (infatti: $e^x = L^1_{\text{loc}}\text{-}\lim_{k\to\infty} \sum_{\nu=0}^{k} \frac{x^\nu}{\nu!}$).
- ◇ $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!}$ non è convergente in $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ (se lo fosse, sarebbe $e^x \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$: assurdo per la Nota 3)).

5) Sia $f(x) = e^x \sin e^x \in C^\infty(\mathbb{R})$. Si ha:

- ◇ $f(x)$ è una funzione non a crescita lenta s.u.;
- ◇ $f(x)$ è una distribuzione a crescita lenta, ossia $f(x) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ (infatti: $-\cos e^x$ è limitata e quindi $-\cos e^x \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$; per il Teorema 5.7.1 si ha $e^x \sin e^x = D(-\cos e^x) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$).

5.8 Moltiplicatori in $\mathscr{S}'$

Sia $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Per $\forall f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ si ha:

$$\zeta f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)\ ,$$

ma può essere:

$$\zeta f \notin \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$$

(ad es.: $\zeta(x) = e^x \in C^\infty(\mathbb{R}),\ f(x) = 1 \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$; ma per la Nota 3) della Sezione 5.7 si ha: $\zeta(x)f(x) = e^x \notin \mathscr{S}'(\mathbb{R})$).

Tali osservazioni motivano la seguente Definizione.

5.8.1 Definizione. Sia $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Se:

- per $\forall f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ si ha: $\zeta f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$,

allora ζ si dice

- un *moltiplicatore*, o un *operatore di moltiplicazione*, in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Il Lemma e il Teorema seguenti provano che gli *operatori di moltiplicazione* in $\mathscr{S}'$ sono gli elementi di $\mathscr{O}_\mathrm{M}$ (tale risultato spiega l'origine della sigla $\mathscr{O}_\mathrm{M}$).

5.8.2 Lemma. Sia $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ una funzione non a crescita lenta s.u.. Esiste $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ tale che: $\zeta f \notin \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Per la dimostrazione vedi Capitolo 10.

5.8.3 Teorema. Sia $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sono equivalenti gli asserti:

a) ζ è un moltiplicatore in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.
b) $\zeta \in \mathscr{O}_\mathrm{M}(\mathbb{R}^n)$

Cenno. a)⇒b). Per $\forall f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ si ha che:

- ◇ per $\forall j = 1, \ldots, n$ si ha $\dfrac{\partial}{\partial x_j}(\zeta f),\ \zeta\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j} f\right) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, e di conseguenza:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\zeta\right) f = \frac{\partial}{\partial x_j}(\zeta f) - \zeta\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f\right) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \ ;$$

pertanto per $\forall j :\ \dfrac{\partial}{\partial x_j}\zeta$ è un moltiplicatore.

Come conseguenza, per ogni $q \in \mathbb{N}^n$, $\partial^q \zeta$ è un moltiplicatore; per il Lemma 5.8.2 si ha allora che $\partial^q \zeta$ è a cresctita lenta s.u.. Pertanto $\zeta \in \mathscr{O}_\mathrm{M}(\mathbb{R}^n)$.

b)⇒a). Sia $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ e sia $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$ un rappresentante temperato di f. Si ha:

- ◇ $(\zeta f_1, \zeta f_2, \zeta f_3, \ldots)$ è un rappresentante di $\zeta f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$;
- ◇ $\forall \zeta f_k \in \mathscr{O}_\mathrm{M}(\mathbb{R}^n) \cdot L^1_{\mathrm{loc/cl}}(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{\mathrm{loc/cl}}(\mathbb{R}^n)$;
- ◇ per ogni $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si ha $\zeta\varphi \in \mathscr{O}_\mathrm{M}(\mathbb{R}^n) \cdot \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e quindi:

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} (\zeta f_k)\varphi = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f_k(\zeta\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f_k \bullet \zeta\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} f \bullet \zeta\varphi \ ;$$

pertanto $(\zeta f_1, \zeta f_2, \zeta f_3, \ldots)$ è una predistribuzione temperata e quindi $\zeta f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. ■

Il seguente Teorema prova che la moltiplicazione per elementi di $\mathscr{O}_{\mathrm{M}}$ è continua.

5.8.4 Teorema. Sia $\zeta \in \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n)$. Per ogni successione $f_k \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ e per ogni $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ si ha:

$$\mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k = f \quad \Longrightarrow \quad \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \zeta f_k = \zeta f \ .$$

Cenno. Verifica diretta. ■

Utilizzando il Teoerema 5.8.3, il seguente Corollario prova che ogni L^p è sottospazio di $\mathscr{S}'$.

5.8.5 Corollario(del Teorema 5.8.3)**.** Per ogni $1 \leqslant p \leqslant \infty$ si ha:

- ∘ $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$,
- ∘ per $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e per $\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si ha:
  - ⋄ $f\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$,
  - ⋄ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f \bullet \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi$.

Cenno. Per $p = 1$, l'asserto segue osservando che:

- ∘ dato $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, per $\forall k \in \mathbb{N}$ si ponga:

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } |f(x)| \leqslant k \\ 0 & \text{se } |f(x)| > k \end{cases} ,$$

- ∘ $\forall f_k \in L^1_{\mathrm{loc/cl}}(\mathbb{R}^n)$,
- ∘ per $\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, applicando alla successione $f_k\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ il Teorema di Lebesgue sulla Convergenza dominata (con funzione dominante $|f\varphi|$), si ottiene:
  - ⋄ $f\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$,
  - ⋄ $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi$.

In generale, dato $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, si ha:

- $\dfrac{1}{1+\|x\|^{2n}} \in L^q(\mathbb{R}^n)$ per ogni $1 \leqslant q \leqslant \infty$ e quindi in particolare per
$$q = p' = \frac{p}{p-1} \ ,$$
- posto
$$g(x) = \frac{1}{1+\|x\|^{2n}} f(x) \ ,$$
per il Teorema 1.4.4 (di Hölder) si ha: $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$;
- essendo $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\ 1+\|x\|^{2n} \in \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n)$, per il Teorema 5.8.3 si ha: $f(x) = (1+\|x\|^{2n})g(x) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$,
- per $\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, tenuto conto che
$$g \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad (1+\|x\|^{2n})\varphi(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \ ,$$
per la prima parte di questa dimostrazione si ha:
  - $f\varphi = g(x).\big((1+\|x\|^{2n})\varphi(x)\big) \in L^1(\mathbb{R}^n)$,
  - $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f \bullet \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} (1+\|x\|^{2n})g(x) \bullet \varphi(x) =$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \bullet (1+\|x\|^{2n})\varphi(x) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(x)(1+\|x\|^{2n})\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi \ . \qquad \blacksquare$$

Capitolo 6

Prodotto di convoluzione

6.1 Definizione di convoluzione in L^1_{loc}

Siano $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Se:

- per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$ la funzione
$$y \mapsto f(x-y)g(y)$$
è integrabile su $\mathbb{R}^n$,
- la funzione definita q.o. da
$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$$
è localmente integrabile su $\mathbb{R}^n$,

allora:

- la funzione $f * g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ definita q.o. da
$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$$
si dice il *prodotto di convoluzione di f per g*;
- si dice che *è definito il prodotto di convoluzione di f per g*, o più concisamente che *esiste $f * g$*.

La Nota seguente prova che il prodotto di convoluzione in L^1_{loc}, quando è definito, è commutativo.

6.1.1 Nota. Siano $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Se esiste $f * g$, allora:

- esiste anche $g * f$,
- si ha $g * f = f * g$.

Cenno. Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ponga:

$$\omega_x(y) \triangleq f(x-y)g(y) \ ;$$

si ha

$$g(x-y)f(y) = \omega_x(-y+x) \ .$$

Per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$ si ha $\omega_x(y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Tenuto conto di ciò, le osservazioni precedenti provano che per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$g(x-y)f(y) \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y \ .$$

■

6.2 Convoluzione in L^1_{loc}: un fattore a supporto compatto

Il seguente Teorema prova che in L^1_{loc}, quando un fattore è a supporto compatto, la convoluzione è definita.

6.2.1 Teorema. Siano $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Se almeno una di tali funzioni è a supporto compatto sussistono gli asserti:

a) è definito $f * g$;
b) $\mathrm{supp}\ (f * g) \subset (\mathrm{supp}\ f + \mathrm{supp}\ g)$.

In particolare, se f, g sono entrambe a supporto compatto, anche $f * g$ è a supporto compatto.
(*Per la dimostrazione vedi Capitolo 10*)

Il seguente Teorema, insieme alla Nota 6.1.1, prova che se $f_1, \ldots, f_h \in L^1_{\mathrm{loc}}$ sono *tutte, eccettuata al più una,* funzioni a supporto compatto, allora il prodotto di convoluzione

$$f_1 * \cdots * f_h$$

esiste, è associativo e commutativo, ossia che tale prodotto comunque interpretato come successione di *prodotti a* 2 *a* 2, esiste, il risultato è indipendente dall'interpretazione usata, ed è indipendente dall'ordine dei fattori.

6.2.2 Teorema. Siano $f, g, h \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Se almeno due di tali funzioni sono a supporto compatto sussistono gli asserti:

a) sono definiti entrambi i prodotti: $(f * g) * h,\ f * (g * h)$,

b) si ha: $(f * g) * h = f * (g * h)$.

(*Per la dimostrazione vedi Capitolo 10*)

6.3 Convoluzione in L^1_{loc}: fattori L^p

Il Teorema seguente fornisce condizioni di esistenza del prodotto di convoluzione tra funzioni di tipo L^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

6.3.1 Teorema di Young. Siano $f \in L^p(\mathbb{R}^n),\ g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Supponiamo che sussisto la condizione:

∘ $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \geqslant 1$ (sia $1 \leqslant r \leqslant \infty$ tale che $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 + \dfrac{1}{r}$);

allora:

∘ esiste $f * g$ e si ha: $\quad f * g \in L^r(\mathbb{R}^n), \quad \|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.

Il seguente Teorema prova che la convoluzione tra funzioni di tipo L^p ha un buon comportamento rispetto alle L^p-convergenze.

6.3.2 Teorema. Siano $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ tali che: $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \geqslant 1$, e sia $1 \leqslant r \leqslant \infty$ tale che:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r} .$$

Se:

∘ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ si ha $L^p\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$,

∘ in $L^q(\mathbb{R}^n)$ si ha $L^q\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} g_k = g$,

allora:

∘ in $L^r(\mathbb{R}^n)$ si ha $L^r\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k * g_k = f * g$.

Cenno. Per il Teorema di Young 6.3.1, per $\forall k$ si ha:

$$\begin{aligned}\|(f_k - f) * g\|_r &\leqslant \|f_k - f\|_p \|g\|_q \\ \|f * (g_k - g)\|_r &\leqslant \|f\|_p \|g_k - g\|_q \\ \|(f_k - f) * (g_k - g)\|_r &\leqslant \|f_k - f\|_p \|g_k - g\|_q\end{aligned}$$

Tenuto conto della ovvia bilinearità del prodotto di convoluzione, dalle prime due relazioni segue che:

$$L^r\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k * g = f * g, \quad L^r\text{-}\lim_{k\to\infty} f * g_k = f * g \ ;$$

dalla terza relazione, tenuto conto dei due limiti precedenti, segue facilmente l'asserto. ■

I seguenti due Teoremi fornisce condizioni sull'esistenza e associatività del prodotto di convoluzione tra 3 funzioni di tipo L^p.

6.3.3 Teorema(esistenza)**.** Siano $f \in L^p(\mathbb{R}^n),\ g \in L^q(\mathbb{R}^n),\ h \in L^r(\mathbb{R}^n)$. Supponiamo che sussistano le condizioni:

a) $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \geqslant 1$ (sia ρ tale che $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 + \dfrac{1}{\rho}$),

b) $\dfrac{1}{\rho} + \dfrac{1}{r} \geqslant 1$ (sia s tale che $\dfrac{1}{\rho} + \dfrac{1}{r} = 1 + \dfrac{1}{s}$).

Sussitono gli asserti:

- ∘ per il Teorema 6.3.1, la condizione a) e la definizione di ρ garantiscono che: $\exists f * g$ e che $f * g \in L^\rho(\mathbb{R}^n)$;
- ∘ per il Teorema 6.3.1, la condizione b) e la definizione di s garantiscono che $\exists (f * g) * h$ e che $(f * g) * h \in L^s(\mathbb{R}^n)$;
- • le condizioni a),b) implicano che:
  a') $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} \geqslant 1$ (sia μ tale che $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = 1 + \dfrac{1}{\mu}$),
  b') $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{\mu} \geqslant 1$ (e che $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{\mu} = 1 + \dfrac{1}{s}$);
- ∘ per il Teorema 6.3.1, la condizione a') e la definizione di μ garantiscono che: $\exists g * h$ e che $g * h \in L^\mu(\mathbb{R}^n)$;
- ∘ per il Teorema 6.3.1, la condizione b') e la proprietà di s garantiscono che $\exists f * (g * h)$ e che $f * (g * h) \in L^s(\mathbb{R}^n)$.

6.3.4 Teorema(associatività)**.** Siano $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $h \in L^r(\mathbb{R}^n)$. Supponiamo che sussistano le condizioni:

a) $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \geqslant 1$ (sia ρ tale che $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 + \dfrac{1}{\rho}$),

b) $\dfrac{1}{\rho} + \dfrac{1}{r} \geqslant 1$ (sia s tale che $\dfrac{1}{\rho} + \dfrac{1}{r} = 1 + \dfrac{1}{s}$).

Sussitono gli asserti:

- per il Teorema 6.3.3, esistono $(f * g) * h, \ f * (g * h)$ e si ha:

$$(f * g) * h, \ f * (g * h) \in L^s(\mathbb{R}^n) \ ;$$

- si ha: $(f * g) * h = f * (g * h)$.

(*Per la dimostrazione vedi Capitolo 10*)

Nota 1. $L^1(\mathbb{R}^n)$ con le operazioni "$+, *$" è un anello commutativo.
Nota 2. Sia $L^1_{\text{loc/sc}}(\mathbb{R}^n)$ lo spazio delle funzioni L^1_{loc} a supporto compatto su $\mathbb{R}^n$. $L^1_{\text{loc/sc}}(\mathbb{R}^n)$ con le operazioni "$+, *$" è un anello commutativo; in particolare è un sottoanello di $L^1(\mathbb{R}^n)$ con le operazioni "$+, *$".

6.4 Pseudoconvoluzione in $\mathscr{D}'$ con un fattore in $\mathscr{D}$

Questa Sezione presenta alcune proprietà delle funzioni del tipo:

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi(\alpha x + \beta y) \mathrm{d}y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \ ,$$

ove: $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n), \ \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n), \ \alpha, \beta \in \{-1, 1\}$.

6.4.1 Nota. Posto:

$$\widetilde{f}(x) \triangleq f(-x), \quad \widetilde{\varphi}(x) \triangleq \varphi(-x) \ ,$$

sussitono le uguaglianze seguenti ove il secondo membro ha *l'aspetto grafico di una convoluzione* ed è *una vera convoluzione* quando $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$:

- se $(\alpha, \beta) = (1, -1)$ si ha: $F(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi(x - y) \mathrm{d}y$,
- se $(\alpha, \beta) = (-1, 1)$ si ha: $F(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \widetilde{\varphi}(x - y) \mathrm{d}y$,

- se $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ si ha: $F(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(y) \bullet \varphi(x - y)\mathrm{d}y$,
- se $(\alpha, \beta) = (-1, -1)$ si ha: $F(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(y) \bullet \widetilde{\varphi}(x - y)\mathrm{d}y$.

Tenuto conto di tali uguaglianze, la funzione $F(x)$ verrà chiamata una *pseudoconvoluzione* della distribuzione f per la funzione test φ.

Il Teorema seguente fornisce alcune proprietà di tali pseudoconvoluzioni, in particolare prova che sono funzioni C^∞.

6.4.2 Teorema. Siano $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha, \beta \in \{-1, 1\}$. Si ponga:

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi(\alpha x + \beta y)\mathrm{d}y \ .$$

Sussitono gli asserti:

a) $F(x) \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$;

b) per $\forall q \in \mathbb{N}^n$ si ha:

$$\begin{aligned}\partial^q F(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \partial_x^q(\varphi(\alpha x + \beta y))\mathrm{d}y = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \left(\alpha^{|q|}\partial^q\varphi\right)(\alpha x + \beta y)\mathrm{d}y \ ;\end{aligned}$$

a') se $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ si ha:

$$\mathrm{supp}\ F \subset (-\alpha/\beta)\mathrm{supp}\ f + (1/\beta)\mathrm{supp}\ \varphi \ ,$$

in particolare si ha: $F(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

Cenno. a),b). Entrambi gli asserti seguono da Schwartz, §1 Chap. IV,pg 105.

a') Per $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$\begin{aligned}&\mathrm{supp}\ \varphi(\alpha x_0 + \beta y) \subset (-\alpha/\beta)x_0 + (1/\beta)\mathrm{supp}\ \varphi \ , \\ &(\mathrm{supp}\ f) \cap ((-\alpha/\beta)x_0 + (1/\beta)\mathrm{supp}\ \varphi) \neq \emptyset \Leftrightarrow \\ &\qquad \Leftrightarrow x_0 \in (-\beta/\alpha)\mathrm{supp}\ f + (1/\alpha)\mathrm{supp}\ \varphi \ ;\end{aligned}$$

Allora per $\forall x_0 \notin (-\beta/\alpha)\mathrm{supp}\ f + (1/\alpha)\mathrm{supp}\ \varphi$ si ha:

$$(\mathrm{supp}\ f(y)) \cap (\mathrm{supp}\ \varphi(\alpha x_0 + \beta y)) = \emptyset \ ,$$

e quindi per il Teorema 3.7.2 si ha: $F(x_0) = 0$. ■

Il seguente Teorema dà informazioni sulla continuità della pseudoconvoluzione per una funzione test.

6.4.3 Teorema. Siano $f, f_k \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ (risp. $f, f_k \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$) tali che:

$$\mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k = f \quad (\text{risp. } \mathscr{E}'\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k = f)\ ,$$

e siano $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha, \beta \in \{-1, 1\}$. Si ponga:

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi(\alpha x + \beta y)\mathrm{d}y, \quad F_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_k(y) \bullet \varphi(\alpha x + \beta y)\mathrm{d}y\ .$$

Si ha: $F(x) = \mathscr{E}\text{-}\lim_{k\to\infty} F_k(x)$ (risp. $F(x) = \mathscr{D}\text{-}\lim_{k\to\infty} F_k(x)$).

Cenno. Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un compatto; si consideri la seguente famiglia di elementi di $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)_y$:

$$\Phi_x(y) \triangleq \varphi(\alpha x + \beta y), \qquad x \in K\ .$$

Ovviamente si ha:

- ∘ tale famiglia è *limitata in* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, nel senso di Chwartz, Th IV, Ch 3 §2, pg 69, infatti:
  - ⋄ esiste un compatto di $\mathbb{R}^n_y$ che include tutti i loro supporti,
  - ⋄ per ogni $q \in \mathbb{N}^n$, tutte le loro ∂^q sono maggiorate in modulo da $\|\partial^q\varphi\|_\infty$,
- ∘ $\mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} (f - f_k) = 0$;

quindi per Schwatz Th XI, ChIII §3, pg 73, $F - F_k$ converge a 0 uniformemente su K.

Per $\forall\partial^q$, tenuto conto di b) del Teorema 6.4.2, le considerazioni precedenti applicate a $\alpha^{|q|}\partial^q\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ provano che $\partial^q F - \partial^q F_k$ tende a 0 uniformemente su K.

Pertanto $F = \mathscr{E}\text{-}\lim_{k\to\infty} F_k$. Sotto l'ipotesi più restrittiva $\mathscr{E}'\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k = f$, per a') del Teorema 6.4.2, esiste un compatto che include i supporti di tutte le F_k, e quindi la $\mathscr{E}$-convergenza è in particolare una $\mathscr{D}$-convergenza. ■

6.5 Convoluzione in $\mathscr{D}'$: un fattore a supporto compatto

La Definizione seguente estende la nozione di prodotto di convoluzione ad una coppia di distribuzioni almeno una delle quali a supporto compatto.

6.5.1 Definizione. Siano $f, g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ due distribuzioni, almeno una delle quali a supporto compatto. Sussistono gli asserti:

a) La seguente definizione:
   - considerare $(f_1, f_2, f_3, \ldots), (g_1, g_2, g_3, \ldots)$ rappresentanti di f, g almeno uno a supporto compatto (vedi Teorema 4.2.1),
   - porre $f * g \triangleq [(f_1 * g_1, f_2 * g_2, f_3 * g_3, \ldots)] \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$,

   è una buona definizione.

b) Per $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ si ha:
   - se $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ (risp. $g \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$), per il Teorema 6.4.2 si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi(x+y)\mathrm{d}y \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)_x,$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} g(y) \bullet \varphi(x+y)\mathrm{d}y \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^n)_x$$
$$(\text{risp.} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi(x+y)\mathrm{d}y \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^n)_x,$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} g(y) \bullet \varphi(x+y)\mathrm{d}y \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)_x \ ) \ ;$$

   - $$\int (f * g) \bullet \varphi =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bullet \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y) \bullet \varphi(x+y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \bullet \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi(x+y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \ .$$

c) La definizione di $f * g$ è coerente con la definizione di Schwartz (Ch. VI, §2, Th. I e formula (VI,2;6) pg 155).

Cenno. Per $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, si ha:

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} (f_k * g_k)(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x-y)g_k(y)\mathrm{d}y \right] \varphi(x)\mathrm{d}x$;
- $f_k(x-y)g_k(y)\varphi(x)$ è a supporto compatto su $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y$; una ovvia applicazione del Teorema di Tonelli prova che è integrabile;
- la sostituzione: "$x + y \rightsquigarrow x, \ y \rightsquigarrow y$" prova che:

$$\int_{\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y} f_k(x-y)g_k(y)\varphi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y} f_k(x)g_k(y)\varphi(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ ;$$

- per il Teorema di Fubini si ha allora:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f_k * g_k)(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) \left[\int_{\mathbb{R}^n} g_k(y)\varphi(x+y)\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) \bullet \left[\int_{\mathbb{R}^n} g_k(y)\varphi(x+y)\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x \;;$$

procediamo supponendo ad es. $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$;

- si ha: $\mathscr{E}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$; allora per il Teorema 6.4.3 si ha:
  - ◇ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} g_k(y)\varphi(x+y)\mathrm{d}y, \ \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \bullet \varphi(x+y)\mathrm{d}y \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$
  - ◇ $\displaystyle\mathscr{E}\text{-}\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k(y)\varphi(x+y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \bullet \varphi(x+y)\mathrm{d}y \;;$
- per il Teorema 4.5.3 si ha allora:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (f_k * g_k)(x)\varphi(x)\mathrm{d}x =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bullet \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y) \bullet \varphi(x+y)\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x \;.$$

Gli assrti a),b),c) seguono banalmente dall'ultimo item. ■

Il seguente Teorema fornisce informazioni sul supporto della convoluzione tra due distribuzioni almeno una delle quali a supporto compatto.

6.5.2 Teorema. Siano $f, g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ due distribuzioni almeno una delle quali a supporto compatto. Sussistono gli asserti:

a) $\operatorname{supp} f * g \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$,
b) $f, g \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f * g \in \mathscr{E}'$.

Cenno. a). Sia $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tale che: $(\operatorname{supp} \varphi) \cap (\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g) = \emptyset$. Si ha:

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} (f * g) \bullet \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bullet \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y) \bullet \varphi(x+y)\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x$ (vedi Definizione 6.5.1);
- $\displaystyle\operatorname{supp} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \bullet \varphi(x+y)\mathrm{d}y \subset$
$$\subset \left\{x \in \mathbb{R}^n : (\operatorname{supp} g) \cap (-x + \operatorname{supp} \varphi) \neq \emptyset\right\}$$
(vedi Teorema 3.7.2);

- $\circ$ (supp f) $\cap \left\{x \in \mathbb{R}^n : (\text{supp } g) \cap (-x + \text{supp } \varphi) \neq \emptyset\right\} = \emptyset$ (*altrimenti* esisterebbe $x_f \in \text{supp } f$ tale che $(\text{supp } g) \cap (-x_f + \text{supp } \varphi) \neq \emptyset$, e quindi esisterebbero anche $\sigma_g \in \text{supp } g$, $\sigma_\varphi \in \text{supp } \varphi$ tali che

$$\sigma_g = -x_f + \sigma_\varphi \quad \text{i.e.} \quad \sigma_\varphi = x_f + \sigma_g \quad :$$

assurdo per l'ipotesi su φ);
- $\circ$ per il Teorema 3.7.2 si ha allora: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} (f * g) \bullet \varphi = 0.$

Le considerazioni precedenti provano che $f * g$ è nulla sull'aperto

$$\mathbb{R}^n \setminus (\text{supp } f + \text{supp } g) \ ,$$

e quindi che supp $f * g \subset \text{supp } f + \text{supp } g$.

b). Ovvia conseguenza di a). ■

Il seguente Teorema prova che se $f_1, \ldots, f_h$ sono distribuzioni *tutte, eccettuata al più una,* in $\mathscr{E}'$ allora il prodotto di convoluzione

$$f_1 * \cdots * f_h$$

esiste, è associativo e commutativo, ossia che tale prodotto comunque interpretato come successione di *prodotti a* 2 *a* 2, esiste e il risultato è indipendente dall'interpretazione usata e dall'ordine dei fattori.

6.5.3 Teorema. Siano $f, g, h \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Sussistono gli asserti:

a) Se almeno una delle distribuzioni f, g è elemento di $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, si ha: $f * g = g * f$.

b) Se almeno due delle distribuzioni f, g, h sono elementi di $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ si ha:
   - i) sono definiti entrambi i prodotti: $(f * g) * h$, $f * (g * h)$,
   - ii) si ha: $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Cenno. a). Segue immediatamente dalla Definizione 6.5.1.

b-i). Si considerino le coppie "$f * g$, h" e "$f, g * h$"; in ciascuna coppia, almeno un membro è elemento di $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$.

b-ii). Siano $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$, $(g_1, g_2, g_3, \ldots)$, $(h_1, h_2, h_3, \ldots)$ rappresentanti di f, g, h, almeno due dei quali a supporto compatto. Allora:

- $\circ$ per la Definizione 6.5.1,

$$((f_k * g_k) * h_k : k = 1, 2, \ldots), \quad (f_k * (g_k * h_k) : k = 1, 2, \ldots)$$

sono rappresentanti rispettivamente di $(f * g) * h$, $f * (g * h)$;

- per il Teorema 6.2.2, per $\forall k$ si ha: $(f_k * g_k) * h_k = f_k * (g_k * h_k)$. ■

Il seguente Teorema prova che le convoluzioni

$$* : \mathscr{E}' \times \mathscr{D}' \to \mathscr{D}', \quad * : \mathscr{E}' \times \mathscr{E}' \to \mathscr{E}'$$

sono continue, come funzioni di due variabili, rispetto alle nozioni di convergenza per successioni proprie di ciascuno degli spazi coinvolti.

6.5.4 Teorema. Siano f, g e f_k, g_k rispettivamente una coppia di distribuzioni e una coppia di successioni di distribuzioni in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Sussistono gli asserti:

a) $\mathscr{D}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f,\ \mathscr{E}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} g_k = g \quad \Rightarrow \quad \mathscr{D}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k * g_k = f * g$;

b) $\mathscr{E}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f,\ \mathscr{E}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} g_k = g \quad \Rightarrow \quad \mathscr{E}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k * g_k = f * g$.

Cenno. a). Per $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ si ha:

- $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (f_k * g_k) \bullet \varphi = \lim\limits_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) \bullet \left(\int_{\mathbb{R}^n} g_k(y) \bullet \varphi(x+y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$
  (vedi Definizione 6.5.1),
- $\mathscr{D}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$,
  $$\mathscr{D}\text{-}\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k(y) \bullet \varphi(x+y) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \bullet \varphi(x+y) \mathrm{d}y$$
  (vedi Teorema 6.4.3),
- $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) \bullet \left(\int_{\mathbb{R}^n} g_k(y) \bullet \varphi(x+y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$
  $$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bullet \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y) \bullet \varphi(x+y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$
  (vedi b) del Teorema 2.14.2);

per gli item precedenti e per la Definizione 6.5.1 si ha quindi:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (f_k * g_k) \bullet \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} (f * g) \bullet \varphi \ .$$

b). Per le ipotesi e per a) del Teorema 6.5.2 i supporti delle $f_k * g_k$ sono equilimitati da un unico compatto. L'asserto segue quindi da a) e dal Teorema 4.4.2. ■

Il seguente Teorema riconduce la convoluzione per una funzione di $\mathscr{D}$ ad una pseudoconvoluzione; in particolare prova che tali convoluzioni sono funzioni C^∞, e che le loro derivate sono convoluzioni per le corrispondenti derivate della funzione di $\mathscr{D}$.

6.5.5 Teorema. Siano $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Si ha:

a) $f * \varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$;

b) per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$(f * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \bullet \varphi(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \bullet \varphi(y)\mathrm{d}y \ ;$$

c) per $\forall q \in \mathbb{N}^n$ si ha: $\partial^q(f * \varphi) = f * (\partial^q \varphi)$.

Cenno. Sia $f_k \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ una successione tale che $\mathscr{D}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$. Si ha:

- $$(f_k * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_k(y)\varphi(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} f_k(y) \bullet \varphi(x-y)\mathrm{d}y \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \ ,$$
- $\mathscr{D}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} (f_k * \varphi)(x) = (f * \varphi)(x)$ (vedi Teorema 6.5.4),
- $\mathscr{E}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(y) \bullet \varphi(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi(x-y)\mathrm{d}y$ (vedi Teorema 6.4.3) e quindi:

$$\mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(y) \bullet \varphi(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi(x-y)\mathrm{d}y \ ;$$

ne segue che in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ sussiste l'uguaglianza:

$$(f * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi(x-y)\mathrm{d}y \ .$$

Gli asserti a),b),c) sono conseguenza di tale uguaglianza e del Teorema 6.4.2. ■

Il seguente Teorema prova che la convoluzione per una funzione di $\mathscr{D}$ ha un significato fisico concreto.

6.5.6 Teorema. Siano $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

- Si consideri la funzione $\widetilde{\varphi} \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ definita da:

$$\widetilde{\varphi}(x) \triangleq \varphi(-x) \ ;$$

- si consideri la famiglia di *strumenti di misura*, uno per ciascun punto $a \in \mathbb{R}^n$, ottenuta *traslando* $\widetilde{\varphi}$ *in* a, ossia la famiglia:

$$\widetilde{\varphi}_a(x) \triangleq \widetilde{\varphi}(x-a) \qquad a \in \mathbb{R}^n \ .$$

Per il Teorema 6.5.5, si ha:

$$(f * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \widetilde{\varphi}_x(y)\mathrm{d}y \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n) \ ;$$

pertanto:

- $(f*\varphi)(x)$ è la funzione che per $\forall x \in \mathbb{R}^n$ fornisce *la misura del fenomeno* f *effettuata con lo strumento* $\widetilde{\varphi}$ *traslato in* x.

Seguono, sotto forma di Note, alcune informazioni di uso corrente.

6.5.7 Nota(convenzione)**.** Siano $f(x), g(x)$ una coppia di funzioni o di distribuzioni per le quali risulti definita la convoluzione $(f * g)(x)$.

Il simbolo "$f(x) * g(x)$" è privo di significato (l'unico significato che erroneamente suggerisce è assurdo). Useremo tale simbolo con il seguente significato convenzionale:

$$f(x) * g(x) \triangleq (f * g)(x) \ .$$

6.5.8 Nota(convoluzione con δ)**.** Sia $f(x) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Si ha:

a) $f(x) * \delta(x) = f(x)$,
b) per $\forall q \in \mathbb{N}^n$ si ha: $f(x) * \partial^q \delta(x) = \partial^q f(x)$,
c) per $\forall a \in \mathbb{R}^n$ si ha: $f(x) * \delta(x-a) = f(x-a)$.

Cenno. c). Per $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, tenuto conto che $\partial^q \delta \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, si ha (vedi Definizione 6.5.1):

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (f(x) * \partial^q \delta(x)) \bullet \varphi(x)\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bullet \left[\int_{\mathbb{R}^n} \partial^q \delta(y) \bullet \varphi(x+y)\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \\ &= (-1)^{|q|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bullet \left[\int_{\mathbb{R}^n} \delta(y) \bullet (\partial^q \varphi)(x+y)\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \\ &= (-1)^{|q|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bullet (\partial^q \varphi)(x+0)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \partial^q f(x) \bullet \varphi(x)\mathrm{d}x \ .\end{aligned}$$

a),c). Dimostrazioni analoghe. ∎

6.5.9 Nota(esempio di non associatività della convoluzione)**.** Siano $f, g, h \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Se non sussiste la condizioni b) del Teorema 6.5.3, ossia se due delle distribuzioni f, g, h non hanno supporto compatto, *può accadere* che esistano $f * g,\ (f * g) * h,\ g * h,\ f * (g * h)$, ma che sia $(f * g) * h \neq f * (g * h)$. (*esempio:* in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ si considerino: $f(x) = 1,\ g(x) = \delta^{(1)}(x),\ h(x) = H(x)$, ove H è la funzione di Heaviside.)

6.5.10 Nota(derivazione e traslazione di una convoluzione)**.** Siano

$$f_1, \ldots, f_h \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$$

distribuzioni tutte, eccettuata al più una, a supporto compatto. Sussitono gli asserti:

a) per $\forall q \in \mathbb{N}^n$ si ha:

$$\partial^q(f_1 * \cdots * f_h) = \\ = (\partial^q f_1) * f_2 * \cdots * f_h = \cdots = f_1 * \cdots * f_{h-1} * (\partial^q f_h) \ ;$$

b) per $\forall a \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$(f_1 * \cdots * f_h)(x - a) = \\ = (f_1(x - a)) * f_2(x) * \cdots * f_h(x) = \ldots \\ \cdots = f_1(x) * \cdots * f_{h-1}(x) * (f_h(x - a)) \ .$$

Cenno. a). Essendo $\partial^1 \delta$ a supporto compatto, le distribuzioni:

$$\partial^q \delta, f_1, \ldots, f_h$$

sono tutte, eccettuata al più una, a supporto compatto; allora il prodotto:

$$(\partial^q \delta) * f_1 * \cdots * f_h$$

è definito, associativo e commutativo. Tenuto conto di b) della Nota 6.5.8, si ottiene allora l'asserto.

b). Conisderazioni analoghe sulla famiglia: $\delta(x - a), f_1(x), \ldots, f_h(x)$. ■

6.6 Lo spazio $\mathscr{O}'_{\mathrm{C}}$ delle distribuzioni a decrescenza rapida

Questa Sezione introduce lo spazio delle distribuzioni *a decrescenza rapida.* Le due Sezioni seguenti ne precisano il ruolo nella defizione di convoluzione in $\mathscr{S}'$.

6.6.1 Definizione. Sia $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

a) Sussistono gli asserti:

   i) per $\forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ si ha $f * \varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$ (vedi Teorema 6.5.5);

   ii) $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ se e solo se "per $\forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ si ha $f*\varphi \in \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n)$" (vedi Schwartz, considerazioni al Th IX, §5 ChVII, pg 244) **(nota:** per il Teorema 6.5.5, tale condizione è equivalente alla seguente: "per $\forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ si ha che $f * \varphi$ è una funzione a crescita lenta s.u."**)**.

b) Se:

   ◦ per $\forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ si ha $f * \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ **(nota:** per il Teorema 6.5.5, tale condizione è equivalente alla seguente: "per $\forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ si ha che $f * \varphi$ è una funzione a decrescenza rapida s.u."**)**,

   allora:

   ◦ f si dice una distribuzione *a decrescenza rapida su* $\mathbb{R}^n$,

   (vedi Schwartz, Th. IX, §5 Ch VII, pg 244).

Lo spazio delle distribuzioni a decrescenza rapida su $\mathbb{R}^n$ si denota con $\mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$; ovviamente $\mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Il seguente Teorema fornisce esempi di distribuzioni a decrescenza rapida ed un esempio di funzione *a decrescenza rapida come disribuzione* ma *non a decrescenza rapida s.u.*.

6.6.2 Teorema. Sussistono gli asserti:

a) $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$.

b) $L^1_{\mathrm{loc/dr}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$.

c) $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) + L^1_{\mathrm{loc/dr}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$.

d) La funzione $f(x) = e^{i\pi x^2} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ verifica le proprietà:

   ⋄ $f(x) \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R})$,

   ⋄ $f(x)$ non è a decrescenza rapida s.u..

Cenno. a). Sia $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$. Per $\forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ si ha: $f * \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

b). Si verifica facilmente che per $\forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ si ha: $f*\varphi$ è una funzione a decrescenza rapida s.u.; l'asserto segue quindi dalla Definizione 6.6.1 (vedi **note**).

c) L'asserto segue da a)e b), tenuto conto che $\mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio vettoriale.

d) Vedi Schwartz, Ch. VII, §5, Example pg. 245. ■

Il seguente Teorema fornisce una definizione alternativa delle distribuzioni a decrescenza rapida e contestualmente ne descrive la struttura intrinseca (vedi Teorema 5.7.3).

6.6.3 Teorema. Sia $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Sono equivalenti gli asserti:

a) $f \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$;

b) per $\forall \nu \geqslant 0$ esistono:

$$m \in \mathbb{N},\ f_r^\circ \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (r \in \mathbb{N}^n,\ |r| \leqslant m)$$

tali che, posto

$$f_r(x) = \frac{f_r^\circ(x)}{(1+\|x\|^2)^{\nu/2}} \ ,$$

si abbia: $f = \sum_{|r|\leqslant m} \partial^r f_r$.

(per la Dimostrazione vedi Schwartz, Th. IX, §5 Ch VII, pg 244)

6.7 Pseudoconvoluzione in $\mathscr{S}'$ con un fattore in $\mathscr{S}$

Questa Sezione presenta alcune proprietà delle *pseudoconvoluzioni* del tipo:

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi(\alpha x + \beta y) \mathrm{d}y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \ ,$$

ove: $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha, \beta \in \{-1, 1\}$. Per il termine *pseudoconvoluzione* vedi Sezione 6.4 e in particolare la Nota 6.4.1.

I seguenti due Lemmi forniscono gli strumenti base delle dimostrazioni.

6.7.1 Lemma. Sia $\varphi(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Si ha:

a) $\mathscr{S}\text{-}\lim_{\|h\|\to 0} \varphi(x+h) = \varphi(x)$,

b) $\mathscr{S}\text{-}\lim_{h\to 0} \dfrac{\varphi(x+he_j) - \varphi(x)}{h} = \partial^{e_j}\varphi(x)$ (si ricordi che e_j è il j-esimo elemento della base canonica di $\mathbb{R}^n$ e si osservi che $\partial^{e_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$).

(*Per la dimostrazione vedi Capitolo 10*)

6.7.2 Lemma. Siano $\alpha, \beta \in \{-1, 1\}$. Esiste $C > 0$ tale che per $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$1 + \|x\|^2 \leqslant C(1 + \|y\|^2)(1 + \|\alpha x + \beta y\|^2)$$

(vedi Schwartz, formula (VII,5;7), pg 247).

(*Per la dimostrazione vedi Capitolo 10*)

Il seguente Teorema prova che la pseudoconvoluzione per una $\varphi \in \mathscr{S}$, ossia l'applicazione:

$$f(x) \mapsto \int f(y) \bullet \varphi(\alpha x + \beta y) \mathrm{d}y \ ,$$

è un'applicazione (ovviamente lineare)

$$\sharp : \mathscr{S}' \to \mathscr{O}_{\mathrm{M}} \ ,$$

continua rispetto alla $\mathscr{S}'$-convergenza in $\mathscr{S}'$ ed alla $\mathscr{E}$-convergenza in $\mathscr{O}_{\mathrm{M}}$ (nota: in questi appunti non è stata introdotta la $\mathscr{O}_{\mathrm{M}}$-*convergenza*).

6.7.3 Teorema. Siano $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha, \beta \in \{-1, 1\}$. Sussitono gli asserti:

a) sia $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$; posto:

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi(\alpha x + \beta y) \mathrm{d}y \ ,$$

si ha: $F(x) \in \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n)$;

b) per $\forall q \in \mathbb{N}^n$ si ha:

$$\begin{aligned} \partial^q F(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \partial_x^q(\varphi(\alpha x + \beta y)) \mathrm{d}y = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bullet \left(\alpha^{|q|} \partial^q \varphi\right) (\alpha x + \beta y) \mathrm{d}y \ . \end{aligned}$$

c) sia $f_k \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ una successione tale che: $\mathscr{S}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$; posto:

$$F_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_k(y) \bullet \varphi(\alpha x + \beta y) \mathrm{d}y \in \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n) \quad \text{(vedi a))} \ ,$$

si ha: $\mathscr{E}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} F_k = F$.

(*Per la dimostrazione vedi Capitolo 10*)

Il seguente Teorema prova che la pseudoconvoluzione di una $f \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}$ per elementi di $\mathscr{S}$, ossia l'applicazione:

$$\varphi(x) \mapsto \int f(y) \bullet \varphi(\alpha x + \beta y)\mathrm{d}y$$

è un endomorfismo

$$\sharp : \mathscr{S} \to \mathscr{S} \ ,$$

continuo rispetto alla $\mathscr{S}$-convergenza.

6.7.4 Teorema. Siano $f \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha, \beta \in \{-1, 1\}$. Sussitono gli asserti seguenti:

a) sia $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$; posto:

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi(\alpha x + \beta y)\mathrm{d}y \ ,$$

si ha: $F(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

b) sia $\varphi_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ una successione tale che $\mathscr{S}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi$; posto:

$$F_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi_k(\alpha x + \beta y)\mathrm{d}y \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \ ;$$

si ha: $\mathscr{S}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} F_k = F$.

(*Per la dimostrazione vedi Capitolo 10*)

Il seguente Teorema, parziale Corollario del precedente Teorema 6.7.4, fornisce una versione più fine del Teorema 6.7.3 limitata alle sole distribuzioni a supporto compatto: precisamente prova che la pseudoconvoluzione per una $\varphi \in \mathscr{S}$, quando opera sulle distribuzioni a supporto compatto, è un'applicazione (ovviamente lineare)

$$\sharp : \mathscr{E}' \to \mathscr{S} \ ,$$

continua rispetto alle convergenze proprie di tali due spazi.

6.7.5 Teorema. Siano $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha, \beta \in \{-1, 1\}$. Sussistono gli asserti:

a) sia $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$; posto:

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi(\alpha x + \beta y) \mathrm{d}y \ ,$$

si ha: $F(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$;

b) sia $f_k \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ una successione tale che: $\mathscr{E}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$, e sia

$$F_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_k(y) \bullet \varphi(\alpha x + \beta y) \mathrm{d}y \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \ ;$$

si ha: $\mathscr{S}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} F_k = F$.

(*Per la dimostrazione vedi Capitolo 10*)

6.8 Convoluzione in $\mathscr{S}'$: un fattore in $\mathscr{O}'_{\mathrm{C}}$

I due Lemmi e la Definizione seguenti estendono la nozione di prodotto di convoluzione ad una coppia di elementi di $\mathscr{S}'$ almeno uno dei quali in $\mathscr{O}'_{\mathrm{C}}$.

6.8.1 Lemma. Siano $f \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Sussistono gli asserti:

a) La seguente definizione:
   - considerare un rappresentante temperato $(g_1, g_2, g_3, \ldots)$ di g tale che $\forall g_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ (vedi Teorema 5.5.3),
   - porre: $f \mathbin{\widehat{*}} g \triangleq [(f * g_1, f * g_2, f * g_3, \ldots)] \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$,

   è una buona definizione.

b) Per $\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si ha:
   - $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi(x+y) \mathrm{d}y \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)_x$ (vedi Teorema 6.7.4),
   - $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} (f \mathbin{\widehat{*}} g) \bullet \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \bullet \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi(x+y) \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$

Cenno. Gli asserti sono provati dalle considerazioni seguenti:

1) $\forall f * g_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ (vedi Definizione 6.6.1);

2) per $\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f * g_k) \bullet \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} g_k(x) \bullet \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi(x+y) \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

(*infatti:* sia $\varphi = \mathscr{S}\text{-}\lim\limits_{\nu\to\infty} \varphi_\nu$ con $\forall \varphi_\nu \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ (vedi Lemma 5.2.2);

◇ per il Lemma 5.2.4 e la Definizione 6.5.1, per $\forall k$ si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f * g_k) \bullet \varphi = \lim_{\nu\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (f * g_k) \bullet \varphi_\nu =$$
$$= \lim_{\nu\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k(x) \bullet \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi_\nu(x+y)\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \ ;$$

◇ per il Teorema 6.7.4 si ha:

$$\mathscr{S}\text{-}\lim_{\nu\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi_\nu(x+y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi(x+y)\mathrm{d}y \ ;$$

◇ tenuto conto dei precedenti due item, l'asserto segue dal Lemma 5.2.4) .

3) per $\forall\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, siccome $g = \mathscr{S}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} g_k$, per il Lemma 5.2.4 applicato all'item 2) si ha:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (f * g_k) \bullet \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \bullet \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi(x+y)\mathrm{y} \right] \mathrm{d}x \ .$$

■

6.8.2 Lemma. Siano $f, g \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$. Sussistono gli asserti:

a) $f \overset{\curvearrowright}{*} g = g \overset{\curvearrowright}{*} f$;

b) $f \overset{\curvearrowright}{*} g \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$.

Cenno. a). Per il Teorema 6.6.3 esistono $m \in \mathbb{N}$, $f_r^\circ, g_r^\circ \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(r \in \mathbb{N}^n, |r| \leqslant m)$ tali che, posto

$$f_r(x) = \frac{f_r^\circ(x)}{(1+\|x\|^2)^{(n+1)/2}} \quad , \quad g_r(x) = \frac{g_r^\circ(x)}{(1+\|x\|^2)^{(n+1)/2}} \quad ,$$

si abbia: $f = \sum\limits_{|r|\leqslant m} \partial^r f_r$, $g = \sum\limits_{|r|\leqslant m} \partial^r g_r$.

Per $\forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ si ha (vedi Lemma 6.8.1):

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f \overset{\curvearrowright}{*} g) \bullet \varphi =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{|r|\leqslant m} \partial^r f_r(x) \right) \bullet \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{|s|\leqslant m} \partial^r g_s(y) \right) \bullet \varphi(x+y)\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x =$$
$$= \sum_{|r|,|s|\leqslant m} (-1)^{|r|+|s|} \int_{\mathbb{R}^n} f_r(x) \bullet \left[\int_{\mathbb{R}^n} g_s(y) \bullet \partial^{r+s}\varphi(x+y)\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (g \overset{\curvearrowright}{*} f) \bullet \varphi =$$
$$= \sum_{|r|,|s| \leqslant m} (-1)^{|r|+|s|} \int_{\mathbb{R}^n} g_s(x) \bullet \left[\int_{\mathbb{R}^n} f_r(y) \bullet \partial^{r+s}\varphi(x+y)\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \ .$$

Essendo $f_r, g_s \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\partial^{r+s}\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, una ovvia applicazione del Teorema di Tonelli prova che:

$$f_r(x) g_s(y) \varphi(x+y) \in L^1(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y) \ ;$$

per il Teorema di Fubini si ha allora:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_r(x) \bullet \left[\int_{\mathbb{R}^n} g_s(y) \bullet \partial^{r+s}\varphi(x+y)\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} g_s(y) \bullet \left[\int_{\mathbb{R}^n} f_r(x) \bullet \partial^{r+s}\varphi(x+y)\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y \ .$$

Per $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ si ha quindi:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f \overset{\curvearrowright}{*} g) \bullet \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} (g \overset{\curvearrowright}{*} f) \bullet \varphi \ ,$$

e pertanto $f \overset{\curvearrowright}{*} g = g \overset{\curvearrowright}{*} f$.

b). Per $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ sussistono gli asserti:

i) per il Teorema 6.5.5 applicato a $f \overset{\curvearrowright}{*} g, \varphi$ si ha:

$$((f \overset{\curvearrowright}{*} g) * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (f \overset{\curvearrowright}{*} g)(y) \bullet \varphi(x-y)\mathrm{d}y \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^n) \ ;$$

ii) per $\forall x \in \mathbb{R}^n$ si ha $\varphi(x-y) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)_y$; per il Lemma 6.8.1 si ha:

$$\int (f \overset{\curvearrowright}{*} g)(y) \bullet \varphi(x-y)\mathrm{d}y =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \bullet \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(z) \bullet \varphi(x-(y+z))\mathrm{d}z \right] \mathrm{d}y =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \bullet \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(z) \bullet \varphi((x-y)-z)\mathrm{d}z \right] \mathrm{d}y \ ;$$

iii) per il Teorema 6.7.4 applicato ad f, φ si ha:

$$F(\xi) \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \bullet \varphi(\xi - z)\mathrm{d}z \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)_\xi \ ;$$

siccome:

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(y) \bullet \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(z) \bullet \varphi((x-y)-z) \mathrm{d}z \right] \mathrm{d}y =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \bullet F(x-y) \mathrm{d}y \ ,$$

per il Teorema 6.7.4 applicato a g, F si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(y) \bullet F(x-y) \mathrm{d}y \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \ ;$$

iv) tenuto conto di tutti gli item precedenti, per $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ si ha: $(f \overset{\curvearrowright}{*} g) * \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$; tenuto conto della Definizione 6.6.1 si ha quindi: $f \overset{\curvearrowright}{*} g \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$. ∎

6.8.3 Definizione. Siano $f, g \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ due distribuzioni, una almeno delle quali in $\mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$. Sussistono gli asserti:

a) la definizione:

$$f * g \triangleq \begin{cases} f \overset{\curvearrowright}{*} g & \text{se} \quad f \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n) \\ g \overset{\curvearrowright}{*} f & \text{se} \quad g \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

è una buona definizione (*infatti*: se f, g sono entrambi elementi di $\mathscr{O}'_{\mathrm{C}}$, per il Lemma 6.8.2 si ha $f \overset{\curvearrowright}{*} g = g \overset{\curvearrowright}{*} f$);

b) $f * g = g * f$ (ovvio).

Il seguente Teorema prova che la convoluzione per un elemento f di $\mathscr{O}'_{\mathrm{C}}$, ossia l'applicazione

$$f* : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}' \ ,$$

è lineare, invariante per traslazioni e continua, e ha δ per elemento neutro..

6.8.4 Teorema. Sia $f \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$. Sussistono gli asserti:

a) per $\forall g, h \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ e per $\forall c \in \mathbb{C}$ si ha:

$$f * (g+h) = f * g + f * h \ , \quad f * (cg) = c(f * g) \ ;$$

b) per $\forall g \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ e per $\forall a \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$f(x) * g(x-a) = (f * g)(x-a) \ ;$$

c) se $g = \mathscr{S}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} g_k$, allora si ha:

$$f * g = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} f * g_k \ ;$$

d) si ha: $f * \delta = f$.

Cenno. a). Verifica diretta.
b). Sia $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Si ha:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} (f(x) * g(x-a)) \bullet \varphi(x)\mathrm{d}x = \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-a) \bullet \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi(x+y)\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \bullet \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi(x+a+y)\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x) \bullet \varphi(x+a)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x-a) \bullet \varphi(x)\mathrm{d}x \ .
\end{aligned}$$

c). Sia $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Per il Lemma 6.8.1 si ha:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi(x+y)\mathrm{d}y \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)_x \ , \\
&\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (f * g_k) \bullet \varphi = \\
&\quad = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k(x) \bullet \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi(x+y)\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \bullet \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi(x+y)\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} (f*g) \bullet \varphi \ .
\end{aligned}$$

d). Sia $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Si ha:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (f*\delta) \bullet \varphi &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) \bullet \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi(x+y)\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi(0+y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} f \bullet \varphi \ .
\end{aligned}$$

■

Tenuto conto che il prodotto tra due distribuzioni temperate di cui almeno una in $\mathscr{O}'_{\mathrm{C}}$ è commutativo, il seguente Teorema prova che se $f_1, \ldots, f_h$

sono distribuzioni temperate *tutte, eccettuata al più una,* in $\mathscr{O}'_{\mathrm{C}}$ allora il prodotto di convoluzione

$$f_1 * \cdots * f_h$$

esiste, è associativo e commutativo, ossia che tale prodotto comunque interpretato come successione di *prodotti a* 2 *a* 2, esiste e il risultato è indipendente dall'interpretazione usata e dall'ordine dei fattori.

6.8.5 Teorema. Siano $f, g, h \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Se almeno due delle distribuzioni f, g, h sono elementi di $\mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$ si ha:

a) sono definiti entrambi i prodotti: $(f * g) * h,\ f * (g * h)$,
b) si ha: $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Cenno. a). Ovvia conseguenza della definizione e di b) del Lemma 6.8.2.
b). Supponiamo in primo luogo che $f, g \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$. In tal caso l'asserto è provato dalle considerazioni seguenti:

- per il Teorema 5.5.4 la distribuzione $h(x)$ ammette una rappresentazione del tipo:

$$h(x) = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(\mathscr{S}'\text{-}\lim_{h\to\infty}\sum_{j=1}^{\nu_{kh}} c_{khj}\delta(x - a_{khj})\right) \ ;$$

- per il Teorema 6.8.4, tenuto conto che $f, g, f * g \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$, si ha:
  - ◇ $(f * g) * h = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(\mathscr{S}'\text{-}\lim_{h\to\infty}\sum_{j=1}^{\nu_{kh}} c_{khj}(f * g)(x - a_{khj})\right)$,
  - ◇ $g * h = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(\mathscr{S}'\text{-}\lim_{h\to\infty}\sum_{j=1}^{\nu_{kh}} c_{khj}g(x - a_{khj})\right)$,
  - ◇ $f * (g * h) = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(\mathscr{S}'\text{-}\lim_{h\to\infty}\sum_{j=1}^{\nu_{kh}} c_{khj}(f(x)) * (g(x - a_{khj}))\right)$,
  - ◇ $\forall (f(x)) * (g(x - a_{khj})) = (f * g)(x - a_{khj})$.

Le osservazioni precedenti provano che se $f, g \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}\mathbb{R}^n$, allora $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Supponiamo adesso che $g, h \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$. In tale caso si ha: $(h * g) * f = h * (g * f)$. Ovvie considerazioni di commutatività ne deducono che:

$(f * g) * h = f * (g * h)$.

Supponiamo infine che $f, h \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}\mathbb{R}^n$. In tal caso si ha:

$$\begin{aligned}(f * h) * g = f * (h * g)\\ (h * f) * g = h * (f * g)\end{aligned}$$

Ovvie considerazioni ne deducono che: $(f * g) * h = f * (g * h)$. ■

Il seguente Teorema pova che la Definizione 6.8.3 di convoluzione tra due elementi di $\mathscr{S}'$, uno almeno dei quali in $\mathscr{O}'_{\mathrm{C}}$, è coerente con la Definizione di Schwartz e con le altre nozioni di convoluzione precedentemente introdotte.

In particolare prova che la convoluzione tra due distribuzioni di $\mathscr{S}'$, una almeno delle quali a supporto compatto, è una distribuzione di $\mathscr{S}'$.

6.8.6 Teorema. Siano $f \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Sussistono gli asserti:

a) sia $f \circledast g$ la convoluzione di f e g come in Schwartz (vedi: Ch. VII, §5, *La convolution dans* ($\mathscr{S}'$), pg. 246); si ha: $f * g = f \circledast g$;

b) se $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, sia $f \circledast g$ la convoluzione di f e g come nella Definizione 6.5.1; si ha: $f * g = f \circledast g$;

c) se $g \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, sia $f \circledast g$ la convoluzione di f e g come nella Definizione 6.5.1; si ha: $f * g = f \circledast g$;

d) se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, con

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r} \qquad (1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty) ,$$

sia $f \circledast g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ la convoluzione di f e g come nella Definizione 6.3.1; si ha: $f * g = f \circledast g$.

Cenno. a). Indichiamo con "$\circledast : \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$" la convoluzione definita da Schwartz.

L'operazione $f\circledast$ è lineare, invariante per traslazione, e $\mathscr{S}'$-continua. Inoltre, data una successione $S_k \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ che converge ad f nel senso di $\mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$ (vedi Schwartz, Ch. VII, §5, *Les distributions à décroissance rapide*, pg. 244), per $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f \circledast \delta) \bullet \varphi \triangleq \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (S_k * \delta) \bullet \varphi = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} S_k \bullet \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} f \bullet \varphi \ ;$$

pertanto $f\circledast$ verifica anche la proprietà: $f \circledast \delta = f$.

Tenuto conto di tali considerazioni e del Teorema 6.8.4, posto (vedi

Teorema 5.5.4):

$$g(x) = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(\mathscr{S}'\text{-}\lim_{h\to\infty}\sum_{j=1}^{\nu_{kh}} c_{khj}\delta(x-a_{khj})\right) ,$$

si ha:

$$f \circledast g = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(\mathscr{S}'\text{-}\lim_{h\to\infty}\sum_{j=1}^{\nu_{khj}} c_{kh}g(x-a_{khj})\right) = f * g .$$

b),c). In entrambi i casi, per $\forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ si ha (vedi Definizione 6.5.1 e Lemma 6.8.1) :

$$\int_{\mathbb{R}^n}(f \circledast g)\bullet\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\bullet\left[\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\bullet\varphi(x+y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n}(f*g)\bullet\varphi .$$

d). *Primo caso: $q=\infty$, e quindi $p=1$.* Sia $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Una ovvia applicazione del Teorema di Tonelli prova che:

$$f(x)g(y)\varphi(x+y) \in L^1(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y) ;$$

per il Teorema di Fubini e per la Definizione 6.8.1 si ha allora:

$$\int_{\mathbb{R}^n}(f \circledast g)(x)\bullet\varphi(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\bullet\left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\bullet\varphi(x+y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n}(f*g)(x)\bullet\varphi(x)\mathrm{d}x .$$

Secondo caso: $q\neq\infty$. Per $\forall k \in \mathbb{N}$ si ponga:

$$g_k(x) = \begin{cases} g_k(x) & , \quad \|x\| \leqslant k \\ 0 & , \quad \|x\| > k \end{cases} ,$$

e si osservi che:

- ◇ $g_k \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $L^q\text{-}\lim_{k\to\infty} g_k = g$;
- ◇ per il Teorema 6.3.2 si ha: $f \circledast g = L^r\text{-}\lim_{k\to\infty} f \circledast g_k$; una ovvia applicazione del Teorema di Lebesgue sulla Convergenza limitata prova allora che: $f \circledast g = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} f \circledast g_k$;

◇ essendo $L^q\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} g_k = g$, una ovvia applicazione del Teorema di Lebesgue sulla Convergenza dominata prova che: $\mathscr{S}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} g_k = g$; per b) del Teorema 6.8.4 si ha allora: $f * g = \mathscr{S}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f * g_k$;

◇ essendo supp g_k compatto, per b) si ha: $f \circledast g_k = f * g_k$; pertanto: $f \circledast g = f * g$. ■

Il seguente Teorema prova che la convoluzione (si ricordi che $\mathscr{E}' \subset \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}$)

$$* : \mathscr{E}' \times \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$$

è continua, come funzione di due variabili, rispetto alle nozioni di convergenza per successioni proprie di ciascuno degli spazi coinvolti. In particolare completa le informazioni del Teorema 6.5.4 nel caso delle distribuzioni temperate.

6.8.7 Teorema. Siano:

- f_k, f rispettivamente una successione ed un elemento di $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ tali che: $\mathscr{E}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$,
- g_k, g rispettivamente una successione ed un elemento di $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ tali che: $\mathscr{S}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$;

si ha:

- $\mathscr{S}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k * g_k = f * g$.

Cenno. Per $\forall\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, essendo:

∘ $\mathscr{S}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} g_k(x) = g(x)$,

∘ $\mathscr{S}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(y) \bullet \varphi(x+y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi(x+y)\mathrm{d}y$ (vedi Teorema 6.7.5),

per b) del Lemma 5.2.4, si ha:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k(x) \bullet \left[\int_{\mathbb{R}^n} f_k(y) \bullet \varphi(x+y)\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \bullet \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi(x+y)\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x \;;$$

ossia, tenuto conto di b) del Lemma 6.8.1 si ha:

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}(f_k * g_k)\bullet\varphi = \int_{\mathbb{R}^n}(f * g)\bullet\varphi \ .$$

■

Siccome

$$L^1_{\mathrm{loc/dr}} \subset \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}, \ L^1_{\mathrm{loc/cl}} \subset \mathscr{S}' \ ,$$

risulta definita la convoluzione tra una funzione di $L^1_{\mathrm{loc/dr}}$ ed una funzione di $L^1_{\mathrm{loc/cl}}$. Il seguente Teorema prova che una tale convoluzione (a priori distribuzione di $\mathscr{S}'$) è una funzione di $L^1_{\mathrm{loc/cl}}$, e ne fornisce una rappresentazione elementare in termini di un usuale integrale di convoluzione.

6.8.8 Teorema. Siano $f \in L^1_{\mathrm{loc/dr}}(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1_{\mathrm{loc/cl}}(\mathbb{R}^n)$. In base alla Definizione 6.8.3 esiste $f * g \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Sussistono inoltre gli asserti:

a) $f * g \in L^1_{\mathrm{loc/cl}}(\mathbb{R}^n)$;

b) per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha:

◇ $f(y)g(x-y) \in L^1(\mathbb{R}^n)_y$,

◇ $(f * g)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y$.

Cenno. Si consideri la successione $g_k \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ definita da:

$$g_k(x) \triangleq \begin{cases} g(x) & , \ \|x\| < k \\ 0 & , \ \|x\| \geqslant k \end{cases} \ ;$$

sussistono gli asserti:

i) per $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ovviamente si ha: $f(y)g(x-y),\ f(y)g_k(x-y) \in L^1(\mathbb{R}^n)_y$; si ponga:

$$G(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y, \quad G_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g_k(x-y)\mathrm{d}y \ ;$$

ii) essendo $f, g_k \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ed essendo g_k a supporto compatto, si ha:

$$G_k = f * g_k \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \ ;$$

iii) $G \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$
(*infatti:* sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un compatto; si consideri la funzione:

$$f(y)g(x-y) : \mathbb{R}^n_y \times K_x \to \mathbb{C}$$

si ha:

- $\diamond$ per $\forall y \in \mathbb{R}^n$, ovviamente si ha: $|f(y)g(x-y)| \in L^1(K)_x$,
- $\diamond$ esistono $A, \nu > 0$ tale che: $|g(x)| \leqslant A(1+\|x\|^2)^{\nu/2}$; tenuto conto del Lemma 6.7.2, si ha:

$$\begin{aligned}\int_K |f(y)g(x-y)|\mathrm{d}x &\leqslant A\int_K |f(y)(1+\|x-y\|^2)^{\nu/2}\mathrm{d}x \leqslant \\ &\leqslant AC\int_K |f(y)(1+\|x\|^2)^{\nu/2}(1+\|y\|^2)^{\nu/2}\mathrm{d}x \leqslant \\ &\leqslant AC\left(\int_K (1+\|x\|^2)^{\nu/2}\mathrm{d}x\right)|f(y)|(1+\|y\|^2)^{\nu/2} \ ;\end{aligned}$$

  essendo $f \in L^1_{\text{loc/dr}}(\mathbb{R}^n)$, si ha allora:

$$\int_K |f(y)g(x-y)|\mathrm{d}x \in L^1(\mathbb{R}^n)_y \ ;$$

- $\diamond$ per il Teorema di Tonelli si ha quindi:

$$f(y)g(x-y) \in L^1(\mathbb{R}^n_y \times K_x) \ ;$$

- $\diamond$ l'asserto segue allora dal Teorema di Fubini.);

iv) $G = \mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} G_k$
(*infatti:* sia $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$; imitando le considerazioni precedenti si verifica facilmente che:

$$f(y)g(x-y)\varphi(x),\ f(y)g_k(x-y)\varphi(x) \in L^1(\mathbb{R}^n_y \times \mathbb{R}^n_x) \ ;$$

si ha allora:

- $\diamond$ per il Teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n_y\times\mathbb{R}^n x} & f(y)g_k(x-y)\varphi(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\ = \int_{\mathbb{R}^n_y\times\mathbb{R}^n x} & f(y)g(x-y)\varphi(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \ ,\end{aligned}$$

$\diamond$ quindi per il Teorema di Fubini si ha:

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} G_k \bullet \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} G \bullet \varphi \;)$$

v) essendo $g = \mathscr{S}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} g_k$ per il Teorema 6.8.4 si ha:

$$f * g = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} f * g_k = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} G_k = \mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} G_k = G \;;$$

e quindi sussiste l'asserto b);

vi) per l'item iii) si ha allora: $f * g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$;

vii) G (e quindi $f * g$) è una funzione a crescita lenta s.u., e quindi sussite l'asserto a)
(*infatti:* esistono $A, \nu > 0$ tale che: $|g(x)| \leqslant A(1 + \|x\|^2)^{\nu/2}$; tenuto conto del Lemma 6.7.2, per $\forall x \in \mathbb{R}^n$ si ha quindi:

$$\begin{aligned} |G(x)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)|\,\mathrm{d}y \leqslant \\ &\leqslant A\int_{\mathbb{R}^n} \left| f(y)(1 + \|x-y\|^2)^{\nu/2}\right| \mathrm{d}y \leqslant \\ &\leqslant AC\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|(1 + \|y\|^2)^{\nu/2}\mathrm{d}y\right)(1 + \|x\|^2)^{\nu/2} \;.) \end{aligned}$$

■

Il seguente Teorema riconduce la convoluzione per una funzione di $\mathscr{S}$ (si osservi che $\mathscr{S} \subset \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}$) ad una pseudoconvoluzione; in particolare prova che tali convoluzioni sono funzioni di $\mathscr{O}_{\mathrm{M}}$ e in alcuni casi di $\mathscr{S}$, e che le loro derivate sono convoluzioni per le corrispondenti derivate della funzione di $\mathscr{S}$.

6.8.9 Teorema. Siano $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Si ha:

a) $f * \varphi \in \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n)$;

b) per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$(f * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \bullet \varphi(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \bullet \varphi(y)\mathrm{d}y \;;$$

c) per $\forall q \in \mathbb{N}^n$ si ha: $\partial^q(f * \varphi) = f * (\partial^q \varphi)$;

d) se $f \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$ si ha: $f * \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Cenno. a),b). Sia $f_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ una successione tale che $\mathscr{S}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$:

∘ siccome $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$, per b) del Teorema 6.8.4 si ha:

$$f * \varphi = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k * \varphi = \mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k * \varphi \ ;$$

∘ siccome $f_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$, ovviamente si ha:

$$(f_k * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_k(y)\varphi(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} f_k(y) \bullet \varphi(x-y)\mathrm{d}y \ ;$$

∘ tenuto quindi conto di a),c) del Teorema 6.7.3 si ha:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n) \ni \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi(x-y)\mathrm{d}y = \\
&\quad = \mathscr{E}\text{-}\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(y) \bullet \varphi(x-y)\mathrm{d}y = \\
&\quad = \mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(y) \bullet \varphi(x-y)\mathrm{d}y = \mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k * \varphi = f * \varphi \ .
\end{aligned}$$

c). Per il precedente b), e per b) del Teorema 6.7.3 si ha:

$$\begin{aligned}
\partial^q(f * \varphi) &= \partial^q \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi(x-y)\mathrm{d}y \right) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet (\partial^q \varphi)(x-y)\mathrm{d}y = f * (\partial^q \varphi) \ .
\end{aligned}$$

d). Segue dal precedente b), e da a) del Teorema 6.7.4. ∎

Capitolo 7

Analisi e sintesi di distribuzioni temperate tramite delta di Dirac

Questo Capitolo fornisce metodi per *descrivere*(analisi) una distribuzione temperata tramite limiti di combinazioni lineari di delta di Dirac, e quindi per *costruire sue approssimazioni* (sintesi) tramite combinazioni lineari di delta di Dirac.

I risultati verranno usati nel Capitolo successivo dedicato alla Trasformata di Fourier: precisamente consentiranno l'*analisi e la sintesi* di una distribuzione temperato tramite limiti di *combinazioni lineari di funzioni circolari* con coeefficienti dedotti dalla sua Trasformata di Fourier.

7.1 Successioni regolarizzanti

La seguente Definizione introduce la nozione e il ruolo delle *successioni regolarizzanti.*

7.1.1 Definizione. Sia $\varphi_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ una successione tale che:

$$\mathscr{E}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \varphi_k = \delta \ .$$

Sussistono gli asserti:

a) per $\forall f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ si ha:

$\diamond$ $\forall f * \varphi_k \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$ (vedi 6.5.5),

◇ $\mathscr{D}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f * \varphi_k = f$ (vedi 6.5.4 e 6.5.8);

b) per $\forall f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ si ha:

◇ $\forall f * \varphi_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ (si ricordi che supp $f * \varphi$ è compatto),

◇ $\mathscr{E}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f * \varphi_k = f$ (vedi 6.5.4 e 6.5.8);

c) per $\forall f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ si ha:

◇ $\forall f * \varphi_k \in \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n)$ (vedi ii) di 6.6.1),

◇ $\mathscr{S}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f * \varphi_k = f$ (vedi 6.8.7 e 6.5.8).

Tenuto conto di ciò si usano le locuzioni seguenti:

- per $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, la funzione

$$f * \varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^n) \quad (\text{risp. } \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n), \ \in \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n))$$

si dice una *regolarizzata* di f,

- $f * \varphi_k$ è una successione di regolarizzate di f che ha f come $\mathscr{D}'$-limite (risp. come $\mathscr{E}'$-limite, $\mathscr{S}'$-limite),
- φ_k si dice una *successione regolarizzante.*

7.2 Derivazione come limite di rapporti incrementali

Il seguente Teorema descrive le derivate parziali prime di δ come $\mathscr{E}'$-limiti di rapporti incrementali elementari e le derivate parziali successive come $\mathscr{E}'$-limiti di rapporti incrementali generalizzati.

Si noti che tali rapporti incrementali sono elementi di $\mathscr{E}'$: come tali, privi di qualsiasi significato puntuale.

Si noti che gli usuali limiti di successioni sono qui sostituiti da limiti di famiglie dipendenti da un paramentro reale *tendente a* 0: sia la generalizzazione della nozione di limite per tali famiglie, sia la riformulazione di tale nozione in termini di limiti di successioni sono ovvie.

Premettiamo le seguenti osservazioni e convenzioni:

- si ricordi che per $\forall \varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$ si ha: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) \bullet \varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(0)$ (vedi Nota 1 nella Sezione 4.4);

- si ricordi che

$$\delta(x-a_1)*\cdots*\delta(x-a_r)=\delta(x-(a_1+\cdots+a_r))$$

(vedi c. della Nota 6.5.8);

- si ricordi che per $\forall p,q\in\mathbb{N}^n$ si ha: $(\partial^p\delta(x))*(\partial^q\delta(x))=\partial^{p+q}\delta(x)$ (vedi b. della Nota 6.5.8)

- per $\forall g\in\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ e per $\forall r\in\mathbb{N}$ poniamo:

$$g^{*r}=\begin{cases}\underbrace{g*\cdots*g}_{r} & \text{se} \quad r>0\\ \delta & \text{se} \quad r=0\end{cases} \quad ;$$

- per $\forall m,q\in\mathbb{N}^n$ l'asserto "$m\leqslant q$" significa "$m_1\leqslant q_1,\ldots,m_n\leqslant q_n$" ;

- per $\forall m\leqslant q\in\mathbb{N}^n$ poniamo:

$$\begin{pmatrix} q\\ m\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix} q_1\\ m_1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} q_n\\ m_n\end{pmatrix} .$$

7.2.1 Teorema. Si consideri $\delta(x)\in\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$. Sussistono gli asserti:

a) Per $\forall j\in\{1,\ldots,n\}$ si ha:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\delta(x)=\mathscr{E}'\text{-}\lim_{h\to 0}\frac{\delta(x+he_j)-\delta(x)}{h} .$$

b) Per $\forall j\in\{1,\ldots,n\}$ e $\forall q_j\in\mathbb{N}$ si ha:

$$\frac{\partial^{q_j}}{\partial x_j^{q_j}}\delta(x)=\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\delta(x)\right)^{*q_j}=$$

$$=\mathscr{E}'\text{-}\lim_{h\to 0}\left(\sum_{m_j=0}^{q_j}\begin{pmatrix} q_j\\ m_j\end{pmatrix}(-1)^{q_j-m_j}\delta(x+hm_je_j)\right)/h^{q_j} .$$

c) Per $\forall q\in\mathbb{N}^n$ si ha:

$$\partial^q\delta(x)=\frac{\partial^{q_1}}{\partial x_1^{q_1}}\delta(x)*\cdots*\frac{\partial^{q_n}}{\partial x_n^{q_n}}\delta(x)=$$

$$=\mathscr{E}'\text{-}\lim_{h\to 0}\left(\sum_{m\leqslant q}\begin{pmatrix} q\\ m\end{pmatrix}(-1)^{|q-m|}\delta(x+hm)\right)/h^{|q|}$$

Cenno. a). Per $\forall\varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$ si ha:

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta(x+he_j)-\delta(x)}{h} \bullet \varphi(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) \bullet \frac{\varphi(x-he_j)-\varphi(x)}{h}\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(-he_j)-\varphi(0)}{h} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_j}\delta(x) \bullet \varphi(x)\mathrm{d}x \ ;$$

ne segue: $\mathscr{E}'\text{-}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\delta(x+he_j)-\delta(x)}{h} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\delta(x)$.

b). Segue dal precedente a) e da b) del Teorema 6.5.4.

c). Segue dal precedente b) e da b) del Teorema 6.5.4. ■

Il seguente Teorema descrive le derivate parziali prime delle distribuzioni su $\mathbb{R}^n$ come limiti distribuzionali di rapporti incrementali elementari e le derivate parziali successive come limiti distribuzionali di rapporti incrementali generalizzati.

Si noti che tali rapporti incrementali sono distribuzioni: come tali, privi di qualsiasi significato puntuale.

7.2.2 Teorema. Sia $\mathscr{U}'(\mathbb{R}^n)$ uno degli spazi:

$$\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n),\ \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n),\ \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)\ .$$

Sia $f(x) \in \mathscr{U}'(\mathbb{R}^n)$. Sussistono gli asserti:

a) Per $\forall j \in \{1,\dots,n\}$ si ha:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}f(x) = \mathscr{U}'\text{-}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+he_j)-f(x)}{h}\ .$$

b) Per $\forall j \in \{1,\dots,n\}$ e $\forall q_j \in \mathbb{N}$ si ha:

$$\frac{\partial^{q_j}}{\partial x_j^{q_j}}f(x) = \mathscr{U}'\text{-}\lim_{h\to 0}\left(\sum_{m_j=0}^{q_j}\left(\begin{array}{c} q_j \\ m_j \end{array}\right)(-1)^{q_j-m_j}f(x+hm_je_j)\right)/h^{q_j}\ .$$

c) Per $\forall q \in \mathbb{N}^n$ si ha:

$$\partial^q f(x) = \mathscr{U}'\text{-}\lim_{h\to 0}\left(\sum_{m\leqslant q}\left(\begin{array}{c} q \\ m \end{array}\right)(-1)^{|q-m|}f(x+hm)\right)/h^{|q|}\ .$$

Cenno. Gli asserti a),b) sono casi particolari di c), esplicitati solo per comodità. Le considerazioni seguenti provano c).

- Per b) della Nota 6.5.8 si ha: $\partial^q f(x) = f(x) * \partial^q \delta(x)$;
- per c) del precedente Teorema 7.2.1 si ha allora:

$$\partial^q f(x) = f(x) * \mathscr{E}'\text{-}\lim_{h\to 0}\left(\sum_{m\leqslant q}\binom{q}{m}(-1)^{|q-m|}\delta(x+hm)\right)/h^{|q|} \ ;$$

- tenuto conto
  - del Teorema 6.5.4 nei casi $\mathscr{H}' = \mathscr{E}'$ e $\mathscr{H}' = \mathscr{D}'$,
  - del Teorema 6.8.7 nel caso $\mathscr{H}' = \mathscr{S}'$,

  si ha allora:

$$\partial^q f(x) = \mathscr{H}'\text{-}\lim_{h\to 0}\left(\sum_{m\leqslant q}\binom{q}{m}(-1)^{|q-m|}f(x) * \delta(x+hm)\right)/h^{|q|} \ ;$$

- per c) della Nota 6.5.8 si ottiene l'asserto c). ■

7.3 Approssimazioni con combinazioni lineari di delta

La seguente Definizione sarà utilizzata in tutti le procedure seguenti.

7.3.1 Definizione. Per $k = 1, 2, 3, \ldots$ si considerino:

- un reale $\varepsilon_k > 0$
- una famiglia finita di *pacchetti* di punti di $\mathbb{R}^n$:

$$\Theta_{k1}, \ldots, \Theta_{k\nu_k} \ ,$$

  limitati, misurabili di misura > 0, a due a due disgiunti, ciascuno di diametro $\leqslant \varepsilon_k$

tali che:

- posto $\Theta_k = \bigcup_{j=1}^{\nu_k} \Theta_{kj}$, si abbia:

$$\Theta_1 \subset \Theta_2 \subset \Theta_3 \subset \cdots \quad , \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \Theta_k = \mathbb{R}^n \ ,$$

∘ $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$;

per ciascun pacchetto Θ_{kj} si consideri un *punto campione* $\theta_{kj} \in \Theta_{kj}$.

Descriveremo una tale assegnazione dicendo che Θ_{kj} è un *ricoprimento progressivo* di $\mathbb{R}^n$ in *pacchetti esaustivi di punti*, e che θ_{kj} è una *scelta di campioni*, uno per ciascun pacchetto.

Il seguente Teorema fornisce rappresentazioni *implementabili* delle funzioni $L^1_{\mathrm{loc/cl}}$ e delle funzioni L^1 come limite di combinazioni lineari di delta di Dirac.

7.3.2 Teorema. Sia $f(x)$ una funzione verificante una delle due seguenti condizioni:

1) $f(x) \in L^1_{\mathrm{loc/cl}}(\mathbb{R}^n)$,
2) $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Scelti $\varepsilon_k,\ \Theta_{kj},\ \theta_{kj}$ come nella Definizione 7.3.1, si ha:

$$f(x) = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\nu_k} \left(\int_{\Theta_{kj}} f \right) \delta(x - \theta_{kj}) \ .$$

Cenno. Dimostriamo in primo luogo l'asserto sotto l'ipotesi $f(x) \in L^1_{\mathrm{loc/cl}}(\mathbb{R}^n)$. Poniamo:

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^{\nu_k} \left(\int_{\Theta_{kj}} f \right) \delta(x - \theta_{kj}) \in \Delta(\mathbb{R}^n) \ .$$

Per $\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) \bullet \varphi(x) \mathrm{d}(x) = \sum_{j=1}^{\nu_k} \left(\int_{\Theta_{kj}} f \right) \varphi(\theta_{kj}) =$$
$$= \sum_{j=1}^{\nu_k} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \chi_{\Theta_{kj}}(x) \mathrm{d}(x) \right) \varphi(\theta_{kj}) = \int_{\mathbb{R}^n} F_k(x) \mathrm{d}(x) \ ,$$

ove:

$$F_k(x) = \sum_{j=1}^{\nu_k} f(x) \chi_{\Theta_{kj}}(x) \varphi(\theta_{kj}) \ .$$

Le considerazioni seguenti provano che:

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} F_k(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \ ,$$

e quindi che: $\mathscr{S}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, ossia l'asserto.

a) Per $\forall x \in \Theta_k$ esiste un unico $j(k,x)$ tale che: $x \in \Theta_{k,j(k,x)}$;
   - $\diamond$ poniamo: $\xi(k,x) \triangleq \theta_{k,j(k,x)} - x$,
   - $\diamond$ si ha: $\theta_{k,j(k,x)} = x + \xi(k,x)$, ove $\|\xi(k,x)\| \leqslant \varepsilon_k$.

b) Ne segue:

$$F_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin \Theta_k \\ f(x)\varphi(\theta_{k,j(k,x)}) = f(x)\varphi(x+\xi(k,x)) & \text{se } x \in \Theta_k \end{cases} .$$

c) Essendo $f(x)$ a crescita lenta s.u., esistono $C_1, \mu > 0$ tali che:

$$|f(x)| \leqslant C_1(1+\|x\|^2)^{\mu/2} \ ;$$

essendo $\varphi(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, esiste $C_2 > 0$ tale che:

$$|\varphi(x)| \leqslant \frac{C_2}{(1+\|x\|^2)^{(\mu+n+1)/2}} \ ;$$

per il Lemma 6.7.2, esiste $C_3 > 0$ tale che:

$$\frac{1}{1+\|x+\xi\|^2} \leqslant C_3 \frac{1+\|\xi\|^2}{1+\|x\|^2} \qquad (\forall x, \xi \in \mathbb{R}^n) \ ;$$

ne segue:

$$\begin{aligned} |f(x)\varphi(x+\xi)| &\leqslant C_1(1+\|x\|^2)^{\mu/2}\frac{C_2}{(1+\|x+\xi\|^2)^{(\mu+n+1)/2}} \leqslant \\ &\leqslant C_1(1+\|x\|^2)^{\mu/2} C_2 C_3^{(\mu+n+1)/2}\frac{(1+\|\xi\|^2)^{(\mu+n+1)/2}}{(1+\|x\|^2)^{(\mu+n+1)/2}} = \\ &= C\frac{(1+\|\xi\|^2)^{(\mu+n+1)/2}}{(1+\|x\|^2)^{(n+1)/2}} \ , \end{aligned}$$

ove $C = C_1 C_2 C_3^{(\mu+n+1)/2}$.

d) Ne segue:

$$|F_k(x)| \begin{cases} = 0 & \text{se } x \notin \Theta_k \\ \leqslant C\dfrac{(1+\|\xi(k,x)\|^2)^{(\mu+n+1)/2}}{(1+\|x\|^2)^{(n+1)/2}} & \text{se } x \in \Theta_k \end{cases} ;$$

posto quindi

$$\varepsilon = \sup\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots\} < +\infty, \quad B = C(1+\varepsilon^2)^{(\mu+n+1)/2} ,$$

si ha:

$$|F_k(x)| \leqslant \frac{B}{(1+\|x\|^2)^{(n+1)/2}} \in L^1(\mathbb{R}^n) .$$

e) Allora le funzioni $F_k(x)$ ammettono una dominante comune integrabile.

f) Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Si ha definitivamente $x_0 \in \Theta_k$, e quindi è definitivamente:

$$F_k(x_0) = f(x_0)\varphi(x_0 + \xi(k, x_0)) ;$$

essendo $\|\xi(k,x_0)\| \leqslant \varepsilon_k$, essendo $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$, ed essendo φ continua, si ha:

$$\lim_{k\to\infty} F_k(x_0) = f(x_0)\varphi(x_0) .$$

g) Per il Teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata si ha allora:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} F_k(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x .$$

Sotto l'ipotesi $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, è sufficiente rileggere la dimostrazione precedente con le seguenti modifiche:

- eliminare gli item c),d);
- sostituire l'asserto dell'item e) con il seguente asserto: "Allora le funzioni $F_k(x)$ ammettono $\sup|\varphi| \cdot |f(x)|$ come dominante comune integrabile". ■

Limitatamente alle funzioni $L^1_{\text{loc/cl}}$, il verificarsi di opportune condizioni di continuità, in particolare per funzioni $L^1_{\text{loc/cl}}$ continue, il seguente Teorema fornisce una versione più naturale del Teorema 7.3.2. Il Controesempio 7.3.4 prova che esistono funzioni L^1 verificanti tali condizioni di continuità per le quali tale versione non sussiste.

7.3.3 Teorema. Sia $f(x) \in L^1_{\mathrm{loc/cl}}(\mathbb{R}^n)$; supponiamo inoltre che $f(x)$ verifichi la seguente condizione:

- ∘ per quasi ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ esiste un intorno $I(x_0, r)$ tale che $f(x)$ è continua su $I(x_0, r)$ (chiamiamo tali punti *punti di* 0-*regolarita* di f; si osservi che per ogni tale x_0 è definito $f(x_0) \in \mathbb{C}$).

Scelti ε_k, Θ_{kj}, θ_{kj} come nella Definizione 7.3.1, con l'ulteriore condizione che i θ_{kj} siano scelti tra i punti di 0-regolarita di f (scelta certamente fattibile, essendo $\forall \text{mis } \Theta_{kj} > 0$), si ha:

$$f(x) = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\nu_k} f(\theta_{kj}) \cdot \text{mis } \Theta_{kj} \cdot \delta(x - \theta_{kj}) \ .$$

Cenno. Poniamo:

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^{\nu_k} f(\theta_{kj}) \cdot \text{mis } \Theta_{kj} \cdot \delta(x - \theta_{kj}) \in \Delta(\mathbb{R}^n) \ .$$

Per $\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) \bullet \varphi(x) \mathrm{d}(x) = \sum_{j=1}^{\nu_k} f(\theta_{kj}) \varphi(\theta_{kj}) \text{mis } \Theta_{kj} = \int_{\mathbb{R}^n} F_k(x) \mathrm{d}(x) \ ,$$

ove:

$$F_k(x) = \sum_{j=1}^{\nu_k} f(\theta_{kj}) \varphi(\theta_{kj}) \chi_{\Theta_{kj}}(x) \ .$$

Le considerazioni seguenti (strettamente analoghe a quelle del precedente Teorema 7.3.2 relative alle funzioni a cresita lenta s.u.) provano che:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} F_k(x) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) \mathrm{d}x \ ,$$

e quindi che: $\mathscr{S}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, ossia l'asserto.

a) Per $\forall x \in \Theta_k$ esiste un unico $j(k, x)$ tale che: $x \in \Theta_{k,j(k,x)}$;

- ⋄ poniamo: $\xi(k, x) \triangleq \theta_{k,j(k,x)} - x$,
- ⋄ si ha: $\theta_{k,j(k,x)} = x + \xi(k, x)$, ove $\|\xi(k, x)\| \leqslant \varepsilon_k$.

b) Ne segue:

$$F_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin \Theta_k \\ f(\theta_{k,j(k,x)})\varphi(\theta_{k,j(k,x)}) = \\ \qquad = f(x+\xi(k,x))\varphi(x+\xi(k,x)) & \text{se } x \in \Theta_k \end{cases} .$$

c) Essendo $f(x)$ a crescita lenta s.u., esistono $C_1, \mu > 0$ tali che:

$$|f(x)| \leqslant C_1(1+\|x\|^2)^{\mu/2} \ ;$$

essendo $\varphi(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, esiste $C_2 > 0$ tale che:

$$|\varphi(x)| \leqslant \frac{C_2}{(1+\|x\|^2)^{(\mu+n+1)/2}} \ ;$$

per il Lemma 6.7.2, esiste $C_3 > 0$ tale che:

$$\frac{1}{1+\|x+\xi\|^2} \leqslant C_3 \frac{1+\|\xi\|^2}{1+\|x\|^2} \qquad (\forall x, \xi \in \mathbb{R}^n) \ ;$$

ne segue:

$$|f(x+\xi)\varphi(x+\xi)| \leqslant C_1(1+\|x+\xi\|^2)^{\mu/2} \frac{C_2}{(1+\|x+\xi\|^2)^{(\mu+n+1)/2}} =$$
$$= \frac{C_1C_2}{(1+\|x+\xi\|^2)^{(n+1)/2}} \leqslant C\frac{(1+\|\xi\|^2)^{(n+1)/2}}{(1+\|x\|^2)^{(n+1)/2}} \ ,$$

ove $C = C_1C_2C_3^{(n+1)/2}$.

d) Ne segue:

$$|F_k(x)| \begin{cases} = 0 & \text{se } x \notin \Theta_k \\ \leqslant C\dfrac{(1+\|\xi(k,x)\|^2)^{(n+1)/2}}{(1+\|x\|^2)^{(n+1)/2}} & \text{se } x \in \Theta_k \end{cases} ;$$

posto quindi

$$\varepsilon = \sup\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots\} < +\infty, \quad B = C(1+\varepsilon^2)^{(n+1)/2} \ ,$$

si ha:

$$|F_k(x)| \leqslant \frac{B}{(1+\|x\|^2)^{(n+1)/2}} \in L^1(\mathbb{R}^n) \ .$$

e) Allora le funzioni $F_k(x)$ ammettono una dominante comune integrabile.

f) Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Si ha definitivamente $x_0 \in \Theta_k$, e quindi è definitivamente:

$$F_k(x_0) = f(x_0 + \xi(k, x_0))\varphi(x_0 + \xi(k, x_0)) \ ;$$

essendo $\|\xi(k, x_0)\| \leqslant \varepsilon_k$, essendo $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$, ed essendo φ continua, per tutti gli x_0 di 0-regolarità di f e quindi per q.o. $x_0 \in \mathbb{R}^n$, si ha:

$$\lim_{k\to\infty} F_k(x_0) = f(x_0)\varphi(x_0) \ .$$

g) Per il Teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata si ha allora:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} F_k(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \ .$$

$\blacksquare$

7.3.4 Controesempio. Sia $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la funzione definita da:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 e^{m^2} \chi_{\Lambda_m}(x) \qquad \Lambda_m = I\left(m, \sqrt{2}/(m^4 e^{m^2})\right) \ ;$$

si osservi che:

- per $\forall x \in \mathbb{R}$ al più un addendo è non nullo, quindi $f(x)$ è ben definita,
- $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f = 2\sqrt{2} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} 1/m^2$,
- i punti non di 0-regolarità di f sono gli estremi degli intervalli Λ_m; in particolare:
  - l'insieme di tali punti è numerabile,
  - tali punti $\notin \mathbb{Q}$,
- per $\forall k \in \mathbb{N}$, k è un punto di 0-regolarità di f e $f(k) = k^2 e^{k^2}$; in particolare f non è a crescita lenta s.u..

Si Ponga:

- $\Theta_k = [-k, k+1)$,
- $\Theta_{kj} = [-k+(j-1)/k, -k+j/k)$, $j = 1, \ldots, \nu_k = 2k^2+k$, $\varepsilon_k = 1/k$,

- $\theta_{kj} = -k + (j-1)/k$ (si osservi che θ_{kj} esseno razionale è un punto di 0-regolarità di f).

Sussiste l'asserto:

- la successione

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^{\nu_k} f(\theta_{kj}) \cdot \text{mis } \Theta_{kj} \cdot \delta(x - \theta_{kj}) \in \Delta(\mathbb{R}^n)$$

non è una successione di $\mathscr{S}'$-Cauchy.

Cenno. Sia $\varphi(x) = e^{-x^2} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Per $\forall k$, posto $j_k = 2k^2 + 1$, si ha:

- $\theta_{kj_k} = k$,
- tenuto conto che $\forall f(x) \geqslant 0,\ \varphi(x) \geqslant 0$, si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) \bullet \varphi(x) \mathrm{d}(x) = \sum_{j=1}^{\nu_k} f(\theta_{kj}) \varphi(\theta_{kj}) \text{mis } \Theta_{kj} \geqslant$$
$$\geqslant f(\theta_{kj_k}) \varphi(\theta_{kj_k}) \text{mis } \Theta_{kj_k} = f(k) g(k) \cdot (1/k) = k \ ;$$

ne segue l'asserto. ■

Per distribuzioni temperate qualsiansi, descrizioni sono fornite dai due seguenti Teoremi:

- il primo, corollario del Teorema 7.3.3, utilizza la nozione e il ruolo delle successioni regolarizzanti e fornisce descrizioni *implementabili* sotto forma di *doppio limite* di combinazioni di delta di Dirac,

- il secondo utilizza la rappresentazione delle $\partial^q \delta$ data nel Teorema 7.2.1 e fornisce descrizioni *ben difficilmente implementabili* (tenuto conto della *grandezza* dei coefficienti che usa) sotto forma di limite di combinazioni lineari di delta di Dirac; l'interesse di questo risultato è di natura teorica: migliora il Teorema 5.5.4 provando che lo spazio $\Delta(\mathbb{R}^n)$ è denso in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Al primo Teorema premettiamo una Nota che esplicita le informazioni fornite su una distribuzione temperata da una sua descrizione come doppio limite.

7.3.5 Nota. Siano F e F_{hk} rispettivamente una distribuzione ed una famiglia a due indici $h, k \in \mathbb{N}$ di distribuzioni $\in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ tali che:

$$F = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{h\to\infty}\left(\mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} F_{hk}\right) .$$

Per $\forall\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e per $\forall\varepsilon > 0$, esistono

$$\widetilde{h},\ \widetilde{k}(\widetilde{h}), \widetilde{k}(\widetilde{h}+1), \widetilde{k}(\widetilde{h}+2), \ldots$$

tali che per ogni

$$h \geqslant \widetilde{h},\ k \geqslant \widetilde{k}(h)$$

si ha:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}(F - F_{hk}) \bullet \varphi\right| < \varepsilon .$$

7.3.6 Teorema. Sia $f(x) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

- Scelta una successione regolarizzante $\varphi_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ (vedi Definizione 7.1.1),
- scelti $\varepsilon_k,\ \Theta_{kj},\ \theta_{kj}$ come nella Definizione 7.3.1,

si ha:

$$f(x) = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{h\to\infty}\left(\mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{\nu_k}(f * \varphi_h)(\theta_{kj}) \cdot \text{mis }\Theta_{kj} \cdot \delta(x - \theta_{kj})\right) .$$

(Si ricordi che per c) della Definizione 7.1.1 si ha che $\forall f * \varphi_h \in \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n)$)

Cenno. Per c) della Definizione 7.1.1 si ha: $f = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{h\to\infty} f * \varphi_h$. Essendo $\forall f * \varphi_h \in \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n)$, per il Teorema 7.3.3 si ha:

$$(f * \varphi_h)(x) = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{\nu_k}(f * \varphi_h)(\theta_{kj}) \cdot \text{mis }\Theta_{kj} \cdot \delta(x - \theta_{kj}) ,$$

e quindi l'asserto. ■

7.3.7 Teorema. Sia $f(x) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

- Posto: $f(x) = \partial^q g(x)$, con $q \in \mathbb{N}^n$ e $g(x) \in C^0(\mathbb{R}^n)$ a crescita lenta s.u. (vedi Teorema 5.7.3),
- scelti: $\varepsilon_k,\ \Theta_{kj},\ \theta_{kj}$ come nella Definizione 7.3.1,

si ha:

$$f(x) = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{\nu_k} g(\theta_{kj})\cdot \text{mis }\Theta_{kj}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\sum_{m\leqslant q}\left(\begin{array}{c} q \\ m \end{array}\right)(-1)^{|q-m|}k^{|q|}\delta\Big(x-\big(\theta_{kj}-(1/k)m\big)\Big)\right) \ .$$

Cenno. L'asserto è provato dalle considerazioni seguenti:

∘ per il Teorema 7.2.1 si ha:

$$\partial^q\delta(x) = \mathscr{E}'\text{-}\lim_{k\to\infty}\sum_{m\leqslant q}\left(\begin{array}{c} q \\ m \end{array}\right)(-1)^{|q-m|}k^{|q|}\delta(x+(1/k)m) \ ;$$

∘ per il Teorema 7.3.3 si ha:

$$g(x) = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{\nu_k} g(\theta_{kj})\cdot \text{mis }\Theta_{kj}\cdot\delta(x-\theta_{kj}) \ ;$$

∘ per il Teorema 6.8.7 si ha allora:

$$f(x) = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(\left(\sum_{m\leqslant q}\left(\begin{array}{c} q \\ m \end{array}\right)(-1)^{|q-m|}k^{|q|}\delta(x+(1/k)m)\right)*\right.$$
$$\left.*\left(\sum_{j=1}^{\nu_k} g(\theta_{kj})\cdot \text{mis }\Theta_{kj}\cdot\delta(x-\theta_{kj})\right)\right) \ .$$

■

Capitolo 8

Analisi e sintesi di distribuzioni temperate tramite funzioni circolari: Trasformata di Fourier

La Teoria della Trasformata di Fourier ha come obbiettivo la descizione di fenomeni in termini di *funzioni circolari complesse* e di loro ovvie generalizzazioni a più variabili.

In letteratura si trovano versioni diverse della Trasformata di Fourier a seconda del particolare parametro (frequenza, pulsazione, etc.) usato per caratterizzare tali funzioni. Il passare dall'una all'altra è concettualmente banale ma formalmente non ovvio.

Le considerazioni della Sezione 8.1 consentono una trattazione concettualmente e formalmente unitaria della Trasformata di Fourier che fornisce in modo automatico ed ovvio tutte le versioni incontrate e quelle potenzialmente incontrabili.

8.1 Convenzione sulla rappresentazione di funzioni circolari complesse

Con il termine *funzioni circolari complesse* si intendono le funzioni

$$g(t) : \mathbb{R} \to \Gamma = \{c \in \mathbb{C} : |c| = 1\}$$

che rappresentano parametricamente moti su Γ

◦ di velocità angolare costante,

◦ di punto iniziale $g(0) = 1$.

La seguente Convenzione consente una caratterizzazione di tali funzioni che unifica tutte le descrizioni possibili e consente in modo banale il passaggio dall'una all'altra.

8.1.1 Convenzione. Consideriamo, e teniamo costanti:

⋄ un reale $\alpha \in (0, 2\pi]$,

⋄ un angolo A di α radianti.

Le funzioni circolari complesse verranno caratterizzate tramite la loro *pulsazione* θ *in unità* A, ossia tramite il numero θ di angoli A percorsi in senso antiorario *ogni secondo.*

Con tale convenzione, la famiglia delle funzioni circolari complesse è descritta da:

$$e^{i\alpha\theta t} \quad (\theta \in \mathbb{R}) \ .$$

Con la Convenzione 8.1.1, chi è abituato a definire tali applicazioni $g(t)$

tramite	in tutti i risultati e le formule, porrà	ad esempio, la formula	diverrà
la frequenza, ossia la pulsazione f in angoli giro	$\alpha = 2\pi \quad \theta = f$	$g(t) = e^{i\alpha\theta t}$	$g(t) = e^{i2\pi f t}$
la pulsazione ω in radianti	$\alpha = 1 \quad \theta = \omega$	$g(t) = e^{i\alpha\theta t}$	$g(t) = e^{i\omega t}$
la pulsazione η in gradi	$\alpha = \dfrac{2\pi}{360} \quad \theta = \eta$	$g(t) = e^{i\alpha\theta t}$	$g(t) = e^{i\frac{2\pi}{360}\eta t}$
la pulsazione η_0 in gradi centesimali	$\alpha = \dfrac{2\pi}{400} \quad \theta = \eta_0$	$g(t) = e^{i\alpha\theta t}$	$g(t) = e^{i\frac{2\pi}{400}\eta_0 t}$

La seguente Definizione generalizza *a più variabili* la nozione di funzioni circolari complesse.

8.1.2 Per ogni

$$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n_\theta, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_x$$

poniamo: $\theta \cdot x \triangleq \theta_1 x_1 + \cdots + \theta_n x_n \in \mathbb{R}$. La funzione:

$$e^{i\alpha\theta\cdot x} = e^{i\alpha\theta_1 x_1 + \cdots + i\alpha\theta_n x_n}$$

della variabile $x \in \mathbb{R}^n_x$ si dirà la *funzione circolare complessa* di *pulsazione* $\theta \in \mathbb{R}^n_\theta$ *in unità A*.

8.2 Trasformata di Fourier in L^1

La seguente Definizione introduce la Trasformata e l'Antitrasformata di Fourier delle funzioni L^1.

8.2.1 Definizione. Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$:

FT) Per ogni $\theta \in \mathbb{R}^n$ si ha: $f(x)e^{-i\alpha\theta\cdot x} \in L^1(\mathbb{R}^n)_x$;

- la funzione $\hat{f}(\theta) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\alpha\theta\cdot x}\mathrm{d}x : \mathbb{R}^n_\theta \to \mathbb{C}$ si dice *la trasformata di Fourier della funzione* $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)_x$;
- $(\mathscr{F}f)(\theta)$, $(\mathscr{F}f(x))(\theta)$ sono simboli alternativi per indicare $\hat{f}(\theta)$.

AFT) Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha: $f(\theta)e^{i\alpha\theta\cdot x} \in L^1(\mathbb{R}^n)_\theta$;

- la funzione $\check{f}(x) = \left(\dfrac{\alpha}{2\pi}\right)^n \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(\theta)e^{i\alpha\theta\cdot x}\mathrm{d}\theta : \mathbb{R}^n_x \to \mathbb{C}$ si dice *la antitrasformata di Fourier della funzione* $f(\theta) \in L^1(\mathbb{R}^n)_\theta$;
- $\big(\check{\mathscr{F}}f\big)(x)$, $\big(\check{\mathscr{F}}f(\theta)\big)(x)$ sono simboli alternativi per indicare $\check{f}(x)$.

Si osservi che tra le funzioni $\hat{f}$ e $\check{f}$ sussistono le relazioni:

$$\check{f}(x) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \hat{f}(-x) , \quad \hat{f}(\theta) = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n \check{f}(-\theta) .$$

I seguenti Teoremi evidenziano proprietà di uso corrente della trasformata e della antitrasformata di Fourier in L^1.

8.2.2 Teorema. Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Sussistono gli asserti:

a) $\hat{f}(\theta),\ \check{f}(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$;

b) $\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1,\ \|\check{f}\|_\infty \leqslant \left(\dfrac{\alpha}{2\pi}\right)^n \|f\|_1$;

c) $\hat{f}(\theta),\ \check{f}(x) \in C^0(\mathbb{R}^n)$;

d) $\displaystyle\lim_{\|\theta\|\to\infty} \hat{f}(\theta) = 0$, $\displaystyle\lim_{\|x\|\to\infty} \check{f}(x) = 0$.

Nota: tenuto conto di a), possiamo considerare le applicazioni:

$$\mathscr{F}, \check{\mathscr{F}} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n) \ ;$$

tali applicazioni sono ovviamente lineari, e per b) sono anche continue.

Cenno. a),b). Ovvia conseguenza delle definizioni.

c). In $\mathbb{R}^n_\theta$ sia: $\lim\limits_{k\to\infty} \theta_k = \theta$; applicando il Teorema di Lebesgue sulla Convergenza limitata alla successione

$$f(x)e^{-i\alpha\theta_k \cdot x}$$

di funzioni L^1 ed alla funzione $f(x)e^{-i\alpha\theta\cdot x}$, usando come funzione dominante $|f(x)|$, si ottiene:

$$\lim_{k\to\infty} \hat{f}(\theta_k) = \hat{f}(\theta) \ ;$$

pertanto $\hat{f} \in C^0(\mathbb{R}^n)$.

Essendo $\check{f}(x) = \left(\dfrac{\alpha}{2\pi}\right)^n \hat{f}(-x)$, anche $\check{f} \in C^0(\mathbb{R}^n)$.

d). Dimostrazione tecnica, facilmente trovabile in letteratura: omessa.

∎

8.2.3 Teorema di reciprocità in L^1. Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Sussistono gli asserti:

a) $f\hat{g},\ \hat{f}g,\ f\check{g},\ \check{f}g \in L^1(\mathbb{R}^n)$;

b) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f\hat{g} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}g \quad , \quad \int_{\mathbb{R}^n} f\check{g} = \int_{\mathbb{R}^n} \check{f}g$.

Cenno. a). $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ per ipotesi; $\hat{f}, \hat{g}, \check{f}, \check{g} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ per il Teorema 8.2.2.

b). Per il Teorema di Tonelli si ha:

$$f(x)g(y)e^{-i\alpha x\cdot y} \in L^1(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y) \ ;$$

per il Teorema di Fubini si ha allora:

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} f(x)g(y)e^{-i\alpha x\cdot y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\left[\int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-i\alpha x\cdot y}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f\hat{g} \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\alpha x\cdot y}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}g \end{cases}$$

Stesse considerazioni per $\check{f}, \check{g}$. ∎

8.2.4 Formule FT-convoluzione in L^1. Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Sussistono gli asserti:

a) $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$;

b) $(f * g)\hat{} = \hat{f}\hat{g}$, $(f * g)\check{} = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n \check{f}\check{g}$.

Cenno. a). Segue dal Teorema 6.3.3.

b). Sia $\theta \in \mathbb{R}^n$. Una (opportuna) delle due modalità di applicazione del Teorema di Tonelli prova in modo banale che:

$$u\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(x-y)g(y)e^{-i\alpha\theta\cdot x} \in L^1(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y) \ ;$$

ne segue che:

$$\begin{aligned} U\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= u\left(\begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \\ &= u\begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix} = f(x)g(y)e^{-i\alpha\theta\cdot(x+y)} \in L^1(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y) \ , \end{aligned}$$

e che:

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} u\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} U\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \ ,$$

ossia che:

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)e^{-i\alpha\theta\cdot x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(x)g(y)e^{-i\alpha\theta\cdot(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ ;$$

ciò posto si ha:

$$\begin{aligned} (f * g)\hat{}(\theta) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y\right] e^{-i\alpha\theta\cdot x}\mathrm{d}x = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)e^{-i\alpha\theta\cdot x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(x)g(y)e^{-i\alpha\theta\cdot(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\alpha\theta\cdot x}g(y)e^{-i\alpha\theta\cdot y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\alpha\theta\cdot x}\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-i\alpha\theta\cdot y}\mathrm{d}y\right) = \hat{f}(\theta)\hat{g}(\theta) \ . \end{aligned}$$

Tenuto conto della Definizione 8.2.1, dal risultato precedente segue che:

$$(f * g)\check{}(x) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n (f * g)\hat{}(-x) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \hat{f}(-x)\hat{g}(-x) =$$
$$= \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \left(\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n \check{f}(x)\right)\left(\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n \check{g}(x)\right) = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n \check{f}(x)\check{g}(x) \ .$$

■

8.3 Trasformata di Fourier in $\mathscr{S}$

Questa sezione prova che per $\forall f \in \mathscr{S}$ si ha $\hat{f}, \check{f} \in \mathscr{S}$ (si ricordi che $\mathscr{S} \subset L^1$), e che le applicazioni, ovviamente lineari,

$$\mathscr{F} : \mathscr{S}_x \to \mathscr{S}_\theta \ , \quad \check{\mathscr{F}} \mathscr{S}_\theta \to \mathscr{S}_x$$

sono isomorfismi, uno l'inverso dell'altro.

Il Lemma e il Teorema seguenti provano il primo asserto.

8.3.1 Lemma. Sia $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Sussistono gli asserti:

FT-a) $\hat{f}(\theta) \in C^1(\mathbb{R}^n)$,

FT-b) $\left(\mathscr{F}\dfrac{\partial}{\partial x_j} f(x)\right)(\theta) = (i\alpha\theta_j)\hat{f}(\theta)$,

FT-c) $\dfrac{\partial}{\partial \theta_j}\hat{f}(\theta) = (\mathscr{F}(-i\alpha x_j)f(x))(\theta)$;

AFT-a) $\check{f}(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$,

AFT-b) $\left(\check{\mathscr{F}}\dfrac{\partial}{\partial \theta_j} f(\theta)\right)(x) = (-i\alpha x_j)\check{f}(x)$,

AFT-c) $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\check{f}(x) = \big(\check{\mathscr{F}}(i\alpha\theta_j)f(\theta)\big)(x)$.

Cenno. FT-c). Per $\forall \theta \in \mathbb{R}^n$ si ha:

- $\dfrac{\hat{f}(\theta + he_j) - \hat{f}(\theta)}{h} = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\alpha\theta\cdot x} \cdot \frac{e^{-i\alpha h x_j} - 1}{h} \mathrm{d}x$;
- $F_h(x) \triangleq f(x)e^{-i\alpha\theta\cdot x} \cdot \dfrac{e^{-i\alpha h x_j} - 1}{h} =$

$$= (-i\alpha x_j)f(x)e^{-i\alpha\theta\cdot x} \cdot \frac{e^{-i\alpha h x_j} - 1}{-i\alpha h x_j} \ ;$$

- la funzione $\eta \mapsto \dfrac{e^{i\eta}-1}{i\eta}$ con $\eta \in \mathbb{R}$ è limitata in modulo (da una costante opportuna $C>0$) ed ha limite 1 per η che tende a 0 ;
- la famiglia di funzioni $F_h(x)$ verifica quindi le condizioni:
  - $|(-i\alpha x_j)f(x)e^{-i\alpha\theta\cdot x}|\cdot C \in L^1(\mathbb{R}^n)$ è una dominante di tutte le funzioni $F_h(x)$,
  - per $\forall x \in \mathbb{R}^n$ si ha: $\lim\limits_{h\to 0} F_h(x) = (-i\alpha x_j)f(x)e^{-i\alpha\theta\cdot x}$,
- per il Teorema di Lebesgue sulla Convergenza Dominata si ha allora:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\hat{f}(\theta+he_j)-\hat{f}(\theta)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n}(-i\alpha x_j)f(x)e^{-i\alpha\theta\cdot x}\mathrm{d}x \ .$$

FT-a). Nella precedente dimostrazione di FT-c) è stato provato che esistono le derivate parziali prime di $\hat{f}(\theta)$ e che tali derivate sono a loro volta Trasformate di Fourier di funzioni L^1. Per il Teorema 8.2.2 tali derivate sono quindi continue.

TF-b). Per semplicità di scrittura supponiamo $j=1$. Per $\forall \theta \in \mathbb{R}^n$ si ha:

- $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}f(x)\right)e^{-i\alpha\theta\cdot x} = \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(f(x)e^{-i\alpha\theta\cdot x}\right) + i\alpha\theta_1 f(x)e^{-i\alpha\theta\cdot x}$;
- essendo $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, ne segue:

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}f(x)\right)e^{-i\alpha\theta\cdot x}\mathrm{d}x = \\ = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(f(x)e^{-i\alpha\theta\cdot x}\right)\mathrm{d}x + (i\alpha\theta_1)\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-i\alpha\theta\cdot x}\mathrm{d}x \ ;$$

- essendo (per il Teorema di Fubini):

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(f(x)e^{-i\alpha\theta\cdot x}\right)\mathrm{d}x = \\ = \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(f(x)e^{-i\alpha\theta\cdot x}\right)\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = \\ = \int_{\mathbb{R}^{n-1}}(0)\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = 0 \ ,$$

  si ottiene l'asserto.

Le dimostrazioni relative alle antitrasformate si ottengono dalle precedenti con ovvie modifiche. ■

8.3.2 Teorema. Sia $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Sussistono gli asserti:

FT-a) $\hat{f}(\theta) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

FT-b) $(\mathscr{F}\partial^q f(x))(\theta) = (i\alpha)^{|q|}\theta^q \hat{f}(\theta)$, per $\forall q \in \mathbb{N}^n$,

FT-c) $\partial^q \hat{f}(\theta) = \big(\mathscr{F}(-i\alpha)^{|q|}x^q f(x)\big)(\theta)$, per $\forall q \in \mathbb{N}^n$;

AFT-a) $\check{f}(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

AFT-b) $\big(\check{\mathscr{F}}\partial^q f(\theta)\big)(x) = (-i\alpha)^{|q|}x^q \check{f}(x)$, per $\forall q \in \mathbb{N}^n$,

AFT-c) $\partial^q \check{f}(x) = \big(\check{\mathscr{F}}(i\alpha)^{|q|}\theta^q f(\theta)\big)(x)$.

Cenno. FT-c). Per il Lemma 8.3.1 si ha:

- $\dfrac{\partial}{\partial\theta_j}\hat{f}(\theta) = (\mathscr{F}(-i\alpha x_j)f(x))(\theta)$,
- $\dfrac{\partial}{\partial\theta_j}\hat{f}(\theta)$, come Trasformata di Fourier di una funzione di $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e C^1 ,
- $\hat{f}(\theta) \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e inoltre: $\dfrac{\partial}{\partial\theta_h}\dfrac{\partial}{\partial\theta_j}\hat{f}(\theta) = (\mathscr{F}(-i\alpha x_h)(-i\alpha x_j)f(x))(\theta)$;

iterando tali considerazioni si ottiene che:

- $\hat{f}(\theta) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e che per $\forall q \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$\partial^q \hat{f}(\theta) = \big(\mathscr{F}(-i\alpha)^{|q|}x^q f(x)\big)(\theta) .$$

FT-b). Per il Lemma 8.3.1 si ha: $\left(\mathscr{F}\dfrac{\partial}{\partial x_j}f(x)\right)(\theta) = (i\alpha\theta_j)\hat{f}(\theta)$; ne segue:

$$\left(\mathscr{F}\frac{\partial}{\partial x_h}\frac{\partial}{\partial x_j}f(x)\right)(\theta) = (i\alpha\theta_h)(i\alpha\theta_j)\hat{f}(\theta) ;$$

iterando tale procedimento si ottiene l'asserto.

FT-a). Tenuto conto di FT-b), FT-c), e della dimostrazione di FT-c), si ha:

- $\hat{f}(\theta) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$,
- per $\forall m, q \in \mathbb{N}^n$ si ha:

$$\theta^m \partial^q \hat{f}(\theta) = (i\alpha)^{-|m|}(-i\alpha)^{|q|}(\mathscr{F}\partial^m(x^q f(x)))(\theta) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) ;$$

ne segue che, per $\forall q \in \mathbb{N}^n$, $\partial^q \hat{f}(\theta)$ è una funzione a decrescenza rapida s.u., e quindi che $\hat{f}(\theta) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Le dimostrazioni relative alle antitrasformate si ottengono dalle precedenti con ovvie modifiche. ■

Per il precedente Teorema 8.3.2 si possono quindi considerare le applicazioni lineari:

$$\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}) \qquad \check{\mathscr{F}} : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}) \ .$$

I due Lemmi e il Teorema seguenti provano che tali applicazioni sono isomorfismi uno l'inverso dell'altro.

8.3.3 Lemma. Siano $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Sussistono gli asserti:

a) per $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$g(0)\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\theta)e^{i\alpha\theta\cdot x_0}\mathrm{d}\theta = \left[\int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(y)\mathrm{d}y\right] f(x_0) \ ;$$

b) per $\forall \theta_0 \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$g(0)\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \check{f}(x)e^{-i\alpha\theta_0\cdot x}\mathrm{d}x = \left[\int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(y)\mathrm{d}y\right] f(\theta_0) \ .$$

Cenno. a). Per $\forall k \in \mathbb{N}(k \neq 0)$, si ponga $g_k(x) = g((1/k)x)$; si ha:

- $g_k(\theta)f(y)e^{-i\alpha\theta\cdot y}e^{i\alpha\theta\cdot x_0} \in L^1(\mathbb{R}^n_\theta \times \mathbb{R}^n_y)$ (segue dal Teorema di Tonelli);
- applicando a tale funzione il Teorema di Fubini si ottiene:

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\alpha\theta\cdot y}\mathrm{d}y\right] g_k(\theta)e^{i\alpha\theta\cdot x_0}\mathrm{d}\theta = \\ = \int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} g_k(\theta)e^{-i\alpha\theta\cdot(y-x_0)}\mathrm{d}\theta\right] f(y)\mathrm{d}y \ ,$$

ossia:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\theta)g_k(\theta)e^{i\alpha\theta\cdot x_0}\mathrm{d}\theta = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}_k(y-x_0)f(y)\mathrm{d}y \ ;$$

- si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}_k(y-x_0)f(y)\mathrm{d}y = \qquad \text{(sostituendo } y \text{ con } y+x_0\text{)}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}_k(y)f(y+x_0)\mathrm{d}y = \qquad \text{(verificare che } \hat{g}_k(y)=k^n\hat{g}(ky)\text{)}$$

$$= k^n\int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(ky)f(y+x_0)\mathrm{d}y = \qquad \text{(sostituendo } y \text{ con } (1/k)y\text{)}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(y)f((1/k)y+x_0)\mathrm{d}y \ ;$$

- allora si ottiene:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\theta)g_k(\theta)e^{i\alpha\theta\cdot x_0}\mathrm{d}\theta = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(y)f((1/k)y+x_0)\mathrm{d}y \ ;$$

  le ipotesi consentono di passare al limite per $k \to \infty$ applicando ad entrambi gli integrali il Teorema di Lebesgue sulla Convergenza dominata; ne segue l'asserto.

b). Essendo $\hat{f}(\theta) = \left(\dfrac{2\pi}{\alpha}\right)^n \check{f}(-\theta)$, la relazione a) diviene:

$$g(0)\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \check{f}(-\theta)e^{i\alpha\theta\cdot x_0}\mathrm{d}\theta = \left[\int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(y)\mathrm{d}y\right] f(x_0) \ ;$$

le sostituzioni: $-x \rightsquigarrow \theta$, $\theta_0 \rightsquigarrow x_0$ forniscono la relazione b). ■

8.3.4 Lemma. Si consideri la funzione: $g(x) = e^{-\|x\|^2} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Sussistono gli asserti:

a) $g(0) = 1$,

b) $\hat{g}(\theta) = (\sqrt{\pi})^n \, e^{-\|(\alpha/2)y\|^2}$,

c) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(y)\mathrm{d}y = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n$.

Cenno. Per il Teorema di Fubini si ha:

$$\hat{g}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2}e^{-iy\cdot x}\mathrm{d}x = \prod_{h=1}^{n}\int_{\mathbb{R}} e^{-x_h^2-i\alpha y_h x_h}\mathrm{d}x_h \ .$$

Utilizando i seguenti risultati (usualmente reperibili in letteratura):

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \ , \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2-i\eta x}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}e^{-\eta^2/4} \qquad (\forall \eta \in \mathbb{R}) \ ,$$

si ottiene:

$$\hat{g}(y) = \prod_{h=1}^{n} \sqrt{\pi} e^{-((\alpha/2)y_h)^2} = (\sqrt{\pi})^n \, e^{-\|(\alpha/2)y\|^2}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(y) \mathrm{d}y = \prod_{h=1}^{n} \sqrt{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-((\alpha/2)y_h)^2} \mathrm{d}y_h =$$

$$= \prod_{h=1}^{n} \sqrt{\pi}(2/\alpha) \int_{\mathbb{R}} e^{-y_h^2} \mathrm{d}y_h = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n \; .$$

■

8.3.5 Teorema. Sussistono gli asserti:

a) Sia $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$; si ha:

◇ per $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\theta) e^{i\alpha\theta\cdot x_0} \mathrm{d}\theta = f(x_0) \; ;$$

◇ per $\forall \theta_0 \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \check{f}(x) e^{-i\alpha\theta_0\cdot x} \mathrm{d}x = f(\theta_0) \; .$$

b) Si ha:

◇ $\check{\mathscr{F}}\mathscr{F} = \iota : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)_x \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)_x$;

◇ $\mathscr{F}\check{\mathscr{F}} = \iota : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)_\theta \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)_\theta$.

Cenno. a). Segue dal Lemma 8.3.3 usando la g del Lemma 8.3.4.
b). Segue da a). ■

Il seguente risultato descrive il comportamento della FT e della AFT sul prodotto di convoluzione e sull'usale prodotto tra funzioni di $\mathscr{S}$.

8.3.6 Formule FT-convoluzione in $\mathscr{S}$. Siano $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Sussistono gli asserti:

a) $f * g,\ fg \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$;

b) si ha:

$$(f * g)\hat{} = \hat{f}\hat{g} \qquad (f * g)\check{} = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n \check{f}\check{g} \; ,$$

$$(fg)\hat{} = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \hat{f} * \hat{g} \qquad (fg)\check{} = \check{f} * \check{g} \; .$$

Cenno. a). Tenuto conto di d) del Teorema 6.8.9 si ha: $f * g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Ovvie verifiche provano che $fg \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

b). Siccome $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, per le Formule FT-convoluzione in L^1 (vedi 8.2.4), si ha:

$$(f * g)\hat{} = \hat{f}\hat{g} \qquad (f * g)\check{} = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n \check{f}\check{g} \ .$$

Applicando la prima di tali uguaglianze a $\check{f}, \check{g} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, e la seconda a $\hat{f}, \hat{g} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, si ha

$$(\check{f} * \check{g})\hat{} = (\check{f})\hat{} \cdot (\check{g})\hat{} = fg \qquad (\hat{f} * \hat{g})\check{} = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n (\hat{f})\check{} \cdot (\hat{g})\check{} = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n fg \ ;$$

ne segue:

$$\check{\mathscr{F}}((\check{f} * \check{g})\hat{}) = \check{\mathscr{F}}(fg) \qquad \mathscr{F}((\hat{f} * \hat{g})\check{}) = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n \mathscr{F}(fg) \ ;$$

tenuto conto di b) del Teorema 8.3.5 si ha

$$\check{f} * \check{g} = (fg)\check{} \qquad \hat{f} * \hat{g} = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n (fg)\hat{} \ .$$

■

8.4 Trasformata di Fourier in $\mathscr{S}'$

La seguente Definizione estende la nozione di Trasforma ed Antitrasformata di Fourier alle distribuzioni temperate.

8.4.1 Definizione. Sia $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Sussistono gli asserti:

a) Le seguenti definizioni:
   - ◇ considerare un rappresentante temperato $(f_1, f_2, f_3, \dots)$ di f con $\forall f_k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (certamente esistente per il Teorema 5.5.3),
   - ◇ porre:

$$\hat{f}(\theta) \triangleq \Big[\big(\hat{f}_1(\theta), \hat{f}_2(\theta), \hat{f}_3(\theta), \dots\big)\Big] \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \ ,$$
$$\check{f}(x) \triangleq \Big[\big(\check{f}_1(x), \check{f}_2(x), \check{f}_3(x), \dots\big)\Big] \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \ ,$$

   sono buone definizioni.

   Si usa la seguente terminologia:

- $\diamond$ $\hat{f}(\theta)$ si dice *la Trasformata di Fourier di* $f(x)$,
- $\diamond$ $\check{f}(x)$ si dice *la Antitrasformata di Fourier di* $f(\theta)$,

e si usano le seguenti notazioni alternative:

- $\diamond$ $\hat{f}(\theta) = (\mathscr{F} f)(\theta) = (\mathscr{F} f(x))(\theta)$,
- $\diamond$ $\check{f}(x) = \big(\check{\mathscr{F}} f\big)(x) = \big(\check{\mathscr{F}} f(\theta)\big)(x)$.

b) Tali definizioni sono coerenti:

- $\circ$ con le definizioni omonime date per funzioni L^1 (vedi Definizione 8.2.1),
- $\circ$ con le usuali definizioni per distribuzioni temperate (vedi Schwartz, Ch. VII, §6, formule (VII,6;6),(VII,6;7), pg.250).

c) Per $\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} \bullet \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} f \bullet \hat{\varphi} \ , \quad \int_{\mathbb{R}^n} \check{f} \bullet \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} f \bullet \check{\varphi} \ .$$

(Citeremo tali relazione come "**Teorema di reciprocità in $\mathscr{S}'$**")

d) Tra le distribuzioni $\hat{f}$ e $\check{f}$ sussitono le relazioni:

$$\check{f}(x) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \hat{f}(-x) \ , \quad \hat{f}(\theta) = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n \check{f}(-\theta) \ ,$$

Cenno. a),c). Per le ipotesi su $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$ si ha:

- $\circ$ $\forall \hat{f}_k, \check{f}_k \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{\mathrm{loc/cl}}(\mathbb{R}^n)$ (vedi Teorema 8.2.2),
- $\circ$ per $\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, tenuto conto che $\hat{\varphi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, per il Teorema 8.2.3 si ha:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_k \varphi = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k \hat{\varphi} = \int_{\mathbb{R}} f \bullet \hat{\varphi} \ ,$$

e analogamente si prova che:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \check{f}_k \varphi = \int_{\mathbb{R}} f \bullet \check{\varphi} \ .$$

b). Sia $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Si ponga

$$\hat{f}_{L^1} \triangleq \textit{ trasformata di Fourier di } f \textit{ nel senso di } L^1 \ ,$$

$$\hat{f}_{\mathscr{S}'} \triangleq \textit{ trasformata di Fourier di } f \textit{ nel senso di } \mathscr{S}' \ .$$

Per $\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, per il Teorema di reciprocità in L^1, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_{L^1} \bullet \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_{L^1} \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} f \hat{\varphi} \ ;$$

tenuto conto dell'item c) sopra dimostrato si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_{\mathscr{S}'} \bullet \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} f \bullet \hat{\varphi} = \int_{\mathbb{R}^n} f\hat{\varphi} \ ;$$

ne segue $\hat{f}_{L^1} = \hat{f}_{\mathscr{S}'}$. Analogamente si procede per l'Antitrasformata.

Sia $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Le Formule citate, che definiscono le usuali Trasformata e Antitrasformata di Fourier di f, coincidono con le formule del'item c).

d). Tenuto conto della Definizione 8.2.1 si ha:

$$\begin{aligned}\check{f}(x) &= [(\check{f}_1(x), \check{f}_2(x), \check{f}_3(x), \dots)] = \\ &= \left[\left(\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \hat{f}_1(-x), \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \hat{f}_2(-x), \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \hat{f}_3(-x), \dots\right)\right] = \\ &= \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \left[\left(\hat{f}_1(-x), \hat{f}_2(-x), \hat{f}_3(-x), \dots\right)\right] = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \hat{f}(-x) \ .\end{aligned}$$

Stesse considerazioni per $\hat{f}(\theta)$. ■

La precedente Definizione 8.4.1 introduce le applicazioni $\mathscr{F}$, $\check{\mathscr{F}}$. Il Teorema seguente prova che tali applicazioni sono isomorfismi continui, uno l'inverso dell'altro.

8.4.2 Teorema. Si considerino le applicazioni:

$$\mathscr{F} : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)_x \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)_\theta \ , \quad \check{\mathscr{F}} : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)_\theta \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)_x \ .$$

Sussistono gli asserti:

a) $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}$ sono lineari e continue;

b) $\check{\mathscr{F}}\mathscr{F} = \iota : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)_x \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)_x$, $\quad \mathscr{F}\check{\mathscr{F}} = \iota : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)_\theta \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)_\theta$.

Cenno. a). La linearità è banale.

Sia $f = \mathscr{S}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k$; per ogni $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, tenuto conto che $\hat{\varphi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, si ha:

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_k \bullet \varphi = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f_k \bullet \hat{\varphi} = \int_{\mathbb{R}^n} f \bullet \hat{\varphi} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} \bullet \varphi \ ;$$

quindi $\hat{f} = \mathscr{S}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} \hat{f}_k$.

Considerazioni analoghe provano la continuità di $\check{\mathscr{F}}$.

b). Sia $f(x) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ e sia $(f_1, f_2, f_3, \dots)$ un rappresentante temperato di $f(x)$ con ogni $f_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ (certamente esistente per il Teorema 5.5.3); tenuto conto del Teorema 8.3.5 si ha:

$$\begin{aligned}\check{\mathscr{F}}\mathscr{F}(f) &= \check{\mathscr{F}}[(\mathscr{F}f_1, \mathscr{F}f_2, \mathscr{F}f_3, \dots)] = \\ &= [(\check{\mathscr{F}}\mathscr{F}f_1, \check{\mathscr{F}}\mathscr{F}f_2, \check{\mathscr{F}}\mathscr{F}f_3, \dots)] = [(f_1, f_2, f_3, \ldots)] = f \ .\end{aligned}$$

Analogamente si prova che $\mathscr{F}\check{\mathscr{F}}(f) = f$. ■

Le seguenti Notazioni semplificano la formulazione di alcuni risultati.

8.4.3 Notazione. Siano $f(x) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)_x,\ g(\theta) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)_\theta$.

- La notazione:
$$f(x) \xrightarrow{\mathscr{F}} g(\theta)$$
verrà usata per indicare che $g(\theta)$ è la Trasformata di Fourier di $f(x)$,
- la notazione:
$$g(\theta) \xrightarrow{\check{\mathscr{F}}} f(x)$$
verrà usata per indicare che $f(x)$ è la Antitrasformata di Fourier di $g(\theta)$.

Per il Teorema 8.4.2 si ha: $f(x) \xrightarrow{\mathscr{F}} g(\theta) \iff g(\theta) \xrightarrow{\check{\mathscr{F}}} f(x)$.

Il seguente Teorema, corollario del precedente Teorema 8.4.2, consente di calcolare in modo banale:

- la Trasformata di Fourier di ogni distribuzione che sia stata ottenuta effettuando una Trasformata di Fourier,

- la Antitrasformata di Fourier di ogni distribuzione che sia stata ottenuta effettuando una Antitrasformata di Fourier.

8.4.4 Teorema. Siano $f, g \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Sussitono gli asserti:

a) $f(x) \xrightarrow{\mathscr{F}} g(\theta) \ \Rightarrow \ g(x) \xrightarrow{\mathscr{F}} \left(\dfrac{2\pi}{\alpha}\right)^n f(-\theta)$;

b) $g(\theta) \xrightarrow{\check{\mathscr{F}}} f(x) \ \Rightarrow \ f(\theta) \xrightarrow{\check{\mathscr{F}}} \left(\dfrac{\alpha}{2\pi}\right)^n g(-x)$.

Cenno. a). Per il Teorema 8.4.2 si ha: $\check{g} = f$. Tenuto conto di d) della Definizione 8.4.1 si ha:

$$\hat{g}(\theta) = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n \check{g}(-\theta) = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n f(-\theta) \ .$$

b). Per ipotesi si ha: $\hat{f} = g$. Tenuto conto di d) della Definizione 8.4.1 si ha:

$$\check{f}(x) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \hat{f}(-x) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n g(-x) \ .$$

■

Il seguente Teorema fornisce la prima e più significativa applicazione dei risultati ottenuti: usando il Teorema di reciprocità in $\mathscr{S}'$ determina la Trasformata di Fourier di δ, usando il Teorema 8.4.4 ne deduce la Trasformata della distribuzione costante 1, e infine per il Teorema 8.4.2 ottiene le Antitrasformate di δ e di 1 .

8.4.5 Teorema. Sussistono gli asserti:

FT-a)	$\delta(x)$	$\xrightarrow{\mathscr{F}}$	1	ossia: $\hat{\delta}(\theta) = 1$,
FT-b)	1	$\xrightarrow{\mathscr{F}}$	$\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n \delta(\theta)$	ossia: $\hat{1}(\theta) = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n \delta(\theta)$;
ATF-a)	$\delta(\theta)$	$\xrightarrow{\check{\mathscr{F}}}$	$\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n$	ossia: $\check{\delta}(x) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n$,
AFT-b)	1	$\xrightarrow{\check{\mathscr{F}}}$	$\delta(x)$	ossia: $\check{1}(x) = \delta(x)$.

Cenno. FT-a,b). Per ogni $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\delta} \bullet \varphi &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta \bullet \hat{\varphi} = \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-i\alpha 0 \cdot x} \mathrm{d}x = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} 1 \bullet \varphi \ , \end{aligned}$$

e quindi: $\hat{\delta}(\theta) = 1$.

Per il Teorema 8.4.4 si ha: $\hat{1}(\theta) = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n \delta(-\theta) = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n \delta(\theta)$.

AFT-a,b). Per il Teorema 8.4.2 seguono banalmente da FT-a,b). ■

Il seguente Teorema fornisce le più comuni regole di Trasformazione e di Antitrasformazione usate nelle applicazioni.

8.4.6 Teorema. Sia $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Siano: $q \in \mathbb{N}^n$, x_0, $\theta_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $(\lambda \neq 0)$. Sussistono gli asserti:

FT-a) $(\mathscr{F}\partial^q f(x))(\theta) = (i\alpha)^{|q|}\theta^q \hat{f}(\theta)$,

FT-b) $(\mathscr{F}x^q f(x))(\theta) = \dfrac{1}{(-i\alpha)^{|q|}}\partial^q \hat{f}(\theta)$,

FT-c) $(\mathscr{F}f(x-x_0))(\theta) = e^{-i\alpha\theta\cdot x_0}\hat{f}(\theta)$,

FT-d) $\big(\mathscr{F}e^{i\alpha\theta_0\cdot x}f(x)\big)(\theta) = \hat{f}(\theta-\theta_0)$,

FT-e) $(\mathscr{F}f(\lambda x))(\theta) = \dfrac{1}{|\lambda|^n}\hat{f}((1/\lambda)\theta)$;

AFT-a) $\big(\check{\mathscr{F}}\partial^q f(\theta)\big)(x) = (-i\alpha)^{|q|}x^q \check{f}(x)$,

AFT-b) $\big(\check{\mathscr{F}}\theta^q f(\theta)\big)(x) = \dfrac{1}{(i\alpha)^{|q|}}\partial^q \check{f}(x)$,

AFT-c) $\big(\check{\mathscr{F}}f(\theta-\theta_0)\big)(x) = e^{i\alpha\theta_0\cdot x}\check{f}(x)$,

AFT-d) $\big(\check{\mathscr{F}}e^{i\alpha\theta\cdot x_0}f(\theta)\big)(x) = \check{f}(x+x_0)$,

AFT-e) $\big(\check{\mathscr{F}}f(\lambda\theta)\big)(x) = \dfrac{1}{|\lambda|^n}\check{f}((1/\lambda)x)$.

Cenno. Si supponga in primo luogo che $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$; in tal caso:

- ◇ la dimostrazione delle formule FT-a),FT-b),AFT-a),AFT-b) è fornita dal Teorema 8.3.2,
- ◇ la dimostrazione delle rimanenti formule è banale.

Nel caso generale di $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ si procede nel modo seguente:

- ◇ si considera un rappresentate temperato $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$ di f con $\forall f_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,
- ◇ per ciascuna formula se ne deducono il rappresentante del primo e del secondo membro come indicato dalla Definizione 8.4.1, e se ne constata la coincidenza sulla base della formula analoga valida in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. ■

Il seguente Teorema fornisce la prima e più significativa applicazione del Teorema 8.4.6: sulla base del Teorema 8.4.5 calcola banalmente Trasformate ed Antitrasformate delle Delta e delle Funzioni circolari.

8.4.7 Teorema. Siano: $x_0,\ \theta_0 \in \mathbb{R}^n$. Sussistono gli asserti:

$$\begin{array}{llcll}
\text{FT-a)} & \delta(x-x_0) & \xrightarrow{\mathscr{F}} & e^{-i\alpha\theta\cdot x_0} & , \\
\text{FT-b)} & e^{i\alpha\theta_0\cdot x} & \xrightarrow{\mathscr{F}} & \left(\dfrac{2\pi}{\alpha}\right)^n \delta(\theta-\theta_0) & ; \\
\text{ATF-a)} & \delta(\theta-\theta_0) & \xrightarrow{\check{\mathscr{F}}} & \left(\dfrac{\alpha}{2\pi}\right)^n e^{i\alpha\theta_0\cdot x} & , \\
\text{AFT-b)} & e^{i\alpha\theta\cdot x_0} & \xrightarrow{\check{\mathscr{F}}} & \delta(x+x_0) & .
\end{array}$$

Nota: Le formule FT-b) ed AFT-a) sono la *chiave* per comprendere il *significato* della Trasformata di Fourier e il *ruolo* che svolge nell'*Analisi in frequenza* e nella *Sintesi in frequenza* dei *segnali.*

8.5 Caratterizzazione e ruolo di $\mathscr{F}$ ed $\check{\mathscr{F}}$

Nello spazio $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)_x$ si consideri il sottospazio generato dalle Funzioni circolari complesse:

$$\Phi(\mathbb{R}^n)_x = \left\langle e^{i\alpha\theta_0\cdot x} : \theta_0 \in \mathbb{R}^n \right\rangle \ .$$

Nello spazio $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)_\theta$ si consideri il sottospazio generato dalle Delta:

$$\Delta(\mathbb{R}^n)_\theta = \left\langle \delta(\theta-\theta_0) : \theta_0 \in \mathbb{R}^n \right\rangle \ .$$

Il seguente Teorema prova che tali sottospazi sono densi in $\mathscr{S}'$, e che le famiglie di generatori che li definiscono sono linearmente indipendenti.

8.5.1 Teorema. Sussitono gli asserti:

a-1) $\Phi(\mathbb{R}^n)_x$ è $\mathscr{S}'$-denso in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)_x$,

a-2) la famiglia: $e^{i\alpha\theta_0\cdot x} : \theta_0 \in \mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente ;

b-1) $\Delta(\mathbb{R}^n)_\theta$ è $\mathscr{S}'$-denso in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)_\theta$,

b-2) la famiglia: $\delta(\theta-\theta_0) : \theta_0 \in \mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente .

Cenno. b-1),b-2). Gli asserti sono provati rispettivamente dal Teorema 7.3.7 e dal Teorema 2.16.2.

a-1),a-2). Tenuto conto che: $\check{\mathscr{F}} : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)_\theta \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)_x$ è un isomorfismo continuo di spazi vettoriali, e che:

$$\forall\theta_0 \in \mathbb{R}^n \ : \ \delta(\theta-\theta_0) \xrightarrow{\check{\mathscr{F}}} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n e^{i\alpha\theta_0\cdot x} \ ,$$

gli asserti seguono da b-1),b-2). ∎

Il seguente Teorema fornisce *la caratterizzazione* di $\mathscr{F}$, $\check{\mathscr{F}}$. Tenuto conto dello sviluppo storico della Teoria, tale caratterizzazione viene presentata come Teorema: si fa presente che tale caratterizzazione può essere usata come *definizione ad alto livello* di $\mathscr{F}$, $\check{\mathscr{F}}$, e consente uno sviluppo autonomo della Teoria.

8.5.2 Teorema. Sussistono gli asserti:

a) $\mathscr{F} : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)_x \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)_\theta$ è l'unica applicazione lineare e continua tale che:
$$\forall \theta_0 \in \mathbb{R}^n \ : \ e^{i\alpha\theta_0\cdot x} \xrightarrow{\mathscr{F}} \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n \delta(\theta-\theta_0) \ .$$

b) $\check{\mathscr{F}} : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)_\theta \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)_x$ è l'unica applicazione lineare e continua tale che:
$$\forall \theta_0 \in \mathbb{R}^n \ : \ \delta(\theta-\theta_0) \xrightarrow{\check{\mathscr{F}}} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n e^{i\alpha\theta_0\cdot x} \ .$$

Cenno. Per i Teoremi 8.4.2 e 8.4.7, $\mathscr{F}$, $\check{\mathscr{F}}$ verificano tali proprietà. Per il Teorema 8.5.1 sono le sole. ■

Le Osservazioni seguenti precisano il significato di *analisi e sintesi in frequenza* di un segnale e descrivono *il ruolo* di $\mathscr{F}$, $\check{\mathscr{F}}$ in tali procedure.

8.5.3 Osservazioni. Sia $f(x) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)_x$.

i) Per il Teorema 8.5.1, $\Phi(\mathbb{R}^n)_x$ è $\mathscr{S}'$-denso in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)_x$: *esite* quindi una rappresenrazione di $f(x)$ nella forma:
$$f(x) = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\nu_k} c_{kj} e^{i\alpha\theta_{kj}\cdot x} \ ;$$

- ◇ *analizzare in frequenza* $f(x)$ significa: *individuare* una tale rappresentazione di $f(x)$;
- ◇ *sintetizzare in frequenza* $f(x)$ significa: *usare una tale rappresentazione per ottenere approssimazioni sempre migliori* di $f(x)$ con combinazioni lineari di funzioni circolari complesse.

ii) Tenuto conto del Teorema 8.5.2 sono equivalenti gli asserti:

- ◇ $f(x) = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\nu_k} c_{kj} e^{i\alpha\theta_{kj}\cdot x}$,

$$\diamond \quad \hat{f}(\theta) = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\nu_k} c_{kj} \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n \delta(\theta - \theta_{kj}) \ ;$$

pertanto l'analisi e la sintesi in frequenza di $f(x)$ sono equivalenti all'analisi e alla sintesi di $\hat{f}(\theta)$ tramite Delta di Dirac.

iii) Non sono conosciute procedure che consentano l'analisi e la sintesi in frequenza di $f(x)$ operando direttamente in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)_x$, mentre la Sezione 7.3 fornisce procedure per l'analisi e la sintesi di $\hat{f}(\theta)$ tramite Delta di Dirac.

iv) L'analisi e la sintesi in frequenza di $f(x)$ è quindi ottenibile tramite la seguente **procedura indiretta**:
- ◇ si calcola $\hat{f}(\theta) = \mathscr{F}(f(x))$ (operazione non banale ma per la quale sono noti abbondanti risultati e metodi);
- ◇ la Sezione 7.3 fornisce procedure per determinare rappresentazioni di $\hat{f}(\theta)$ nella forma:

$$\hat{f}(\theta) = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\nu_k} a_{kj}\delta(\theta - \theta_{kj}) \ ,$$

- ◇ applicando l'isomorfismo continuo $\check{\mathscr{F}}$ ad ambo i membri di tale uguaglianza, tenuto conto di b) del Teorema 8.5.2 e della relazione $\check{\mathscr{F}} = \mathscr{F}^{-1}$, i coefficienti $a_{kj} \in \mathbb{C}$ e le pulsazioni $\theta_{kj} \in \mathbb{R}^n$ consentono la seguente rappresentazione di $f(x)$:

$$f(x) = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\nu_k} a_{kj} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n e^{i\alpha\theta_{kj}\cdot x} \ .$$

I Teoremi seguenti esplicitano la procedura iv) di 8.5.3 fornendo scelte delle pulsazioni θ_{kj}, e fornendo espressioni dei coefficienti a_{kj} in termini di $\hat{f}(\theta)$.

Nota: il ruolo svolto da $\hat{f}(\theta)$ in tali espressioni giustifica l'uso di attribuire a $\hat{f}(\theta)$ il nome di *distribuzione di densità delle pulsazioni θ nella decomposizione armonica di $f(x)$*.

Il primo Teorema considera distribuzioni temperate la cui FT sia o una funzione $L^1_{\text{loc/cl}}$ o una funzione L^1.

8.5.4 Teorema. Sia $f(x) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)_x$ tale che $\hat{f}(\theta)$ verifichi una delle due seguenti condizioni:

1) $\hat{f}(\theta) \in L^1_{\mathrm{loc/cl}}(\mathbb{R}^n)_\theta$,

2) $\hat{f}(\theta) \in L^1(\mathbb{R}^n)_\theta$.

Scelti $\Theta_{kj},\ \theta_{kj}$ come nella Definizione 7.3.1, si ha:

$$f(x) = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\nu_k} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \left(\int_{\Theta_{kj}} \hat{f}\right) e^{i\alpha\theta_{kj}\cdot x} \ .$$

Cenno. Si applichi il Teorema 7.3.2 a $\hat{f}(\theta)$; quindi si applichi ii) di 8.5.3 all'espressione di $\hat{f}(\theta)$ fornita da tale teorema. ■

Per distribuzioni temperate la cui FT sia una funzione $L^1_{\mathrm{loc/cl}}$ verificante condizioni opportune di continuità (in particolare sia una funzione continua a crescita lenta s.u.) il seguente Teorema fornisce una versione più naturale del Teorema 8.5.4

8.5.5 Teorema. Sia $f(x) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)_x$ tale che $\hat{f}(\theta) \in L^1_{\mathrm{loc/cl}}(\mathbb{R}^n)_\theta$ e verifichi la seguente condizione:

- quasi ogni $\theta_0 \in \mathbb{R}^n$ è un punto di 0-regolarità di $\hat{f}$ (ossia: esiste un intorno $I(\theta_0, r)$ tale che $\hat{f}(\theta)$ è continua su $I(\theta_0, r)$).
  Si osservi che per ogni tale θ_0 è definito $\hat{f}(\theta_0) \in \mathbb{C}$.

Scelti $\Theta_{kj},\ \theta_{kj}$ come nella Definizione 7.3.1, con l'ulteriore condizione che i θ_{kj} siano scelti tra i punti di 0-regolarita di f (scelta certamente fattibile, essendo $\forall$mis $\Theta_{kj} > 0$), si ha:

$$f(x) = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\nu_k} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \hat{f}(\theta_{kj}) e^{i\alpha\theta_{kj}\cdot x} \cdot \mathrm{mis}\ \Theta_{kj} \ .$$

Cenno. Si applichi il Teorema 7.3.3 a $\hat{f}(\theta)$; quindi si applichi ii) di 8.5.3 all'espressione di $\hat{f}(\theta)$ fornita da tale teorema.

Per distribuzioni temperate la cui FT sia una qualsiasi distribuzione temperata, descrizioni sono fornite dai tre seguenti Teoremi:

- il primo, corollario del Teorema 8.5.5, utilizza la nozione e il ruolo delle successioni regolarizzanti e fornisce descrizioni *implementabili* sotto forma di *doppio limite* di combinazioni lineari di Funzioni circolari (per le informazioni fornite da tali descizioni, vedi la Nota 7.3.5);

- il secondo fornisce descrizioni *ben difficilmente implementabili* (tenuto conto della *grandezza* dei coefficienti che usa) sotto forma di limite di combinazioni lineari di Funzioni circolari; l'interesse di questo risultato (di natura puramente teorica) sta nella sua generalità;
- il terzo risultato, sulla base delle stesse considerazioni del secondo, fornisce descrizioni implementabili sotto forma non di combinazioni lineari di Funzioni circolari, ma di combinazioni lineari di Funzioni circolari tutte *modulate in ampiezza* da uno stesso monomio in x (dipendente dalla FT della distribuzione in esame).

8.5.6 Teorema. Sia $f(x) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)_x$.

- Scelta una successione regolarizzante $\varphi_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)_\theta$ (vedi Definizione 7.1.1),
- scelti $\Theta_{kj},\ \theta_{kj}$ come nella Definizione 7.3.1,

si ha:

$$f(x) = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{h\to\infty}\left(\mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{\nu_k}\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n (\hat{f} * \varphi_h)(\theta_{kj})e^{i\alpha\theta_{kj}\cdot x} \cdot \text{mis}\ \Theta_{kj}\right).$$

(Si ricordi che per c) della Definizione 7.1.1 si ha che $\forall f * \varphi_h \in \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n)$)

Cenno. Si applichi il Teorema 7.3.6 a $\hat{f}(\theta)$; quindi si applichi ii) di 8.5.3 all'espressione di $\hat{f}(\theta)$ fornita da tale teorema. ■

8.5.7 Teorema. Sia $f(x) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)_x$.

- Posto: $\hat{f}(\theta) = \partial^q g(\theta)$, con $q \in \mathbb{N}^n$ e $g(\theta) \in C^0(\mathbb{R}^n)_\theta$ a crescita lenta s.u. (vedi Teorema 5.7.3),
- scelti: $\Theta_{kj},\ \theta_{kj}$ come nella Definizione 7.3.1,

si ha:

$$f(x) = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{\nu_k}\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n g(\theta_{kj})\cdot$$
$$\cdot\left(\sum_{m\leqslant q}\binom{q}{m}(-1)^{|q-m|}k^{|q|}e^{i\alpha(\theta_{kj}-(1/k)m)\cdot x}\right)\cdot \text{mis}\ \Theta_{kj}\ .$$

Cenno. Si applichi il Teorema 7.3.7 a $\hat{f}(\theta)$; quindi si applichi ii) di 8.5.3 all'espressione di $\hat{f}(\theta)$ fornita da tale teorema. ■

8.5.8 Teorema. Sia $f(x) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)_x$.

- Posto: $\hat{f}(\theta) = \partial^q g(\theta)$, con $q \in \mathbb{N}^n$ e $g(\theta) \in C^0(\mathbb{R}^n)_\theta$ a crescita lenta s.u. (vedi Teorema 5.7.3),
- scelti: Θ_{kj}, θ_{kj} come nella Definizione 7.3.1,

si ha:

$$f(x) = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\nu_k} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n g(\theta_{kj}) \left((-i\alpha)^{|q|} x^q e^{i\alpha\theta_{kj}\cdot x}\right) \cdot \text{mis}\ \Theta_{kj}\ .$$

Cenno. Per AFT-a) del Teorema 8.4.6 si ha:

$$f(x) = \big(\check{\mathscr{F}} \partial^q g(\theta)\big)(x) = (-i\alpha)^{|q|} x^q \check{g}(x)\ ;$$

per il Teorema 8.5.5 si ha:

$$\check{g}(x) = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\nu_k} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n g(\theta_{kj}) e^{i\alpha\theta_{kj}\cdot x} \cdot \text{mis}\ \Theta_{kj}\ .$$

Tenuto conto che $x^q \in \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n)$ e che la moltiplicazione per elementi di $\mathscr{O}_{\mathrm{M}}$ è continua, si ottiene l'asserto. ■

8.6 Esempi e note

Il seguente Esempio fornisce la Antitrasformata di una funzione L^1, ottenuta applicando la definizione.

8.6.1 Esempio. Sia $B = (B_1, \ldots, B_n)$ una n-upla di reali positivi e sia

$$\chi_B(\theta) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)_\theta$$

la funzione caratterista dell'insieme:

$$R_B = [-B_1, B_1] \times \cdots \times [-B_n, B_n] \subset \mathbb{R}^n_\theta\ .$$

Si ha:

- $\chi_B(\theta) \in L^1(\mathbb{R}^n)_\theta$,
- $\chi_B(\theta) \xrightarrow{\check{\mathscr{F}}} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \chi_B(\theta) e^{i\alpha\theta\cdot x} \mathrm{d}\theta = \left(\prod_{j=1}^n \frac{\alpha B_j}{\pi}\right) \prod_{j=1}^n \frac{\sin \alpha B_j x_j}{\alpha B_j x_j}\ .$

Cenno. Sviluppare l'integrale usando il Teorema di Fubini. ■

Il seguente Esempio fornisce la Trasformata di una funzione non L^1, ottenuta sulla base dell'informazione: $\mathscr{F} = (\check{\mathscr{F}})^{-1}$.

8.6.2 Esempio. Sia $B = (B_1, \ldots, B_n)$ una n-upla di reali positivi e sia

$$S_B(x) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\sin \alpha B_j x_j}{\alpha B_j x_j} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)_x$$

Si ha:

- $S_B(x) \notin L^1(\mathbb{R}^n)_x$,
- $S_B(x) \xrightarrow{\mathscr{F}} \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{\pi}{\alpha B_j} \right) \chi_B(\theta)$.

Cenno. Segue dall'Esempio 8.6.1, tenuto conto che: $\mathscr{F} = (\check{\mathscr{F}})^{-1}$. ■

Il Teorema seguente fornisce informazioni sulle distribuzioni aventi FT in L^1.

8.6.3 Teorema. Sia $f(x) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)_x$ una distribuzione tale che:

$$\hat{f}(\theta) \in L^1(\mathbb{R}^n)_\theta .$$

Sussitono gli asserti:

a) $f(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)_x \cap C^0(\mathbb{R}^n)_x$ ed inoltre: $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = 0$,

b) per $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ si ha (tenere conto che f è continua e quindi è definito $f(x_0)$):

$$f(x_0) = \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\theta) e^{i\alpha\theta \cdot x_0} \mathrm{d}\theta .$$

Cenno. Per il Teorema 8.4.2, in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)_x$ si ha:

$$f(x) = \mathscr{F}^{-1}(\hat{f}(\theta)) = \check{\mathscr{F}}(\hat{f}(\theta)) ;$$

per b) della Definizione 8.4.1 si ha:

$$\check{\mathscr{F}}(\hat{f}(\theta)) = \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\theta) e^{i\alpha\theta \cdot x} \mathrm{d}\theta .$$

Gli asserti sono quindi conseguenza del Teorema 8.2.2 . ■

La seguente Nota fornisce interpretazioni e relative osservazioni cautelative in merito all'Asserto b) del Teorema 8.6.3.

8.6.4 Nota. Sia $f(x) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)_x$ una distribuzione tale che:

$$\hat{f}(\theta) \in L^1(\mathbb{R}^n)_\theta \ .$$

Facendo riferimento ad $\hat{f}$ come *funzione definita q.o.*, ossia identificando $\hat{f}$ con un *suo rappresentante*, possiamo considerare:

I) la famiglia *definita q.o.* di Funzioni Circolari della variabile x:

$$\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \hat{f}(\theta) e^{i\alpha\theta\cdot x} : \mathbb{R}^n_x \to \mathbb{C} \ , \qquad \theta \in \mathbb{R}^n \ ,$$

II) per $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, la famiglia *definita q.o.*:

$$\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \hat{f}(\theta) e^{i\alpha\theta\cdot x_0} \in \mathbb{C} \ , \qquad \theta \in \mathbb{R}^n \ ,$$

dei valori assunti in x_0 dalle Funzioni Circolari della famiglia I).

L'Asserto b) del Teorema 8.6.3:

- dimostra che il valore assunto da f in $\forall x_0$ *è l'integrale della famiglia* II), ossia è l'ntegrale dei valori assunti in x_0 dalle Funzioni Circolari della famiglia I),
- consente di *immaginare* la funzione $f(x)$ come *sovrapposizione* delle Funzioni Cicolari della famiglia I) *rese infinitesime*,
- non fornisce *procedure implementabili* per la Sintesi in frequenza del segnale $f(x)$.

Si ricordi che procedure di tale tipo sono invece fornite:

- sotto la sola ipotesi che $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, da 2) del Teorema 8.5.4,
- sotto l'ulteriore ipotesi che $\hat{f}$ sia anche a crescita lenta s.u. e che q.o. $\theta \in \mathbb{R}^n$ sia un punto di 0-regolarità di $\hat{f}$, dal Teorema 8.5.5;

nell'Esempio seguente, tali procedure sono applicate al segnale $S_B(x)$ considerato nell'Esempio 8.6.2, la cui FT è sia una funzione L^1 sia una funzione $L^1_{\mathrm{loc/cl}}$ il cui insieme dei punti non di 0-regolarità ha misura nulla.

8.6.5 Esempio. Sia $B = (B_1, \dots, B_n)$ una n-upla di reali positivi. Si ha:

$$
\begin{aligned}
S_B(x) &= \prod_{j=1}^{n} \frac{\sin \alpha B_j x_j}{\alpha B_j x_j} = \\
&= \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \sum_{\forall j_h=-k}^{k-1} \frac{e^{i\alpha(B_1/2k+j_1B_1/k,\dots,B_n/2k+j_nB_n/k)\cdot x}}{(2k)^n} \ .
\end{aligned}
$$

Cenno. Come provato nell'Esempio 8.6.2 si ha:

$$\hat{S}_B(\theta) = \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{\pi}{\alpha B_j}\right) \chi_B(\theta)$$

ove $\chi_B(\theta)$ è la funzione caratteristica dell'insieme:

$$R_B = [-B_1, B_1] \times \cdots \times [-B_n, B_n] \subset \mathbb{R}^n_\theta \ .$$

Per $\forall k \in \mathbb{N},\ k \neq 0$ e per $\forall j = (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}^n$ si ponga:

- $\Theta_k = [-kB_1, kB_1) \times \cdots \times [-kB_n, kB_n)$,
- $\Theta^*_k = [0, B_1/k) \times \cdots \times [0, B_n/k)$,
  $\theta^*_k = (B_1/2k, \dots, B_n/2k) \in \Theta^*_k$,
- $\Theta_{kj} = \Theta^*_k + (j_1B_1/k, \dots, j_nB_n/k)$,
  $\theta_{kj} = \theta^*_k + (j_1B_1/k, \dots, j_nB_n/k) \in \Theta_{kj}$;

si ponga:

$$
\begin{aligned}
J_k &= \left\{ j \in \mathbb{Z}^n : -k^2 \leqslant j_h \leqslant k^2 - 1 \ (\forall h) \right\} ,\\
J_{B,k} &= \left\{ j \in \mathbb{Z}^n : -k \leqslant j_h \leqslant k - 1 \ (\forall h) \right\} ,
\end{aligned}
$$

e si osservi che:

- $\Theta_{kj} \quad (j \in J_k)$ è una partizione di Θ_k ,
- $\forall \theta_{kj}$ è di 0-regolarità per $\hat{S}_B(\theta)$,
- $\theta_{kj} \in R_B$ se e solo se $j \in J_{B,k}$.

Al segnale:

$$S_B(x) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\sin \alpha B_j x_j}{\alpha B_j x_j} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)_x$$

sono allora applicabili sia il Teorema 8.5.4 sia il Teorema 8.5.5 usando

$$\Theta_{kj},\ \theta_{kj} \qquad (k \geqslant 1\ ,\ j \in J_k)\ ;$$

entrambi i Teoremi (con ovvii calcoli e considerazioni) forniscono la seguente informazione per la sintesi in frequenza di $S_B(x)$:

$$S_B(x) = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \sum_{j\in J_k} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \hat{S}_B(\theta_{kj}) e^{i\alpha\theta_{kj}\cdot x} \cdot \text{mis}\ \Theta_{kj}\ .$$

Tenuto conto che:

- $\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{\pi}{\alpha B_j}\right) \text{mis}\ \Theta_{kj} = \frac{1}{(2k)^n}$,
- $\theta_{kj} \in R_B$ se e solo se $j \in J_{B,k}$,

si ha allora:

$$\begin{aligned}
&\prod_{j=1}^{n} \frac{\sin \alpha B_j x_j}{\alpha B_j x_j} = \\
&= \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \sum_{j\in J_k} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{\pi}{\alpha B_j}\right) \chi_B(\theta_{kj}) e^{i\alpha\theta_{kj}\cdot x} \cdot \text{mis}\ \Theta_{kj} = \\
&= \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \sum_{j\in J_{B,k}} e^{i\alpha\theta_{kj}\cdot x} \cdot \frac{1}{(2k)^n} = \\
&= \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \sum_{\forall j_h=-k}^{k-1} \frac{e^{i\alpha(B_1/2k+j_1B_1/k,\ldots,B_n/2k+j_nB_n/k)\cdot x}}{(2k)^n}\ .
\end{aligned}$$

■

I due Esempi seguenti forniscono due procedure per l'analisi in frequenza delle Derivate della Delta e quindi in particolare della Delta. La prima tiene solo conto che le loro FT sono funzioni $L^1_{\text{loc/cl}}$; la seconda tiene conto che tali FT oltre ad essere $L^1_{\text{loc/cl}}$ sono anche funzioni continue.

Semplici scelte dei *ricoprimenti progressivi di* $\mathbb{R}^n$ *in pacchetti esaustivi di punti e dei campioni* (vedi Definizione 7.3.1) rendono numericamente operative tali procedure.

8.6.6 Esempio. Sia $q \in \mathbb{N}^n$. Tenuto conto che:

$$\partial^q \delta(x) \xrightarrow{\mathscr{F}} (i\alpha)^{|q|}\theta^q \in L^1_{\mathrm{loc/cl}}(\mathbb{R}^n) \ ,$$

scelti Θ_{kj}, θ_{kj} come nella Definizione 7.3.1, per il Teorema 8.5.4 si ha:

$$\partial^q \delta(x) = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\nu_k} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \left(\int_{\Theta_{kj}} (i\alpha)^{|q|}\theta^q \mathrm{d}\theta\right) e^{i\alpha\theta_{kj}\cdot x} \ .$$

8.6.7 Esempio. Sia $q \in \mathbb{N}^n$. Tenuto conto che:

$$\partial^q \delta(x) \xrightarrow{\mathscr{F}} (i\alpha)^{|q|}\theta^q \in L^1_{\mathrm{loc/cl}}(\mathbb{R}^n) \cap C^0(\mathbb{R}^n) \ ,$$

scelti Θ_{kj}, θ_{kj} come nella Definizione 7.3.1, per il Teorema 8.5.5 si ha:

$$\partial^q \delta(x) = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\nu_k} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n (i\alpha)^{|q|}(\theta_{kj})^q e^{i\alpha\theta_{kj}\cdot x} \mathrm{mis}\ \Theta_{kj} \ .$$

8.7 FT di elementi di $\mathscr{O}'_{\mathrm{C}}$ e di $\mathscr{O}_{\mathrm{M}}$: Formule FT-convoluzione in $\mathscr{S}'$

Il Lemma ed il Teorema seguenti provano che $\mathscr{F}$ e $\check{\mathscr{F}}$ trasformano gli elementi di $\mathscr{O}'_{\mathrm{C}}$ in elemti di $\mathscr{O}_{\mathrm{M}}$.

8.7.1 Lemma. Sia $f(x) \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$. Sussitono gli asserti:

a) $\hat{f}(\theta)$ è una funzione continua a crescita lenta s.u.,

b) per $\forall q \in \mathbb{N}^n$ si ha: $x^q f(x) \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$.

Cenno. a). Per il Teorema 6.6.3 per esistono:

$$m \in \mathbb{N},\ f^\circ_r \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \ \ (r \in \mathbb{N}^n,\ |r| \leqslant m)$$

tali che, posto

$$f_r(x) = \frac{f^\circ_r(x)}{(1+\|x\|^2)^{(n+1)/2}} \ ,$$

si abbia: $f = \sum_{|r|\leqslant m} \partial^r f_r$. Ne segue: $\hat{f}(\theta) = \sum_{|r|\leqslant m} (-i\alpha)^{|r|}\theta^r \hat{f}_r(\theta)$.

Tenuto conto che $\forall f_r \in L^1(\mathbb{R}^n)$, tutte le $\hat{f}_r$ sono funzioni continue e limitate, si ha allora che $\hat{f}$ è una funzione continua a crescita lenta s.u..

b). Sia $\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Tenuto conto di b) del Teorema 6.8.9, si ha:

$$\begin{aligned}(x^q f(x)) * \varphi(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (x-y)^q f(x-y) \bullet \varphi(y)\mathrm{d}y = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \bullet (x-y)^q \varphi(y)\mathrm{d}y = \\ &= \sum_{0 \leqslant \mu \leqslant q} \binom{q}{\mu} (-1)^{|q-\mu|} x^\mu \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \bullet y^{q-\mu}\varphi(y)\mathrm{d}y = \\ &= \sum_{0 \leqslant \mu \leqslant q} \binom{q}{\mu} (-1)^{|q-\mu|} x^\mu \left(f(x) * (x^{q-\mu}\varphi(x)) \right) .\end{aligned}$$

Tenuto conto di d) del Teorema 6.8.9, essendo:

$$f(x) \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}\mathbb{R}^n, \ \forall x^{q-\mu}\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) ,$$

si ha: $\forall f(x) * (x^{q-\mu}\varphi(x)) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Ne segue:

$$(x^q f(x)) * \varphi(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \quad (\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)) ,$$

pertanto: $x^q f(x) \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$. ■

8.7.2 Teorema. Sia $f \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$. Sussitono gli asserti:

a) $\hat{f} \in \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n)$,
b) $\check{f} \in \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n)$.

Cenno. a). Tenuto conto di b) del precedente Lemma 8.7.1, per $\forall q \in \mathbb{N}^n$ si ha: $x^q f(x) \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$. Tenuto conto di a) dello stesso Lemma, le distribuzioni

$$(\mathscr{F} x^q f(x))(\theta)$$

sono tutte funzioni continue a crescita lenta s.u..

Tenuto allora conto di FT-b) del Teorema 8.4.6, anche le distribuzioni

$$\partial^q \hat{f}(\theta)$$

sono tutte funzioni continue a crescita lenta s.u..

Tenuto conto di Schwartz, Ch.II, §6, Th.VII (pg 61), una ovvia procedura induttiva prova che $\hat{f}(\theta) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e che tutte le Derivate distribuzionali $\partial^q \hat{f}(\theta)$ sono le omologhe derivate usuali. Essendo tali derivate tutte funzioni a crescita lenta s.u., si ha quindi: $\hat{f}(\theta) \in \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n)$.

b). Tenuto conto che: $\check{f}(\theta) = (\alpha/2\pi)^n \hat{f}(-\theta)$, l'asserto segue da a). ■

Il Lemma ed il Teorema seguenti provano che $\mathscr{F}$ e $\check{\mathscr{F}}$ trasformano gli elementi di $\mathscr{O}_{\mathrm{M}}$ in elemti di $\mathscr{O}'_{\mathrm{C}}$.

8.7.3 Lemma. Siano: $f \in \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Sussistono gli asserti:

a) essendo: $\hat{f} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$, è definita la convoluzione $\hat{f} * \varphi$, e si ha: $\hat{f} * \varphi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ (vedi considerazioni introduttive al Teorema 6.8.6);

b) essendo: $f \in \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n)$, $\check{\varphi} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, è definito il prodotto $f\check{\varphi}$, e si ha: $f\check{\varphi} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$;

c) si ha: $\check{\mathscr{F}}(\hat{f} * \varphi) = \left(\dfrac{2\pi}{\alpha}\right)^n f\check{\varphi}$.

Cenno. Essendo $f(x)$ una funzione continua a crescita lenta s.u., per il Teorema 7.3.3 e con le notazioni di tale Teorema, si ha:

$$f(x) = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\nu_k} f(\theta_{kj}) \cdot \operatorname{mis} \Theta_{kj} \cdot \delta(x - \theta_{kj}) \ .$$

Essendo $\mathscr{F}$ lineare e continua si ha:

$$\hat{f}(\theta) = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\nu_k} f(\theta_{kj}) \cdot \operatorname{mis} \Theta_{kj} \cdot e^{-i\alpha\theta_{kj}\cdot\theta} \ .$$

Essendo $\varphi \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$, per il Teorema 6.8.4 si ha:

$$\hat{f}(\theta) * \varphi(\theta) = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\nu_k} f(\theta_{kj}) \cdot \operatorname{mis} \Theta_{kj} \cdot \Big(e^{-i\alpha\theta_{kj}\cdot\theta} * \varphi(\theta)\Big) \ .$$

Tenuto conto che:

$$\begin{aligned} e^{-i\alpha\theta_{kj}\cdot\theta} * \varphi(\theta) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) e^{-i\alpha\theta_{kj}\cdot(\theta-y)} \mathrm{d}y = \\ &= e^{-i\alpha\theta_{kj}\cdot\theta} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) e^{i\alpha\theta_{kj}\cdot y} \mathrm{d}y = e^{-i\alpha\theta_{kj}\cdot\theta} \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n \check{\varphi}(\theta_{kj}) \ , \end{aligned}$$

si ha:

$$\hat{f}(\theta) * \varphi(\theta) = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\nu_k} f(\theta_{kj}) \check{\varphi}(\theta_{kj}) \cdot \operatorname{mis} \Theta_{kj} \cdot \Big(e^{-i\alpha\theta_{kj}\cdot\theta}\Big) \ .$$

Essendo $\check{\mathscr{F}}$ lineare e continua si ha:

$$\check{\mathscr{F}}(\hat{f} * \varphi) = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\nu_k} f(\theta_{kj})\check{\varphi}(\theta_{kj}) \cdot \text{mis }\Theta_{kj} \cdot \delta(x-\theta_{kj}) \ .$$

Essendo $f\check{\varphi}$ una funzione continua a crescita lenta s.u., ancora per il Teorema 7.3.3 e con le notazioni sopra considerate, si ha:

$$f(x)\check{\varphi}(x) = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\nu_k} f(\theta_{kj})\check{\varphi}(\theta_{kj}) \cdot \text{mis }\Theta_{kj} \cdot \delta(x-\theta_{kj}) \ ;$$

da cui l'asserto. ■

8.7.4 Teorema. Sia $f \in \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n)$. Sussitono gli asserti:

a) $\hat{f} \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$,
b) $\check{f} \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$.

Cenno. a). Per $\forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, tenuto conto del Lemma 8.7.3, si ha:

$$\check{\mathscr{F}}(\hat{f} * \varphi) = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n f\check{\varphi} \ .$$

Essendo $f \in \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ (vedi Teorema 8.3.5), si ha: $f\check{\varphi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, e quindi anche $\hat{f} * \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Essendo $\hat{f} * \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ per $\forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, per la Definizione 6.6.1 si ha allora: $\hat{f} \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$.

b). Tenuto conto che: $\check{f}(\theta) = (\alpha/2\pi)^n \hat{f}(-\theta)$, l'asserto segue da a). ■

I precedenti Teoremi 8.7.2 e 8.7.4 provano che:

- $\mathscr{F} : \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R})n \to \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n)$ e $\check{\mathscr{F}} : \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$ sono isomorfismi uno l'inverso dell'altro,

- $\mathscr{F} : \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$ e $\check{\mathscr{F}} : \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n)$ sono isomorfismi uno l'inverso dell'altro.

Il Teorema seguente dà le Formule FT-convoluzione in $\mathscr{S}'$.

8.7.5 Formule FT-convoluzione in $\mathscr{S}'$. Sussistono gli asserti:

a) Siano $f \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$; si ha

$\diamond$ $\hat{f}, \check{f} \in \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n)$ (vedi Teorema 8.7.2),

$\diamond$ $(f * g)\hat{} = \hat{f}\hat{g}$ $\quad (f * g)\check{} = \left(\dfrac{2\pi}{\alpha}\right)^n \check{f}\check{g}$.

b) Siano $f \in \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n), g \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$; si ha

$\diamond$ $\hat{f}, \check{f} \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$ (vedi Teorema 8.7.4),

$\diamond$ $(fg)\hat{} = \left(\dfrac{\alpha}{2\pi}\right)^n \hat{f} * \hat{g}$ $\quad (fg)\check{} = \check{f} * \check{g}$.

Cenno. a-*parziale*). Le seguenti osservazioni dimostrano che

$$(f * g)\check{} = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n \check{f}\check{g} \ :$$

i) sia $F = \check{f} \in \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n)$, e sia $\varphi_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ una successione tale che $g = \mathscr{S}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k$;

ii) essendo $f \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$, per c) del Teorema 6.8.4 e per la continuità di $\check{\mathscr{F}}$ si ha:

$$\begin{aligned}\check{\mathscr{F}}(f * g) &= \check{\mathscr{F}}\left(f * \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \varphi_k\right) = \\ &= \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \check{\mathscr{F}}(f * \varphi_k) = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \check{\mathscr{F}}(\hat{F} * \varphi_k) \ ;\end{aligned}$$

iii) essendo $F \in \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n)$, per il Lemma 8.7.3 e per la continuità del prodotto per elementi di $\mathscr{O}_{\mathrm{M}}$ si ha:

$$\begin{aligned}\check{\mathscr{F}}(f * g) &= \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \check{\mathscr{F}}(\hat{F} * \varphi_k) = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n F\check{\varphi}_k = \\ &= \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n F \cdot \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \check{\varphi}_k = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n \check{f}\check{g} \ .\end{aligned}$$

b-*parziale*). Applicando il risultato precedente alle distribuzioni: $\hat{f} \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$, $\hat{g} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, si ottiene

$$(\hat{f} * \hat{g})\check{} = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n fg \ ,$$

e quindi, applicando $\mathscr{F}$ a entrambi i membri, si ottiene:

$$(fg)\hat{} = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \hat{f} * \hat{g} \ .$$

a-*residuo*). Tenuto conto di d) della Definizione 8.4.1 e del risultato a-*parziale*), si ha:

$$(\mathscr{F}(f*g))(\theta) = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n \big(\check{\mathscr{F}}(f*g)\big)(-\theta) = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n \cdot \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n (\check{f}\check{g})(-\theta) =$$

$$= \left(\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n \check{f}(-\theta)\right) \cdot \left(\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n \check{g}(-\theta)\right) = \hat{f}(\theta)\hat{g}(\theta) \ .$$

b-*residuo*). Applicando il risultato precedente alle distribuzioni: $\check{f} \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$, $\check{g} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, si ottiene

$$(\check{f} * \check{g})\hat{} = fg \ ,$$

e quindi, applicando $\check{\mathscr{F}}$ a entrambi i membri, si ottiene:

$$(fg)\check{} = \check{f} * \check{g} \ .$$

■

8.8 FT di distribuzioni a supporto compatto

Essendo $\mathscr{E}' \subset \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}$, il Teorema 8.7.2 prova che le FT e le AFT delle distribuzioni a supporto compatto sono funzioni di $\mathscr{O}_{\mathrm{M}}$. Il Lemma e il Teorema seguenti forniscono:

- il significato dei valori puntuali, e contestualmente una *descrizione familiare*, di tali trasformate,
- proprietà di convergenza di tali trasformate.

8.8.1 Lemma. Per $\forall f(x) \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ si consideri la funzione della variabile $\theta \in \mathbb{R}^n$ definita da:

$$\widetilde{f}(\theta) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bullet e^{-i\alpha\theta\cdot x} \mathrm{d}x \ .$$

Sussistono gli asserti:

a) per $\forall f(x) \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ si ha: $\widetilde{f}(\theta) \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$,

b) per $\forall \mathscr{E}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ si ha: $\mathscr{E}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} \widetilde{f}_k(\theta) = \widetilde{f}(\theta)$.

Cenno. Essendo $\mathscr{E}'\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k = f$, per il Teorema 4.4.2 esiste un compatto H tale che: $\operatorname{supp} f \subset H$, $\forall \operatorname{supp} f_k \subset H$.

Sia $\eta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ una funzione uguale ad 1 su un aperto $\Omega \supset H$, e sia:

$$\varphi(x,\theta) = \eta(x)e^{-i\alpha\theta\cdot x} \ ;$$

essendo $f = \eta f$, $f_k = \eta f_k$, per $\forall \theta \in \mathbb{R}^n$ si ha:

- $\varphi(x,\theta) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)_x$,
- $\widetilde{f}(\theta) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)f(x) \bullet e^{-i\alpha\theta\cdot x}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bullet \varphi(x,\theta)\mathrm{d}x$,
- $\widetilde{f}_k(\theta) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)f_k(x) \bullet e^{-i\alpha\theta\cdot x}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) \bullet \varphi(x,\theta)\mathrm{d}x$.

Tenuto allora conto di Schwartz, Ch IV, §1, pg 105-106, si ha allora:

i) $\widetilde{f}(\theta)$, $\widetilde{f}_k(\theta) \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$,

ii) per $\forall q \in \mathbb{N}^n$ si ha:

$$\partial^q \widetilde{f}(\theta) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bullet \partial_\theta^q \varphi(x,\theta)\mathrm{d}x \ ,$$

$$\partial^q \widetilde{f}_k(\theta) = \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) \bullet \partial_\theta^q \varphi(x,\theta)\mathrm{d}x \ .$$

Le considerazioni seguenti provano che per $\forall q \in \mathbb{N}^n$ $\partial^q \widetilde{f}(\theta) - \partial^q \widetilde{f}_k(\theta)$ converge a 0 uniformemente su ogni compatto, e quindi che $\widetilde{f}_k$ $\mathscr{E}$-converge a $\widetilde{f}$.

Sia $q \in \mathbb{N}^n$, e sia $K \subset \mathbb{R}^n_\theta$ un qualsiasi compatto. Si consideri la seguente famiglia di elementi di $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)_x$:

$$\Phi_\theta(x) \triangleq \partial_\theta^q \varphi(x,\theta) = (-i\alpha)^{|q|} x^q \eta(x) e^{-i\alpha\theta\cdot x}, \qquad \theta \in K \ .$$

Ovviamente si ha:

- tale famiglia è *limitata in* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)_x$, nel senso di Chwartz, Th IV, Ch 3 §2, pg 69, infatti:
  - ◇ esiste un compatto di $\mathbb{R}^n_x$, e precisamente $\operatorname{supp} \eta$, che include tutti i supporti dei suoi membri,
  - ◇ per ogni $m \in \mathbb{N}^n$ si ha:

$$|\partial_x^m \Phi_\theta(x)| = \alpha^{|q|} \left|\partial_x^m \left(x^q \eta(x) e^{-i\alpha\theta\cdot x}\right)\right| =$$

$$= \alpha^{|q|} \left| \sum_{0\leqslant\mu\leqslant m} \begin{pmatrix} m \\ \mu \end{pmatrix} \left(\partial_x^{m-\mu}\left(x^q\eta(x)\right)\right) \cdot \left(\partial_x^\mu e^{-i\alpha\theta\cdot x}\right) \right| \ ,$$

e quindi tutte le ∂^m dei suoi membri sono maggiorate in modulo da :

$$\alpha^{|q|} \sum_{0 \leqslant \mu \leqslant m} \left(\begin{array}{c} m \\ \mu \end{array} \right) \max_{x \in \text{supp } \eta} \{ \left| \partial_x^{m-\mu} x^q \eta(x) \right| \} \cdot \alpha^{|\mu|} \max_{\theta \in K} \{ |\theta^\mu| \} ,$$

- $\mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} (f - f_k) = 0$;

allora, tenuto conto dell'item ii), per Schwatz Th XI, Ch III §3, pg 73, $\partial^q \widetilde{f}(\theta) - \partial^q \widetilde{f}_k(\theta)$ converge a 0 uniformemente su K. ■

8.8.2 Teorema. Sussistoni gli asserti:

a) Sia $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$; per $\forall \theta, x \in \mathbb{R}^n$ si ha:
  - $\hat{f}(\theta) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bullet e^{-i\alpha\theta\cdot x} \mathrm{d}x$
  - $\check{f}(x) = \left(\dfrac{\alpha}{2\pi}\right)^n \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(\theta) \bullet e^{i\alpha\theta\cdot x} \mathrm{d}\theta$.

b) Sia $\mathscr{E}'\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k = f$; si ha:
  - $\hat{f}(\theta) = \mathscr{E}\text{-}\lim_{k\to\infty} \hat{f}_k(\theta)$,
  - $\check{f}(x) = \mathscr{E}\text{-}\lim_{k\to\infty} \check{f}_k(x)$.

Cenno. Sia $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, e sia $\varphi_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ una successione tale che:

$$f = \mathscr{E}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \varphi_k .$$

Con le notazioni del precedente Lemma 8.8.1, sussistono gli asserti:

- per $\forall k$, essendo $\varphi_k(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, si ha:

$$\hat{\varphi}_k(\theta) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x) e^{-i\alpha\theta\cdot x} \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x) \bullet e^{-i\alpha\theta\cdot x} \mathrm{d}x = \widetilde{\varphi}_k(\theta) ;$$

- per la continuità di $\mathscr{F}$ si ha: $\hat{f}(\theta) = \mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \hat{\varphi}_k(\theta)$, e quindi:

$$\hat{f}(\theta) = \mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \hat{\varphi}_k(\theta) ;$$

- per il Lemma 8.8.1 si ha: $\widetilde{f}(\theta) = \mathscr{E}\text{-}\lim_{k\to\infty} \widetilde{\varphi}_k(\theta)$, e quindi:

$$\widetilde{f}(\theta) = \mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \widetilde{\varphi}_k(\theta) ;$$

essendo $\hat{\varphi}_k(\theta) = \widetilde{\varphi}_k(\theta)$, si ottiene: $\hat{f}(\theta) = \widetilde{f}(\theta)$.

I rimanenti asserti seguono da tale risultato tenendo conto di b) del precedente Lemma 8.8.1 e di d) della Definizione 8.4.1. ■

Per ulteriori proprietà delle trasformate delle distribuzioni a supporto compatto, in particolare per il Teorema di Paley-Wiener, vedi:

- Schwartz, Th XVI, Ch VII, §8, pg 272,
- Treves, Part II (§29), pg 305,
- Hörmander, Th 1.7.7., pg 21.

Capitolo 9

Sistemi lineari shift-invarianti

Per il ruolo della costante "α", vedi la Sezione 8.1.

9.1 Sistemi LSI e CLSI

La seguente Definizione precisa l'uso che faremo del termine "*spazio di segnali*".

9.1.1 Definizione. Sia $\mathscr{U}$ uno spazio vettoriale.

- Diremo che $\mathscr{U}$ è uno *spazio di segnali* se $\mathscr{U}$ è un sottospazio di $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.
- Diremo che $\mathscr{U}$ è uno *spazio di segnali chiuso per traslazioni* o *per shift* se per $\forall f(x) \in \mathscr{U}$ e per $\forall a \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$f(x+a) \in \mathscr{U} \ .$$

- Diremo che $\mathscr{U}$ è uno *spazio di segnali dotato di una nozione di convergenza per successioni* se:
  - è definita una procedure che per ogni successione $f_k \in \mathscr{U}$ e per ogni elemento $f \in \mathscr{U}$ attribuisce la qualifica di *vero o falso* all'asserto:

$$\text{“}\mathscr{U}\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k = f\text{”} \ ,$$

  - tale nozione di $\mathscr{U}$-convergenza verifica l'implicazione:

$$\mathscr{U}\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k = f \Rightarrow \mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k = f \ .$$

La seguente Definizione precisa l'uso che faremo del termine "*sistema*" e degli aggettivi "*lineare, shift-invariante, continuo*".

9.1.2 Definizione. Siano $\mathscr{I}, \mathscr{O}$ due spazi di segnali e sia

$$\mathscr{L} : \mathscr{I} \to \mathscr{O}$$

una applicazione.

- Diremo che:
  - $\mathscr{L}$ è un *sistema*,
  - $\mathscr{I}$ è lo spazio dei *segnali di ingresso* di $\mathscr{L}$,
  - $\mathscr{O}$ è lo spazio dei *segnali di uscita* di $\mathscr{L}$.
- Diremo che $\mathscr{L}$ è un sistema *lineare* (L) se l'applicazione $\mathscr{L}$ è lineare.
- Diremo che $\mathscr{L}$ è un sistema *invariante per traslazioni* o *un sitema shif-invariante* (SI) se:
  - $\mathscr{I}$ ed $\mathscr{O}$ sono spazi di segnali chiusi per traslazioni,
  - per $\forall f(x) \in \mathscr{I}$ e per $\forall a \in \mathbb{R}^n$, posto: $\widetilde{f}(x) = \mathscr{L}(f(x))$, si ha $\mathscr{L}\left(f(x+a)\right) = \widetilde{f}(x+a)$.
- Diremo che $\mathscr{L}$ è un *sistema continuo* (C) se:
  - $\mathscr{I}$ è uno spazio di segnali dotato di una nozione di $\mathscr{I}$-convergenza per successioni,
  - $\mathscr{O}$ è uno spazio di segnali dotato di una nozione di $\mathscr{O}$-convergenza per successioni,
  - per $\forall f(x) = \mathscr{I}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ si ha: $\mathscr{L}(f(x)) = \mathscr{O}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} \mathscr{L}\left(f_k(x)\right)$.
- Diremo che $\mathscr{L}$ è un sistema LSI se è lineare e shift-invariante.
- Diremo che $\mathscr{L}$ è un sistema CLSI se è lineare shift-invariante e continuo.

NOTA: Tutti gli spazi di segnali per i quali è stata introdotta una nozione *canonica* di convergenza per successioni, ad es.

$$\mathscr{D}',\ \mathscr{E}',\ \mathscr{S}',\ \forall L^p\ ,$$

verranno considerati con tale convergenza.

In ciascun sistema lo spazio dei segnali di uscita può essere sostituito da $\mathscr{D}'$. Vecchio e nuovo sistema sono *praticamente identificabili*; la Nota seguente puntualizza ovvie identità e possibili differenze.

9.1.3 Nota. Siano $\mathscr{I}, \mathscr{O}$ spazi di segnali, ossia sottospazi di $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, e sia $\mathscr{L} : \mathscr{I} \to \mathscr{O}$ un sistema. Essendo $\mathscr{O} \subset \mathscr{D}'$ possiamo considerare il sistema

$$\widetilde{\mathscr{L}} : \mathscr{I} \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$$

definito da: $\widetilde{\mathscr{L}}(f(x)) = \mathscr{L}(f(x))$ per $\forall f(x) \in \mathscr{I}$. Si ha:

- $\widetilde{\mathscr{L}}$ è un sistema L (risp. LSI, iniettivo) se e solo se $\mathscr{L}$ è un sistema L (risp. LSI, iniettivo);
- $\widetilde{\mathscr{L}}$ è un sistema surgettivo se e solo se $\mathscr{L}$ è un sistema surgettivo e $\mathscr{O} = \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$;
- $\mathscr{I}$ continuo implica $\widetilde{\mathscr{L}}$ continuo;
- $\widetilde{\mathscr{L}}$ continuo non implica $\mathscr{L}$ continuo.

9.2 Sistemi LSI sullo spazio Δ delle delta: Risposta impulsiva

Sia consideri lo spazio

$$\Delta(\mathbb{R}^n) = \langle \delta(x-a) : a \in \mathbb{R}^n \rangle \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)_x$$

generato dalle delta; si osservi che:

- per il Teorema 2.16.2, la famiglia: $\delta(x-a) \quad (a \in \mathbb{R}^n)$ è una base di $\Delta(\mathbb{R}^n)$,
- $\Delta(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio chiuso per traslazioni.

Per $\forall w \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ indichiamo con

$$\mathscr{L}_w : \Delta(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$$

l'unica applicazione lineare tale che:

$$\mathscr{L}_w \left(\delta(x-a)\right) = w(x-a) \ .$$

Il seguente Teorema provano che tali $\mathscr{L}_w$ sono tutti e soli i sitemi LSI da Δ in $\mathscr{D}'$.

9.2.1 Teorema. Sussitono gli asserti:

a) Sia $w \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. L'applicazione lineare:

$$\mathscr{L}_w : \Delta(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$$

è un sistema LSI.

b) Sia $\mathscr{L} : \Delta(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ un sistema LSI; posto $w \triangleq \mathscr{L}(\delta) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, si ha:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_w \ .$$

Cenno. a). Sia $\sigma(x) = \sum_{j=i}^{\nu} c_j \delta(x - a_j) \in \Delta(\mathbb{R}^n)$ e sia:

$$\widetilde{\sigma}(x) = \mathscr{L}_w(\sigma(x)) = \sum_{j=i} c_j w(x - a_j) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \ .$$

Per $\forall a \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$\mathscr{L}_w(\sigma(x+a)) = \mathscr{L}_w\left(\sum_{j=i}^{\nu} c_j \delta((x+a) - a_j)\right) =$$
$$= \sum_{j=i}^{\nu} c_j w((x+a) - a_j) = \widetilde{\sigma}(x+a) \ .$$

b). Essendo $\mathscr{L}$ un sistema SI, per $\forall a \in \mathbb{R}^n$ si ha: $\mathscr{L}(\delta(x-a)) = w(x-a)$. ∎

La seguente Definizione introduce la nozione di *risposta impulsiva* (IR) per ogni sitema LSI avete Δ come sottospazio dei segnali di ingresso.

9.2.2 Definizione. Siano $\mathscr{I}, \mathscr{O}$ sottospazi di $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ chiusi per traslazioni, e sia:

$$\Delta(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{I} \ .$$

Dato comunque un sistem LSI (vedi Definizione 9.1.2)

$$\mathscr{L} : \mathscr{I} \to \mathscr{O} \ ,$$

e posto $\widetilde{\delta}(x) \triangleq \mathscr{L}(\delta(x)) \in \mathscr{O}$, per $\forall a \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$\mathscr{L}(\delta(x-a)) = \widetilde{\delta}(x-a).$$

La distribuzione $\widetilde{\delta}(x) \in \mathscr{O}$ si dice la *risposta impulsiva* (IR) del sistema $\mathscr{L}$.

Per il precedente Teorema due sistemi LSI con la stessa IR hanno ugual comportamento su tutte le delta. Il seguente Teorema prova che due sistemi non solo LSI ma anche continui, definiti su uno degli spazio:

$$\mathscr{D}', \mathscr{E}', \mathscr{S}' \ ,$$

se hanno la stessa IR sono identici.

9.2.3 Teorema. Sia $\mathscr{I}$ uno degli spazi:

$$\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n), \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n), \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \ ,$$

ciascuno considerato con la propria naturale nozione di convergenza per successioni, sia $\mathscr{O} \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ uno spazio di segnali chiuso per traslazioni e dotato di una nozione di $\mathscr{O}$-convergenza per successioni (vedi Definizione 9.1.1), e siano

$$\mathscr{L}, \mathscr{H} : \mathscr{I} \to \mathscr{O}$$

due sistemi LCSI. Si ha:

$$\mathscr{L}(\delta) = \mathscr{H}(\delta) \Longrightarrow \mathscr{L} = \mathscr{H} \ .$$

Cenno. Supponiamo $\mathscr{I} = \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$; poniamo

$$\widetilde{\delta} \triangleq \mathscr{L}(\delta) = \mathscr{H}(\delta) \in \mathscr{O} \ .$$

Sia $f(x) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Sussistono gli asserti:

- per il Teorema 2.16.5 si ha:

$$f(x) = \mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \left(\mathscr{D}'\text{-}\lim_{h\to\infty} \sum_{j=1}^{\nu_{kh}} c_{khj}\delta(x - a_{khj}) \right) \ ;$$

- per la continuità di $\mathscr{L}$ si ha:

$$\mathscr{L}(f(x)) = \mathscr{O}\text{-}\lim_{k\to\infty} \left(\mathscr{O}\text{-}\lim_{h\to\infty} \mathscr{L} \left(\sum_{j=1}^{\nu_{kh}} c_{khj}\delta(x - a_{khj}) \right) \right) \ ;$$

- per la linearità e la shift-invarianza di $\mathscr{L}$ si ha:

$$\mathscr{L}(f(x)) = \mathscr{O}\text{-}\lim_{k\to\infty} \left(\mathscr{O}\text{-}\lim_{h\to\infty} \mathscr{L} \sum_{j=1}^{\nu_{kh}} c_{khj}\widetilde{\delta}(x - a_{khj}) \right) \ ;$$

◦ operando analogamente su $\mathscr{H}$ si ha:

$$\mathscr{H}(f(x)) = \mathscr{O}\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(\mathscr{O}\text{-}\lim_{h\to\infty}\mathscr{L}\sum_{j=1}^{\nu_{kh}} c_{khj}\widetilde{\delta}(x-a_{khj})\right) ;$$

pertanto per $\forall f(x) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ si ha $\mathscr{L}(f(x)) = \mathscr{L}(f(x))$.

Usando rispettivamente i Teoremi 4.4.7, 5.5.4 si ottiene l'asserto per gli spazi $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n), \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. ■

9.3 Sistemi LSI sullo spazio Φ delle funzioni circolari complesse: Risposta in Frequenza

Sia consideri lo spazio

$$\Phi(\mathbb{R}^n) = \left\langle e^{i\alpha\theta\cdot x} : \theta \in \mathbb{R}^n \right\rangle \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)_x$$

generato dalle funzioni circolari complesse; si osservi che:

◦ per il Teorema 8.5.1, la famiglia: $e^{i\alpha\theta\cdot x}$ $(\theta \in \mathbb{R}^n)$ è una base di $\Phi(\mathbb{R}^n)$,

◦ $\Phi(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio chiuso per traslazioni.

Per ogni applicazione

$$\psi : \mathbb{R}^n_\theta \to \mathbb{C}$$

indichiamo con:

$$\mathscr{L}_\psi : \Phi(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$$

l'unica applicazione lineare tale che:

$$\mathscr{L}_\psi(e^{i\alpha\theta\cdot x}) = \psi(\theta)e^{i\alpha\theta\cdot x} .$$

I seguenti due Teorema provano che tali $\mathscr{L}_\psi$ sono tutti e soli i sitemi LSI da Φ in $\mathscr{D}'$.

9.3.1 Teorema. Sia $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ una applicazione qualsiasi. L'applicazione lineare:

$$\mathscr{L}_\psi : \Phi(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$$

è un sistema LSI.

Cenno. Sia $\sigma(x) = \sum_{j=i}^{\nu} c_j e^{i\alpha\theta_j\cdot x} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ e sia:

$$\widetilde{\sigma}(x) = \mathscr{L}_\psi(\sigma(x)) = \sum_{j=i}^{\nu} c_j\psi(\theta_j)e^{i\alpha\theta_j\cdot x} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) .$$

Per $\forall a \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$\mathscr{L}_\psi(\sigma(x+a)) = \mathscr{L}_\psi\left(\sum_{j=i}^{\nu} c_j e^{i\alpha\theta_j\cdot(x+a)}\right) = \mathscr{L}_\psi\left(\sum_{j=i}^{\nu} c_j e^{i\alpha\theta_j\cdot a} e^{i\alpha\theta_j\cdot x}\right) =$$

$$= \sum_{j=i}^{\nu} c_j e^{i\alpha\theta_j\cdot a} \mathscr{L}_\psi(e^{i\alpha\theta_j\cdot x}) = \sum_{j=i}^{\nu} c_j e^{i\alpha\theta_j\cdot a}\psi(\theta_j) e^{i\alpha\theta_j\cdot x} =$$

$$= \sum_{j=i}^{\nu} c_j \psi(\theta_j) e^{i\alpha\theta_j\cdot(x+a)} = \widetilde{\sigma}(x+a) \ .$$

■

9.3.2 Teorema. Sia $\mathscr{L} : \Phi(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ un sistema LSI. Esiste una (ovviamente unica) applicazione

$$\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$$

tale che: $\mathscr{L} = \mathscr{L}_\psi$.

Cenno. Sia $\sigma(x) = e^{i\alpha\theta\cdot x} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$, e sia:

$$\widetilde{\sigma}(x) = \mathscr{L}(\sigma(x)) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \ .$$

Per $\forall a \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$\sigma(x+a) = e^{i\alpha\theta\cdot a}\sigma(x) \ ;$$

tenuto quindi conto della linearità e delle shift-invarianza di $\mathscr{L}$ si ha:

$$\widetilde{\sigma}(x+a) = e^{i\alpha\theta\cdot a}\widetilde{\sigma}(x) \ .$$

Sia $j \in \{1, \ldots, n\}$. Per $\forall h \in \mathbb{R},\ h \neq 0$ si ha:

$$\frac{\widetilde{\sigma}(x+he_j) - \widetilde{\sigma}(x)}{h} = i\alpha\theta_j \frac{e^{i\alpha h\theta_j} - 1}{i\alpha h\theta_j}\widetilde{\sigma}(x) \ .$$

Ovviamente si ha:

$$\mathscr{D}'\text{-}\lim_{h\to 0} i\alpha\theta_j \frac{e^{i\alpha h\theta_j} - 1}{i\alpha h\theta_j}\widetilde{\sigma}(x) = i\alpha\theta_j\widetilde{\sigma}(x) \ ;$$

per a) del Teorema 7.2.2 si ha:

$$\mathscr{D}'\text{-}\lim_{h\to 0} \frac{\widetilde{\sigma}(x+he_j) - \widetilde{\sigma}(x)}{h} = \frac{\partial}{\partial x_j}\widetilde{\sigma}(x) \ ;$$

da cui:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\widetilde{\sigma}(x) = i\alpha\theta_j\widetilde{\sigma}(x) \ .$$

Per $\forall j$ si ha quindi: $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(e^{-i\alpha\theta\cdot x}\widetilde{\sigma}(x)\right) = 0$; per Schwartz Th VII, Ch II, §6, pg 61 si ha allora che esiste $c_\theta \in \mathbb{C}$ tale che: $e^{-i\alpha\theta\cdot x}\widetilde{\sigma}(x) = c_\theta$, ossia tale che: $\widetilde{\sigma}(x) = c_\theta \cdot e^{i\alpha\theta\cdot x}$.

Sia $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ l'applicazione definita da: $\psi(\theta) = c_\theta$ $(\forall\theta \in \mathbb{R}^n)$. Ovviamente si ha: $\mathscr{L} = \mathscr{L}_\psi$. ■

Il seguente Teorema introduce la nozione di *risposta in frequenza* (FR) per ogni sitema LSI avete Φ come sottospazio dei segnali di ingresso.

9.3.3 Teorema. Siano $\mathscr{I}, \mathscr{O}$ sottospazi di $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ chiusi per traslazioni, e sia:

$$\Phi(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{I} \ .$$

Dato comunque un sistem LSI (vedi Definizione 9.1.2)

$$\mathscr{L} : \mathscr{I} \to \mathscr{O} \ ,$$

esiste una ed una sola applicazione:

$$\psi : \mathbb{R}^n_\theta \to \mathbb{C}$$

tale che per per $\forall\theta \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$\mathscr{L}\left(e^{i\alpha\theta\cdot x}\right) = \psi(\theta)e^{i\alpha\theta\cdot x} \ .$$

L'applicazione ψ si dice la *risposta in frequanza* (FR) del sistema $\mathscr{L}$.

Cenno. Essendo $\mathscr{O} \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, possiamo considerare il sistema LSI:

$$\widetilde{\mathscr{L}} : \Phi(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$$

definito da:

$$\widetilde{\mathscr{L}}(f(x)) = \mathscr{L}(f(x)) \ , \quad \forall f(x) \in \Phi(\mathbb{R}^n) \ ;$$

l'asserto segue applicando il Teorema 9.3.2 ad $\widetilde{\mathscr{L}}$. ■

Le Note seguenti forniscono prime elementari informazione sulla FR.

Nota 1). Sia $\mathscr{L} : L^\infty(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$, con $p \neq \infty$, un sistema LSI, e sia ψ la sua FR. Si ha: $\psi = 0$.

Cenno. Per $\forall\theta \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$\mathscr{L}\left(e^{i\alpha\theta\cdot x}\right) = \psi(\theta)e^{i\alpha\theta\cdot x} \in L^p(\mathbb{R}^n) \ ;$$

essendo $p \neq \infty$, si ottiene $\psi(\theta) = 0$. ■

Nota 2). Sia $\mathscr{O}$ un sottospazio di $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, e siano $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2 : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{O}$ due sistemi LCSI, e ne siano ψ_1, ψ_2 le rispettive FR. Si ha:

$$\psi_1 = \psi_2 \Rightarrow \mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2 \ .$$

Cenno. Per il Teorema 8.5.1, la famiglia: $e^{i\alpha\theta\cdot x}$ $(\theta \in \mathbb{R}^n)$ è una base di $\Phi(\mathbb{R}^n)$; allora per l'ipotesi si ha:

$$\mathscr{L}_1(f(x)) = \mathscr{L}_2(f(x)) \ , \quad \forall f(x) \in \Phi(\mathbb{R}^n) \ .$$

Siccome lo spazio $\Phi(\mathbb{R}^n)$ è $\mathscr{S}'$-denso in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ (vedi Teorema 8.5.1) e i due sistemi sono continui, tale uguaglianza vale per $\forall f(x) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. ■

9.4 Sistemi CLSI sullo spazio $\mathscr{S}'$

Questa Sezione fornisce il panorama dei sistemi CLSI

$$\mathscr{L} : \mathscr{S}' \to \mathscr{D}' \ ,$$

ossia di *tutte* le procedure di elaborazione lineari shift-invarianti e continue che possono essere effettuate sui segnali di $\mathscr{S}'$. Precisamente:

- ∘ la seguente Definizione:
  - ◇ descrive una famiglia

    $$\mathscr{L}_\gamma : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}' \ , \qquad \gamma \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}$$

    di sistemi CLSI a ingressi e uscite in $\mathscr{S}'$,
  - ◇ considera la famiglia

    $$\widetilde{\mathscr{L}_\gamma} : \mathscr{S}' \to \mathscr{D}' \ , \qquad \gamma \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}$$

    dei precedenti sistemi considerati come sistemi ad uscite in $\mathscr{D}'$;
- ∘ il Teorema successivo prova che:
  - ◇ la famiglia:

    $$\mathscr{L}_\gamma : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}' \ , \qquad \gamma \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}$$

    non solo fornisce esempi, ma fornisce il panorama di tutti i sistemi CLSI

    $$\mathscr{L} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}' \ ,$$

◇ la famiglia:

$$\widetilde{\mathscr{L}_\gamma} : \mathscr{S}' \to \mathscr{D}' \ , \qquad \gamma \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}$$

non solo fornisce esempi, ma fornisce il panorama di tutti i sistemi CLSI

$$\mathscr{L} : \mathscr{S}' \to \mathscr{D}' \ .$$

9.4.1 Definizione. Per $\forall \gamma \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$:

a) indichiamo con:

$$\mathscr{L}_\gamma : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$$

il sistema definito da (vedi Sezione 6.8):

$$\mathscr{L}_\gamma(f) = \gamma * f \qquad \forall f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \ ;$$

per il Teorema 6.8.4 si ha:

◇ $\mathscr{L}_\gamma$ è un sitema CLSI,

◇ $\mathscr{L}_\gamma(\delta) = \gamma$, e quindi la IR di $\mathscr{L}_\gamma$ è γ ;

b) indichiamo con:

$$\widetilde{\mathscr{L}_\gamma} : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \ .$$

il sistema CLSI associato a $\mathscr{L}_\gamma$ secondo la Nota 9.1.3.

9.4.2 Teorema. Sia: $\mathscr{L} : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ un sistema CLSI, e sia

$$\widetilde{\delta} \triangleq \mathscr{L}(\delta) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$$

la IR di $\mathscr{L}$. Sussistono gli asserti:

a) $\widetilde{\delta} \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$;

b) $\mathscr{L} = \widetilde{\mathscr{L}_{\widetilde{\delta}}}$;

c) $\mathscr{L}\left(\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)\right) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$;

d) per ogni $f = \mathscr{S}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k$:

◇ non solo si ha: $\mathscr{L}(f) = \mathscr{D}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} \mathscr{L}(f_k)$,

◇ ma si ha anche: $\mathscr{L}(f) = \mathscr{S}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} \mathscr{L}(f_k)$.

Cenno. a). Per b) della Definizione 6.6.1, è sufficiente provare che per $\forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ la funzione $\widetilde{\delta}*\varphi$ è a decrescenza rapida s.u.. Quindi è sufficiente dimostrare che: per $\forall\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, per $\forall h \in \mathbb{N}$ ed ogni successione $a_k \in \mathbb{R}^n$ tale che $\lim\limits_{k\to\infty} \|a_k\| = \infty$, si ha:

$$\lim_{k\to\infty} \|a_k\|^h (\widetilde{\delta} * \varphi)(a_k) = 0 \ .$$

Gli item seguenti provano tale asserto:

- si ha: $\mathscr{S}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} \|a_k\|^h \delta(x + a_k) = 0$ (*infatti:* per $\forall\sigma(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si ha:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \|a_k\|^h \delta(x + a_k) \bullet \sigma(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \|a_k\|^h \sigma(-a_k) = 0 \ ) \ ;$$

- per la continuità e per la shift-invarianza di $\mathscr{L}$ si ha allora:

$$\mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} \|a_k\|^h \widetilde{\delta}(x + a_k) = 0 \ ;$$

- tenuto conto che $\varphi(-x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ si ottiene quindi:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \|a_k\|^h \widetilde{\delta}(x + a_k) \bullet \varphi(-x)\mathrm{d}x = \\ &= \lim_{k\to\infty} \|a_k\|^h \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\delta}(a_k - y) \bullet \varphi(y)\mathrm{d}y \ ; \end{aligned}$$

- per il Teorema 6.5.5 se ne deduce: $\lim\limits_{k\to\infty} \|a_k\|^h (\widetilde{\delta} * \varphi)(a_k) = 0$.

b). $\mathscr{L}, \widetilde{\mathscr{L}_{\widetilde{\delta}}} : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ sono due sistemi CLSI aventi entrambi $\widetilde{\delta}$ per IR; per il Teorema 9.2.3 si ha allora: $\mathscr{L} = \widetilde{\mathscr{L}_{\widetilde{\delta}}}$.

c),d). Ovvie conseguenze di b) e della Definizione 9.4.1. ∎

Il seguente Teorema, corollario del Teorema 9.4.2, dà informazioni sul comportamento di un sistema CLSI sulle derivate di segnali e sulla convoluzione tra segnali.

9.4.3 Sia $\mathscr{L} : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ un sistema CLSI. Dati comunque segnali: $f(x), g(x) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ e posto:

$$\widetilde{f} = \mathscr{L}(f), \ \widetilde{g} = \mathscr{L}(g) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \ ,$$

si ha:

a) $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$;

b) per $\forall q \in \mathbb{N}^n$ si ha: $\mathscr{L}\,(\partial^q f) = \partial^q \widetilde{f}$;

c) se $f \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$, allora si ha:
   - $\diamond$ $\widetilde{f} \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$,
   - $\diamond$ $\mathscr{L}(f * g) = f * \widetilde{g} = \widetilde{f} * g$.

Cenno. a). Segue da c) del Teorema 9.4.2.

b). Sia $\widetilde{\delta} \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$ la IR di $\mathscr{L}$. Tenuto conto del Teorema 6.5.8 e del Teorema 6.8.5 si ha:

$$\mathscr{L}\,(\partial^q f) = \widetilde{\delta} * (\partial^q f) = \widetilde{\delta} * ((\partial^q \delta) * f) = (\partial^q \delta) * (\widetilde{\delta} * f) = \partial^q \widetilde{f} \ .$$

c). Il primo asserto segue dal Lemma 6.8.2. Il secondo asserto segue da argomentazioni analoghe a quelle che provano b). ■

Il seguente Teorema fornisce la relazione tra le FT degli ingressi e delle uscite di un sistema CLSI operante su $\mathscr{S}'$.

In particolare prova che la FR è la FT della IR, che la FR è una funzione di $\mathscr{O}_{\mathrm{M}}$, e che (tenuto conto dei Teoremi 8.7.2 e 8.7.4 e dei precedenti risultati di questa Sezione) per $\forall \psi \in \mathscr{O}_{\mathrm{M}}$ esiste uno ed un sistema CLSI su $\mathscr{S}'$ avente ψ per FR.

9.4.4 Teorema. Sia $\mathscr{L} : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ un sitema CLSI e ne siano (vedi Teoremi 9.3.3 e 9.4.2):

$$\psi(\theta) : \mathbb{R}^n_\theta \to \mathbb{C} \ , \quad \widetilde{\delta}(x) \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)_x$$

rispettivamente la FR e la IR. Sussistono gli asserti:

a) $\Big(\mathscr{F}\widetilde{\delta}(x)\Big)(\theta) \in \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n)$;

b) per $\forall f(x) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, posto: $\widetilde{f}(x) \triangleq \mathscr{L}(f(x))$ si ha:
   - $\diamond$ $\widetilde{f}(x) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$,
   - $\diamond$ $\Big(\mathscr{F}\widetilde{f}(x)\Big)(\theta) = \Big(\mathscr{F}\widetilde{\delta}(x)\Big)(\theta) \cdot (\mathscr{F}f(x))(\theta)$.

c) $\psi(\theta) = \Big(\mathscr{F}\widetilde{\delta}(x)\Big)(\theta)$.

Cenno. a). Per il Teorema 9.4.2 si ha: $\widetilde{\delta}(x) \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$. L'asserto segue quindi dal Teorema 8.7.2.

b) Per il Teorema 9.4.2 si ha $\widetilde{f}(x) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Per le Formule FT-convoluzione in $\mathscr{S}'$ (vedi 8.7.5) si ha:

$$\left(\mathscr{F}\widetilde{f}\right) = \left(\mathscr{F}(\widetilde{\delta} * f)\right) = \left(\mathscr{F}\widetilde{\delta}\right) \cdot (\mathscr{F}f) \ .$$

c). Sia $\theta_0 \in \mathbb{R}^n$. Applicando b) ad $f(x) = e^{i\alpha\theta_0 \cdot x}$ si ottiene:

$$\begin{aligned}\left(\mathscr{F}\mathscr{L}\left(e^{i\alpha\theta_0\cdot x}\right)\right)(\theta) &= \left(\mathscr{F}\widetilde{\delta}(x)\right)(\theta)\cdot\left(\mathscr{F}e^{i\alpha\theta_0\cdot x}\right)(\theta) = \\ &= \left(\mathscr{F}\widetilde{\delta}(x)\right)(\theta)\cdot\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n \delta(\theta-\theta_0) = \\ &= \left(\mathscr{F}\widetilde{\delta}(x)\right)(\theta_0)\cdot\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n \delta(\theta-\theta_0) \ ;\end{aligned}$$

tenuto conto della definizione di $\psi(\theta_0)$ si ottiene:

$$\begin{aligned}\left(\mathscr{F}\mathscr{L}\left(e^{i\alpha\theta_0\cdot x}\right)\right)(\theta) &= \left(\mathscr{F}\left(\psi(\theta_0)e^{i\alpha\theta_0\cdot x}\right)\right)(\theta) = \\ &= \psi(\theta_0)\left(\mathscr{F}e^{i\alpha\theta_0\cdot x}\right)(\theta) = \psi(\theta_0)\cdot\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^n \delta(\theta-\theta_0) \ .\end{aligned}$$

Ne segue: $\left(\mathscr{F}\widetilde{\delta}(x)\right)(\theta_0) = \psi(\theta_0)$. ■

La connessione in serie di due sistemi CLSI aventi $\mathscr{S}'$ come spazio ingressi e spazio uscite (ossia il loro prodotto di composizione) è ovviamente un sistema CLSI. Il seguente Teorema (ovvia conseguenza dei precedenti risultati) fornisce informazioni su tali connessione in serie.

9.4.5 Teorema. Siano $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2 : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ due sistemi CLSI; siano

$$\widetilde{\delta}_1, \widetilde{\delta}_2 \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n) \ , \qquad \psi_1, \psi_2 \in \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n)$$

rispettivamente le loro IR e le loro FR. Sussitono gli asserti:

- la IR di $\mathscr{L}_2 \cdot \mathscr{L}_1$ è: $\widetilde{\delta}_2 * \widetilde{\delta}_1 \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$;
- la FR di $\mathscr{L}_2 \cdot \mathscr{L}_1$ è: $\psi_2 \cdot \psi_1 \in \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n)$;
- $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$ *commutano*, ossia: $\mathscr{L}_1 \cdot \mathscr{L}_2 = \mathscr{L}_2 \cdot \mathscr{L}_1$.

9.5 Sistemi CLSI sullo spazio $\mathscr{D}'$

Questa Sezione fornisce il panorama dei sistemi CLSI

$$\mathscr{L} : \mathscr{D}' \to \mathscr{D}' \ ,$$

ossia di *tutte* le procedure di elaborazione lineari shift-invarianti e continue che possono essere effettuate sui segnali di $\mathscr{D}'$. Precisamente:

- la Definizione seguente descrive una famiglia

  $$\mathscr{L}_\gamma : \mathscr{D}' \to \mathscr{D}' \ , \qquad \gamma \in \mathscr{E}'$$

  di sistemi CLSI a ingressi e uscite in $\mathscr{D}'$;

- il Lemma e il Teorema successivi provano che la famiglia:

  $$\mathscr{L}_\gamma : \mathscr{D}' \to \mathscr{D}' \ , \qquad \gamma \in \mathscr{E}'$$

  non solo fornisce esempi, ma fornisce il panorama di tutti i sistemi CLSI

  $$\mathscr{L} : \mathscr{D}' \to \mathscr{D}' \ .$$

9.5.1 Definizione. Per $\forall \gamma \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ indichiamo con:

$$\mathscr{L}_\gamma : \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$$

il sistema definito da (vedi Sezione 6.5):

$$\mathscr{L}_\gamma(f) = \gamma * f \qquad \forall f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \ ;$$

per i Teoremi 6.5.4 e 6.5.10 si ha:

- $\mathscr{L}_\gamma$ è un sitema CLSI,
- $\mathscr{L}_\gamma(\delta) = \gamma$, e quindi la IR di $\mathscr{L}_\gamma$ è γ .

9.5.2 Lemma. Sia $f(x) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, e sia a_k una successione di elementi di supp f. Sussite l'asserto sguente:

- per ogni intorno $I(0,r)$ esiste $\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tale che:

  $$\text{supp}\ \varphi \subset I(0,r) \ , \quad \forall \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bullet \varphi(x - a_k) \mathrm{d}x \neq 0 \ .$$

(*Per la dimostrazione vedi capitolo 10*)

9.5.3 Teorema. Sia: $\mathscr{L} : \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ un sistema CLSI, e sia

$$\widetilde{\delta} \triangleq \mathscr{L}(\delta) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$$

la IR di $\mathscr{L}$. Sussistono gli asserti:

a) $\widetilde{\delta} \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$;

b) $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\widetilde{\delta}}$.

Cenno. a). *Supponiamo per assurdo* che supp $\widetilde{\delta}$ non sia compatto. Esisterebbe allora una successione di punti $a_k \in$ supp $\widetilde{\delta}$ tale che

$$\lim_{k\to\infty} \|a_k\| = \infty \ ,$$

e per il precedente Lemma 9.5.2 esisterebbe una $\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tale che:

$$\forall k \ : \ \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\delta}(x) \bullet \varphi(x - a_k)\mathrm{d}x \neq 0 \ .$$

Ciò è assurdo. Susitono infatti gli asserti seguenti:

- per ogni successione $c_k \in \mathbb{C}$, tenuto conto che $\lim\limits_{k\to\infty} \|a_k\| = \infty$, si ha:
  - $\mathscr{D}'\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} c_k\delta(x + a_k) = 0$,
  - essendo $\mathscr{L}$ continua e shift-invariante si ha:
  $$\mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty} c_k\widetilde{\delta}(x + a_k) = 0 \ ,$$
  - $\lim\limits_{k\to\infty} c_k \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\delta}(x + a_k) \bullet \varphi(x)\mathrm{d}x = 0$;
- tenuto conto dell'arbitrarietà della successione c_k, si ottiene *invece* che la successione:
  $$\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\delta}(x) \bullet \varphi(x - a_k)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\delta}(x + a_k) \bullet \varphi(x)\mathrm{d}x$$
  è definitivamente nulla.

b). $\mathscr{L}, \mathscr{L}_{\widetilde{\delta}} : \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ sono due sistemi CLSI aventi entrambi $\widetilde{\delta}$ per IR; per il Teorema 9.2.3 si ha allora: $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\widetilde{\delta}}$. ■

Il seguente Teorema, corollario del Teorema 9.5.3, dà informazioni sul comportamento di un sistema CLSI sulle derivate di segnali e sulla convoluzione tra segnali.

9.5.4 Sia $\mathscr{L} : \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ un sistema CLSI. Dati comunque segnali: $f(x), g(x) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e posto:

$$\widetilde{f} = \mathscr{L}(f),\ \widetilde{g} = \mathscr{L}(g) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)\ ,$$

si ha:

a) per $\forall q \in \mathbb{N}^n$ si ha: $\mathscr{L}\,(\partial^q f) = \partial^q \widetilde{f}$;

b) se $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, allora si ha:
   - ◇ $\widetilde{f} \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$,
   - ◇ $\mathscr{L}(f * g) = f * \widetilde{g} = \widetilde{f} * g$.

Cenno. a). Sia $\widetilde{\delta} \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ la IR di $\mathscr{L}$. Tenuto conto del Teorema 6.5.3 e della Nota 6.5.10 si ha:

$$\mathscr{L}\,(\partial^q f) = \widetilde{\delta} * (\partial^q f) = \widetilde{\delta} * ((\partial^q \delta) * f) = (\partial^q \delta) * (\widetilde{\delta} * f) = \partial^q \widetilde{f}\ .$$

c). Il primo asserto segue dal Lemma 6.5.2. Il secondo asserto segue da argomentazioni analoghe a quelle che provano a). ■

Il seguente Teorema prova che la FR di un sistema CLSI avente $\mathscr{D}'$ come spazio ingressi e spazio uscite è la FT della IR. In particolare, essendo la IR$\in \mathscr{E}' \subset \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}$, prova che che la FR è una funzione di $\mathscr{O}_{\mathrm{M}}$.

Tale risultato *parziale* viene completato dal Teorema di Paley-Wiener che forniscee la caratterizzazione delle FT delle distribuzioni di $\mathscr{E}'$ (vedi Sezione 8.8).

9.5.5 Teorema. Sia $\mathscr{L} : \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ un sitema CLSI e ne siano (vedi Teoremi 9.3.3 e 9.4.2):

$$\psi(\theta) : \mathbb{R}^n_\theta \to \mathbb{C}\ , \quad \widetilde{\delta}(x) \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)_x$$

rispettivamente la FR e la IR. Si ha:

$$\psi(\theta) = \Big(\mathscr{F}\widetilde{\delta}(x)\Big)(\theta)\ .$$

Cenno. Indichiamo con: $\mathscr{L}^\circ : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ la restrizione di $\mathscr{L}$ a $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$; ovviamente $\mathscr{L}^\circ$ è un sistema CLSI.

Ovviamente $\mathscr{L}$ e $\mathscr{L}^\circ$ hanno la stessa IR e la stessa FR. Applicando ad $\mathscr{L}^\circ$ il Teorema 9.4.4 si ottiene l'asserto. ■

La connessione in serie di due sistemi CLSI aventi $\mathscr{D}'$ come spazio ingressi e spazio uscite (ossia il loro prodotto di composizione) è ovviamente un sistema CLSI. Il seguente Teorema (ovvia conseguenza dei precedenti risultati) fornisce informazioni su tali connessione in serie.

9.5.6 Teorema. Siano $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2 : \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ due sistemi CLSI; siano

$$\widetilde{\delta}_1, \widetilde{\delta}_2 \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \ , \qquad \psi_1, \psi_2 \in \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n)$$

rispettivamente le loro IR e le loro FR. Sussitono gli asserti:

- la IR di $\mathscr{L}_2 \cdot \mathscr{L}_1$ è: $\widetilde{\delta}_2 * \widetilde{\delta}_1 \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$;
- la FR di $\mathscr{L}_2 \cdot \mathscr{L}_1$ è: $\psi_2 \cdot \psi_1 \in \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n)$;
- $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$ *commutano*, ossia: $\mathscr{L}_1 \cdot \mathscr{L}_2 = \mathscr{L}_2 \cdot \mathscr{L}_1$.

Capitolo 10

Dimostrazioni

Le dimostrazioni di alcuni asserti del testo si basano su considerazioni ad hoc e quindi non forniscono metodi e considerazioni utili in situazioni generali. Tali dimostrazioni sono raccolte in questo Capitolo.

Per facilitare la lettura, vengono riportati anche gli asserti con la stessa numerazione con cui figurano nel testo.

Teorema 2.3.1. Sia $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione; sono equivalenti gli asserti:

a) per $\forall f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ si ha $f\varphi \in L^1(\Omega)$,

b) $\varphi \in L^\infty_{\text{sc}}(\Omega)$.

Cenno. b)$\Rightarrow$a). Ovvio.

a)$\Rightarrow$b). Siccome (*funzione costante* 1)$\varphi = \varphi$, si ha $\varphi \in L^1(\Omega)$; in particolare φ è misurabile.

Se supp φ non fosse chiuso, esisterebbero

$$a \notin \text{supp } \varphi, \quad a_1, a_2, a_3, \dots \in \text{supp } \varphi$$

tali che

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a \ .$$

In primo luogo ne segue $a \notin \Omega$; di conseguenza se ne deduce l'esistenza di indici $k_1 < k_2 < \cdots$ e di reali positivi $r_1, r_2, \dots$ tali che gli insiemi

$$\overline{I(a_{k_h}, r_h)} \qquad h = 1, 2, \dots$$

siano contenuti in Ω e a due a due disgiunti. Se ne deduce la costruzione di una $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, definita opportunamente su ciascun $\overline{I(a_{k_h}, r_h)}$ e nulla altrove, tale che $f\varphi \notin L^1(\Omega)$: assurdo, pertanto supp φ è chiuso.

Se supp φ non fosse limitato esisterebbero $a_1, a_2, a_3, \ldots \in$ supp φ tali che

$$\lim_{k\to\infty} \|a_k\| = +\infty \ ;$$

le considerazioni precedenti si applicano a questa successione e conducono ad analogo assurdo: pertanto supp φ è limitato.

Le considerazioni precedenti provano che $K =$ supp φ è compatto e che $\varphi \in L^1(\Omega)$. Resta da dimostrare che φ è limitata su K e quindi su Ω.

Se φ non fosse limitata su K, sussisterebbero le considerazioni seguenti:

- per $h \geqslant 1$ e intero, si ponga $K_h = \Big\{a \in K : |\varphi(a)| \geqslant h\Big\}$; ovviamente

  $$K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots \quad , \bigcap_{h=1}^{\infty} K_h = \emptyset \ ,$$

  ed essendo φ non limitata, ogni mis $K_h > 0$;

- se ne deducono interi h_ν tali che $1 \leqslant h_1 < h_2 < h_3 < \cdots$ tali che

  $$\begin{gathered} K_{h_1} \supset K_{h_2} \supset K_{h_3} \supset \cdots \quad , \bigcap_{\nu=1}^{\infty} K_{h_\nu} = \emptyset \ , \\ \text{mis } K_{h_1} > \text{mis } K_{h_2} > \text{mis } K_{h_3} > \cdots \ ; \end{gathered}$$

  si ponga

  $$\gamma_\nu = \text{mis } K_{h_\nu} - \text{mis } K_{h_{\nu+1}} > 0 \ ;$$

- la funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definita da

  $$f(a) = \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma_\nu}\dfrac{1}{\nu^2} & \text{per} \quad a \in K_{h_\nu} \setminus K_{h_{\nu+1}} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

  è integrabile su Ω ;

- per $a \in K_{h_\nu} \setminus K_{h_{\nu+1}}$ si ha (si tenga conto che $h_\nu \geqslant \nu$):

  $$|f(a)\varphi(a)| \geqslant \left(\frac{1}{\gamma_\nu}\frac{1}{\nu^2}\right) h_\nu \geqslant \frac{1}{\gamma_\nu}\frac{1}{\nu} \ ,$$

  e quindi $f\varphi$ non è integrabile: assurdo;

pertanto φ è limitata. ■

Lemma 4.1.1. Sussistono gli asserti:

a) Esiste una successione Ω_k di aperti limitati tale che:

$$\Omega_1 \subset \overline{\Omega_1} \subset \Omega_2 \subset \overline{\Omega_2} \subset \Omega_3 \subset \overline{\Omega_3} \subset \cdots \subset \Omega, \qquad \Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$$

b) Sia Ω_k una tale successione. Per ogni compatto $K \subset \Omega$, esiste k tale che: $K \subset \Omega_k$.

Cenno. a). Per $\forall k$ si ponga:

$$\Omega_k = \left\{ x \in \Omega : \overline{I(x, 1/k)} \subset (\Omega \cap I(0, k)) \right\} ;$$

sia

$$K_k = \left\{ x \in \Omega : I(x, 1/k) \subset (\Omega \cap I(0, k)) \right\} ;$$

Si ha:

- Ω_k è limitato,
- Ω_k è aperto e K_k è chiuso (la verifica è elementare ma non banale),
- $\Omega_k \subset K_k \subset \Omega_{k+1}$, quindi $\Omega_k \subset \overline{\Omega_k} \subset \Omega_{k+1}$;

ovviamente $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \Omega$.

b) La famiglia Ω_k è un ricoprimento aperto di K. Poichè K è compatto, sussite l'asserto. ■

Teorema 4.4.2. Sia $f_1, f_2, f_3, \ldots$ una successione di elementi di $\mathscr{E}'(\Omega)$; sono equivalenti gli asserti:

a) $f_1, f_2, f_3, \ldots$ è una successione di $\mathscr{E}'$-Cauchy;

b) $f_1, f_2, f_3, \ldots$ è una successione di $\mathscr{D}'$-Cauchy, ed esiste un compatto $K \subset \Omega$ tale che $\forall$supp $f_k \subset K$.

Cenno. a)$\Rightarrow$b). Ovviamente $f_1, f_2, f_3, \ldots$ è una successione di $\mathscr{D}'$-Cauchy.

Poniamo $K_k \triangleq \operatorname{supp} f_k$, e supponiamo per assurdo che non esista un compatto $K \subset \Omega$ tale che $\forall K_k \subset K$. Tale ipotesi implica che esistono

$$k_1 < k_2 < k_3 < \cdots \in \mathbb{N}, \quad a_\nu \in K_{k_\nu}$$

tali che

$$\begin{cases} \text{o}: \quad \|a_1\| < \|a_2\| < \|a_3\| < \cdots & , \quad \lim\limits_{\nu\to\infty} \|a_\nu\| = \infty \\ \text{o}: \quad \exists b \notin \Omega : \mathrm{d}(a_1, b) > \mathrm{d}(a_2, b) > \mathrm{d}(a_3, b) > \cdots & , \quad \lim\limits_{\nu\to\infty} \mathrm{d}(a_\nu, b) = 0 \end{cases}$$

e che

$$a_\nu \notin K_{k_1} \cup \cdots \cup K_{k_{\nu-1}} \ .$$

Ovviamente esistono $\varepsilon_\nu > 0$ tali che $\overline{I(a_\nu, \varepsilon_\nu)} \subset \Omega$, e che tali insiemi siano a due a due disgiunti.

Ovviamente esistono $0 < \widetilde{\varepsilon}_\nu < \varepsilon_\nu$ tali che

$$I(a_\nu, \widetilde{\varepsilon}_\nu) \cap \big(K_{k_1} \cup \cdots \cup K_{k_{\nu-1}}\big) = \emptyset \ .$$

Essendo $a_\nu \in K_{k_\nu}$, esistono $\varphi_\nu \in \mathscr{D}(I(a_\nu, \widetilde{\varepsilon}_\nu))$ tali che

$$\int_\Omega f_{k_\nu} \bullet \varphi_\nu = \alpha_\nu \neq 0 \ ;$$

essendo supp φ_ν disgiunto dai supporti di $f_{k_1}, \ldots, f_{k_{\nu-1}}$, per il Teorema 3.7.2 si ha:

$$\int_\Omega f_{k_1} \bullet \varphi_\nu = \cdots = \int_\Omega f_{k_{\nu-1}} \bullet \varphi_\nu = 0 \ .$$

Per $\forall c_\nu \in \mathbb{C}$ si ponga:

$$c = (c_1, c_2, c_3, \ldots), \quad \varphi_c(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x)$$

(si osservi che per $\forall x \in \Omega$ tutti gli addendi di tale serie sono nulli, eccettuato al più uno); si ha:

- $\varphi_c \in \mathscr{E}(\Omega)$,
- $\forall \displaystyle\int_\Omega f_{k_\nu} \bullet \varphi_c = \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} c_\lambda \int_\Omega f_{k_\nu} \bullet \varphi_\lambda + c_\nu \alpha_\nu$,

∘ essendo $f_1, f_2, f_3, \ldots$ una successione di $\mathscr{E}'$-Cauchy, per $\forall c$ esiste

$$\lim_{\nu \to \infty} \left(\sum_{\lambda=1}^{\nu-1} c_\lambda \int_\Omega f_{k_\nu} \bullet \varphi_\lambda + c_\nu \alpha_\nu \right) .$$

L'asserto dell'ultimo item è assurdo, infatti essendo $\forall \alpha_\nu \neq 0$, si possono scegliere induttivamente $c_1, c_2, c_3, \ldots$ in modo che la successione

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu-1} c_\lambda \int_\Omega f_{k_\nu} \bullet \varphi_\lambda + c_\nu \alpha_\nu$$

assuma ad esempio alternativamente i valori $1, -1$. Ne segue che esiste un compatto $K \subset \Omega$ tale che $\forall \mathrm{supp}\, f_k \subset K$.

b)⇒a). Sia $\varphi \in \mathscr{E}(\Omega)$. Si consideri $\zeta \in \mathscr{D}(\Omega)$ tale che $\zeta = 1$ su un aperto $\supset K$. Per la Definizione 4.3.1 si ha:

$$\int_\Omega f_k \bullet \varphi = \int_\Omega f_k \bullet \zeta\varphi \ ;$$

essendo $\zeta\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, per l'ipotesi esiste $\lim\limits_{k \to \infty} \int_\Omega f_k \bullet \zeta\varphi$, pertanto esiste anche $\lim\limits_{k \to \infty} \int_\Omega f_k \bullet \varphi$. ■

Teorema 4.5.6. Si consideri l'applicazione

$$\mathbf{T} : \mathscr{E}'(\Omega) \longrightarrow \mathscr{T}\mathscr{E}(\Omega)$$

definita da (vedi Definizione 4.5.5)

$$\mathbf{T}(f) = T_f \qquad \forall f \in \mathscr{E}'(\Omega).$$

Sussistono gli asserti:

a) $\mathbf{T}$ è un isomorfismo di spazi vettoriali;

b) per $\forall f \in \mathscr{E}'(\Omega)$ e per $\forall \varphi \in \mathscr{E}(\Omega)$ si ha:

$$\mu^*_\varphi(T_f) = \mu_\varphi(f) \ , \quad \|T_f\|^*_\varphi = \|f\|_\varphi \ ;$$

c) $\mathbf{T}$ è un isomorfismo di spazi vettoriali con famiglie separanti di *PDML* e di seminorme ad indici in $\mathscr{E}(\Omega)$.

Cenno. a). Linearità ed iniettività sono ovvie. Sia quindi $T \in \mathscr{T}\mathscr{E}(\Omega)$; si ponga

$$\widetilde{T} = T_{\big/ \mathscr{D}(\Omega)} : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C} \ .$$

Ovviamente $\widetilde{T}$ è un funzionale lineare e continuo su $\mathscr{D}(\Omega)$; per il Teorema 2.15.3 esiste allora $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ tale che

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \quad T(\varphi) = \widetilde{T}(\varphi) = \int_\Omega f \bullet \varphi \ .$$

Supponiamo per assurdo che supp f non sia compatto. Tale ipotesi implica che esistono $a_1, a_2, a_3, \dots \in$ supp f tali che:

$$\begin{cases} \text{o}: \ \ \|a_1\| < \|a_2\| < \|a_3\| < \cdots & , \ \lim_{k\to\infty} \|a_k\| = \infty \\ \text{o}: \ \ \exists b \notin \Omega : \mathrm{d}(a_1, b) > \mathrm{d}(a_2, b) > \mathrm{d}(a_3, b) > \cdots & , \ \lim_{k\to\infty} \mathrm{d}(a_k, b) = 0 \end{cases} ;$$

ovviamente esistono $\varepsilon_k > 0$ tali che $\overline{I(a_k, \varepsilon_k)} \subset \Omega$, e che tali insiemi siano a due a due disgiunti.

Essendo $a_k \in$ supp f, esistono $\varphi_k \in \mathscr{D}(I(a_k, \varepsilon_k))$ tali che

$$\int_\Omega f \bullet \varphi_k = 1 \ .$$

Essendo $\forall \varphi_k \in \mathscr{D}(\Omega)$, si ha pertanto:

$$\lim_{k\to\infty} T(\varphi_k) = \lim_{k\to\infty} \widetilde{T}(\varphi_k) = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f \bullet \varphi_k = 1 \ .$$

Ma tale uguaglianza è assurda: per come definite le φ_k si ha infatti

$$\mathscr{E}\text{-}\lim_{k\to\infty} \varphi_k = 0 \ ,$$

ed essendo $T \in \mathscr{T}\mathscr{E}(\Omega)$ si ha allora:

$$\lim_{k\to\infty} T(\varphi_k) = T(0) = 0 \ .$$

Le considerazioni precedenti provano che $f \in \mathscr{E}'(\Omega)$.

Per $\forall \varphi \in \mathscr{E}(\Omega)$ si ha:

- per il Lemma 4.5.2 esiste una successione $\varphi_k \in \mathscr{D}(\Omega)$ tale che:

$$\varphi = \mathscr{E}\text{-}\lim_{k\to\infty} \varphi \ ;$$

- essendo $\forall \varphi_k \in \mathscr{D}(\Omega)$, le considerazioni precedenti provano che:

$$T(\varphi_k) = \int_\Omega f \bullet \varphi_k \ ;$$

- essendo T continua si ha:

$$T(\varphi) = T\left(\mathscr{E}\text{-}\lim_{k\to\infty} \varphi_k\right) = \lim_{k\to\infty} T(\varphi_k) = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f \bullet \varphi_k \ ;$$

- essendo $f \in \mathscr{E}'(\Omega)$, per la definizione 4.5.5, il funzionale T_f è continuo, pertanto si ha:

$$T_f(\varphi) = T_f\left(\mathscr{E}\text{-}\lim_{k\to\infty} \varphi_k\right) = \lim_{k\to\infty} T_f(\varphi_k) = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f \bullet \varphi_k \ ;$$

gli ultimi due item provano che per $\forall \varphi \in \mathscr{E}(\Omega)$ si ha $T(\varphi) = T_f(\varphi)$, ossia che $T = T_f = \mathbf{T}(f)$.

b). Segue dall'essere

$$\int_\Omega f \bullet \varphi = T_f(\varphi) \ .$$

c). Segue da a) e da b). ■

Lemma 5.8.2. Sia $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ una funzione non a crescita lenta s.u.. Esiste $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ tale che: $\zeta f \notin \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Cenno. : Sussistono gli asserti seguenti:

a) Esiste una successione $b_k \in \mathbb{R}^n$ tale che $b_0 = 0$ e che per $\forall k \geqslant 1$ si ha:

$$\begin{cases} \|b_k\| > \|b_{k-1}\| + 1 \\ |\zeta(b_k)| > k(1 + \|b_k\|)^k \end{cases} .$$

b) Sia $\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tale che: $\varphi(0) \neq 0$ e che $\operatorname{supp} \varphi \subset I(0,1)$; per $\forall k \geqslant 1$ si ponga:

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k(1 + \|b_k\|)^k} \varphi(x - b_k) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \ .$$

Si ha: $\mathscr{S}\text{-}\lim_{k\to\infty} \varphi_k = 0$.

c) La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \delta(x-b_k)$ è convergente in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Si ponga

$$f(x) = \mathscr{S}'\text{-}\sum_{k=1}^{\infty} \delta(x-b_k) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \ .$$

d) Per $\forall k$ si ha:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \zeta f \bullet \varphi_k \right| > |\varphi(0)| \neq 0 \ .$$

Infatti:

- $\diamond$ per $\forall k$ si ha $\|b_{k+1}\| > \|b_k\| + 1$,
- $\diamond$ essendo supp $\varphi \subset I(0,1)$, per $\forall k$ si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \zeta f \bullet \varphi_k = \int_{\mathbb{R}^n} f \bullet \zeta\varphi_k = \zeta(b_k)\varphi_k(b_k) = \zeta(b_k)\frac{1}{k(1+\|b_k\|)^k}\varphi(0) \ ,$$

- $\diamond$ poiché per $\forall k$ si ha $|\zeta(b_k)| > k(1+\|b_k\|)^k$, si ottiene l'asserto.

e) Se fosse $\zeta f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$,

- $\diamond$ per a) del Teorema 5.6.2 il funzionale

$$\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \zeta f \bullet \varphi, \qquad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

  sarebbe continuo,

- $\diamond$ per l'item b) si avrebbe $\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \zeta f \bullet \varphi_k = 0$; ma ciò è in contraddizione con l'asserto dell'item d). ■

Teorema 6.2.1. Siano $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Se almeno una di tali funzioni è a supporto compatto sussistono gli asserti:

a) è definito $f * g$;

b) supp $(f * g) \subset$ (supp $f +$ supp g).

In particolare, se f, g sono entrambe a supporto compatto, anche $f * g$ è a supporto compatto.

Cenno. *Supponiamo in primo luogo che* supp f *sia compatto.*

Per $\forall h > 0$ poniamo:

$$C_h \triangleq \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \forall |x_j| \leqslant h \right\} ;$$

ovviamente C_h è un compatto. Per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ esiste $h > 0$ tale che $K \subset C_h$.

Sia $\nu > 0$ tale che supp $f \subset C_\nu$. Sussitono gli asserti:

1) Per $\forall l > 0$, la funzione

$$f(x-y)g(y) : \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y \to \mathbb{C}$$

è integrabile su $C_{l+\nu} \times C_l$.

Infatti si ha:

- per $\forall y \in C_l$:
  - essendo $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $x \mapsto |f(x-y)g(y)|$ è integrabile su $C_{l+\nu}$,
  - poiché $C_{l+\nu} - y \supset C_\nu$, si ha:

$$\int_{C_{l+\nu}} |f(x-y)g(y)| \mathrm{d}x = |g(y)| \int_{C_{l+\nu}-y} |f(\xi)| \mathrm{d}\xi =$$
$$= |g(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f| = |g(y)| \cdot \|f\|_1 \ ;$$

- quindi $y \mapsto \displaystyle\int_{C_{l+\nu}} |f(x-y)g(y)| \mathrm{d}x$ è integrabile su C_l ;

allora per il Teorema di Tonelli sussiste l'asserto. □

2) Da 1. segue che $f(x-y)g(y) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y)$.

3) Per $\forall \lambda > 0$, tenuto conto di 2., si ha:

- ◇ $f(x-y)g(y)$ è integrabile su $C_\lambda \times C_{\lambda+\nu}$;
- ◇ per il Teorema di Fubini si ha:
  - per q.o. $x \in C_\lambda$ la funzione $y \mapsto f(x-y)g(y)$ è integrabile su $C_{\lambda+\nu}$,

   ∘ la funzione $x \mapsto \displaystyle\int_{C_{\lambda+\nu}} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$ è integrabile su C_λ;

◇ per $\forall y \notin C_{\lambda+\nu}$, essendo $x \in C_\lambda$, si ha $x - y \notin C_\nu$ e quindi si ha $f(x-y)g(y) = 0$;

◇ si ha allora:

   ∘ per q.o. $x \in C_\lambda$ la funzione $y \mapsto f(x-y)g(y)$ è integrabile su $\mathbb{R}^n$,

   ∘ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y = \int_{C_{\lambda+\nu}} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$,

   ∘ la funzione $x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$ è integrabile su C_λ.

4) Da 3. segue banalmente che esiste $f * g$.

Supponiamo adesso che supp g *sia compatto.*

La prima parte della dimostrazione prova che esiste $g * f$. L'esistenza di $f * g$ segue dalla Nota 6.1.1.

Si osservi infine che:

∘ essendo supp f, supp g entrambi chiusi ed uno compatto, allora supp $f+$ supp g è chiuso;

∘ se $x \notin$ supp $f +$ supp g allora $f(x-y)g(y) = 0$ per $\forall y$. ∎

Teorema 6.2.2. Siano $f, g, h \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Se almeno due di tali funzioni sono a supporto compatto sussistono gli asserti:

a) sono definiti entrambi i prodotti: $(f * g) * h,\ f * (g * h)$,

b) si ha: $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Cenno. L'esistenza di entrambi i prodotti è ovvia. L'associativita è provata dalle considerazioni seguenti.

Supponiamo in primo luogo che supp f, supp g *siano compatti.*

Per $\forall h > 0$ poniamo:

$$C_h \triangleq \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \forall |x_j| \leqslant h\Big\} ;$$

ovviamente C_h è un compatto. Per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ esiste $h > 0$ tale che $K \subset C_h$.

Siano $\nu > 0,\ \mu > 0$ tali che supp $f \subset C_\nu$, supp $g \subset C_\mu$. Sussitono gli asserti:

1) Per $\forall l > 0$, la funzione

$$f(x-y-z)g(z)h(y) : \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_z \times \mathbb{R}^n_y \to \mathbb{C}$$

è integrabile su $C_{2l+\mu+\nu} \times C_{l+\mu} \times C_l$.
Infatti si ha:

- per $\forall(z, y) \in C_{l+\mu} \times C_l$:
  - essendo $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $x \mapsto |f(x-y-z)g(z)h(y)|$ è integrabile su $C_{2l+\mu+\nu}$,
  - poiché $C_{2l+\mu+\nu} - y - z \supset C_\nu$, si ha:

$$\int_{C_{2l+\mu+\nu}} |f(x-y-z)g(z)h(y)|\mathrm{d}x =$$
$$= |g(z)| \cdot |h(y)| \int_{C_{2l+\mu+\nu}-y-z} |f(\xi)|\mathrm{d}\xi =$$
$$= |g(z)| \cdot |h(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f| = |g(z)| \cdot |h(y)| \cdot \|f\|_1 \ ,$$

- quindi $(z, y) \mapsto \int_{C_{2l+\mu+\nu}} |f(x-y-z)g(z)h(y)|\mathrm{d}x$ è integrabile su $C_{l+\mu} \times C_l$;

allora per il Teorema di Tonelli sussiste l'asserto. □

2) Da 1. segue che $f(x-y-z)g(z)h(y) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_z \times \mathbb{R}^n_y)$.

3) Per $\forall\lambda > 0$, tenuto conto di 2., si ha:

- $f(x-y-z)g(z)h(y)$ è integrabile su $C_\lambda \times C_\mu \times C_{\lambda+\mu+\nu}$;
- per il Teorema di Fubini si ha:
  - per q.o. $x \in C_\lambda$ la funzione $(z, y) \mapsto f(x-y-z)g(z)h(y)$ è integrabile su $C_\mu \times C_{\lambda+\mu+\nu}$,
- per $\forall x \in C_\lambda$, se $(z, y) \notin C_\mu \times C_{\lambda+\mu+\nu}$ si ha:

$$f(x-y-z)g(z)h(y) = 0$$

  Infatti.
  - se $z \notin C_\mu$, si ha: $g(z) = 0$,
  - se $z \in C_\mu$, ma $y \notin C_{\lambda+\mu+\nu}$, si ha $x-y-z \notin C_\nu$ (altrimenti si avrebbe: $y \in x-z-C_\nu \subset C_\lambda + C_\mu + C_\nu = C_{\lambda+\mu+\nu}$), e quindi si ha: $f(x-y-z) = 0$. □

◇ si ha allora:

  ∘ per q.o. $x \in C_\lambda$ la funzione

$$(z, y) \mapsto f(x - y - z)g(z)h(y)$$

  è integrabile su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

  ∘ la sostituzione $z - y \rightsquigarrow z,\ y \rightsquigarrow y$ prova che per q.o. $x \in \mathbb{R}$ la funzione

$$(z, y) \mapsto f(x - z)g(z - y)h(y)$$

  è integrabile su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, ed ha lo stesso integrale della precedente.

4) Tenuto conto dell'arbitrarietà di λ, segue che per q.o. $x \in \mathbb{R}$ le funzioni

$$(z, y) \mapsto f(x - y - z)g(z)h(y), \quad (z, y) \mapsto f(x - z)g(z - y)h(y)$$

sono integrabili su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ed hanno lo stesso integrale.

5) Per q.o. $x \in \mathbb{R}$ si ha (tenuto conto che $f * g,\ f$ sono a supporto compatto, di 4. e del Teorema di Ruffini):

∘ $$((f * g) * h)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x - y)h(y)\mathrm{d}y =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x - y - z)g(z)\mathrm{d}z \right] h(y)\mathrm{d}y =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(x - y - z)g(z)h(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y$$

∘ $$(f * (g * h))(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - z)(g * h)(z)\mathrm{d}z =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x - z) \left[\int_{\mathbb{R}^n} g(z - y)h(y)\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}z =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(x - z)g(z - y)h(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

∘ pertanto: $((f * g) * h)(x) = (f * (g * h))(x)$.

Le osservazioni precedenti provano che se f, g sono a supporto compatto, allora $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Supponiamo adesso che supp g, supp h *siano compatti.* In tale caso si ha: $(h * g) * f = h * (g * f)$. Ovvie considerazioni di commutatività ne deducono che: $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Supponiamo infine che $\operatorname{supp} f, \operatorname{supp} h$ *siano compatti.* In tal caso si ha:

$$(f * h) * g = f * (h * g)$$
$$(h * f) * g = h * (f * g)$$

Ovvie considerazioni ne deducono che: $(f * g) * h = f * (g * h)$. ■

Teorema 6.3.4(associatività)**.** Siano $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $h \in L^r(\mathbb{R}^n)$. Supponiamo che sussistano le condizioni:

a) $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \geqslant 1$ (sia ρ tale che $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 + \dfrac{1}{\rho}$),

b) $\dfrac{1}{\rho} + \dfrac{1}{r} \geqslant 1$ (sia s tale che $\dfrac{1}{\rho} + \dfrac{1}{r} = 1 + \dfrac{1}{s}$).

Sussitono gli asserti:

- per il Teorema 6.3.3, esistono $(f * g) * h,\ f * (g * h)$ e si ha:

$$(f * g) * h,\ f * (g * h) \in L^s(\mathbb{R}^n) \ ;$$

- si ha: $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Cenno. *Primo caso: uno tra* p, q, r *è* ∞*, e quindi gli altri due sono* 1. In tal caso sussistono gli asserti:

- tenuto conto che due tra le funzioni f, g, h sono L^1 e che l'altra è L^∞, si verifica facilmente che le funzioni

$$f(x - y - z)g(z)h(y),\ f(x - z)g(z - y)h(y) : \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_z \times \mathbb{R}^n_y \to \mathbb{C}$$

  sono integrabili ed hanno lo stesso integrale;

- per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$ si ha allora:

$$\diamond \quad ((f * g) * h)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x - y)h(y)\mathrm{d}y =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x - y - z)g(z)\mathrm{d}z \right] h(y)\mathrm{d}y =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(x - y - z)g(z)h(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y$$

$$\diamond \quad (f*(g*h))(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-z)(g*h)(z)\mathrm{d}z =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-z)\left[\int_{\mathbb{R}^n} g(z-y)h(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} f(x-z)g(z-y)h(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$\circ$ pertanto: $((f*g)*h)(x) = (f*(g*h))(x)$.

Secondo caso: p, q, r sono diversi da ∞. Relativamente ad f, per $k \in \mathbb{N}$ si ponga:

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad \|x\| \leqslant k \\ 0 & , \quad \|x\| > k \end{cases} ;$$

si osservi che $f_k \in L^p(\mathbb{R}^n)$, che supp f_k è compatto, e che:

$$f = L^p\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k \ .$$

Definizioni e considerazioni analoghe sussitono per g e per h.

Per il Teorema 6.3.2 si ha:

$$(f*g)*h = L^s\text{-}\lim_{k\to\infty}(f_k*g_k)*h_k, \quad f*(g*h) = L^s\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k*(g_k*h_k) \ ;$$

essendo f_k, g_k, h_k a supporto compatto, per il Teorema 6.3.2 si ha:

$$(f_k*g_k)*h_k = f_k*(g_k*h_k) \ ;$$

pertanto: $(f*g)*h = f*(g*h)$. ■

Lemma 6.7.1. Sia $\varphi(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Si ha:

a) $\mathscr{S}\text{-}\lim_{\|h\|\to 0} \varphi(x+h) = \varphi(x)$,

b) $\mathscr{S}\text{-}\lim_{h\to 0} \dfrac{\varphi(x+he_j)-\varphi(x)}{h} = \partial^{e_j}\varphi(x)$ (si ricordi che e_j è il j-esimo elemento della base canonica di $\mathbb{R}^n$ e si osservi che $\partial^{e_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$).

Cenno. Sussistono gli asserti:

1) Sia $\sigma(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Per $\forall\nu \geqslant 0$ e $\forall T > 0$ si ha:

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \|x\|^\nu \sigma(x+\tau) = 0$$

uniformemente per $\|\tau\| \leqslant T$.

(*Cenno.* Si osservi che per $\|x\| \geqslant 2T$ si ha:

$$\begin{aligned}\Big\| \|x\|^\nu \sigma(x+\tau) \Big\| &\leqslant \Big\| (\|x+\tau\| + T)^\nu \sigma(x+\tau) \Big\| \\ &\leqslant (2\|x+\tau\|)^\nu |\sigma(x+\tau)| \ . \ )\end{aligned}$$

2) Sia $\sigma(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Per $\forall \nu \geqslant 0$ si ha:

$$L^\infty\text{-}\lim_{\|h\|\to 0} \|x\|^\nu (\sigma(x+h) - \sigma(x)) = 0 \ .$$

(*Cenno.* Si tenga conto dell'item 1).)

3) Sia $\sigma(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Per $\forall \nu \geqslant 0$ si ha:

$$L^\infty\text{-}\lim_{h\to 0} \|x\|^\nu \left(\frac{\sigma(x+he_j) - \sigma(x)}{h} - \partial^{e_j}\sigma(x) \right) = 0 \ .$$

(*Cenno.* Si tenga conto che per $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall h \neq 0$ esiste $\xi_{xh} \in [0,1]$ tale che:

$$\begin{aligned}&\|x\|^\nu \left(\frac{\sigma(x+he_j) - \sigma(x)}{h} - \partial^{e_j}\sigma(x) \right) = \\ &\qquad = \|x\|^\nu \left(\partial^{e_j}\sigma(x+\xi_{xh}he_j) - \partial^{e_j}\sigma(x) \right) \ ;\end{aligned}$$

quindi si applichi l'item 2) al secondo membro dell'uguaglianza, tenendo presente che $\partial^{e_j}\sigma(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.)

Prova di a). Per $\forall \nu \geqslant 0$, $\forall q \in \mathbb{N}^n$ si ha:

$$\|x\|^\nu \partial^q \left(\varphi(x+h) - \varphi(x) \right) = \|x\|^\nu \left((\partial^q\varphi)(x+h) - (\partial^q(x)) \right) \ ;$$

applicando l'item 2) al secondo membro dell'uguaglianza, tenendo presente che $(\partial^q\varphi)(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, si ottiene l'asserto.

Prova di b). Per $\forall \nu \geqslant 0$, $\forall q \in \mathbb{N}^n$ si ha:

$$\begin{aligned}&\|x\|^\nu \partial^q \left(\frac{\varphi(x+he_j) - \varphi(x)}{h} - \partial^{e_j}\varphi(x) \right) = \\ &\qquad = \|x\|^\nu \left(\frac{(\partial^q\varphi)(x+he_j) - (\partial^q\varphi)(x)}{h} - \partial^{e_j}(\partial^q\varphi)(x) \right) \ ;\end{aligned}$$

applicando l'item 3) al secondo membro dell'uguaglianza, tenendo presente che $(\partial^q \varphi)(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, si ottiene l'asserto. ■

Lemma 6.7.2. Siano $\alpha, \beta \in \{-1, 1\}$. Esiste $C > 0$ tale che per $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$1 + \|x\|^2 \leqslant C(1 + \|y\|^2)(1 + \|\alpha x + \beta y\|^2)$$

(vedi Schwartz, formula (VII,5;7), pg 247).

Cenno. È ovviamente sufficiente dimostrare che esiste $C > 0$ tale che per $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$1 + \|x\|^2 \leqslant C(1 + \|y\|^2)(1 + (\|x\| - \|y\|)^2) \ ,$$

e quindi è sufficiente dimostrare che la funzione:

$$\rho(X, Y) = \frac{(1 + Y^2)(1 + (X - Y)^2)}{1 + X^2} \ , \qquad X, Y \geqslant 0$$

ha minoranti positivi. Le considerazioni seguenti provano tale ultimo asserto.

- Per $\forall Y \geqslant 0$, la funzione $\rho(X, Y) : [0, +\infty)_X \to \mathbb{R}$ ha minimo

$$\mu(Y) = (1 + Y^2) \frac{4 + \left(Y - \sqrt{Y^2 + 4}\right)^2}{4 + \left(Y + \sqrt{Y^2 + 4}\right)^2} \quad (\text{per } X = \frac{Y + \sqrt{Y^2 + 4}}{2} \ ) \ ;$$

- la funzione $\mu(Y) : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ verifica le proprietà:

$$\mu(Y) > 0 \ (\forall Y \geqslant 0), \quad \mu(0) = 1, \quad \lim_{Y \to +\infty} \mu(Y) = 1 \ ,$$

pertanto esiste $A > 0$ tale che $\mu(Y) \geqslant A$ per $\forall Y \geqslant 0$. ■

Teorema 6.7.3. Siano $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha, \beta \in \{-1, 1\}$. Sussitono gli asserti:

a) sia $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$; posto:

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi(\alpha x + \beta y) \mathrm{d}y \ ,$$

si ha: $F(x) \in \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n)$;

b) per $\forall q \in \mathbb{N}^n$ si ha:

$$\partial^q F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \partial_x^q(\varphi(\alpha x + \beta y))\mathrm{d}y =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bullet \left(\alpha^{|q|}\partial^q \varphi\right)(\alpha x + \beta y)\mathrm{d}y \ .$$

c) sia $f_k \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ una successione tale che: $\mathscr{S}'\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k = f$; posto:

$$F_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_k(y) \bullet \varphi(\alpha x + \beta y)\mathrm{d}y \in \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n) \quad \text{(vedi a))} \ ,$$

si ha: $\mathscr{E}\text{-}\lim_{k\to\infty} F_k = F$ (nota: in questi appunti non è stata introdotta la *convergenza in* $\mathscr{O}_{\mathrm{M}}$).

Cenno. a),b). Gli asserti sono provati dalle considerazioni seguenti:

1) $F(x) \in C^0(\mathbb{R}^n)$.
(*Infatti:* per $\forall h \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$F(x+h) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi(\alpha(x+h) + \beta y)\mathrm{d}y \ ;$$

per a) del Lemma 6.7.1, in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)_y$ si ha:

$$\mathscr{S}\text{-}\lim_{h\to 0} \varphi(\alpha(x+h) + \beta y) = \varphi(\alpha x + \beta y) \ ;$$

allora per il Teorema 5.6.2 si ha $\lim_{h\to 0} F(x+h) = F(x)$.)

2) $F(x)$ è una funzione a crescita lenta s.u..
(*Infatti:* per il Teorema 5.7.3 esistono $g \in C^0(\mathbb{R}^n)$ a crescita lenta s.u. e $p \in \mathbb{N}^n$ tali che $f = \partial^p g$; si ha allora:

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial^p g(y) \bullet \varphi(\alpha x + \beta y)\mathrm{d}y =$$
$$= (-1)^{|p|} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \bullet \beta^{|p|}(\partial^p \varphi)(\alpha x + \beta y)\mathrm{d}y =$$
$$= (-\beta)^{|p|} \int_{\mathbb{R}^n} g(y)(\partial^p \varphi)(\alpha x + \beta y)\mathrm{d}y \ ;$$

essendo g continua a crescita lenta s.u. esistono $C_1 > 0$, $h \geqslant 0$ tali che $|g(x)| \leqslant C_1(1 + \|x\|^2)^{h/2}$ per $\forall x$, pertanto si ha:

$$\begin{aligned}|F(x)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \cdot |(\partial^p \varphi)(\alpha x + \beta y)|\, \mathrm{d}y \leqslant \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} C_1(1 + \|y\|^2)^{h/2} \cdot |(\partial^p \varphi)(\alpha x + \beta y)|\, \mathrm{d}y \ ;\end{aligned}$$

per il Lemma 6.7.2 esiste $C_2 > 0$ tale che

$$1 + \|y\|^2 \leqslant C_2(1 + \|x\|^2)(1 + \|\alpha x + \beta y\|^2) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \ ,$$

pertanto, posto $C = C_1 C_2$, si ha:

$$\begin{aligned}&|F(x)| \leqslant \\ &\leqslant C(1 + \|x\|^2)^{h/2} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|\alpha x + \beta y\|^2)^{h/2}\, |(\partial^p \varphi)(\alpha x + \beta y)|\, \mathrm{d}y = \\ &\leqslant C(1 + \|x\|^2)^{h/2} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|Y\|^2)^{h/2}\, |(\partial^p \varphi)(Y)|\, \mathrm{d}Y \ .)\end{aligned}$$

3) $F(x)$ ammette derivate parziali (in senso classico) e si ha:

$$\partial^{e_j} F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bullet (\alpha \partial^{e_j} \varphi)\, (\alpha x + \beta y) \mathrm{d}y \ .$$

Infatti: per $\forall h \neq 0$ si ha:

$$\begin{aligned}&\frac{F(x + he_j) - F(x)}{h} = \\ &\qquad = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \frac{\varphi(\alpha(x + he_j) + \beta y) - \varphi(\alpha x + \beta y)}{h} \mathrm{d}y \ ;\end{aligned}$$

per il Lemma 6.7.1 si ha:

$$\mathscr{S}\text{-}\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(\alpha(x + he_j) + \beta y) - \varphi(\alpha x + \beta y)}{h} = \alpha \partial^{e_j} \varphi(\alpha x + \beta y) \ ;$$

quindi per il Teorema 5.6.2 si ha:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x + he_j) - F(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \alpha \partial^{e_j} \varphi(\alpha x + \beta y) \mathrm{d}y \ .$$

4) Siccome
$$\partial^{e_j} F(x) = \alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bullet (\partial^{e_j}\varphi)(\alpha x + \beta y)\mathrm{d}y \ ,$$
e $\partial^{e_j}\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, gli item 1),2),3) applicati a $\partial^{e_j}\varphi$ invece che a φ provano che:

- ◇ $\partial^{e_j} F(x)$ è continua,
- ◇ $\partial^{e_j} F(x)$ è a cresita lenta s.u.,
- ◇ $\partial^{e_j} F(x)$ ammette derivate parziali (in senso classico) e si ha:
$$\partial^{e_l}\partial^{e_j} F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bullet \left((\alpha)^2 \partial^{e_l}\partial^{e_j}\varphi\right)(\alpha x + \beta y)\mathrm{d}y \ .$$

etc.) ...

c). Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un compatto; si consideri la seguente famiglia di elementi di $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)_y$:
$$\Phi_x(y) \triangleq \varphi(\alpha x + \beta y), \qquad x \in K \ .$$
Si ha:

- ○ tale famiglia è *limitata in* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, nel senso di Chwartz, Ch VII, §3, pg 235, infatti: per $\forall p, q \in \mathbb{N}^n$ si ha (vedi Lemma 6.7.2):
$$\begin{array}{l} |y^p \partial^q \Phi_x(y)| = |y^p| \cdot |(\partial^q\varphi)(\alpha x + \beta y)| \leqslant \\ \leqslant \|y\|^{|p|} \, |(\partial^q\varphi)(\alpha x + \beta y)| \leqslant (1 + \|y\|^2)^{|p|/2} \, |(\partial^q\varphi)(\alpha x + \beta y)| \leqslant \\ \leqslant C(1 + \|x\|^2)^{|p|/2}(1 + \|\alpha x + \beta y\|^2)^{|p|/2} \, |(\partial^q\varphi)(\alpha x + \beta y)| \leqslant \\ \leqslant C \left(\max_{x\in K}(1 + \|x\|^2)^{|p|/2}\right) \left\|(1 + \|\xi\|^2)^{|p|/2}\partial^q\varphi)(\xi)\right\|_{(\xi)\infty} \end{array} ;$$
- ○ $\mathscr{D}'\text{-}\lim_{k\to\infty}(f - f_k) = 0$;
- ○ per Schwartz Ch VII, §4, *($\mathscr{S}'$), dual de ($\mathscr{S}$)*, è applicabile l'equivalente del Th XI, Ch III, §3, pg 73,
- ○ si ha allora: $F - F_k$ converge a 0 uniformemente su K.

Per $\forall \partial^q$, tenuto conto di b), le considerazioni precedenti applicate a $\alpha^{|q|}\partial^q\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ provano che $\partial^q F - \partial^q F_k$ tende a 0 uniformemente su K.

Pertanto $F = \mathscr{E}\text{-}\lim_{k\to\infty} F_k$. ■

Teorema 6.7.4. Siano $f \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha, \beta \in \{-1, 1\}$. Sussitono gli asserti seguenti:

a) sia $\varphi \in \mathscr{S}$; posto:

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi(\alpha x + \beta y) \mathrm{d}y \ ,$$

si ha: $F(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

b) sia $\varphi_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ una successione tale che $\mathscr{S}\text{-}\lim_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi$; posto:

$$F_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi_k(\alpha x + \beta y) \mathrm{d}y \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \ ;$$

si ha: $\mathscr{S}\text{-}\lim_{k\to\infty} F_k = F$.

Cenno. a). Per il Teorema 6.7.3 si ha $F(x) \in \mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathbb{R}^n)$. Siano $\nu, \mu \in \mathbb{N}^n$; le considerazioni seguenti provano che

$$\lim_{\|x\|\to\infty} x^\nu \partial^\mu F(x) = 0 \ ,$$

e quindi che $F(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$:

- per il Teorema 6.6.3, esistono $m \in \mathbb{N}$ ed una famiglia

$$f_q(x) \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (q \in \mathbb{N}^n, |q| \leqslant m)$$

tali che:

$$f(x) = \sum_{|q|\leqslant m} \partial^q \frac{f_q(x)}{(1 + \|x\|^2)^{(|\nu|+n+2)}/2} \ ;$$

- siccome $\partial^{\mu+q}\varphi(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, esiste $C_q \geqslant 0$ tale che:

$$\left|\partial^{\mu+q}\varphi(x)\right| \leqslant \frac{C_q}{(1 + \|x\|)^{(|\nu|+1)/2}} \ ;$$

- per il Lemma 6.7.2, esiste $C > 0$ tale che:

$$\frac{1}{1 + \|\alpha x + \beta y\|^2} \leqslant C \frac{1 + \|y\|^2}{1 + \|x\|^2} \ ;$$

- allora si ha:

  $$\begin{aligned}
  &|x^\nu \partial^\mu F(x)| = \\
  &= \sum_{|q|\leqslant m} \left| x^\nu \alpha^{|\mu|}(-\beta)^{|q|} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f_q(y)}{(1+\|y\|^2)^{(|\nu|+n+2)/2}} (\partial^{\mu+q}\varphi)(\alpha x+\beta y)\mathrm{d}y \right| \leqslant \\
  &\leqslant \sum_{|q|\leqslant m} \|x\|^{|\nu|} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f_q(y)|}{(1+\|y\|)^{(|\nu|+n+2)/2}} \frac{C_q}{(1+\|\alpha x+\beta y\|^2)^{(|\nu|+1)/2}} \mathrm{d}y \leqslant \\
  &\leqslant \sum_{|q|\leqslant m} \frac{\|x\|^{|\nu|}}{(1+\|x\|^2)^{(|\nu|+1)/2}} C_q C^{(|\nu|+1)/2} \|f_q\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+\|y\|^2)^{(|\nu|+1)/2}}{(1+\|y\|^2)^{(|\nu|+n+2)/2}} \mathrm{d}y = \\
  &= \sum_{|q|\leqslant m} \frac{\|x\|^{|\nu|}}{(1+\|x\|^2)^{(|\nu|+1)/2}} C_q C^{(|\nu|+1)/2} \|f_q\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+\|y\|^2]^{(n+1)/2}} \mathrm{d}y \ ,
  \end{aligned}$$

  ove l'ultimo termine è infinitesimo per $\|x\| \to \infty$.

b). Si consideri la successione $\gamma_k \triangleq \varphi_k - \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$; si ponga:

$$\Gamma_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \gamma_k(\alpha x+\beta y)\mathrm{d}y \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = F_k(x) - F(x) \ .$$

Tenuto conto di a), si ha:

- $F, F_k, \Gamma_k = F_k - F \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$;

quindi:

- per provare l'asserto b) è sufficiente provare che: $\mathscr{S}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} \Gamma_k = 0$.

Siano quindi $\nu, \mu \in \mathbb{N}^n$; le considerazioni seguenti provano che:

$$\lim_{k\to\infty} \|x^\nu \partial^\mu \Gamma_k(x)\|_\infty = 0 \ ,$$

e quindi provano che: $\mathscr{S}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} \Gamma_k = 0$.

- Per il Teorema 6.6.3, esistono $m \in \mathbb{N}$ ed una famiglia

  $$f_q(x) \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (q \in \mathbb{N}^n, |q| \leqslant m)$$

  tali che:

  $$f(x) = \sum_{|q|\leqslant m} \partial^q \frac{f_q(x)}{(1+\|x\|^2)^{(|\nu|+n+2)/2}} \ ;$$

- siccome $\mathscr{S}\text{-}\lim_{k\to\infty}\gamma_k = 0$, esistono $A_{qk} > 0$ tali che:
  - $|\partial^{q+\mu}\gamma_k(x)| \leqslant \dfrac{A_{qk}}{(1+\|x\|^2)^{(|\nu|+1)/2}}$,
  - $\lim_{k\to\infty} A_{qk} = 0$;
- per il Lemma 6.7.2, esiste $C > 0$ tale che:

$$\frac{1}{1+\|\alpha x+\beta y\|^2} \leqslant C\frac{1+\|y\|^2}{1+\|x\|^2} \ ;$$

- si ha allora:

$$|x^\nu\partial^\mu\Gamma_k(x)| =$$

$$= \left|\sum_{|q|\leqslant m} x^\nu(\alpha)^{|\mu|}(-\beta)^{|q|}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f_q(y)}{(1+\|y\|^2)^{(|\nu|+n+2)/2}}(\partial^{q+\mu})(\alpha x+\beta y)\mathrm{d}y\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|q|\leqslant m}\|x\|^{|\nu|}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f_q(y)|}{(1+\|y\|^2)^{(|\nu|+n+2)/2}}\left|(\partial^{q+\mu})(\alpha x+\beta y)\right|\mathrm{d}y \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|q|\leqslant m}\|x\|^{|\nu|}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f_q(y)|}{(1+\|y\|^2)^{(|\nu|+n+2)/2}}\frac{A_{qk}}{(1+\|\alpha x+\beta y\|^2)^{(|\nu|+1)/2}}\mathrm{d}y \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|q|\leqslant m}\|x\|^{|\nu|}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f_q(y)|}{(1+\|y\|^2)^{(|\nu|+n+2)/2}}A_{qk}\left(C\frac{1+\|y\|^2}{1+\|x\|^2}\right)^{(|\nu|+1)/2}\mathrm{d}y \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|q|\leqslant m}\frac{\|x\|^{|\nu|}}{(1+\|x\|^2)^{(|\nu|+1)/2}}\|f_q\|_\infty A_{qk}C^{(|\nu|+1)/2}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(1+\|y\|^2)^{(|\nu|+1)/2}}{(1+\|y\|^2)^{(|\nu|+n+2)/2}}\mathrm{d}y \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|q|\leqslant m}\frac{\|x\|^{|\nu|}}{(1+\|x\|^2)^{(|\nu|+1)/2}}\|f_q\|_\infty A_{qk}C^{(|\nu|+1)/2}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+\|y\|^2)^{(n+1)/2}}\mathrm{d}y \ ;$$

- essendo

$$\frac{\|x\|^{|\nu|}}{(1+\|x\|^2)^{(|\nu|+1)/2}}$$

  limitata su $\mathbb{R}^n$, l'ultimo membro converge a 0 uniformemente su $\mathbb{R}^n$; quindi si ha: $\lim_{k\to\infty}\|x^\nu\partial^\mu\Gamma_k(x)\|_\infty = 0$. ■

Teorema 6.7.5. Siano $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha, \beta \in \{-1, 1\}$. Sussistono gli asserti:

a) sia $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$; posto:

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bullet \varphi(\alpha x + \beta y) \mathrm{d}y \ ,$$

si ha: $F(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$;

b) sia $f_k \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ una successione tale che: $\mathscr{E}'\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k = f$, e sia

$$F_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_k(y) \bullet \varphi(\alpha x + \beta y) \mathrm{d}y \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \ ;$$

si ha: $\mathscr{S}\text{-}\lim_{k\to\infty} F_k = F$.

Cenno. a). Essendo $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}(\mathbb{R}^n)$, l'asserto è provato dal Teorema 6.7.4.

b). Per $\forall k \in \mathbb{N}$, si ponga: $g_k(x) \triangleq f_k(x) - f(x)$. Sussistono gli asserti seguenti:

- $\mathscr{E}'\text{-}\lim_{k\to\infty} g_k = 0$;
- per Schwartz (vedi b) di Remarque 2°, §8, Ch. VI, pg 202) esistono $m \in \mathbb{N}$, ed una famiglia

  $$g_{kq} \in C^0(\mathbb{R}^n) \quad (k \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N}^n,\ |q| \leqslant m) \ ,$$

  tali che:

  - la famiglia g_{kq} è equilimitata in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$,
  - per $\forall |q| \leqslant m$, la successione g_{kq} converge a 0 uniformemente su tutti i compatti,
  - per $\forall k$ si ha: $g_k = \sum_{|q|\leqslant m} \partial^q g_{kq}$;
- siccome la successione g_k è $\mathscr{E}'$-convergente, per il Teorema 4.4.2 esiste un compatto Γ tale che $\forall$supp $g_k \subset \Gamma$; allora, per il Corollario 3.7.3 esiste $\zeta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tale $\forall g_k = \zeta g_k$; pertanto si ha:

  $$g_k = \sum_{|q|\leqslant m} \zeta \partial^q g_{kq} \ ;$$

  sviluppando opportunamente i singoli prodotti $\zeta \partial^q g_{kq}$, si ottiene una nuova analoga famiglia verificante l'ulteriore proprietà che tutti i suoi membri hanno supporto contenuto nel supporto di ζ;

- tenuto conto del precedente item (eventualmente sostituendo la famiglia originaria con la nuova) possiamo supporre che la famiglia g_{kq} verifichi l'ulteriore proprietà:
  - esiste un compatto K tale che $\forall \text{supp } g_{kq} \subset K$.

Si ponga:

$$G_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g_k(y) \bullet \varphi(\alpha x + \beta y)\mathrm{d}y = F_k(x) - F(x) \ .$$

Le considerazioni seguenti provano che $\mathscr{S}\text{-}\lim_{k\to\infty} G_k = 0$, e quindi, tenuto conto di a), provano che $\mathscr{S}\text{-}\lim_{k\to\infty} F_k = F$.

Siano $\nu, \mu \in \mathbb{N}^n$; si ha:

- $$x^\nu \partial^\mu G_k(x) = x^\nu \partial^\mu \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|q|\leqslant m} (\partial^q g_{kq})(y) \bullet \varphi(\alpha x + \beta y)\mathrm{d}y \right) =$$
$$= \sum_{|q|\leqslant m} x^\nu \partial^\mu \left(\int_{\mathbb{R}^n} (\partial^q g_{kq})(y) \bullet \varphi(\alpha x + \beta y)\mathrm{d}y \right) =$$
$$= \sum_{|q|\leqslant m} \alpha^{|\mu|}(-\beta)^{|q|} x^\nu \int_{\mathbb{R}^n} g_{kq}(y) \bullet (\partial^{q+\mu}\varphi)(\alpha x + \beta y)\mathrm{d}y =$$
$$= \sum_{|q|\leqslant m} \alpha^{|\mu|}(-\beta)^{|q|} x^\nu \int_{\mathbb{R}^n} g_{kq}(y)(\partial^{q+\mu}\varphi)(\alpha x + \beta y)\mathrm{d}y \ ;$$

- per $\forall |q| \leqslant m$:
  - tenuto conto che $\partial^{q+\mu}\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, esiste $C_q > 0$ tale che per $\forall X \in \mathbb{R}^n$ si ha:
$$|(\partial^{q+\mu}\varphi)(X)| \leqslant \frac{C_q}{(1 + \|X\|^2)^{|\nu|/2}} \ ,$$
  - tenuto conto del Lemma 6.7.2, esiste $C > 0$ tale che per $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha:
$$\frac{1}{1 + \|\alpha x + \beta y\|^2} \leqslant C \frac{1 + \|y\|^2}{1 + \|x\|^2} \ ;$$

conseguentemente si ha:

$$\begin{aligned}
&\left| x^\nu \int_{\mathbb{R}^n} g_{kq}(y)(\partial^{q+\mu}\varphi)(\alpha x + \beta y)\mathrm{d}y \right| = \\
&\quad = \left| x^\nu \int_K g_{kq}(y)(\partial^{q+\mu}\varphi)(\alpha x + \beta y)\mathrm{d}y \right| \leqslant \\
&\quad \leqslant (\sup_K |g_{kq}|)\|x\|^{|\nu|} \int_K |(\partial^{q+\mu}\varphi)(\alpha x + \beta y)|\mathrm{d}y \leqslant \\
&\quad \leqslant (\sup_K |g_{kq}|)\|x\|^{|\nu|} \int_K \frac{C_q}{(1 + \|\alpha x + \beta y\|^2)^{|\nu|/2}}\mathrm{d}x \leqslant \\
&\quad \leqslant (\sup_K |g_{kq}|)C_q C \left(\int_K (1 + \|y\|^2)^{|\nu|/2}\mathrm{d}y \right) \frac{\|x\|^{|\nu|}}{(1 + \|x\|^2)^{|\nu|/2}} \ ;
\end{aligned}$$

ovviamente esiste $B < 0$ tale che:

$$\frac{\|x\|^{|\nu|}}{(1 + \|x\|^2)^{|\nu|/2}} \leqslant B \ ;$$

ne segue che esiste una costante A_q, dipendente da q (ed ovviamente anche da ν, μ) ma indipendente da k, tale che:

$$\left| x^\nu \int_{\mathbb{R}^n} g_{kq}(y)(\partial^{q+\mu}\varphi)(\alpha x + \beta y)\mathrm{d}y \right| \leqslant A_q(\sup_K |g_{kq}|) \ ;$$

- si ha quindi:

  $$|x^\nu \partial^\mu G_k(x)| \leqslant \sum_{|q| \leqslant m} A_q(\sup_K |g_{kq}|);$$

  pertanto la successione $x^\nu \partial^\mu G_k(x)$ tende a 0 uniformemente su $\mathbb{R}^n$, e quindi la successione $G_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ tende a 0 in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. ■

Lemma 9.5.2. Sia $f(x) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, e sia a_k una successione di elementi di supp f. Sussite l'asserto sguente:

- per ogni intorno $I(0, r)$ esiste $\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tale che:

  $$\text{supp } \varphi \subset I(0, r) \ , \quad \forall \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bullet \varphi(x - a_k)\mathrm{d}x \neq 0 \ .$$

Cenno. Per $\forall k$ esiste $\varphi_k(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tale che:

$$\operatorname{supp}\, \varphi_k \subset I(a_k, r)\ , \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bullet \varphi_k(x)\mathrm{d}x \neq 0\ .$$

Con procedimento induttivo si costruiscono due successioni:

$$c_1, c_2, c_3, \ldots \ (\in \mathbb{C})\ , \qquad \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots \ (> 0)$$

tali che:

- per $k = 1$:
  - $c_1\varphi_1(x + a_1)$ sia maggiorato in modulo da $1/2^1$,
  - posto: $F_1(x) = c_1\varphi_1(x + a_1)$ si abbia:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bullet F_1(x - a_1)\mathrm{d}x \right| > \Gamma_1$$

- per $k \geqslant 2$:
  - $c_k\varphi_k(x + a_k)$ e tutte le sue ∂^q con $|q| \leqslant k$ siano maggiorati in modulo da $1/2^k$,
  - posto: $F_k(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j\varphi_j(x + a_j)$:
    - per $\nu = 1, \ldots, k-1$ si abbia

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bullet F_k(x - a_\nu)\mathrm{d}x \right| > \Gamma_\nu \left(1 - \sum_{\mu=1}^{k-\nu} 1/3^\mu \right)\ ,$$

    - per $\nu = k$ si abbia

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bullet F_k(x - a_k)\mathrm{d}x \right| > \Gamma_k\ .$$

Si consideri la funzione $\varphi(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definita da:

$$\forall a \in \mathbb{R}^n : \quad \varphi(a) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j\varphi_j(x + a_j)\ ;$$

sussitono gli asserti seguenti:

i) $\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, supp $\varphi \subset I(0,r)$,

ii) $\varphi = \mathscr{D}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} F_k$,

iii) sia $\nu \in \mathbb{N}, \nu \geqslant 1$:

◇ per $\forall k > \nu$ si ha:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bullet F_k(x - a_\nu)\mathrm{d}x\right| > \Gamma_\nu \left(1 - \sum_{\mu=1}^{k-\nu} 1/3^\mu\right) > \Gamma_\nu/2 \ ,$$

◇ tenuto conto dell'item ii), per il Lemma 2.14.1 si ha:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bullet \varphi(x - a_\nu)\mathrm{d}x\right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bullet F_k(x - a_\nu)\mathrm{d}x\right| \geqslant \Gamma_\nu/2 > 0 \ .$$

■