MISURA E INTEGRALE DI LEBESGUE

Scuola di Dottorato in Ingegneria “Leonardo da Vinci”

Mario Poletti

2013/14

Introduzione

In questi appunti ricordiamo brevemente le definizioni di *misura di Jordan* per sottinsiemi di $\mathbb{R}^n$ e di *integrale di Riemann* per funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$, e introduciamo le nozioni di *misura di Lebesgue* e di *integrale di Lebesgue.*

Tutti gli insiemi misurabili secondo Jordan, lo sono anche secondo Lebesgue, e le due corrispondenti misure coincidono.

Tutte le funzioni integrabili secondo Riemann, lo sono anche secondo Lebesgue, e i due corrispondenti integrali coincidono.

L'*integrale di Lebesgue* viene definito in maniera *solo apparentemente* intuitiva, come differenza delle misure delle parti positiva e negativa comprese tra il dominio e il grafico.

Vantaggio: la semplicità dell'esposizione, e la trasformazione in ovvii di molti risultati usuali.

Costo: giustificare l'equivalenza tra la definizione data e le definizioni usuali. Tale costo viene pagato:

- nella Sezione 2.3, la cui lettura può essere omessa, con l'eccezione dell'enunciato del Teorema 2.3.1;
- e nella Sezione 2.4, nel quale la dimostrazione del Teorema 2.4.3 può essere omessa.

Indice

Capitolo 1

Misura di Lebesgue

1.1 Rettangoli e plurirettangoli in $\mathbb{R}^n$

Le considerazioni che seguono sono comuni alla misura di Jordan ed a quella di Lebesgue: introducono le nozioni di *rettangolo* e *plurirettangolo* in $\mathbb{R}^n$, e la definizione della loro misura.

Siano

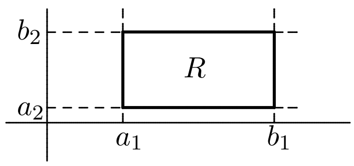
$$a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$$

tali che

$$a_1 < b_1, \ldots, a_n < b_n$$

e sia

$$R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$



▼ R si dice un *rettangolo* di $\mathbb{R}^n$,

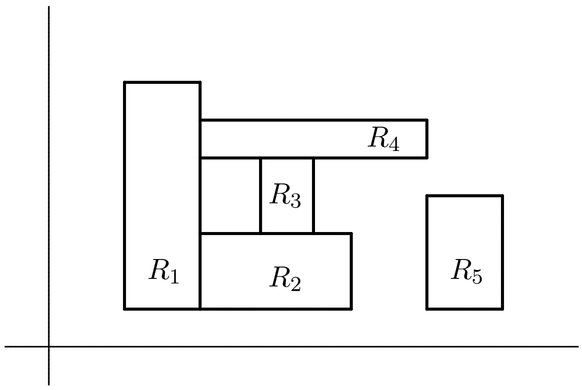
⧫ R si dice *misurabile* sia secondo Jordan che secondo Lebesgue,

▲ si pone, sia secondo Jordan che secondo Lebesgue,

$$\text{mis } R = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$$

Sia $R_1, \dots, R_\nu$ una famiglia finita di rettangoli di $\mathbb{R}^n$, a due a due privi di punti interni in comune, e sia

$$P = \bigcup_{j=1}^{\nu} R_j$$



▼ P si dice un *plurirettangolo* di $\mathbb{R}^n$

♦ P si dice *misurabile* sia secondo Jordan che secondo Lebesgue,

▲ si pone, sia secondo Jordan che secondo Lebesgue,

$$\text{mis } P = \sum_{j=1}^{\nu} \text{mis } R_j$$

Nota. La definizione di mis P è una buona definizione: se $Q_1, \dots, Q_\mu$ è una seconda famiglia finita di rettangoli di $\mathbb{R}^n$, a due a due privi di punti interni in comune, tale che

$$P = \bigcup_{j=1}^{\mu} Q_j$$

si ha infatti (dimostrazione omessa)

$$\sum_{j=1}^{\mu} \text{mis } Q_j = \sum_{j=1}^{\nu} \text{mis } R_j$$

1.2 Misura di Jordan in $\mathbb{R}^n$

Le considerazioni che seguono dicono quali sottinsiemi di $\mathbb{R}^n$ siano chiamati *misurabili secondo Jordan*, e come se ne definisca la *misura secondo Jordan.*

Sia

$$A \subset \mathbb{R}^n$$

un sottinsieme limitato di $\mathbb{R}^n$;

▼ si pone

$$J\text{-mis}_{\mathrm{i}}\ A = \begin{cases} 0 & \text{se } \nexists \text{ plurirettangoli } P \subset A \\ \sup\{\text{mis } P : P \text{ plurirettangolo} \subset A\} \in (0, +\infty) & \\ & \text{se } \exists \text{ plurirettangoli } P \subset A \end{cases} ;$$

il numero J-mis$_{\mathrm{i}}$ A si dice la *J-misura interna* di A;

◆ si pone

$$J\text{-mis}_{\mathrm{e}}\ A = \inf\{\text{mis } P : P \text{ plurirettangolo} \supset A\} \in [0, +\infty) \ ;$$

il numero J-mis$_{\mathrm{e}}$ A si dice la *J-misura esterna* di A;

◆ ovviamente si ha

$$J\text{-mis}_{\mathrm{i}}\ A \leqslant J\text{-mis}_{\mathrm{e}}\ A \ ;$$

▲ se

$$J\text{-mis}_{\mathrm{i}}\ A = J\text{-mis}_{\mathrm{e}}\ A \ ,$$

allora

- ▽ A si dice *misurabile secondo Jordan*;
- △ il numero J-mis$_{\mathrm{i}}$ $A = J$-mis$_{\mathrm{e}}$ $A \in \mathbb{R}$ si dice la *J-misura* di A, e si denota con

$$J\text{-mis } A \ .$$

Sia

$$A \subset \mathbb{R}^n$$

un sottinsieme non limitato di $\mathbb{R}^n$;

▼ se per $\forall$ rettangolo R di $\mathbb{R}^n$, l'insieme limitato

$$A \cap R$$

risulta misurabile secondo Jordan, allora A si dice *misurabile secondo Jordan*;

▲ in tal caso si definisce la J-misura di A tramite:

$$J\text{-mis } A = \sup \left\{ J\text{-mis } (A \cap R) : R \text{ rettangolo di } \mathbb{R}^n \right\} \in [0, +\infty] \; .$$

1.3 Misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$

Le considerazioni che seguono dicono quali sottinsiemi di $\mathbb{R}^n$ siano chiamati *misurabili secondo Lebesgue*, e come se ne definisca la *misura secondo Lebesgue*.

Nota: Per gli insiemi misurabili secondo Jordan, la specificazione *secondo Jordan* sarà sempre fatta; per gli insiemi misurabili secondo Lebesgue, la specificazione *secondo Lebesgue* verrà sistematicamente omessa. In particolare la frase *A è misurabile* significherà sempre *A è misurabile secondo Lebesgue*.

▼ Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$

▽ Ω si dice *misurabile*

◊ se $\Omega = \emptyset$ si pone

$$\text{mis } \Omega = 0$$

△ se $\Omega \neq \emptyset$ si pone

$$\text{mis } \Omega = \sup\{\text{mis } P : P \text{ plurirettangolo} \subset \Omega\} \in (0, +\infty)$$

♦ Sia K un chiuso limitato (ossia un compatto) di $\mathbb{R}^n$

▽ K si dice *misurabile*

△ si pone

$$\text{mis } K = \inf\{\text{mis } P : P \text{ plurirettangolo} \supset K\} \in [0, +\infty)$$

♦ Sia A un sottinsieme limitato di $\mathbb{R}^n$; si pone

$$\begin{aligned}\text{mis}_\text{i}\ A &= \textit{misura interna di } A = \\ &\sup\{\text{mis}\ K : K \text{ chiuso limitato} \subset A\} \\ \text{mis}_\text{e}\ A &= \textit{misura esterna di } A = \\ &\inf\{\text{mis}\ \Omega : \Omega \text{ aperto limitato} \supset A\}\end{aligned}$$

si ha

$$0 \leqslant \text{mis}_\text{i}\ A \leqslant \text{mis}_\text{e}\ A < +\infty$$

se

▽ $\text{mis}_\text{i}\ A = \text{mis}_\text{e}\ A$

allora

◇ A si dice *misurabile*

△ si pone

$$\text{mis}\ A = \text{mis}_\text{i}\ A = \text{mis}_\text{e}\ A \in [0, +\infty)$$

▲ Sia A un sottinsieme non limitato di $\mathbb{R}^n$; se

▽ per ogni rettangolo R, l'insieme limitato

$$A \cap R$$

è misurabile

allora

◇ A si dice *misurabile*

△ si pone

$$\text{mis}\ A = \sup\{\text{mis}\ (A \cap R) : R \text{ rettangolo}\} \in [0, +\infty]$$

Le considerazioni che seguono, provano che tutti gli insiemi misurabili secondo Jordan, lo sono anche secondo Lebesgue, e le due corrispondenti misure coincidono.

Tali considerazioni giustificano **l'abbandono** della misura secondo Jordan.

1.3.1 Teorema: Sussistono gli asserti (provare per esercizio):

a) Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato; si ha:

$$0 \leqslant J\text{-mis}_\text{i}\ A \leqslant \text{mis}_\text{i}\ A \leqslant \text{mis}_\text{e}\ A \leqslant J\text{-mis}_\text{e}\ A < \infty\ .$$

b) Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato; se A è misurabile secondo Jordan, allora (provare usando a)):
   - A è misurabile (ossia è misurabile secondo Lebesue),
   - J-mis $A =$ mis A .

c) Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme non limitato; se A è misurabile secondo Jordan, allora (provare usando b)):
   - A è misurabile,
   - J-mis $A =$ mis A .

1.4 Proprietà della misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$

1.4.1 Teorema: Siano $A, B \subset \mathbb{R}^n$; se $A,\ B$ sono misurabili, allora:

$\triangledown$ gli insiemi

$$A \cup B \qquad A \cap B \qquad \complement A = \mathbb{R}^n \setminus A \qquad B \setminus A$$

sono misurabili

$\lozenge$ $A \cap B = \emptyset \Rightarrow$ mis $(A \cup B) =$ mis $A +$ mis B (con la convenzione: *numero*$+\infty = +\infty + \infty = +\infty$)
(**ossia:** la misura di Lebesgue è *finitamente additiva*)

$\lozenge$ $A \subset B \Rightarrow$ mis $A \leqslant$ mis B

$\vartriangle$ $A \subset B$ e mis $B < +\infty \Rightarrow$ mis $(B \setminus A) =$ mis $B -$ mis A

Nota 1): proprietà analoghe sono verificate anche dalla misura di Jordan; in particolare la misura di Jordan è finitamente additiva.

Nota 2): le proprietà che seguono sono invece verificate solo dalla misura di Lebesgue, e non si applicano alla misura di Jordan.

1.4.2 Teorema(numerabile additività)**:** Sia

$$A_1, A_2, A_3, \ldots$$

una successione di sottinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$; se tali insiemi sono a due a due disgiunti allora si ha (dimostrazione omessa):

▽ $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ è misurabile

△ mis $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \sum_{j=1}^{\infty} \text{mis } A_j$

(**ossia:** la misura di Lebesgue è *numerabilmente additiva*)

1.4.3 Teorema(caratterizzazione degli insiemi misurabili e di misura nulla)**:** Sia $A \subset \mathbb{R}^n$; sono equivalenti gli asserti:

a) A è misurabile, e mis $A = 0$

b) per ogni $\varepsilon > 0$,

▽ **o** esiste una famiglia finita di rettangoli

$$R_1, \ldots, R_h$$

tale che

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{h} R_j \qquad \sum_{j=1}^{h} \text{mis } R_j < \varepsilon \ ,$$

△ **o** esiste una successione di rettangoli

$$R_1, R_2, R_3, \ldots$$

tale che

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \text{mis } R_j < \varepsilon \ .$$

Dai Teoremi 1.4.2 e 1.4.3 si deducono i seguente Corollari.

1.4.4 Corollario 1(completezza di mis)**:** Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile tale che

$$\text{mis } A = 0 \ ;$$

allora per $\forall B \subset A$ si ha:

- B è misurabile,
- mis $B = 0$.

Il fatto che tutti i sottinsiemo di un insieme di misura nulla siano misurabili (ed abbiano ovviamente misura nulla), si esprime dicendo che “mis ” è una misura *completa*.

1.4.5 Corollario 2: Sia

$$A_1, A_2, A_3, \ldots$$

una successione di sottinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$. Si ha:

▼ $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ è misurabile

♦ mis $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \text{mis } A_j$

Cenno. Si ponga

$$B_1 = A_1 \qquad B_j = A_j \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{j-1}) \qquad j = 2, 3, 4 \ldots$$

e si osservi che:

- ∘ ogni B_j è misurabile,
- ∘ tali B_j sono a due a due disgiunti,
- ∘ $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$.

■

▲ $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ è misurabile

Cenno. Sia $a \in \mathbb{R}^n$; si ha

$$a \in \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \Longleftrightarrow \text{per ogni } j,\ a \in A_j \Longleftrightarrow$$

$$\text{per ogni } j,\ a \notin \mathbb{R}^n \setminus A_j \Longleftrightarrow a \in \mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (\mathbb{R}^n \setminus A_j) \right)$$

Ne segue $$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (\mathbb{R}^n \setminus A_j) \right)$$ ■

1.4.6 Corollario 3: Sia $A \subset \mathbb{R}^n$. Sono equivalenti gli asserti:

a) A è misurabile,

b) esiste una successione $A_1, A_2, A_3, \dots$ di sottinsiemi limitati e misurabili di A, tale che

$$\begin{cases} A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \\ A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \end{cases}$$

Cenno. a)⇒b). Si ponga ad esempio

$$A_k = A \cap \big([-k,k] \times \cdots \times [-k,k]\big) \ .$$

b)⇒a). A è misurabile in quanto unione *numerabile* di misurabili. ■

In tal caso, se $A_1, A_2, A_3, \dots$ è una qualsiasi successione di sottinsiemi limitati e misurabili di A, tale che

$$\begin{cases} A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \\ A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \end{cases}$$

allora si ha

$$\text{mis } A = \lim_{k\to\infty} \text{mis } A_k$$

Cenno. Si osservi che, posto $A_0 = \emptyset$, si ha

▽ $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \setminus A_{k-1})$

◊ gli insiemi $A_k \setminus A_{k-1}$, con $k = 1, 2, 3, \dots$, sono misurabile e a due a due disgiunti

△ $\text{mis } A = \sum_{k=1}^{\infty} \text{mis } (A_k \setminus A_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} \text{mis } A_k$

■

ESERCIZI

▼ In $\mathbb{R}^n$, per $\forall r \in \mathbb{R}$ si consideri il sottinsieme

$$A = R^{n-1} \times \{r\} \ ;$$

si provi che A è misurabile, e mis $A = 0$.

♦ In $\mathbb{R}^n$, si consideri il sottinsieme

$$A = R^{n-1} \times \mathbb{Q} \ ;$$

si provi che A è misurabile, e mis $A = 0$.

♦ Sia A un sottinsieme *numerabile* di $\mathbb{R}^n$; si provi che

- $\triangledown$ A è misurabile
- $\triangle$ mis $A = 0$

Cenno. Siccome A è numerabile, i suoi elementi possono essere scritti sotto forma di successione

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

e quindi

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{a_j\}$$

ove ogni mis $\{a_j\} = 0$ ■

♦ Si consideri $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$; si provi che

- $\triangledown$ $\mathbb{Q}^n$ è misurabile
- $\triangle$ mis $\mathbb{Q}^n = 0$

(si ricordi che $\mathbb{Q}^n$ è numerabile)

♦ In $\mathbb{R}^n$, si consideri una successione

$$q_1, q_2, q_3, \ldots$$

costituita da tutti e soli gli elementi di $\mathbb{Q}^n$, e sia

$$\varepsilon > 0 \ .$$

Per $j = 1, 2, 3, \ldots$, sia R_j un rettangolo di $\mathbb{R}^n$ tale che, posto $\Omega_j = R_j^\circ$, si abbia

$$q_j \in \Omega_j, \ \text{mis } \Omega_j < \varepsilon/2^j$$

Si ponga

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j \qquad K = \mathbb{R}^n \setminus \Omega \ .$$

Si osservi che

▽ Ω è un aperto denso in $\mathbb{R}^n$,

△ mis $\Omega < \varepsilon$

Cenno. $\text{mis } \Omega \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \text{mis } \Omega_j < \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon/2^j = \varepsilon$ ■

▽ K è un chiuso senza punti interni,

△ mis $K = +\infty$.

Sia R un qualsiasi rettangolo di $\mathbb{R}^n$ tale che

$$\text{mis } R > 2\varepsilon \ ,$$

e sia R° il suo interno; si osservi che:

▽ $R^\circ \cap \Omega$ è un aperto la cui misura è $\leqslant$ mis $\Omega < \varepsilon$,

△ ogni plurirettangolo $\subset R^\circ \cap \Omega$ ha misura $< \varepsilon$, ogni plurirettangolo $\supset R^\circ \cap \Omega$ contiene R e pertanto ha misura $\geqslant$ mis $R > 2\varepsilon$; ne segue che $R^\circ \cap \Omega$ è un aperto limitato non misurabile secondo Jordan;

▽ $R \setminus \Omega$ è un compatto senza punti interni la cui misura è $>$ mis $R - \varepsilon$,

△ non esistono plurirettangoli $\subset R \setminus \Omega$, se P è un plurirettangolo tale che $R \setminus \Omega \subset P$ allora

$$\text{mis } P \geqslant \text{mis } (R \setminus \Omega) > \text{mis } R - \varepsilon > \varepsilon \ ;$$

ne segue che $R \setminus \Omega$ è un compatto non misurabiloe secondo Jordan.

▲ Siano $A \subset \mathbb{R}^n, \ B \subset \mathbb{R}^m$ due insiemi misurabili; si provi che

▽ se mis $A = 0$ oppure se mis $B = 0$, allora mis $A \times B = 0$;

in generale si ha (dimostrazione omessa)

◊ $A \times B$ è misurabile

△ mis $A \times B =$ (mis A) $\cdot$ (mis B) (con la convenzione $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$).

1.5 Insiemi non misurabili secondo Lebesgue

Il seguente Teorema fornisce condizioni che implicano la non misurabilità di un insieme.

1.5.1 Teorema. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$. Se A è limitato, ed esiste una successione $b_1, b_2, b_3, \ldots \in \mathbb{R}^n$ tale che:

- $b_1 + A, b_2 + A, b_3 + A, \ldots$ è una partizione di $\mathbb{R}^n$,
- l'insieme $\{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$ ha sottinsiemi infiniti limitati,

allora A è non misurabile.

Cenno. Se A fosse misurabile, dalla prima condizione seguirebbe $\operatorname{mis} A \neq 0$, e dalla seconda seguirebbe $\operatorname{mis} A = 0$ (si ricordi che mis è numerabilmente additiva). ■

Il seguente Teorema fornisce un esempio di un tale A, e quindi fornisce un esempio di **sottinsieme non misurabile** di $\mathbb{R}^n$.

1.5.2 Teorema. Sia $\mathbf{T}$ l'insieme avente per elementi i traslati di $\mathbb{Q}^n$ in $\mathbb{R}^n$, e sia $C = [0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$. Sussistono gli asserti:

1) Siano $H, K \in \mathbf{T}$ tali che: $H \cap K \neq \emptyset$; allora si ha: $H = K$.
2) Tenuto conto di 1., $\mathbf{T}$ è una partizione di $\mathbb{R}^n$.
3) $\forall H \in \mathbf{T}$ è denso in $\mathbb{R}^n$.
4) Per l'**assioma della scelta**, tenuto conto di 3., esiste una applicazione
$$\rho : \mathbf{T} \to C$$
tale che: $\rho(H) \in C \cap H$ per $\forall H \in \mathbf{T}$.
5) Si ponga:
$$A \triangleq \{\rho(H) : H \in \mathbf{T}\} ,$$
e sia $b_1, b_2, b_3, \ldots$ una successione senza ripetizioni, costituita da tutti e soli gli elementi di $\mathbb{Q}^n$.
6) A e la successione $b_1, b_2, b_3, \ldots$ verificano le condizioni del Teorema 1.5.1, *infatti:*
   - per $\forall x \in \mathbb{R}^n$ esistono unici $a \in A,\ q \in \mathbb{Q}^n$ tali che: $x = a + q$; pertanto:
   $$b_1 + A, b_2 + A, b_3 + A, \ldots$$
   è una partizione di $\mathbb{R}^n$,

- l'insieme $\{b_1, b_2, b_3, \ldots\} = \mathbb{Q}^n$ ha ovviamente sottinsiemi infiniti limitati.

Nota: Il legame tra "esistenza di sottinsiemi non misurabili di $\mathbb{R}^n$" e "assioma della scelta" è argomento non banale di "logica matematica". Ci limitiamo alle seguenti considerazioni pragmatiche:

- tutti gli esempi noti di sottinsiemi non misurabili di $\mathbb{R}^n$ utilizzano l'assioma della scelta;
- quando un sottinsieme di $\mathbb{R}^n$ è definito senza fare uso dell'assioma della scelta,
  - "sarebbe ben eccezionale che risultasse non misurabile";
  - ci assumiamo quindi responsabilità e rischio di "considerarlo misurabile", risparmiandoci "fastidiose ma routinarie" dimostrazioni.

Capitolo 2

Integrale di Lebesgue

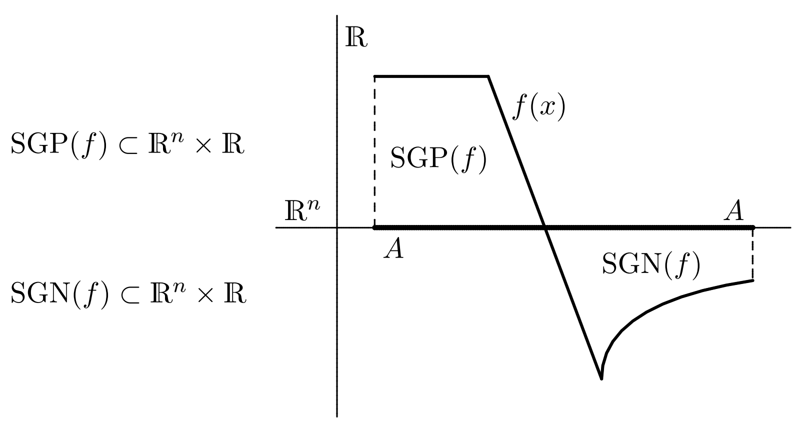
2.1 Funzioni a valori in $\mathbb{R}$ misurabili e integrabili secondo Riemann

Le considerazioni che seguono dicono quali funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ siano chiamate *integrabili secondo Rieman*, e come se ne definisca l'*integrale di Riemann.*

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme J-misurabile (ossia misurabile secondo Jordan), e sia

$$f(x) : A \to \mathbb{R}$$

una funzione a valori reali. Si considerino gli insiemi



definiti da

$$\begin{aligned}\mathrm{SGP}(f) &= \textit{sottografico positivo di } f = \\ &\qquad \{(x,\xi) \in A \times \mathbb{R} : 0 \leqslant f(x), 0 \leqslant \xi \leqslant f(x)\} \\ \mathrm{SGN}(f) &= \textit{sovragrafico negativo di } f = \\ &\qquad \{(x,\xi) \in A \times \mathbb{R} : f(x) \leqslant 0, f(x) \leqslant \xi \leqslant 0\}\end{aligned}$$

Se

▼ $\mathrm{SGP}(f)$ e $\mathrm{SGN}(f)$ sono entrambi J-misurabili

allora

▲ f si dice una funzione *misurabile secondo Riemann* o una funzione *R-misurabile* su A

Se

▼ $\mathrm{SGP}(f)$ e $\mathrm{SGN}(f)$ sono entrambi J-misurabili, e inoltre si ha

$$J\text{-mis } \mathrm{SGP}(f) < +\infty \qquad J\text{-mis } \mathrm{SGN}(f) < +\infty$$

allora

♦ f si dice una funzione *integrabile secondo Riemann* o una funzione *R-integrabile* su A

si pone

▲ $$R\text{-}\int_A f = R\text{-}\int_A f(x)\mathrm{d}x = \textit{integrale di Riemann di } f \textit{ su } A = \\ J\text{-mis } \mathrm{SGP}(f) - J\text{-mis } \mathrm{SGN}(f)$$

Il seguente ben noto Teorema riassume tutto quanto dell'Integrale di Riemann è utile.

2.1.1 Teorema(R-integrabilità di una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato)**:** Siano $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$, e sia

$$f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$$

una funzione continua.

Sia

$$F : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$$

una primitiva di f.

Per $\forall a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$\alpha < a < b < \beta \ ,$$

si ha:

- f è R-integrabile su $[a, b]$;
- $R\text{-}\displaystyle\int_{[a,b]} f = F(b) - F(a)$.

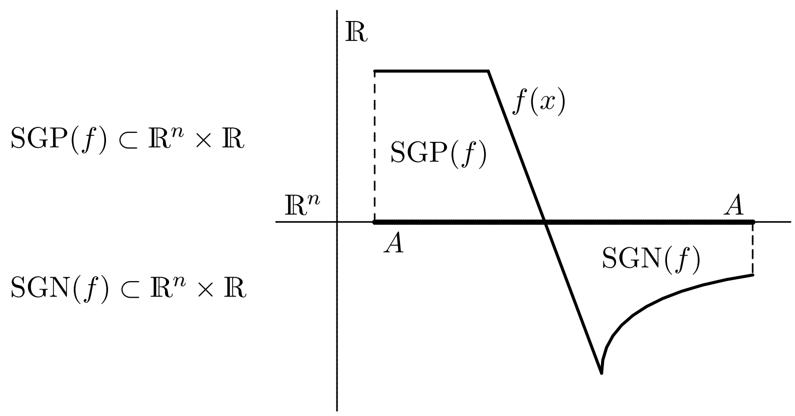
2.2 Funzioni a valori in $\mathbb{R}$ misurabili ed integrabili secondo Lebesgue

Le considerazioni che seguono dicono quali funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ siano chiamate *integrabili secondo Lebesgue*, e come se ne definisca l'*integrale di Lebesgue*. Come per la misura, anche per l'integrale le precisazioni *secondo Lebesgue* e *di Lebesgue* saranno sistematicamente omesse.

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile, e sia

$$f(x) : A \to \mathbb{R}$$

una funzione a valori reali. Si considerino gli insiemi



definiti da

$\mathrm{SGP}(f) =$ *sottografico positivo di* $f =$

$$\{(x, \xi) \in A \times \mathbb{R} : 0 \leqslant f(x), 0 \leqslant \xi \leqslant f(x)\}$$

$\mathrm{SGN}(f) =$ *sovragrafico negativo di* $f =$

$$\{(x, \xi) \in A \times \mathbb{R} : f(x) \leqslant 0, f(x) \leqslant \xi \leqslant 0\}$$

Se

▼ SGP(f) e SGN(f) sono entrambi misurabili

allora

▲ f si dice una funzione *misurabile* su A

Se

▼ SGP(f) e SGN(f) sono entrambi misurabili, e inoltre si ha

$$\text{mis SGP}(f) < +\infty \qquad \text{mis SGN}(f) < +\infty$$

allora

⧫ f si dice una funzione *integrabile* su A

si pone

▲ $$\int_A f = \int_A f(x)\mathrm{d}x = \textit{integrale di } f \textit{ su } A = \text{mis SGP}(f) - \text{mis SGN}(f)$$

2.2.1 Teorema (provare per esercizio)**.** Si ha

$$f \text{ integrabile} \Leftrightarrow \begin{cases} f & \text{è misurabile} \\ |f| & \text{è integrabile} \end{cases}$$

e in tal caso si ha

$$\left|\int_A f\right| \leqslant \int_A |f|$$

2.2.2 Teorema (provare per esercizio)**.** Sia $\varphi : A \to \mathbb{R}$ una funzione

$$\begin{cases} \text{tale che } \varphi(x) \geqslant 0 \text{ per } \forall x \in A \\ \text{integrabile su } A \end{cases}$$

Si ha

$$\begin{cases} |f(x)| \leqslant \varphi(x) \text{ per } \forall x \in A \\ f \text{ misurabile su } A \end{cases} \Rightarrow f \text{ integrabile su } A$$

Il Teorema seguente, ovvia conseguenza del Teorema 1.3.1, stabilisce che ogni funzione misurabile secondo Riemann lo è anche secondo Lebesgue, e che ogni funzione integrabile secondo Riemann lo è anche secondo Lebesgue, ed i due corrispondenti integrali coincidono.

Tale Teorema giustifica **l'abbandono** dell'integrale secondo Riemann.

2.2.3 Teorema: Sia A un sottinsieme J-misurabile di $\mathbb{R}^n$ (e quindi in particolare anche misurabile), e sia

$$f : A \to \mathbb{R}$$

una funzione. Sussistono gli asserti:

a) Se f è R-misurabile, allora f è anche misurabile;
b) Se f è R-integrabile, allora:
   - f è anche integrabile,
   - $\displaystyle\int_A f = R\text{-}\int_A f.$

Come conseguenza immediata di tale Teorema e del Teorema 2.1.1 otteniamo il seguente *rassicurante* Corollario.

2.2.4 Corollario(integrabilità di una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato)**:** Siano $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$, e sia

$$f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$$

una funzione continua.

Sia

$$F : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$$

una primitiva di f.

Per $\forall a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$\alpha < a < b < \beta \ ,$$

si ha:

- f è integrabile su $[a, b]$ secondo Riemann, e quindi è anche integrabile su $[a, b]$ (ossia integrabile secondo Lebesgue);

quanto al calcolo di

$$\int_{[a,b]} f \ ,$$

ossia al colcolo dell'integrale (di Lebsgue) di f su $[a, b]$, si ha:

- $\displaystyle\int_{[a,b]} f = R\text{-}\int_{[a,b]} f = F(b) - F(a).$

2.3 Funzioni a valori in $\mathbb{R}$: misurabilità e fasce di livello

Questa sezione è dedicata alla dimostrazione del seguente Teorema che riconduce la misurabilità di una funzione alla misurabilità di sottinsiemi opportuni del proprio dominio.

2.3.1 Teorema: Sia A un sottinsieme misurabile di $\mathbb{R}^n$, e sia

$$f : A \to \mathbb{R}$$

una funzione.

Sono equivalenti gli asserti:

a) f è misurabile su A,

b) per ogni $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$, la *fascia di livello compreso tra* α *e* β di f, ossia l'insieme

$$\{a \in A : \alpha < f(a) \leqslant \beta\}$$

è misurabile.

Nota: La dimostrazione è data al punto 2.3.9, e necessita dei Lemmi da 2.3.2 a 2.3.8.

Come detto, per la dimostrazione occorrono vari Lemmi. Oggetto di tali Lemmi sono:

- un sottinsieme A di $\mathbb{R}^n$,
- una funzione

$$f : A \to \mathbb{R} \ .$$

A priori nessuna ipotesi di misurabilità o limitatezza viene richiesta; in ciascuno degli enunciati verranno specificate le particolari ipotesi su A e su f.

2.3.2 Lemma: Sia

$$f(a) \neq 0, \quad \forall a \in A \ .$$

Se:

$$\text{a)} \ \begin{cases} \mathrm{SGP}(f) \cup \mathrm{SGN}(f) \text{ è misurabile} \\ \mathrm{mis}\ \mathrm{SGP}(f) \cup \mathrm{SGN}(f) = 0 \end{cases} ,$$

allora:

$$\text{b)} \quad \begin{cases} A \text{ è misurabile} \\ \\ \text{mis } A = 0 \end{cases}$$

Cenno. Dimostriamo l'"Asserto" equivalente

$$\text{“}\neg b) \Rightarrow \neg a)\text{”} \ ,$$

ossia dimostriamo che se:

- ∘ **o** A è non misurabile,
- ∘ **o** A è misurabile, e mis $A > 0$,

allora:

- ∘ **o** $\mathrm{SGP}(f) \cup \mathrm{SGN}(f)$ non è misurabile,
- ∘ **o** $\mathrm{SGP}(f) \cup \mathrm{SGN}(f)$ è misurabile, e mis $\mathrm{SGP}(f) \cup \mathrm{SGN}(f) > 0$.

A tal fine:

- si provi per esercizio che è sufficiente dimostrare l'Asserto sotto l'ulteriore ipotesi $f(a) > 0$ per $\forall a \in A$,
- si provi per esercizio che per dimostrare l'Asserto così modificato, è sufficiente considerare un rettangolo (certamente esistente)

  $$R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \times [0, b]$$

  tale che
  $$A \cap ([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n])$$
  sia: **o** non misurabile, **o** misurabile con misura > 0, e dimostrare che
  $$\mathrm{SGP}(f) \cap ([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \times [0, b])$$
  - ∘ **o** è non misurabile,
  - ∘ **o** è misurabile con misura > 0.
- si provi per esercizio che per dimostrare il sussitere della condizione sufficiente descritta nell'item precedente, è a sua volta sufficiente dimostrare l'Asserto sotto le ulteriori ipotesi:
  - ∘ $f(a) > 0$ per $\forall a \in A$,
  - ∘ A limitato,

- f limitata su A;

Le considerazioni che seguono, provano l'Asserto sotto tali ulteriori ipotesi; si osservi che adesso SGP(f) è limitato.

Per $h = 1, 2, 3, \ldots$ si ponga

$$\Gamma_h = \Big\{a \in A : f(a) > 1/h\Big\} \ ;$$

ovviamente si ha:

$$\begin{aligned} &\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \Gamma_3 \subset \cdots \\ &A = \bigcup_{h=1}^{\infty} \Gamma_h \end{aligned} \qquad .$$

Se per $\forall h$ fosse

$$\mathrm{mis_e}\ (\Gamma_h) = 0 \ ,$$

allora si avrebbe che $\forall \Gamma_h$ sarebbe misurabile, con mis $\Gamma_h = 0$, e quindi anche A sarebbe misurabile, con mis $A = 0$.

Esiste pertanto h tale che

$$\mathrm{mis_e}\ \Gamma_h = \gamma > 0$$

Sia

$$\Omega \begin{cases} \text{aperto limitato} \\ \supset \mathrm{SGP}(f) \end{cases} \qquad ;$$

- per $\forall a \in \Gamma_h$, si ha che

  $$\{a\} \times [0, 1/h] \begin{cases} \text{è un compatto} \\ \subset \Omega \end{cases} \qquad ;$$

  esiste quindi un aperto $B_a \ni a$ tale che

  $$B_a \times [0, 1/h] \subset \Omega \ ;$$

- si consideri l'aperto

  $$\Omega_0 = \bigcup_{a \in \Gamma_h} B_a \ ;$$

  ovviamente si ha

  $$\Gamma_h \subset \Omega_0, \quad \Omega_0 \times [0, 1/h] \subset \Omega \ ;$$

- si ha allora

$$\text{mis } \Omega_0 \geqslant \text{mis}_\text{e } \Gamma_h = \gamma > 0$$

$$\gamma \cdot (1/h) \leqslant \text{mis } (\Omega_0 \times [0, 1/h]) \leqslant \text{mis } \Omega \ .$$

Ne segue che

$$\text{mis}_\text{e } \text{SGP}(f) \geqslant \gamma \cdot (1/h) > 0 \ ;$$

pertanto SGP(f) **o** è non misurabile, **o** è misurabile con misura > 0. ■

2.3.3 Teorema: (usa 2.3.2) Si consideri l'insieme

$$\mathscr{T}\mathscr{D}(f) = \Big\{a \in A : f(a) \neq 0\Big\} \qquad (\mathscr{T}\mathscr{D} \text{ sta per "}\textit{true domain}\text{"}) \ .$$

Se:

- $\text{SGP}(f) \cup \text{SGN}(f)$ è misurabile,
- mis $\text{SGP}(f) \cup \text{SGN}(f) = 0$,

allora:

- $\mathscr{T}\mathscr{D}(f)$ è misurabile,
- mis $\mathscr{T}\mathscr{D}(f) = 0$.

Cenno. Si ponga

$$\widetilde{A} = \mathscr{T}\mathscr{D}(f) \ ,$$

e sia

$$\widetilde{f} : \widetilde{A} \to \mathbb{R}$$

la restrizione di f a $\widetilde{A}$.

Tenuto conto che

$$\text{SGP}(\widetilde{f}) \cup \text{SGN}(\widetilde{f}) = (\text{SGP}(f) \cup \text{SGN}(f)) \setminus \Theta$$

ove

$$\Theta = \Big\{a \in A : f(a) = 0\Big\} \times \{0\}$$

essendo sottinsieme di $\mathbb{R}^n \times \{0\}$, è misurabile, con misura $= 0$, l'asserto si ottiene applicando il Lemma 2.3.2 a $\widetilde{f} : \widetilde{A} \to \mathbb{R}$. ■

2.3.4 Lemma: Sia

- A misurabile.

Sia
$$f_1, f_2, f_3, \ldots : A \to \mathbb{R}$$
una successione di funzioni, tale che:

- per $\forall a \in \mathbb{R}$ si ha
$$0 \leqslant f_1(a), \leqslant f_2(a) \leqslant f_3(a) \leqslant \cdots \leqslant f(a) \ ,$$
- per $\forall a \in A$ si ha
$$\sup f_h(a) = f(a) \ .$$

Se:

- per $\forall h$, $\mathrm{SGP}(f_h)$ è misurabile,

allora:

- anche $\mathrm{SGP}(f)$ è misurabile.

Cenno. Siccome A è misurabile, allora per $h, q = 1, 2, 3, \ldots,$
$$\mathrm{SGP}(f_h + 1/q)$$
è misurabile.

Per $\forall a \in A$ si ha:
$$\left[\bigcup_{h=1}^{\infty} \{a\} \times [0, f_h(a) + 1/q]\right] \begin{cases} \mathbf{o} & = \{a\} \times [0, f(a) + 1/q) \\ \mathbf{o} & = \{a\} \times [0, f(a) + 1/q] \end{cases} \qquad q = 1, 2, \ldots$$
e pertanto
$$\bigcap_{q=1}^{\infty} \left[\bigcup_{h=1}^{\infty} \{a\} \times [0, f_h(a) + 1/q]\right] = \{a\} \times [0, f(a)] \ .$$

Ne segue che:
$$\mathrm{SGP}(f) = \bigcup_{a \in A} \{a\} \times [0, f(a)] = \bigcap_{q=1}^{\infty} \left[\bigcup_{h=1}^{\infty} \mathrm{SGP}(f_h + 1/q)\right] \ .$$

Siccome per $h, q = 1, 2, 3, \ldots,$
$$\mathrm{SGP}(f_h + 1/q)$$
è misurabile, allora anche $\mathrm{SGP}(f)$ risulta misurabile. ■

2.3.5 Lemma: Sia:

- A limitato,
- $f(a) \geqslant 0$ per $\forall a \in A$,
- f limitata su A.

Allora:

- per ogni

$$\Gamma \begin{cases} \subset \mathrm{SGP}(f) \\ \text{chiuso (e quindi compatto, essendo } \mathrm{SGP}(f) \text{ limitato)} \end{cases},$$

- esistono

$$K \begin{cases} \subset A \\ \text{chiuso (e quindi compatto, essendo } A \text{ limitato)} \end{cases}$$

$$g : K \to \mathbb{R} \quad g(a) \geqslant 0 \text{ per } \forall a \in K$$

tali che:

$$\begin{cases} \mathrm{SGP}(g) \text{ è chiuso (e quindi compatto, essendo } \mathrm{SGP}(g)) \text{ limitato)} \\ \Gamma \subset \mathrm{SGP}(g) \subset \mathrm{SGP}(f) \end{cases}.$$

Cenno. Sia

$$\Pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

la proiezione. Π è continua.

Si ponga

$$K = \Pi(\Gamma) \ ;$$

essendo Γ compatto, e Π continua, si ha che K è compatto. Ovviamente si ha anche $K \subset A$.

Esiste ed è univocamente determinata una famiglia di insiemi

$$\Gamma_a \subset [0, \infty), \qquad a \in K \ ,$$

tale che

$$\Gamma = \bigcup_{a \in K} (\{a\} \times \Gamma_a) \ ;$$

siccome Γ è chiuso e limitato, se ne deduce facilmente che $\forall \Gamma_a$ è chiuso e limitato.

Consideriamo quindi la funzione

$$g : K \to \mathbb{R}$$

definita da

$$g(a) = \max \Gamma_a, \quad \forall a \in A \ .$$

È subito visto che

$$\Gamma \subset \mathrm{SGP}(g) \subset \mathrm{SGP}(f) \ .$$

Le considerazioni seguenti provano che $\mathrm{SGP}(g)$ è chiuso.

- Sia
$$\lim_{h\to\infty} (a_h, \gamma_h) = (a_0, \gamma_0) \ ,$$
con
$$\forall \, (a_h, \gamma_h) \in \mathrm{SGP}(g) \ ,$$
ossia con
$$a_h \in K, \quad 0 \leqslant \gamma_h \leqslant g(a_h), \qquad \forall h \ .$$
- Essendo
$$\lim_{h\to\infty} a_h = a_0 \ ,$$
ed essendo K chiuso, si ha
$$a_0 \in K \ .$$
- Per provare che $\mathrm{SGP}(g)$ è chiuso, resta da provare che
$$\gamma_0 \in [0, g(a_0)] \ .$$
- Se invece fosse:
$$\gamma_0 > g(a_0) \ ,$$
  1) esisterebbe $\varepsilon > 0$ tale che
  $$g_0(a) < \gamma_0 - \varepsilon \ ;$$
  2) essendo
  $$\lim_{h\to\infty} \gamma_h = \gamma_0 \ ,$$
  si avrebbe definitivamente rispetto ad h:
  $$g(a_0) < \gamma_0 - \varepsilon < \gamma_h \leqslant g(a_h) \ ;$$

3) come conseguenza, per qualsiasi sottosuccessione convergente

$$g(a_{h_j})$$

di $g(a_h)$, si avrebbe:

$$g(a_0) < \gamma_0 - \varepsilon \leqslant \lim_{j\to\infty} g(a_{h_j}) \ .$$

L'asserto 3) così ottenuto, è assurdo: infatti

∘ essendo Γ compatto, la successione

$$(a_h, g(a_h)) \in \Gamma$$

ha una sottosuccessione

$$\big(a_{h_j}, g(a_{h_j})\big)$$

convergente, e posto

$$\lim_{j\to\infty} \big(a_{h_j}, g(a_{h_j})\big) = (b_0, \beta_0) \in \Gamma \ ,$$

si ha

$$b_0 = a_0, \qquad \beta_0 \in [0, g(a_0)] \ ;$$

e quindi in particolare:

$$\lim_{j\to\infty} g(a_{h_j}) = \beta_0 \leqslant g(a_0) \ .$$

Pertanto si ha:

$$\gamma_0 \in [0, g(a_0)] \ .$$

■

2.3.6 Lemma: (usa 2.3.4 e 2.3.5) Sia:

- A limitato,
- $f(a) \geqslant 0$ per $\forall a \in A$,
- f limitata su A.

Allora:

- esistono

$$K \begin{cases} \subset A \\ \text{misurabile} \end{cases}$$

$$g : K \to \mathbb{R} \quad g(a) \geqslant 0 \text{ per } \forall a \in K$$

tali che:

$$\begin{cases} \text{SGP}(g) \text{ è misurabile} \\ \text{SGP}(g) \subset \text{SGP}(f) \\ \text{mis}_\text{i} \text{ SGP}(f) = \text{mis SGP}(g) \end{cases} .$$

Cenno. Siano

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots \begin{cases} \subset \text{SGP}(f) \\ \text{chiusi} \end{cases} ,$$

tali che

$$\text{mis}_\text{i} \text{ SGP}(f) - \text{mis } \Gamma_h < 1/h .$$

Per il Lemma 2.3.5, per $h = 1, 2, 3, \ldots$, esistono

$$K_h \begin{cases} \subset A \\ \text{chiuso} \end{cases}$$

$$\widetilde{g}_h : K_h \to \mathbb{R} \quad \widetilde{g}_h(a) \geqslant 0 \text{ per } \forall a \in K_h$$

tali che:

$$\begin{cases} \text{SGP}(\widetilde{g}_h) \text{ è chiuso} \\ \Gamma_h \subset \text{SGP}(\widetilde{g}_h) \subset \text{SGP}(f) \end{cases} .$$

Sia

$$K = \bigcup_{h=1}^{\infty} K_h ;$$

per $h = 1, 2, 3, \ldots$ sia

$$\gamma_h : K \to \mathbb{R}$$

la funzione definita da

$$\gamma_h(a) = \begin{cases} \widetilde{g}_h(a) & \text{se } a \in K_h \\ 0 & \text{se } a \notin K_h \end{cases} ;$$

per $h = 1, 2, 3, \ldots$ sia

$$g_h : K \to \mathbb{R}$$

la funzione definita da

$$g_h(a) = \sup\left\{\gamma_1(a), \ldots, \gamma_h(a)\right\} \ .$$

Si ha:

- ∘ K è limitato e misurabile,
- ∘ $0 \leqslant g_1 \leqslant g_2 \leqslant g_3 \leqslant \ldots$,
- ∘ $\forall \mathrm{SGP}(g_h)$ è misurabile;

inoltre, essendo per $\forall a \in K$ e per $\forall h$:

$$g_h(a) \leqslant f(a) \ ,$$

possiamo considerare la funzione

$$g : K \to \mathbb{R} \qquad g(a) = \sup g_h(a) \ .$$

Per il Lemma 2.3.4, si ha che

$$\mathrm{SGP}(g)$$

è misurabile.

Si osservi che:

- ∘ $\forall \Gamma_h \subset \mathrm{SGP}(g) \subset \mathrm{SGP}(f)$,
- ∘ $\forall h$ si ha

$$\mathrm{mis_i}\ \mathrm{SGP}(f) - \mathrm{mis}\ \mathrm{SGP}(g) \leqslant \mathrm{mis_i}\ \mathrm{SGP}(f) - \mathrm{mis}\ \Gamma_h < 1/h \ ;$$

ne segue

$$\mathrm{mis_i}\ \mathrm{SGP}(f) - \mathrm{mis}\ \mathrm{SGP}(g) = 0 \ .$$

■

2.3.7 Teorema: (usa 2.3.2 e 2.3.6) Sia:

- $f(a) > 0$ per $\forall a \in A$.

Se:

a) $\mathrm{SGP}(f)$ è misurabile,

allora:

b) A è misurabile.

Cenno. Parte 1) In questa parte, dimostriamo l'asserto sotto le ulteriori ipotesi:

- A limitato,
- f limitata su A.

Sotto tali ipotesi, per il Lemma 2.3.6, esistono

$$K \begin{cases} \subset A \\ \text{misurabile} \end{cases}$$

$$g : K \to \mathbb{R} \quad g(a) \geqslant 0 \text{ per } \forall a \in K$$

tali che:

$$\begin{cases} \text{SGP}(g) \text{ è misurabile} \\ \text{SGP}(g) \subset \text{SGP}(f) \\ \text{mis}_\text{i}\ \text{SGP}(f) = \text{mis SGP}(g) \end{cases} ;$$

essendo SGP(f) misurabile, si ha

$$\text{mis SGP}(g) = \text{mis SGP}(f) \ ,$$

e quindi

$$\begin{cases} \text{SGP}(f) \setminus \text{SGP}(g) \text{ è misurabile} \\ \text{mis SGP}(f) \setminus \text{SGP}(g) = 0 \end{cases} .$$

Ne segue che

$$\begin{cases} \text{SGP}(f_{|(A \setminus K)}) \text{ è misurabile} \\ \text{mis SGP}(f_{|(A \setminus k)}) = 0 \end{cases} ;$$

allora per il Lemma 2.3.2 si ha che $A \setminus K$ è misurabile, e quindi anche A risulta misurabile.

Parte 2) In questa parte, utilizzando il risultato della Parte 1), dimostriamo l'asserto in generale, ossia senza ipotesi di limitatezza né per A né per f.

Per $h = 1, 2, 3, \ldots$, si ponga

$$A_h = A \cap ([-h, h] \times \cdots \times [-h, h]) \ ,$$

e sia

$$f_h : A_h \to \mathbb{R}$$

la funzione definita da:

$$f_h(a) = \begin{cases} f(a) & \text{se } f(a) \leqslant 1 \\ 1 & \text{se } f(a) > 1 \end{cases} \qquad \forall a \in A_h \ .$$

Si ha

$$\mathrm{SGP}(f_h) = \mathrm{SGP}(f) \cap ([-h,h] \times \cdots \times [-h,h] \times [0,1]) \ ;$$

quindi SGP(f_h è misurabile. Per il risultato provato nella Parte 1), l'insieme

$$A_h = A \cap ([-h,h] \times \cdots \times [-h,h])$$

è allora misurabile per $\forall h$; conseguentemente, A risulta misurabile. ■

2.3.8 Lemma: Sia

- $f(a) \neq 0$ per $\forall a \in A$.

Se:

- $\mathrm{SGP}(f) \cup \mathrm{SGN}(f)$ è misurabile,

allora:

- per $\forall \alpha \geqslant 0$, i sottinsiemi di A

  $$\big\{a \in A : f(a) > \alpha\big\}, \qquad \big\{a \in A : f(a) < -\alpha\big\}$$

  sono misurabili.

Cenno. Si ponga

$$P_\alpha = \big\{a \in A : f(a) > \alpha\big\} \ ,$$

e sia

$$f_\alpha : P_\alpha \to \mathbb{R}$$

la funzione definita da

$$f_\alpha(a) = f(a) - \alpha > 0 \qquad \forall a \in P_\alpha \ .$$

Si ha:

$$\mathrm{SGP}(f_\alpha) = ([\mathrm{SGP}(f) \cap (\mathbb{R}^n \times (\alpha, +\infty))] - (0, \ldots, 0, \alpha)) \cup \\ \cup \text{“\textit{insieme di misura nulla}”} \ ;$$

ne segue che

$$\mathrm{SGP}(f_\alpha)$$

è misurabile, e allora, per il Teorema 2.3.7 anche

$$P_\alpha = \Big\{a \in A : f(a) > \alpha\Big\}$$

è misurabile.

La misurabilità dell'insieme

$$\Big\{a \in A : f(a) < -\alpha\Big\}$$

si ottiene applicando le considerazioni precedenti alla funzione $-f$. ■

Utilizzando i risultati precedenti possiamo fornire la dimostrazione del Teorema 2.3.1.

2.3.9 Dimostrazione del Teorema 2.3.1: (per comodità riportiamo l'enunciato del Teorema) Sia:

- A misurabile.

Sono equivalenti gli asserti:

a) f è misurabile su A,

b) per ogni $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$, l'insieme

$$\{a \in A : \alpha < f(a) \leqslant \beta\}$$

è misurabile.

Cenno. a)⇒b). Dal Lemma 2.3.8 segue che per $\forall \gamma \geqslant 0$, gli insiemi

$$\Big\{a \in A : f(a) > \gamma\Big\}, \quad \Big\{a \in A : f(a) < -\gamma\Big\}$$

sono misurabili; essendo A misurabile, allora anche i loro complementari in A, ossia gli insiemi

$$\Big\{a \in A : f(a) \leqslant \gamma\Big\}, \quad \Big\{a \in A : f(a) \geqslant -\gamma\Big\}$$

sono misurabili.

Con considerazioni di routine basate sulla misurabilità di tali insiemi, e quindi delle loro unioni e intersezioni numerabili, si ottiene l'asserto.

b)⇒a). Per $\forall R > 0$ si ponga

$$\Gamma_R = \mathrm{SGP}(f) \cap \left([-R, R]^n \times [0, R]\right) .$$

Per $h = 1, 2, 3, \ldots$ si ponga

$$P_{R,s} = \Big\{a \in A : (s-1)R/h < f(a) \leqslant sR/h\Big\} \cap [-R, R]^n \quad s = 1, \ldots, h \ ;$$

si ponga inoltre

$$P_{R,0} = \Big\{a \in A : f(a) = 0\Big\} \cap [-R, R]^n \ ;$$

ovviamente

$$P_{R,0}, P_{R,1}, \ldots, P_{R,h}$$

sono una partizione di $A \cap [-R, R]^n$ in insiemi misurabili.

Si considerino gli insiemi misurabili

$$\begin{aligned} I_{R,h} &= (P_{R,0} \times [0, 0]) \cup \left(\bigcup_{s=1}^{h} P_{R,s} \times [0, (s-1)R/h]\right) \\ E_{R,h} &= (P_{R,0} \times [0, 0]) \cup \left(\bigcup_{s=1}^{h} P_{R,s} \times [0, sR/h]\right) \end{aligned} .$$

Si osservi che:

- $I_{R,h} \subset \Gamma_R \subset E_{R,h}$,
- $\text{mis } E_{R,h} - \text{mis } I_{R,h} \leqslant \dfrac{\text{mis } (A \cap [-R, R]^n)}{h}$;

ne segue che

$$\Gamma_R = \left(\bigcup_{h=1}^{\infty} I_{R,h}\right) \cup \text{"}\textit{insieme di misura nulla}\text{"} \ ,$$

e quindi che Γ_R è misurabile per $\forall R > 0$. Di conseguenza, anche $\mathrm{SGP}(f)$ è misurabile.

Analogamente si prova la misurabilità di $\mathrm{SGN}(f)$. ■

2.4 Funzioni limitate su insiemi limitati: significato analitico dell'integrale

Sia A un sottinsieme misurabile e limitato di $\mathbb{R}^n$, e sia

$$f : A \to \mathbb{R}$$

una funzione limitata, ossia una funzione per la quale $\exists M > 0$ tale che

$$-M \leqslant f(x) \leqslant M \text{ per ogni } x \in A \ .$$

La seguente Nota (dimostrazione immediata) prova che per una tale funzione le nozioni di misurabilità e integrabilità sono equivalenti.

2.4.1 Nota: Sono equivalenti gli asserti

a) f è misurabile
b) f è integrabile

La seguente Definizione introduce le nozioni di *quasi-partizioni di Lebesgue* dell' insieme *misurabile e limitato* A, e di *somme inferiori e superiori di Lebesgue* della funzione *limitata* f.

2.4.2 Definizione: Una famiglia finita

$$P_1, \ldots, P_r$$

di sottinsiemi misurabili di A, tale che

▼ $A = \bigcup_{j=1}^{r} P_j$

▲ per ogni $j_1 \neq j_2$ si ha mis $(P_{j_1} \cap P_{j_2}) = 0$

si dirà una *quasi-partizione di Lebesgue* di A.

Se

$$P_1, \ldots, P_r$$

è una quasi-partizione di A, i reali

$$\sum_{j=1}^{r} (\text{mis } P_j) \inf_{P_j} f \qquad \sum_{j=1}^{r} (\text{mis } P_j) \sup_{P_j} f$$

si diranno le *somme di Lebesgue* di f, rispettivamente *inferiore* e *superiore*, relative alla quasi-partizione $P_1, \ldots, P_r$.

Il seguente Teorema fornisce il significato analitico della integrabilità e dell'integrale per funzioni limitate su insiemi limitati.

2.4.3 Teorema: Sono equivalenti gli asserti:

a) f è integrabile su A,

b) $\sup\{s \in \mathbb{R} : s = \text{somma inferiore di Lebesgue di } f\} =$

$$\inf\{s \in \mathbb{R} : s = \text{somma superiore di Lebesgue di } f\}\ .$$

In tal caso si ha

▼ $\displaystyle\int_A f = \sup\{s \in \mathbb{R} : s = \text{somma inferiore di Lebesgue di } f\} =$

$$\inf\{s \in \mathbb{R} : s = \text{somma superiore di Lebesgue di } f\}$$

▲ $(\text{mis } A)\inf_A f \leqslant \displaystyle\int_A f \leqslant (\text{mis } A)\sup_A f$

Cenno. a)⇒b). Sia $M > 0$ tale che per $\forall a \in A$ si abbia

$$-M < f(a) < M\ .$$

Per $h = 1, 2, 3, \dots$ si considerino le seguenti fasce di livello di f:

$$P_s = \Big\{a \in A : -M + (s-1)2M/h < f(a) \leqslant -M + s2M/h\Big\} \qquad s = 1, \dots, h\ .$$

Essendo f integrabile, e quindi misurabile, per il Teorema 2.3.1 la famiglia

$$P_1, \dots, P_h$$

è una quasi-partizione (più precisamente, una partizione) di Lebesgue di A; inoltre

$$\sum_{s=1}^{h}(\text{mis } P_s)\inf_{P_s} f, \quad \sum_{s=1}^{h}(\text{mis } P_s)\sup_{P_s} f$$

sono le somme dli Lebesgue di f, rispettivamente inferiore e superiore, relative alla quasi partizione

$$P_1, \dots, P_h\ .$$

Per $\forall h$ si ha quindi:

$$0 \leqslant \sum_{s=1}^{h}(\text{mis } P_s)\sup_{P_s} f - \sum_{s=1}^{h}(\text{mis } P_s)\inf_{P_s} f \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{s=1}^{h}(\text{mis } P_s)\cdot(-M + s2M/h) - \sum_{s=1}^{h}(\text{mis } P_s)\cdot(-M + (s-1)2M/h) =$$
$$= (\text{mis } A)\cdot(2M/h)\ ;$$

ne segue b).

b)⇒a). Sostituendo eventualmente due quasi-partizioni di Lebesgue, con la quasi-partizione fornita dalle intersezioni di ciascun membro della prima con ciascum membro della seconda, si prova che per $h = 1, 2, 3, \ldots$ esiste una quasi-partizione di Lebesgue

$$P_{h1}, \ldots, P_{hs_h}, N_{h1}, \ldots, N_{hr_h}, M_{h1}, \ldots, M_{hq_h}$$

tale che:

- $0 \leqslant \inf_{P_{hi}} f \leqslant \sup_{P_{hi}} f$,
- $\inf_{N_{hj}} f \leqslant \sup_{N_{hj}} f \leqslant 0$,
- $\inf_{M_{hl}} f \leqslant 0 \leqslant \sup_{M_{hl}} f$,

e che

$$\begin{aligned} 0 \leqslant &\left(\sum_{i=1}^{s_h} (\text{mis } P_{hi}) \sup_{P_{hi}} f + \sum_{j=1}^{r_h} (\text{mis } N_{hj}) \sup_{N_{hj}} f + \sum_{l=1}^{q_h} (\text{mis } M_{hl}) \sup_{M_{hl}} f \right) - \\ &- \left(\sum_{i=1}^{s_h} (\text{mis } P_{hi}) \inf_{P_{hi}} f + \sum_{j=1}^{r_h} (\text{mis } N_{hj}) \inf_{N_{hj}} f + \sum_{l=1}^{q_h} (\text{mis } M_{hl}) \inf_{M_{hl}} f \right) \leqslant \\ &< 1/h \quad . \end{aligned}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} I_h^+ = &\left(\bigcup_i P_{hi} \times [0, \inf_{P_{hi} f}) \right) \subset \text{SGP}(f) \subset \\ &\subset \left(\bigcup_i P_{hi} \times [0, \sup_{P_{hi}} f] \right) \cup \left(\bigcup_j M_{hj} \times [0, \sup_{M_{hj}} f] \right) = E_h^+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_h^- = &\left(\bigcup_l N_{hl} \times (\sup_{N_{hl}} f, 0] \right) \subset \text{SGN}(f) \subset \\ &\subset \left(\bigcup_j M_{hj} \times (\inf_{M_{hj}} f, 0] \right) \cup \left(\bigcup_l N_{hl} \times (\inf_{N_{hl}} f, 0] \right) = E_h^- \end{aligned}$$

$$I_h = I_h^+ \cup I_h^- \subset \mathrm{SGP}(f) \cup \mathrm{SGN}(f) \subset E_h^+ \cup E_h^- = E_h$$

Relativamente a $\mathrm{SGP}(f) \cup \mathrm{SGN}(f)$ si ha:

- $I = \bigcup_{h=1}^{\infty} I_h = \subset \mathrm{SGP}(f) \cup \mathrm{SGN}(f) \subset \bigcup_{h=1}^{\infty} E_h = E,$
- I, E sono misurabili in quanto unioni numerabili di misurabili,
- per $\forall h$ si ha:

$$\text{mis } (E \setminus I) \leqslant \text{mis } (E_h \setminus I_h) = \text{mis } E_h - \text{mis } I_h = \cdots$$

$$= \sum_{i=1}^{s_h} (\text{mis } P_{hi}) \left(\sup_{P_{hi}} f - \inf_{P_{hi}} f \right) + \sum_{j=1}^{r_h} (\text{mis } N_{hj}) \left(\sup_{N_{hj}} f - \inf_{N_{hj}} f \right) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{q_h} (\text{mis } M_{hl}) \left(\sup_{M_{hl}} f - \inf_{M_{hl}} f \right) < 1/h \quad ;$$

pertanto $\mathrm{SGP}(f) \cup \mathrm{SGN}(f)$ è misurabile, e di conseguenza anche $\mathrm{SGP}(f)$ e $\mathrm{SGN}(f)$ sono misurabili; in particolare f è misurabile, e per le condizioni di limitatezza è integrabile.

Relativamente a

$$\int_A f = \text{mis SGP}(f) - \text{mis SGN}(f) \ ,$$

per $\forall h$ si ha:

$$\sum_{i=1}^{s_h} (\text{mis } P_{hi}) \inf_{P_{hi}} f + \sum_{j=1}^{r_h} (\text{mis } N_{hj}) \inf_{N_{hj}} f + \sum_{l=1}^{q_h} (\text{mis } M_{hl}) \inf_{M_{hl}} f =$$

$$= \text{mis } I_h^+ \text{mis } E_h^- \leqslant \text{mis SGP}(f) - \text{mis SGN}(f) \leqslant \text{mis } E_h^+ - \text{mis } I_h^- \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{s_h} (\text{mis } P_{hi}) \sup_{P_{hi}} f + \sum_{j=1}^{r_h} (\text{mis } N_{hj}) \sup_{N_{hj}} f + \sum_{l=1}^{q_h} (\text{mis } M_{hl}) \sup_{M_{hl}} f$$

e quindi per le ipotesi si ha:

$$\int_A f = \sup \{ s \in \mathbb{R} : s = \text{somma inferiore di Lebesgue di } f \} =$$

$$\inf \{ s \in \mathbb{R} : s = \text{somma superiore di Lebesgue di } f \} \ .$$

L'ultimo asserto è banale. ∎

2.5 Funzioni a valori in $\mathbb{R}$ limitate su insiemi limitati: uso per lo studio dell'integrabilità

Sia A un sottinsieme misurabile (anche non limitato) di $\mathbb{R}^n$, e sia

$$f : A \to \mathbb{R}$$

una funzione (anche non limitata).

In questa sezione viene indicata una strategia per ricondurre lo studio della misurabilità e integrabilità di f e il calcolo dell'eventuale integrale di f, a verifiche di integrabilità e al calcolo di eventuali integrali di opportune funzioni limitate su insiemi misurabili e limitati. In particolare completa la dimostrazione che le definizioni geometriche di misurabilità, integrabilità e integrale adottate in questi appunti sono equivalenti alle defininizioni usuali.

La seguente Defininizione introduce il concetto di *successione fondamentale* per f su A.

2.5.1 Definizione: Una successione

$$A_1, A_2, A_3, \ldots$$

di insiemi limitati e misurabili, tale che

$$\begin{cases} A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots \subset A \\ A = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \\ f \text{ limitata su } \forall A_k \end{cases}$$

si dirà una *successione fondamentale* per f su A.

Il seguente Teorema riconduce lo studio della misurabilità di f alle nozioni di successioni fondamentali e di funzioni limitate su insiemi limitati.

2.5.2 Teorema: Sono equivalenti gli asserti:

a) f è misurabile su A
b) esiste una successione fondamentale $A_1, A_2, A_3, \ldots$ per f su A, tale che

$$\text{“}f \text{ è integrabile su } \forall A_k\text{”}$$

Cenno. a⇒b). Si consideri ad esempio la successione definita da

$$A_k = A \cap \big([-k,k] \times \cdots \times [-k,k]\big) \cap \big\{x \in A : |f(x)| \leqslant k\big\}$$

b⇒a). Provare per esercizio. ■

c) data comunque una successione fondamentale $A_1, A_2, A_3, \ldots$ per f su A, si ha che

$$\text{“}f \text{ è integrabile su } \forall A_k\text{”} .$$

Nota: b) è utile quando si deve dimostrare che f è misurabile. c) è utile quando si è ormai dimostrato che f è misurabile.

Il Teorema 2.5.2 giustifica la seguente Procedura per appurare se f sia o non sia misurabile su A.

2.5.3 Procedura:

Step 1) Si cerca una successione fondamentale per f su A;

- **se** non esiste alcuna tale successione (*caso ben difficilmente incontrabile*), **allora** per b) del Teorema 2.5.2, f **è non misurabile su** A;
- **altrimenti** si considera una qualsiasi successione fondamentale $A_1, A_2, A_3, \ldots$ per f su A, e si passa a Step 2);

Step 2) si controlla l'integrabilità o meno di f su ciascun A_k;

- **se** $\exists k$ tale che f non è integrabile su A_k (*caso ben difficilmente incontrabile*), **allora** per c) del Teorema 2.5.2 f **è non misurabile su** A;
- **altrimenti**, ossia se f è integrabile su ciascun A_k, per b) del Teorema 2.5.2, f **è misurabile su** A.

Una volta appurato che f è misurabile, ed individuata una *qualsiasi* successione fondamentale $A_1, A_2, A_3, \ldots$ per f su A, il seguente Teorema dice come appurare se f sia o non sia integrabile, e in caso affermativo, come calcolarne l'integrale.

2.5.4 Teorema: Sia f misurabile su A, e sia

$$A_1, A_2, A_3, \ldots$$

una qualsiasi successione fondamentale per f su A.

▼ Si osservi che:

▽ per c) del Teorema 2.5.2, le funzioni

$$f, |f| : A \to \mathbb{R}$$

sono integrabili su ciascun A_k,

△ e che inoltre si ha:

$$\int_{A_1} |f| \leqslant \int_{A_2} |f| \leqslant \int_{A_3} |f| \leqslant \cdots .$$

♦ Sono equivalenti gli asserti:

a) f è integrabile su A

b) $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{A_k} |f| < +\infty$

Cenno. Si osservi che, essendo f misurabile su A, si ha

$$f \text{ integrabile} \Leftrightarrow |f| \text{ integrabile} \Leftrightarrow \text{mis } SGP(|f|) < +\infty$$

Si osservi che, posto $A_0 = \emptyset$, si ha

$$SGP(|f|) = \bigcup_{k=1}^{\infty} SGP\left(\left|f_{\diagup(A_k\setminus A_{k-1})}\right|\right)$$

$$\text{mis } SGP(|f|) = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k\setminus A_{k-1}} |f| = \lim_{k\to\infty}\int_{A_k} |f|$$

■

♦ Se f integrabile su A, si ha

$$\int_A f = \lim_{k\to\infty}\int_{A_k} f$$

Cenno. Si osservi che, essendo f integrabile su A, si ha

$$\int_A f = \text{mis } SGP(f) - \text{mis } SGN(f) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{mis } SGP\left(f_{\diagup(A_k\setminus A_{k-1})}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \text{mis } SGN\left(f_{\diagup(A_k\setminus A_{k-1})}\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\text{mis } SGP\left(f_{\diagup(A_k\setminus A_{k-1})}\right) - \text{mis } SGN\left(f_{\diagup(A_k\setminus A_{k-1})}\right)\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k\setminus A_{k-1}} f = \lim_{k\to\infty}\int_{A_k} f \quad ■$$

Attenzione: Se f è misurabile su A, ma f non è integrabile su A, data una successione fondamentale per f su A,

▽ può esistere finito $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{A_k} f$

△ tale limite può variare cambiando la successione fondamentale.

L'Esercizio seguente fornisce un esempio di tale situazione.

2.5.5 Esercizio: Sia

$$A = [-1, 0) \cup (0, 1] \subset \mathbb{R} \ ,$$

e sia

$$f : A \to \mathbb{R}$$

la funzione definita da

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{per } \forall x \in A \ .$$

Siano a_h, b_h due successioni di reali tali che:

$$1 > a_1 > a_2 > a_3 > \cdots \quad \lim_{h\to\infty} a_h = 0$$
$$1 > b_1 > b_2 > b_3 > \cdots \quad \lim_{h\to\infty} b_h = 0$$

si ponga:

$$A_h = [-1, -a_h] \cup [b_h, 1] \ .$$

▼ Si verifichi che $A_1, A_2, A_3, \ldots$ è una successione fondamentale per f su A.

⧫ Si provi che f è integrabile su $\forall A_h$.
Cenno. Qui e in seguito utilizzare il Corollario 2.2.4. ■

⧫ Dall'item precedente si deduce che f *è misurabile su* A.

⧫ Se ne deduce che

$$f, \ |f|$$

sono integrabili su $\forall A_h$.

⧫ Si ricordi che la funzione

$$\ln|x| : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$

è una primitiva della funzione continua

$$\frac{1}{x} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \ .$$

- Si ha:

$$\int_{A_h} |f| = \int_{[-1,-a_h]} \left|\frac{1}{x}\right| \mathrm{d}x + \int_{[b_h,1]} \left|\frac{1}{x}\right| \mathrm{d}x =$$

$$= -\int_{[-1,-a_h]} \frac{1}{x} \mathrm{d}x + \int_{[b_h,1]} \frac{1}{x} \mathrm{d}x =$$

$$= -\ln a_h - \ln b_h = \ln \frac{1}{a_h b_h}.$$

- Dall'item precedente si ottiene

$$\lim_{h\to\infty} \int_{A_h} |f| = +\infty \ ;$$

quindi f *non è integrabile su* A.

Come conseguenza, dalla successione

$$\int_{A_1} f, \int_{A_2} f, \int_{A_2} f, \ldots$$

possiamo solo aspettarci stranezze.

- Si ha:

$$\int_{A_h} f = \int_{[-1,-a_h]} \frac{1}{x} \mathrm{d}x + \int_{[b_h,1]} \frac{1}{x} \mathrm{d}x =$$

$$= \ln a_h - \ln b_h = \ln \frac{a_h}{b_h}.$$

- Sia $\alpha \in \mathbb{R}$; per $h > e^\alpha$ si ponga

$$a_h = \frac{e^\alpha}{h}, \quad b_h = \frac{1}{h} \ ;$$

si verifichi che con tale scelta di a_h, b_h si ottiene

$$\lim_{h\to\infty} \int_{A_1} f = \alpha \ .$$

- Cosa accade ponendo

$$a_h = \frac{1}{h}, \ b_h = \frac{1}{h^2} \ ?$$

- Cosa accade ponendo

$$a_h = \frac{1}{h^2}, \ b_h = \frac{1}{h} \ ?$$

▲ Cosa accade ponendo

$$a_h = \begin{cases} \dfrac{1}{2h} & \text{per } h \text{ pari} \\[2ex] \dfrac{1}{3h} & \text{per } h \text{ dispari} \end{cases} \quad , \; b_h = \frac{1}{h} \; ?$$

Il Teorema che segue, usando il Teorema 2.5.4, prova che la *somma* di applicazioni reali integrabili è integrabile, e che i *multipli reali* di applicazioni reali integrabili sono integrabili. In particolare prova che:

- l'insieme $\mathscr{I}(A, \mathbb{R})$ definito da

  $$\mathscr{I}(A, \mathbb{R}) = \left\{ f : A \to \mathbb{R} : f \text{ è integrabile su } A \right\} ,$$

  è un sottospazio dello spazio vettoriale $\mathscr{F}(A, \mathbb{R})$ di tutte le funzioni da A in $\mathbb{R}$;

- l'applicazione

  $$\int : \begin{array}{ccc} \mathscr{I}(A, \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \rightsquigarrow & \displaystyle\int_A f \end{array}$$

  è una applicazione lineare.

2.5.6 Teorema. Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili su A, e sia $c \in \mathbb{R}$. Si ha

▼ $f + g \; , \; cf$ sono integrabili su A

▲ $\displaystyle\int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g \quad , \quad \int_A (cf) = c \int_A f$

Cenno. Sia $A_1, A_2, A_3, \ldots$ una successione fondamentale sia per f che per g su A; ad esempio si può scegliere

$$A_k = A \cap \big([-k, k] \times \cdots \times [-k, k] \big) \cap \\ \left\{ x \in A : |f(x)| < k \right\} \cap \left\{ x \in A : |g(x)| < k \right\}$$

Si consideri A_k; si verifichi che

▽ f, g sono integrabili su A_k

$$\lozenge \quad \inf\Big(\Big\{\text{somme superiori di Lebesgue di } f \text{ su } A_k\Big\}+ \\ \Big\{\text{somme superiori di Lebesgue di } g \text{ su } A_k\Big\}\Big) \geqslant \\ \inf\Big\{\text{somme superiori di Lebesgue di } f+g \text{ su } A_k\Big\}$$

Cenno. Siano $Q_1, \ldots, Q_\nu$ e $R_1, \ldots, R_\mu$ quasi-partizioni di Lebesgue di A_k. Si osservi che la famiglia

$$P_{ij} = Q_i \cap R_j \qquad i = 1, \ldots, \nu \quad j = 1, \ldots, \mu$$

è una quasi-partizione di A_k.

Si ha

$$\sum_i (\text{mis } Q_i) \cdot \sup_{Q_i} f + \sum_j (\text{mis } R_i) \cdot \sup_{R_j} g \geqslant \\ \sum_{ij} (\text{mis } P_{ij}) \cdot \sup_{P_{ij}} f + \sum_{ij} (\text{mis } P_{ij}) \cdot \sup_{P_{ij}} g = \\ \sum_{ij} (\text{mis } P_{ij}) \cdot \left(\sup_{P_{ij}} f + \sup_{P_{ij}} g\right) \geqslant \\ \sum_{ij} (\text{mis } P_{ij}) \cdot \sup_{P_{ij}} (f+g)$$

■

se ne deduca che

$$\lozenge \quad \int_{A_k} f + \int_{A_k} g \geqslant \inf\Big\{\text{somme superiori di Lebesgue di } f+g \text{ su } A_k\Big\}$$

analogamente si provi che

$$\lozenge \quad \sup\Big(\Big\{\text{somme inferiori di Lebesgue di } f \text{ su } A_k\Big\}+ \\ \Big\{\text{somme inferiori di Lebesgue di } g \text{ su } A_k\Big\}\Big) \leqslant \\ \sup\Big\{\text{somme inferiori di Lebesgue di } f+g \text{ su } A_k\Big\}$$

$$\int_{A_k} f + \int_{A_k} g \leqslant \sup\Big\{\text{somme inferiori di Lebesgue di } f+g \text{ su } A_k\Big\}$$

e che

$\Diamond$ $\sup\Big\{\text{somme inferiori di Lebesgue di } f+g \text{ su } A_k\Big\} \leqslant$
$\inf\Big\{\text{somme superiori di Lebesgue di } f+g \text{ su } A_k\Big\}$

se ne deduca che

$\Diamond$ $f+g$ è integrabile su A_k

$$\int_{A_k}(f+g) = \int_{A_k} f + \int_{A_k} g$$

e quindi che

$\triangle$ $|f+g|$ è integrabile su A_k

$|f|+|g|$ è integrabile su A_k

$$\int_{A_k}|f+g| \leqslant \int_{A_k}(|f|+|g|) = \int_{A_k}|f| + \int_{A_k}|g|$$

Si osservi che

∇ $A_1, A_2, A_3, \ldots$ è una successione fondamentale per $f+g$ su A tale che $f+g$ è integrabile su $\forall A_k$

$\Diamond$ $f+g$ è misurabile su A

$\Diamond$ $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\int_{A_k}|f+g| \leqslant \lim_{k\to\infty}\left(\int_{A_k}|f| + \int_{A_k}|g|\right) = \int_{A_k}|f| + \int_{A_k}|g|$

e quindi che

$\Diamond$ $f+g$ è integrabile su A

$\triangle$ $\displaystyle\int_A(f+g) = \lim_{k\to\infty}\int_{A_k}(f+g) =$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\int_{A_k} f + \int_{A_k} g\right) = \int_A f + \int_A g$$

Analogamente e più semplicemente si procede per cf. ■

2.6 Esempi di funzioni a valori in $\mathbb{R}$ integrabili

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile. Se

$$f : A \to \mathbb{R}$$

è una funzione continua, allora f è misurabile.

Cenno. Per $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ la controimmagine di $(-\infty, \alpha)$ è intersezione di A

e di un aperto, pertanto è misurabile. Se ne deduca che tutte le fasce di livello di f sono misurabili. ■

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la funzione continua

$$\varphi(x) : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$

definita da

$$\varphi(x) = \frac{1}{\|x\|^\alpha} \ ;$$

sussitono gli asserti (dimostrazione omessa):

- sia $r > 0$; φ è integrabile su $I(0,r) \setminus \{0\} \Leftrightarrow \alpha < n$,
- sia $r > 0$; φ è integrabile su $\mathbb{R}^n \setminus I(0,r) \Leftrightarrow \alpha > n$;

come conseguenza del Teorema 2.2.2 si ottiene:

- sia $r > 0$ e sia $\alpha < n$; $\forall f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, misurabile su $I(0,r)$ e tale che
$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{\|x\|^\alpha}, \quad \forall x \in I(0,r) \setminus \{0\}$$
è integrabile su $I(0,r) \setminus \{0\}$,
- sia $r > 0$ e sia $\alpha > n$; $\forall f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, misurabile su $\mathbb{R}^n \setminus I(0,r)$ e tale che
$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{\|x\|^\alpha}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus I(0,r)$$
è integrabile su $\mathbb{R}^n \setminus I(0,r)$.

2.7 Funzioni a valori in $\mathbb{C}$ misurabili ed integrabili secondo Lebesgue

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile, e sia

$$f(x) : A \to \mathbb{C}$$

una funzione a valori complessi; si ponga

$$f(x) = a(x) + ib(x)$$

con

$$a(x), b(x) : A \to \mathbb{R}$$

funzioni a valori reali. Se

▼ $a(x), b(x)$ sono misurabili su A

allora

▲ $f(x)$ si dice *misurabile* su A

Se

▼ $a(x), b(x)$ sono integrabili su A

allora

⧫ $f(x)$ si dice *integrabile* su A

si pone

▲ $\displaystyle\int_A f = \int_A a + i\int_A b$

Si verifichi che

▼ f integrabile $\Rightarrow f$ misurabile

⧫ se

▽ mis $A < +\infty$, e f limitata

allora

△ f misurabile $\Rightarrow f$ integrabile

⧫ se

▽ f è misurabile, ed esiste una funzione integrabile

$$\varphi(x) : A \to [0, +\infty)$$

tale che

$$|f(x)| \leqslant \varphi(x) \text{ per ogni } x \in A$$

allora

△ f è integrabile

⧫ se $f, g : A \to \mathbb{C}$ sono integrabili, e $c \in \mathbb{C}$, allora $f + g, cf$ sono integrabili; in particolare:

- l'insieme $\mathscr{I}(A,\mathbb{C})$ definito da

$$\mathscr{I}(A,\mathbb{C}) = \Big\{ f : A \to \mathbb{C} : f \text{ è integrabile su } A \Big\} \ ,$$

  è un sottospazio dello spazio vettoriale complesso $\mathscr{F}(A,\mathbb{C})$ di tutte le funzioni da A in $\mathbb{C}$;

- l'applicazione

$$\int : \begin{array}{ccc} \mathscr{I}(A,\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ f & \rightsquigarrow & \displaystyle\int_A f \end{array}$$

  è una applicazione $\mathbb{C}$-lineare.

▲ f integrabile $\Leftrightarrow \begin{cases} f & \text{è misurabile} \\ |f| & \text{è integrabile} \end{cases}$; in tal caso si ha:

$$\Big| \int_A f \Big| \leqslant \int_A |f| \ .$$

Cenno. Tale disuguaglianza è ovvia per funzioni reali. Per funzioni complesse si dimostra come segue: Sia $\theta \in \mathbb{R}$ un argomento di $\displaystyle\int_A f$; si ha:

$$\Big| \int_A f \Big| = \left(\int_A a(x) + ib(x) \mathrm{d}x \right) (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) \ \big[\in \mathbb{R} \ \big] \ =$$

$$= \int_A (a(x) \cos\theta + b(x) \sin\theta) \mathrm{d}x \leqslant \int_A |a(x)\cos\theta + b(x)\sin\theta| \mathrm{d}x \leqslant$$

$$\leqslant \int_A \sqrt{a(x)^2 + b(x)^2} \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \ \mathrm{d}x = \int_A |f| \ .$$

■

2.8 Traslazioni e dilatazioni di funzioni misurabili ed integrabili

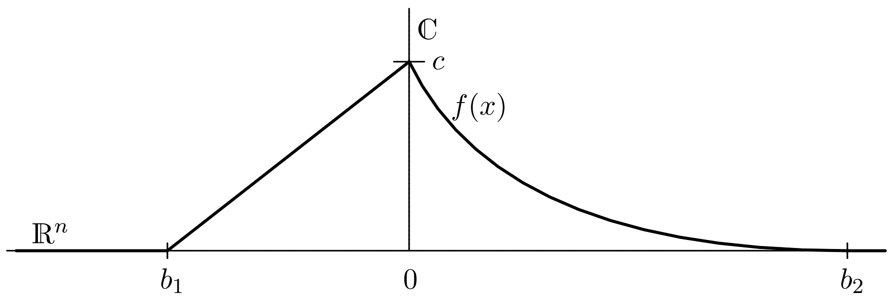
Si consideri una funzione

$$f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$$

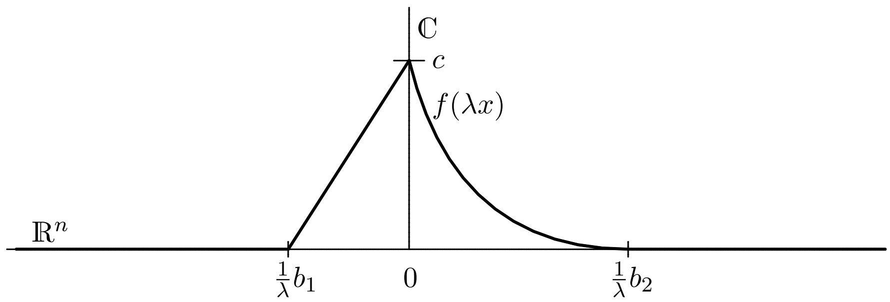
Siano

$$\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0 \qquad a \in \mathbb{R}^n$$

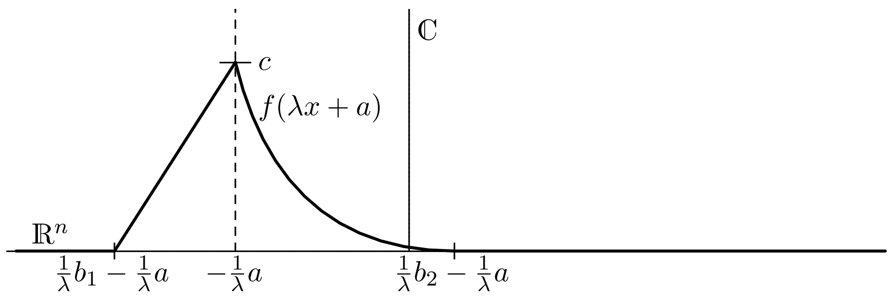
Supponendo che il grafico di $f(x)$ sia



si verifichi che il grafico di $f(\lambda x)$ è (nel disegno si è usato $\lambda = 2$)



e che il grafico di $f(\lambda x + a)$ è



Si tenga conto

▼ delle precedenti figure

per ogni $\mu \in \mathbb{R},\ \mu \neq 0$, e ogni $b \in \mathbb{R}^n$ si considerino in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}$

- ♦ la *dilatazione* (parallela a $\mathbb{R}^n \times \{0\}$) *di coefficiente* μ, ossia l'applicazione
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \times \mathbb{C} \\ (x, d) & \longrightarrow & (\mu x, d) \end{array}$$
- ▲ la *traslazione* (parallela a $\mathbb{R}^n \times \{0\}$) *di vettore* b, ossia l'applicazione
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \times \mathbb{C} \\ (x, d) & \longrightarrow & (x + b, d) \end{array}$$

Se ne deduca che

- ▼ **grafico di** $f(\lambda x) =$ **grafico di** $f(x)$ dilatato di $\dfrac{1}{\lambda}$
- ♦ **grafico di** $f(\lambda x + a) =$ **grafico di** $f(\lambda x)$ traslato di $-\dfrac{1}{\lambda}a$
- ▲ **grafico di** $f(x - a) =$ **grafico di** $f(x)$ traslato di a

Se ne deduca che

- ▼ se $f(x)$ è integrabile su $\mathbb{R}^n$

allora

- ♦ $f(\lambda x),\ f(\lambda x + a),\ f(x - a)$ sono integrabili su $\mathbb{R}^n$
- ▲ si ha
$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{|\lambda|^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x \\ \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda x + a)\mathrm{d}x &= \frac{1}{|\lambda|^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x \\ \int_{\mathbb{R}^n} f(x - a)\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Tali risultati sono casi particolari della seguente

2.8.1 Nota. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ una funzione integrabile su $\mathbb{R}^n$. Sia $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matrice invertibile, sia $a \in \mathbb{R}^n$, e sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ la funzione definita da
$$F(x) = f(Lx + a)$$
Allora si ha (dimostrazione omessa):

- ▼ $F(x)$ è integrabile su $\mathbb{R}^n$
- ▲ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} F(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{|\det L|}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x$

2.9 Asserti veri quasi ovunque. Il Teorema di Lebesgue

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile non vuoto.

Sia $P(x)$ un asserto dipendente da $x \in A$, tale che

▼ per ogni $x \in A$, l'asserto $P(x)$ è o vero o falso

Se

♦ l'insieme
$$\{x \in A : P(x) \text{ è falso}\}$$
è misurabile, e ha misura nulla

allora

▲ $P(x)$ si dice un asserto *vero quasi ovunque* (q.o.) su A

Ad esempio, sia
$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
la funzione definita da
$$\alpha(t) \begin{cases} -|t| & \text{se } t \in \mathbb{Q} \\ \ \ |t| & \text{se } t \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
e sia $P(t)$ l'asserto definito per ogni $t \in \mathbb{R}$ da
$$P(t) = \text{“}\alpha(t) > 0\text{”}$$
allora
$$\{t \in \mathbb{R} : P(t) \text{ è falso}\} = \mathbb{Q}$$
e quindi l'asserto $P(t)$ è vero quasi ovunque su $\mathbb{R}$.

2.9.1 Teorema (di Lebesgue, o della convergenza dominata)**.** Sia

$$f_1, f_2, f_3, \ldots : A \to \mathbb{C}$$

una successione di funzioni *integrabili* su A, e sia

$$f : A \to \mathbb{C}$$

una funzione *qualsiasi*.

Se

▼ $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(a) = f(a)$ per q.o. $a \in A$

▲ esiste $\varphi : A \to \mathbb{C}$ tale che

- ▽ φ è integrabile su A
- ◊ $\varphi(a) \geqslant 0$ per q.o. $a \in A$
- △ per ogni k si ha

$$|f_k(a)| \leqslant \varphi(a) \quad \text{per q.o. } a \in A$$

allora si ha (dimostrazione omessa)

▼ f è integrabile su A

♦ $\lim\limits_{k\to\infty} \int_A f_k = \int_A f$

▲ $\lim\limits_{k\to\infty} \int_A |f - f_k| = 0$

Si verifichi che

▼ **2.9.2** se

- ▽ $f : A \to \mathbb{C}$ è un funzione integrabile
- ◊ $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots \subset A$ è una sucessione di insiemi misurabili tali che

$$\text{mis}\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = 0$$

allora

- △ $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{A_k} f = \int_A f$

Cenno. Si ponga

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A_k \\ 0 & \text{se } x \in A \setminus A_k \end{cases} \qquad \varphi(x) = |f(x)|$$

e si applichi 2.9.1. ■

▲ **2.9.3** (integrazione per parti generalizzata) siano

$$f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$$

tali che

- ▽ $f, g \in C^0[a, b]$
- ◊ $f, g \in C^1(a, b)$
- ◊ $f^{(1)}, g^{(1)}$ sono integrabili su (a, b)

allora

- ◊ $f^{(1)}g,\ fg^{(1)}$ sono integrabili su (a, b)
- △ $\displaystyle\int_{(a,b)} f^{(1)}g = \big[f(t)g(t)\big]_a^b - \int_{(a,b)} fg^{(1)}$

Cenno. Siano

$$[a_1, b_1] \subset [a_2, b_2] \subset [a_3, b_3] \subset \cdots \subset (a, b)$$

tali che

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k] = (a, b)$$

Su ogni $[a_k, b_k]$ si ha (usuale integrazione per parti)

$$\int_{[a_k,b_k]} f^{(1)}g = \big[f(t)g(t)\big]_{a_k}^{b_k} - \int_{[a_k,b_k]} fg^{(1)}$$

Usando 2.9.2, si passi al limite per $k \to \infty$. ■

2.10 Funzioni definite quasi ovunque. I Teoremi di Fubini e Tonelli

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile.

Siano

$$\begin{array}{rl} H \subset A & \text{un insieme tale che } \ \text{mis}\, H = 0 \\ f : A \setminus H \to \mathbb{C} & \text{una funzione} \end{array}$$

allora

- ▼ $f : A \setminus H \to \mathbb{C}$ si dice un *funzione definita quasi ovunque su* A
- ▲ $f : A \setminus H \to \mathbb{C}$ si denota con la sigla

$$f : A \to \mathbb{C} \text{ d.q.o.}$$

Ad esmpio, si può considerare la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ d.q.o.}$$

definita da

$$f(t) = \frac{e^{it}}{\sin t}$$

per la quale si ha $H = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Siano

- ▼ $\breve{f} : A \to \mathbb{C}$ il *prolungamento banale* di f ad A, definito da

$$\breve{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \setminus H \\ 0 & x \in H \end{cases}$$

- ▲ $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ il prolungamento banale di f ad $\mathbb{R}^n$, definito da

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \setminus H \\ 0 & x \notin A \setminus H \end{cases}$$

si verifichi che

▼ sono equivalenti gli asserti

a) $f : A \setminus H \to \mathbb{C}$ è misurabile su $A \setminus H$

b) $\breve{f} : A \to \mathbb{C}$ è misurabile su A

c) $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ è misurabile su $\mathbb{R}^n$

in tal caso

∘ $f : A \to \mathbb{C}$ d.q.o. si dice *misurabile* su A

▲ sono equivalenti gli asserti

a) $f : A \setminus H \to \mathbb{C}$ è integrabile su $A \setminus H$

b) $\breve{f} : A \to \mathbb{C}$ è integrabile su A

c) $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ è integrabile su $\mathbb{R}^n$

in tal caso

▽ $\displaystyle\int_{A\setminus H} f = \int_A \breve{f} = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}$

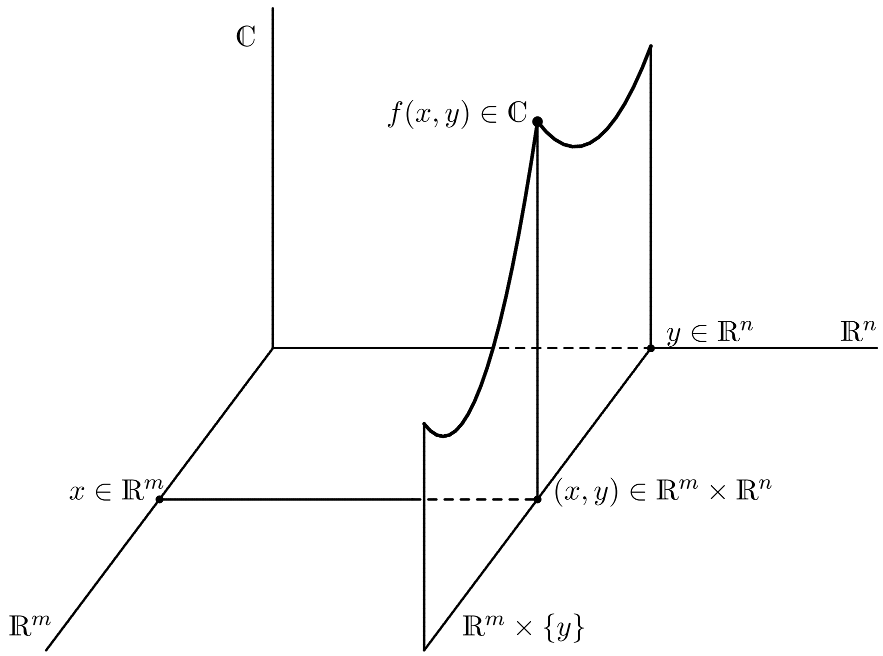
◊ $f : A \to \mathbb{C}$ d.q.o. si dice *integrabile* su A

△ si pone

$$\int_A f = \int_{A\setminus H} f = \int_A \breve{f} = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}$$

Il seguente *Teorema di Fubini* riconduce il calcolo dell'integrale di una funzione integrabile di $n+m$ variabili, al calcolo di integrali di funzioni di solo n ed m variabili.

2.10.1 Teorema (di Fubini)**.** Sia $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ una funzione integrabile su $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.



Si ha (dimostrazione omessa)

▼ per q.o. $y \in \mathbb{R}^n$, la funzione

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longrightarrow & f(x,y) \end{array}$$

è integrabile su $\mathbb{R}^m$

⧫ la funzione definita q.o.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ y & \longrightarrow & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\mathrm{d}x \end{array}$$

è integrabile su $\mathbb{R}^n$

▲ $$\int_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

Risultati analoghi sussistono scambiando i ruoli di $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$.

Il seguente *Teorema di Tonelli* fornisce condizioni necessarie e sufficienti di integrabilità di una funzione *misurabile* di $n+m$ variabili, in termini di integrabilità e integrali di funzioni di sole n ed m variabili.

2.10.2 Teorema (di Tonelli)**.** Sia $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ una funzione misurabile su $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Sono equivalenti gli asserti (dimostrazione omessa):

a) f è integrabile su $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$,

b) $|f|$ verifica le condizioni:

- ▽ per q.o. $y \in \mathbb{R}^n$, la funzione

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & |f(x,y)| \end{array}$$

  è integrabile su $\mathbb{R}^m$

- △ la funzione definita q.o.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longrightarrow & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)|\mathrm{d}x \end{array}$$

  è integrabile su $\mathbb{R}^n$

Risultato analogo sussiste scambiando i ruoli di $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$.