

TEORIA DELLE DISTRIBUZIONI (docente Mario Poletti)

REGISTRO LEZIONI ANNO 2011

- 1-2) 19/04/11. Misura di Jordan: finita additività. Misura di Lebesgue: numerabile additività, insiemi di misura nulla, apparenti paradossi.
- 3-4) 03/04/11. Esempi di insiemi non misurabili secondo Lebesgue: loro dipendenza dall'assioma della scelta in forma forte. Funzioni misurabili e integrabili secondo Lebesgue: proprietà elementari dell'integrale di Lebesgue. Identificazione di funzioni uguali quasi ovunque: funzioni nel senso delle classi.
- 5-6) 10/05/11. Gli spazi  $L^p$ : il Teorema di Holder,  $L^p$ -norma e  $L^p$ -convergenza, completezza. Nota sulla non completezza degli analoghi di tali spazi relativi alla misura di Jordan a all'integrale di Riemann.
- 7-8) 17/05/11. Spazi con famiglie separanti di seminorme: successioni convergenti e successioni di Cauchy. Gli spazi  $L^1_{loc}$  e la  $L^1_{loc}$ -convergenza: completezza. Relazioni tra  $L^p$ -convergenza e  $L^1_{loc}$ -convergenza. Esposimetro come prototipo di nuovi tipi di seminorme legate a strumenti di misura:  $L^1_{loc}$  come modello di fenomeni,  $L^\infty$  a supporto compatto come modello di strumenti di misura. Aumentare delle successioni convergenti e di Cauchy, al diminuire delle famiglie separanti di seminorme legate a  $L^\infty$  a supporto compatto.
- 9-10) 24/05/11 Il limite inferiore storico  $\mathcal{D}$ : esempi di funzioni test, convergenza in senso debole, legame con la  $L^1_{loc}$ -convergenza, esempi di successioni convergenti in senso debole ma non  $L^1_{loc}$ -convergenti. Grandezze distribuite e loro densità: esempi di successioni di Cauchy in senso debole, non convergenti in s.d.. Incompletezza di  $L^1_{loc}$  rispetto alla convergenza s.d..
- 11-12) 31/05/11. Predistribuzioni e distribuzioni su un aperto: lo spazio  $\mathcal{D}'$ . Misure e seminorme in  $\mathcal{D}'$  legate agli elementi di  $\mathcal{D}$ . La  $\mathcal{D}'$ -convergenza: completezza di  $\mathcal{D}'$ . Immersione canonica di  $L^1_{loc}$  in  $\mathcal{D}'$ :  $\mathcal{D}'$  come insieme di tutti e soli i limiti di successioni di Cauchy s.d. di elementi di  $L^1_{loc}$ . Descrizione del modello di Schwartz: descrizione dell'isomorfismo canonico tra il modello di  $\mathcal{D}'$  proposto e il modello di Schwartz.

- 13-14) 7/6/11. Le Delta di Dirac: definizione, interpretazione fisica, indipendenza lineare, spazio vettoriale da loro generato e proprietà di densità in  $\mathcal{D}'$ . Esempi di distribuzioni su  $\mathbb{R}$ : doppietti, valore principale di  $1/x$ .
- 15-16) 8/6/11. Posizione del problema della moltiplicazione tra distribuzioni: il caso particolare di  $C^\infty \cdot \mathcal{D}'$ , bilinearità e continuità. Traslazione e dilatazione di distribuzioni: traslate della delta di Dirac. Derivate distribuzionali: lemmi preparatori.
- 17-18) 14/6/11 Derivate distribuzionali: definizione, commutatività delle derivazioni parziali, linearità e continuità. Esempi di derivate distribuzionali: derivate delle delta in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , dei gradini in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  e in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ . Convergenza a 0 di successioni di funzioni multicircolari su  $\mathbb{R}^n$  con multifrequenza tendente all' $\infty$ , e modulo funzione polinomiale della relativa multifrequenza. Restrizione di distribuzioni a sottinsiemi aperti; nozione di distribuzioni: i) nulle su un aperto, ii) continue su un aperto, iii)  $L^p$  su un aperto, etc.. Supporto di una distribuzione. Condizioni sufficienti a  $\int f \bullet \varphi = 0$ , e a  $\eta f = f$  per distribuzioni: confronto con condizioni analoghe per funzioni.
- 19-20) 15/6/11 Costruzione di funzioni test a valore unitario su aperti opportuni contenenti compatti assegniati. Distribuzioni a supporto compatto, e condizioni equivalenti. Definizione di  $\int_{\mathcal{E}'} \bullet C^\infty$ . Seminorme in  $\mathcal{E}'$ :  $\mathcal{E}'$ -convergenza, ed esempi. Confronto tra  $\mathcal{E}'$ -convergenza e  $\mathcal{D}'$ -convergenza: completezza di  $\mathcal{E}'$  e densità di  $\mathcal{D}$ . Funzioni a crescita lenta e a decrescenza rapida: gli spazi  $L^1_{loc/cl}$ ,  $\mathcal{O}_M$ ,  $\mathcal{S}$ .
- 21-22) 21/6/11 Predistribuzioni e distribuzioni temperate: lo spazio  $\mathcal{S}'$ , misure,  $\mathcal{S}'$ -convergenza. Derivate in  $\mathcal{S}'$ : caratterizzazione elementi come derivate di funzioni continue a crescita lenta. Gli elementi di  $\mathcal{O}_M$  come moltiplicatori in  $\mathcal{S}'$ : gli spazi  $L^p$  come sottospazi di  $\mathcal{S}'$ . Prodotto di convoluzione in  $L^1_{loc}$ : definizione. Alcune condizioni di esistenza: un fattore a supporto compatto, due fattori negli spazi  $L^p$ , il teorema di Young, condizioni di associatività.
- 23-24) 28/6/11 Convoluzione tra  $\mathcal{D}'$  e  $\mathcal{E}'$ : definizione,  $\varphi$ -misura di una convoluzione, convoluzione con  $\delta(x), \delta(x-a), \partial\delta(x)$ , condizioni di associatività, condizioni di continuità. Convoluzione con una test: appartenenza a  $C^\infty$ , espressione tra-

mite  $\varphi$ -misure. Evoluzione di una distribuzione vista attraverso una test: legame con la convoluzione. Sistemi lineari shift-invarianti e continui in  $\mathcal{D}'$ : la famiglia dei sistemi  $\mathcal{L}_\Delta$ ,  $\Delta \in \mathcal{E}'$ . Risposta impulsiva di un sistema lineare shift-invariante e continuo in  $\mathcal{D}'$ : appartenenza ad  $\mathcal{E}'$ , uso per la determinazione della relazione *input-output*, caratterizzazione di tutti e soli i sistemi di tale tipo.

25-26-27) 29/6/11 La Trasformata di Fourier in  $L^1$ . Funzioni in  $L^1 \cap L^\infty \cap C^0$  con FT in  $L^1$ : lettura classica del legame con l'AFT. La FT in  $\mathcal{S}$  come automorfismo avente per inversa la AFT. Teorema di Reciprocità, e Formule FT-convoluzione, in  $L^1$ . La FT in  $\mathcal{S}'$ : definizione, Teorema di Reciprocità, coerenza della definizione per funzioni  $L^1$ , la FT come automorfismo di inversa la AFT. Continuità della FT in  $\mathcal{S}'$ . FT di  $\delta$ , di 1. Classificazione delle distribuzioni in base alle proprietà delle loro convoluzioni con le funzioni di  $\mathcal{D}$ : rivisitazione delle distribuzioni temperate, lo spazio  $\mathcal{O}'_C$  delle distribuzioni a decrescenza rapida, gli spazi  $\mathcal{D}'_{L^p}$ . Gli elementi di  $\mathcal{O}'_C$  come operatori di convoluzione in  $\mathcal{S}'$ : linearità, shift-invarianza, continuità. Gli operatori FT e AFT come isomorfismi tra  $\mathcal{O}'_C$  e  $\mathcal{O}'_M$ : formule FT-convoluzione in  $\mathcal{S}'$ . Sistemi LSI e continui da  $\mathcal{S}'$  in  $\mathcal{D}'$ : loro caratterizzazione come tutti e soli i sistemi del tipo  $f \rightarrow \Delta * f$ , con  $\Delta \in \mathcal{O}'_C$ .

Pisa, 11 Luglio 2011

Mario Poletti