TEORIA DELLE DISTRIBUZIONI (docente Mario Poletti)

PROGRAMMA 2011

MISURA E INTEGRALE DI LEBESGUE. Misura di Jordan: finita additività. Misura di Lebesgue: numerabile additività, insiemi di misura nulla, apparenti paradossi. Funzioni misurabili e integrabili secondo Lebesgue: proprietà elementari dell'integrale di Lebesgue, cenno ai teoremi di logica connessi alla misurabilità.

NORME E FAMIGLIE DI SEMINORME: Identificazione di funzioni uguali quasi ovunque: funzioni nel senso delle classi. Gli spazi L^p: il Teorema di Holder, L^p-norma e L^p-convergenza, completezza. Spazi con famiglie separanti di seminorme: successioni convergenti e successioni di Cauchy. Gli spazi L^1_{loc} e la L^1_{loc}-convergenza: completezza. Relazioni tra L^p-convergenza e L^1_{loc}-convergenza.

CONVERGENZA IN SENSO DEBOLE: Esposimetro come prototipo di nuovi tipi di seminorme legate a strumenti di misura: le $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ come modello per fenomeni, le $\varphi \in L^\infty$ a supporto compatto come modello per strumenti di misura. Aumentare del quantitativo di successioni convergenti e di Cauchy, al decrescere del quantitativo di seminorme separanti. Il limite inferiore storico $\mathscr{D}$: esempi di funzioni test, convergenza in senso debole (convergenza s.d.), legame con la L^1_{loc}-convergenza, esempi di successioni convergenti in senso debole ma non L^1_{loc}-convergenti. Grandezze distribuite e loro densità: esempi di successioni di Cauchy in senso debole, non cenvergenti in senso debole. Incompletezza di L^1_{loc} rispetto alla convergenza s.d..

DISTRIBUZIONI: Predistribuzioni e distribuzioni su un aperto di $\mathbb{R}^n$: lo spazio $\mathscr{D}'$. Misure e seminorme in $\mathscr{D}'$ legate agli elementi di $\mathscr{D}$. La $\mathscr{D}'$- convergenza: completezza di $\mathscr{D}'$. Immersione canonica di L^1_{loc} in $\mathscr{D}'$: $\mathscr{D}'$ come insieme di tutti e soli i limiti di successioni di Cauchy s.d. di elementi di L^1_{loc}. Descrizione del modello di Schwartz: descrizione dell'isomorfismo canonico tra il modello di $\mathscr{D}'$ proposto e il modello di Schwartz. Le Delta di Dirac: definizione, interpretazione fisica, indipendenza lineare, spazio vettoriale da loro generato e proprietà di densità in $\mathscr{D}'$. Esempi di distribuzioni su $\mathbb{R}$: doppietti, valore principale di $1/x$.

MOLTIPLICATORI, DERIVATE, TRASLAZIONI, DILATAZIONI, RESTRIZIONI E SUPPORTO PER DISTRIBUZIONI: Posizione del problema della moltiplicazione tra distribuzioni: il caso particolare di $C^\infty \cdot \mathscr{D}'$, bilinearità e continuità. Derivate di-

tribuzionali: lemmi preparatori, definizione, commutatività delle derivazioni parziali, linearità e continuità. Esempi di derivate distribuzionali: derivate delle delta in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, dei gradini in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ e in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$. Convergenza a 0 di successioni di multifrequenze pure su $\mathbb{R}^n$ con multipulsazioni tendenti all'∞, e modulo funzione polinomiale della relativa multipulsazione. Traslazioni e dilatazioni di distribuzioni su $\mathbb{R}^n$: la delta di Dirac e le sue traslate. Restrizione di distribuzioni a sottinsiemi aperti; nozione di distribuzioni: i) nulle su un aperto, ii) continue su un aperto, iii) L^p su un aperto, etc.. Supporto di una distribuzione. Condizioni sufficienti a $\int f \bullet \varphi = 0$, e a $\eta f = f$ per distribuzioni: confronto con condizioni analoghe per funzioni.

DISTRIBUZIONI A SUPPPORTO COMPATTO: Costruzione di funzioni test a valore unitario su aperti opportuni contenenti compatti asseganti. Distribuzioni a supporto compatto, e condizioni equivalenti. Definizione di $\int \mathscr{E}' \bullet C^\infty$. Seminorme in $\mathscr{E}'$: $\mathscr{E}'$-convergenza, ed esempi. Confronto tra $\mathscr{E}'$-convergenza e $\mathscr{D}'$-convergenza: completezza di $\mathscr{E}'$ e densità di $\mathscr{D}$.

DISTRIBUZIONI TEMPERATE: Funzioni a crescita lenta e a decrescenza rapida: gli spazi $L^1_{\mathrm{loc/cl}}$, $\mathscr{O}_{\mathrm{M}}$, $\mathscr{S}$. Predistribuzioni e distribuzioni temperate: lo spazio $\mathscr{S}'$, misure, $\mathscr{S}'$-convergenza. Derivate in $\mathscr{S}'$: caratterizzazione elementi come derivate di funzioni continue a crescita lenta. Gli elementi di $\mathscr{O}_{\mathrm{M}}$ come moltiplicatori in $\mathscr{S}'$: gli spazi L^p come sottospazi di $\mathscr{S}'$.

PRODOTTO DI CONVOLUZIONE: Prodotto di convoluzione in L^1_{loc}: definizione. Alcune condizioni di esistenza: un fattore a supporto compatto, due fattori negli spazi L^p, il teorema di Young, condizioni di associatività. Convoluzione tra $\mathscr{D}'$ e $\mathscr{E}'$: definizione, φ-misura di una convoluzione, convoluzione con $\delta(x), \delta(x-a), \partial\delta(x)$, condizioni di associatività, condizioni di continuità. Convoluzione con una test: appartenenza a C^∞, espressione tramite φ-misure. Evoluzione di una distribuzione vista attraverso una test: legame con la convoluzione.

SISTEMI LINEARI SHIFT INVARIANTI E CONTINUI IN $\mathscr{D}'$: La famiglia dei sistemi $\mathscr{L}_\Delta, \quad \Delta \in \mathscr{E}'$. Risposta impulsiva di un sistema leneare shift- invariante e continuo in $\mathscr{D}'$: appartenenza ad $\mathscr{E}'$, uso per la determinazione della relazione *input-output*, caratterizzazione di tutti e soli i sistemi di tale tipo.

TRASFORMATA DI FOURIER: La Trasformata di Fourier in L^1. Funzioni in $L^1 \cap L^\infty \cap C^0$ con FT in L^1: lettura classica del legame con l'AFT. La FT in $\mathscr{S}$ come automorfismo avente per inversa la AFT. Teorema di Reciprocità e Formule FT-convoluzione in L^1.

La FT in $\mathscr{S}'$: definizione, Teorema di Reciprocità, coerenza della definizione per funzioni L^1, la FT come automorfismo di inversa la AFT. Continuità della FT in $\mathscr{S}'$. FT di δ, di 1. FT e AFT di derivate, multipli secondo polinomi, traslate, multipli secondo frequenze pure: esempi di applicazione alla δ.

CONVOLUTORI E CONVOLUZIONE IN $\mathscr{S}'$, SISTEMI LINEARI SHIFT INVARIANTI E CONTINUI IN $\mathscr{S}'$: Classificazione delle distribuzioni in base alle proprietà delle loro convoluzioni con le funzioni di $\mathscr{D}$: rivisitazione delle distribuzioni temperate, lo spazio $\mathscr{O}'_{\mathrm{C}}$ delle distribuzioni a decrescenza rapida, gli spazi $\mathscr{D}'_{L^p}$. Gli elementi di $\mathscr{O}'_{\mathrm{C}}$ come operatori di convoluzione in $\mathscr{S}'$: linearità, shift-invarianza, continuità. Gli operatori FT e AFT come isomorfismi tra $\mathscr{O}'_{\mathrm{C}}$ e $\mathscr{O}_{\mathrm{M}}$: formule FT-convoluzione in $\mathscr{S}'$. Sistemi LSI e continui da $\mathscr{S}'$ in $\mathscr{D}'$: loro caratterizzazione come tutti e soli i sistemi del tipo $f \to \Delta * f$, con $\Delta \in \mathscr{O}'_{\mathrm{C}}$.

Pisa, 11 Luglio 2011

Mario Poletti