Scuola di Dottorato in Ingegneria ”L. da Vinci”

Problemi di estremo vincolato ed applicazioni

Pisa, 28-29 Maggio, 2009

Introduzione ai problemi di estremo

G. Mastroeni *

*Ricercatore, Dipartimento di Matematica ”L. Tonelli”, Universita' di Pisa.

Schema della presentazione

- Principali problemi di estremo: problemi di dimensione finita e infinita. Esistenza delle soluzioni ottime.

- Cenni sulle funzioni convesse

- Problemi non vincolati

- Problemi con vincoli lineari

Problemi di estremo

$$\min_{x \in R} \; f(x) \qquad\qquad (P)$$

$f : X \longrightarrow \mathbf{R}$, X opportuno spazio, $R \subseteq X$.

Se $\dim(X) < \infty$, (P) e' detto di dimensione finita.

Esempio. Dimensione finita: $X = \mathbf{R}^n$, $X = Z^n$, $X = \{0, 1\}^n$.

Dimensione infinita: $X = [C(a, b)]^n$, $X = [C^1(a, b)]^n$, $X = [L^p(a, b)]^n$.

Osservazione.

$$\max_{x \in R} \; f(x) = -\min_{x \in R} \; (-f(x))$$

1. Se $R = X$, (P) e' non vincolato;

2. Se R e' un insieme aperto, si conviene considerare (P) non vincolato.

Definizione.

- $\bar{x} \in R$ e' detto punto di minimo globale se
$$f(\bar{x}) \le f(x), \quad \forall x \in R.$$

- $\bar{x} \in R$ e' detto punto di minimo locale se
$$f(\bar{x}) \le f(x), \quad \forall x \in R \cap V(\bar{x}),$$

ove $V(\bar{x})$ e' un intorno di $\bar{x}$.

Osservazione. La definizione di punto di minimo locale richiede che sullo spazio X sia definita una topologia.

Problemi di programmazione matematica

(P) e' detto "problema di programmazione matematica" se l'insieme R e' definito nella forma

$$R := \{x \in X : g(x) \leq 0, h(x) = 0\},$$

ove $g : X \longrightarrow \mathbf{R}^m$, $h : X \longrightarrow \mathbf{R}^p$.

$$g(x) := (g_1(x), .., g_m(x)), h(x) := (h_1(x), .., h_p(x))$$

Osservazione. La precedente definizione si puo' generalizzare al caso in cui

$$g : X \longrightarrow Y, \ h : X \longrightarrow Z,$$

ove Y, Z sono spazi funzionali. Se dim(Y) o dim$(Z)= \infty$, allora (P) e' detto avere immagine di dimensione infinita.

La funzione Lagrangiana

Sia (P) con immagine di dimensione finita, ossia, $g : X \longrightarrow \mathbf{R}^m$, $h : X \longrightarrow \mathbf{R}^p$.

La funzione Lagrangiana associata a (P) e' definita da $L : X \times \mathbf{R}^m_+ \times \mathbf{R}^p \longrightarrow \mathbf{R}$,

$$L(x,\lambda,\mu) := f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(x).$$

Sia (P) con immagine di dimensione infinita, ossia, $g : X \longrightarrow Y$, $h : X \longrightarrow Z$.

La funzione Lagrangiana associata a (P) e' definita da $L : X \times Y^* \times Z^* \longrightarrow \mathbf{R}$,

$$L(x,\lambda,\mu) := f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle + \langle \mu, h(x) \rangle$$

ove Y^* e' lo spazio dei funzionali lineari e continui su Y (analogamente per Z^*) e $\langle y^*, y \rangle$ denota il valore del funzionale $y^* \in Y^*$ nel punto $y \in Y$.

Esempio 1. (Immagine di dimensione finita)

$$\min \ f(x) := \int_a^b \sqrt{1 + [x'(t)]^2} dt$$

$$h(x) := \int_a^b x(t)dt - V = 0$$

$$x(a) = x^0, \quad x(b) = x^1, \quad x \in C^1(a,b).$$

La Lagrangiana e: $L : C^1(a,b) \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$,

$$L(x,\mu) := \int_a^b \sqrt{1 + [x'(t)]^2} dt + \mu(\int_a^b x(t)dt - V).$$

Esempio 2. (Immagine di dimensione infinita)

$$\min \ f(x) := \int_a^b \sqrt{1 + [x'(t)]^2} dt \quad s.t.$$

$$h(x) := \psi(t, x(t)) = 0, \ \forall t \in [a,b],$$

$$x(a) = x^0, \quad x(b) = x^1, \quad x \in C^1(a,b).$$

Supponendo $h : C^1(a,b) \longrightarrow L^2(a,b)$, si ha: $L : C^1(a,b) \times L^2(a,b) \longrightarrow \mathbf{R}$,

$$L(x,\mu) := \int_a^b \sqrt{1 + [x'(t)]^2} dt + \int_a^b \mu(t)\psi(t, x(t))dt.$$

Esempio 3. (Immagine di dimensione infinita)

$$\min\ f(x) := \int_a^b f(t, x(t), \xi(t))dt \quad s.t.$$

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x; \xi),\ i = 1, .., n$$

$$x(a) = x^0,\ x(b) = x^1, \quad x \in C^1(a, b), \xi \in \Xi.$$

Esempio 4. (Problema di dimensione finita)

$$\min\ f(x) := x_1 x_2 \quad s.t.$$

$$h(x) := x_1^2 + x_2^2 - r^2 = 0, x \in \mathbf{R}^2$$

Esempio 5. (Problema di programmazione lineare)

$$\min\ (2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 & = 4 \\ 4x_1 + 2x_3 - x_4 & = 5 \\ 2x_2 - x_3 + x_5 & = 6 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Esistenza di una soluzione ottima

Teorema. Sia R un sottoinsieme compatto di X ed f semicontinua inferiormente su R. Allora P ammette un punto di minimo globale.

Teorema. Sia R un sottoinsieme chiuso e convesso di uno spazio di Banach riflessivo X ed f convessa, debolmente semicontinua inferiormente su R e tale che

$$\lim_{\substack{\|x\|\to\infty \\ x\in R}} f(x) = +\infty. \tag{1}$$

Allora P ammette un punto di minimo globale.

Osservazione. Una funzione che soddisfa la condizione (1) e' detta "coerciva" (sull'insieme R).

Se X e' di dimensione finita, la convessita' di f ed R non e' necessaria.

Funzioni convesse

Definizione Sia $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$ ed $A \subseteq X$ un insieme convesso.

- f si dice convessa su A se, $\forall x_1, x_2 \in A$,

  $$(1-\alpha)f(x_1)+\alpha f(x_2) \geq f((1-\alpha)x_1+\alpha x_2),$$

  $\forall \alpha \in (0,1)$.

- f si dice "strettamente convessa" su A, se vale la disuguaglianza in senso stretto per ogni $x_1 \neq x_2$.

- f si dice fortemente convessa su A se esiste $a > 0$, tale che, per ogni $x_1, x_2 \in A$,

  $$(1-\alpha)f(x_1)+\alpha f(x_2) \geq f((1-\alpha)x_1+\alpha x_2) + a\|x_2 - x_1\|^2, \ \forall \alpha \in (0,1).$$

Il caso differenziabile

Sia $X := \mathbf{R}^n$ ed $A \subseteq \mathbf{R}^n$ un insieme convesso ed aperto.

Teorema 1. Sia $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$ differenziabile sull'insieme A. Allora f e' convessa su A se e solo se, $\forall x_1, x_2 \in A$,

$$f(x_1) - f(x_2) \geq \langle \nabla f(x_2), x_1 - x_2 \rangle$$

Teorema 2. Una funzione $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ differenziabile, (almeno) due volte su A è convessa se e solo se la sua matrice Hessiana $\nabla^2 f(x)$ è semidefinita positiva $\forall x \in A$.

Teorema 3. Sia f differenziabile su A. Allora f e' fortemente convessa su A se e solo se, $\forall x_1, x_2 \in A$,

$$f(x_1) - f(x_2) \geq \langle \nabla f(x_2), x_1 - x_2 \rangle + a \|x_2 - x_1\|^2.$$

Osservazione. Se f e' fortemente convessa su R, allora f e' coerciva.

Il seguente teorema evidenzia il ruolo della convessità nei problemi di estremo.

Teorema. Si consideri l'insieme convesso $A \subseteq \mathbf{R}^n$ e sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ una funzione convessa. Valgono le seguenti proprieta':

- Una funzione $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ convessa è continua su $int(A)$.

- Ogni elemento $x^0 \in A$ che ha la proprietà di essere un minimo globale o un minimo locale o un punto stazionario di f su A, gode anche delle restanti due proprietà.

- L'insieme dei punti di minimo A^0 di f su A è convesso; in particolare, se f è lineare e A è un poliedro, allora A^0 è una faccia di A.

- Se f è strettamente convessa su A, allora (se esiste) un punto di minimo e' unico.

Osservazione. In generale, la convessità di una funzione f su di un insieme convesso A non assicura né l'esistenza di un punto di minimo di f su A e neppure di un punto stazionario, come mostrato dal seguente esempio.

Esempio.
Sia $A = \mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$ ed $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

La funzione f e' strettamente convessa, l'insieme A e' convesso, ma f non ammette punti stazionari.

Sottogradiente e sottodifferenziale.

Definizione. Sia $X \subseteq \mathbf{R}^n$. Si dice *sottogradiente* di $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$, nel punto $\bar{x}$, un vettore $\gamma \in \mathbf{R}^n$ tale che

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq \langle \gamma, x - \bar{x} \rangle, \quad \forall x \in X.$$

L'insieme dei sottogradienti di f, nel punto $\bar{x}$, viene detto sottodifferenziale e si denota con $\partial f(\bar{x})$.

Teorema. Ogni funzione convessa possiede un sottogradiente in ogni punto $\bar{x} \in int[dom(f)]$.

Condizioni di ottimalita'

Consideriamo il problema (P) non vincolato

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} \; f(x)$$

e supponiamo f due volte differenziabile con continuita'.

Teorema 1. (Condizione necessaria) Sia $\bar{x}$ un punto di minimo locale per P. Allora risulta

(a) $\nabla f(\bar{x}) = 0$;

(b) $\nabla^2 f(\bar{x})$ semidefinita positiva;

Teorema 2. (Condizione sufficiente) Se

(a) $\nabla f(\bar{x}) = 0$,

(b) $\nabla^2 f(\bar{x})$ e' definita positiva,

allora $\bar{x}$ e' un punto di minimo locale per P.

Il caso convesso

Teorema. Sia $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$ una funzione convessa. Allora $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ e' punto di minimo (globale) per f se e solo se

$$0 \in \partial f(\bar{x}).$$

Esempio.

$$\min_{x \in \mathbf{R}} \; |x|$$

$$\partial f(0) = \{\gamma \in \mathbf{R} : -1 \leq \gamma \leq 1\}$$

La funzione di Peano

$$f(x_1, x_2) := (x_2 - \alpha x_1^2)(x_2 - \beta x_1^2), \quad 0 < \alpha < \beta$$

Il punto $\bar{x} := (0, 0)$ e' stazionario ma non di minimo relativo. Tale punto soddisfa le condizioni necessarie del primo e del secondo ordine ma non quelle sufficienti.

Condizioni di ottimalita' per problemi di estremo vincolato

Consideriamo il problema (P)

$$\min\ f(x) \quad s.t.$$

$$x \in R := \{x \in X : g(x) \leq 0, h(x) = 0\},$$

$$g(x) := (g_1(x), .., g_m(x)), h(x) := (h_1(x), .., h_p(x))$$

La funzione Lagrangiana associata a (P) e' definita da $L : X \times \mathbf{R}^m_+ \times \mathbf{R}^p \longrightarrow \mathbf{R}$,

$$L(x, \lambda, \mu) := f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle + \langle \mu, h(x) \rangle$$

Nel caso differenziabile, sotto opportune condizioni di regolarita' sulle funzioni g ed h, vale il seguente risultato.

Teorema. Sia $X \subseteq \mathbf{R}^n$ un insieme aperto. Condizione necessaria affinche' $\bar{x} \in R$ sia punto di minimo locale per (P) e' che esistano $\bar{\lambda} \in \mathbf{R}^m_+$ e $\bar{\mu} \in \mathbf{R}^p$ $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \neq 0$ tali che $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ sia soluzione del sistema:

$$\begin{cases} \nabla L(x, \lambda, \mu) = 0, \\ \langle \lambda, g(x) \rangle = 0, \lambda \in \mathbf{R}^m_+, \mu \in \mathbf{R}^p, \\ g(x) \leq 0,\ h(x) = 0, x \in X \end{cases}$$

Problemi di programmazione lineare

Un problema di programmazione lineare (PL) nella forma standard e' definito dalla seguente formulazione:

$$\text{min } \langle c, x \rangle \quad s.t.$$

$$x \in R := \{x \in \mathbf{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}, \qquad (PL)$$

ove $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ e' una matrice di rango m, $b \in \mathbf{R}^m$, $c \in \mathbf{R}^n$.

Osservazione. E' possibile dimostrare che, tramite opportune trasformazioni, un qualsiasi sistema di vincoli lineari puo' essere posto nella forma standard.

La regione ammissibile R del problema (PL) e' un poliedro.

Poliedri

Definizione. Si dice poliedro l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi di $\mathbf{R}^n$.

La rappresentazione algebrica di un poliedro R d̀ata, in generale, da un sistema lineare di disuguaglianze, ossia

$$\mathcal{P} := \{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax \leq b\},$$

dove $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ è una matrice e $b \in \mathbf{R}^m$ un vettore.

Osservazione. L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare di disuguaglianze o uguaglianze (ciascuna di queste ultime può essere rimpiazzata equivalentemente da una coppia di disuguaglianze) è un poliedro.

Faccia di un poliedro

- Sia $I := \{1, \ldots, m\}$ l'insieme degli indici delle righe di A e degli elementi di b; $I' \subseteq I$ un generico sottoinsieme di indici;

- $A_{I'}$ e $b_{I'}$ denotano, rispettivamente, la sottomatrice di A ed il sottovettore di b associati all'insieme di indici I';

Definizione (Faccia di $\mathcal{P}$) Dato un sottoinsieme di indici $I' \subseteq I$, l'insieme

$$F_{I'} := \left\{ x \in \mathbf{R}^n : A_{I'}x = b_{I'};\ A_{I \setminus I'}x \leq b_{I \setminus I'} \right\},$$

è detto *faccia* del poliedro $\mathcal{P}$.

Osservazione. E' possibile definire una faccia F come

$$F := \mathcal{P} \cap \partial(S),$$

dove $S \supseteq \mathcal{P}$ è un semispazio, detto *semispazio di supporto* per $\mathcal{P}$, e $\partial(S)$ denota la frontiera di S.

Vertici di un poliedro

Definizione. Un punto $x \in \mathcal{P}$ è detto *vertice* se e solo se non è possibile trovare x', $x'' \in \mathcal{P}$ tali che $x \in (x', x'')$.

Teorema. $\bar{x} \in \mathcal{P}$ e' un vertice se e solo se coincide con una faccia di dimensione 0.

Esempio. Consideriamo il poliedro $\mathcal{P}$:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 1 \\ \ x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + \ \ x_2 \leq 2 \\ -x_1 \qquad\quad \leq 0 \\ \qquad\quad -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$\bar{x} := (0, 0)$ e' un vertice. $\bar{x} := (1/2, 0)$ e' un vertice.

Esempio.

$$\min\ (2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 4x_1 + 2x_3 - x_4 = 5 \\ 2x_2 - x_3 + x_5 = 6 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Il punto $\bar{x} := (2, 0, 0, 3, 6)$ e' un vertice.

L'insieme dei punti di minimo del problema (PL)

Proposizione 1. Ogni punto di minimo locale del problema (PL) e' anche punto di minimo globale.

Teorema. L'insieme dei punti di minimo di un problema di programmazione lineare e' una faccia del poliedro R.

Proposizione 2. Se un poliedro $\mathcal{P}$ non contiene rette allora possiede almeno un vertice.

Osservazione. Data la presenza del vincolo $x \geq 0$, il poliedro R soddisfa le ipotesi della Proposizione 2, cosicche' l'insieme dei punti di minimo del problema (PL) contiene almeno un vertice.

Soluzioni di base

Consideriamo una partizione della matrice A

$$A = (B, N), \; B \in \mathbf{R}^{m \times m}, \; det(B) \neq 0,$$

e la corrispondente partizione del vettore

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}.$$

Definizione. Si definisce "soluzione di base" (s.b.) un vettore $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ della forma:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix}, \; \bar{x}_B := B^{-1}b, \; \bar{x}_N \equiv 0.$$

Se risulta $B^{-1}b \geq 0$ la s.b. si dice "ammissibile".

Se il vettore $\bar{x}_B$ ammette almeno una componente nulla, la s.b. si dice "degenere".

Teorema. Condizione necessaria e sufficiente affinche' un vettore $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ sia un vertice di R e' che $\bar{x}$ sia una soluzione di base ammissibile.

Base

Definizione. Una sottomatrice $B \subseteq A$,

$$B \in \mathbf{R}^{m \times m} \text{ con } det(B) \neq 0,$$

viene detta "base".

Se la corrispondente s.b. e' ammissibile, allora B viene detta "base ammissibile".

Osservazione. Ad una s.b. non degenere corrisponde una ed una sola base.

Esempio.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 & = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 \qquad + x_4 & = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$\bar{x} := (1/2, 0, 0, 0,)$ e' una s.b. degenere cui corrispondono le basi:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\ B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ottimalita' di una soluzione di base

Teorema 1. Data una s.b. ammissibile del problema (PL):

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix}, \ \bar{x}_B := B^{-1}b, \ \bar{x}_N \equiv 0,$$

condizione sufficiente affinche' $\bar{x}$ sia soluzione ottima di (PL) e' che risulti:

$$c_N - c_B B^{-1} N \geq 0, \tag{2}$$

ove $c := (c_B, c_N)$ e' la partizione corrispondente ad $A := (B, N)$.

Osservazione. Se $\bar{x}$ e' una s.b. non degenere allora la condizione (2) e' anche necessaria affinche $\bar{x}$ sia soluzione ottima di (PL).

Teorema 2. Data una s.b. ammissibile del problema (PL), siano $B_1, .., B_s$ tutte le basi che porgono $\bar{x}$. Sia $(B_i, N_i) = A$ la partizione della matrice A corrispondente alla base B_i, $i = 1, .., s$. Condizione necessaria e sufficiente affinche' $\bar{x}$ sia soluzione ottima di (PL) e' che risulti:

$$c_{N_i} - c_{B_i} B_i^{-1} N_i \geq 0, \tag{3}$$

per almeno un indice $i = 1, .., s$.

Algoritmo del simplesso

1. Si determina una base ammissibile B oppure si dimostra che $R = \emptyset$.

2. Se risulta

$$c_N - c_B B^{-1} N \geq 0,$$

allora la soluzione di base associata a B:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix}, \ \bar{x}_B := B^{-1} b, \ \bar{x}_N \equiv 0,$$

e' ottima e l'algoritmo termina, altrimenti si va al passo 3.

3. Mediante il metodo di Gauss-Jordan si determina una nuova base ammissibile, oppure si stabilisce che il problema (PL) e' illimitato inferiormente, nel qual caso l'algoritmo termina.

Si torna al passo 2.

Cenni sulla teoria della dualita'

Consideriamo la funzione Lagrangiana associata a (P): $L : X \times \mathbf{R}^m_+ \times \mathbf{R}^p \longrightarrow \mathbf{R}$,

$$L(x, \lambda, \mu) := f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle + \langle \mu, h(x) \rangle$$

Lemma. Sia $Y := \mathbf{R}^m_+ \times \mathbf{R}^p$. Il problema

$$\inf_{x \in X} \sup_{(\lambda,\mu) \in Y} L(x, \lambda, \mu)$$

e' equivalente a (P).

Definizione. Si definisce "Duale Lagrangiano" di (P) il problema (D)

$$\sup_{(\lambda,\mu) \in Y} \inf_{x \in X} L(x, \lambda, \mu)$$

Se definiamo $\psi(\lambda, \mu) := \inf_{x \in X} L(x, \lambda, \mu)$ allora il problema duale puo' scriversi come

$$\sup_{(\lambda,\mu) \in Y} \psi(\lambda, \mu).$$

Dualita' debole

E' sempre verificata la disuguaglianza

$$f(x) \geq \psi(\lambda, \mu), \quad \forall x \in R, \ \forall(\lambda, \mu) \in Y.$$

Dualita' forte

Per un problema convesso e sotto opportune ipotesi di regolarita' per i vincoli, e' possibile dimostrare che vale l'uguaglianza:

$$\min_{x \in R} f(x) = \max_{(\lambda, \mu) \in Y} \psi(\lambda, \mu). \tag{4}$$

La precedente uguaglianza e' nota come "Dualita' forte".

Dualita' lineare

In particolare, la dualita' forte vale per un problema lineare. In tal caso, il problema duale associato a (PL) e' dato da:

max $\langle \lambda, b \rangle \quad s.t. \quad \lambda \in R^* := \{\lambda \in \mathbf{R}^m : \lambda A \leq c\}.$

Valgono le seguenti asserzioni:

- Dualita' debole:

  $$\langle c, x \rangle \geq \langle \lambda, b \rangle, \quad \forall x \in R, \ \forall \lambda \in R^*$$

  Dualita' forte:

- (i) (P) ammette ottimo finito se e solo se (D) ammette ottimo finito;

  (ii) $\bar{x} \in R$ e $\bar{\lambda} \in R^*$ sono soluzioni ottime di (P) e (D), rispettivamente, se solo se

  $$\langle c, \bar{x} \rangle = \langle \bar{\lambda}, b \rangle,$$

  o, equivalentemente,

  $$\langle \bar{x}, \bar{\lambda} A - c \rangle = 0,$$

  (scarti complementari).

Esistenza del minimo

Teorema. Sia $R \neq \emptyset$. Il problema (PL) ammette ottimo finito se e solo se la funzione obbiettivo $f(x) := \langle c, x \rangle$ e' inferiormente limitata sulla regione ammissibile R:

$$\inf_{x \in R} f(x) > -\infty.$$

Corollario. Sia $R \neq \emptyset$. Il problema (PL) ammette ottimo finito se e solo se la regione ammissibile R^* del problema duale e' non vuota.

Osservazione. E' possibile che risulti simultaneamente $R = \emptyset$ e $R^* = \emptyset$.

Bibliografia

GIANNESSI, F., Metodi matematici della programmazione. Problemi lineari e non lineari. Pitagora Editrice, Bologna, 1982.

IOFFE A.D., TIHOMIROV V.M., Theory of extremal problems, North Holland Publ. Company, 1979.

MINOUX M., Mathematical Programming. Theory and Algorithms, Wiley, 1986.

ROCKAFELLAR, R.T., Convex Analysis, Princeton University Press, Princeton, 1970.