Università di Pisa
Esame di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI II
Corso di Laurea in Ingegneria Civile, Ambientale e Edile
(Docente: Prof. Stefano Bennati)

Sintesi della soluzione della prova scritta del 21 luglio 2018

Problema 1. Nel problema piano nella tensione mostrato in figura, la regione quadrata $ABCD$ di lato l, costituita da un materiale di Lamé, è perfettamente aderente alle travi rigide AC, CD, DB e al supporto rigido AB. Le travi sono collegate fra loro e al supporto rigido mediante incastri cedevoli elasticamente di costante k. In corrispondenza dei nodi C e D è applicata una forza d'intensità $P/2$ parallelamente all'asse x.

a) Le condizioni al bordo sono tutte di carattere cinematico

$$AB)\ \begin{array}{l} u(x,0)=0 \\ v(x,0)=0 \end{array} \qquad CD)\ \begin{array}{l} u(x,l)=\theta l \\ v(x,l)=0 \end{array}$$

$$AC)\ \begin{array}{l} u\left(-\frac{l}{2},y\right)=\theta y \\ v\left(-\frac{l}{2},y\right)=0 \end{array} \qquad BD)\ \begin{array}{l} u\left(\frac{l}{2},y\right)=\theta y \\ v\left(\frac{l}{2},y\right)=0 \end{array}$$

b) Il campo di spostamento assegnato è rispettoso delle condizioni di vincolo.

c) Componenti di deformazione:

$$\varepsilon_x = u_{,x} = 0;$$
$$\varepsilon_y = v_{,y} = 0;$$
$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} = \theta.$$

Ricordando che il problema è piano nella tensione e sfruttando il legame costitutivo si può dire che:

$$\begin{array}{lll} \varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right); & \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}; & \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right) = 0; \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right); & \gamma_{yz} = 0; & \Rightarrow \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right) = 0; \\ \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right); & \gamma_{zx} = 0. & \tau_{xy} = G\gamma_{xy} = G\theta. \end{array}$$

Le forze di contatto che il solido esercita sulla struttura sono quindi quelle sintetizzate nella Figura 1

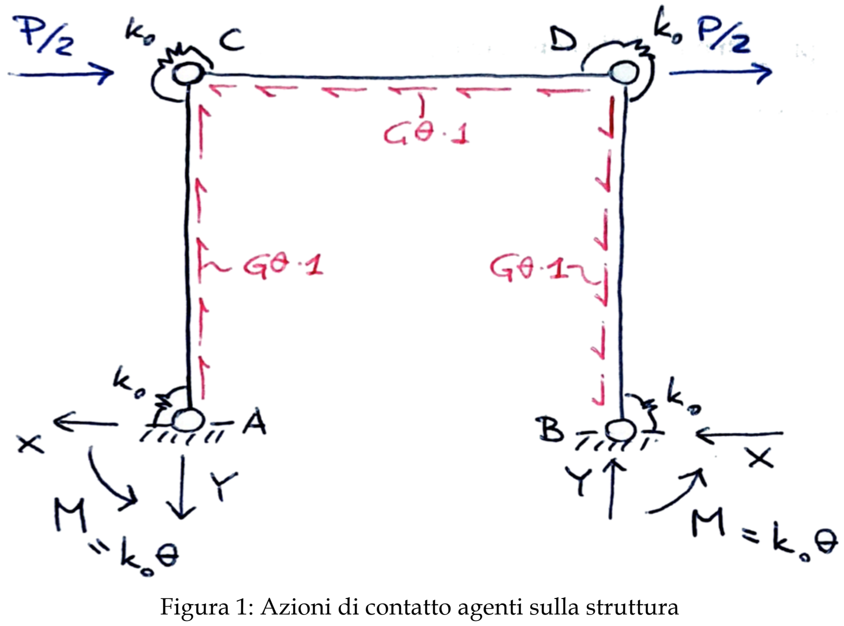

Figura 1: Azioni di contatto agenti sulla struttura

d) La rotazione θ che compie il sistema per ottenere equilibrio è pari a ($k_0 = Gl^2/4$):

$$\theta = \frac{Pl}{4k_0 + Gl^2 \cdot 1} = \frac{P}{2} \cdot \frac{1}{Gl}$$

da cui è possibile determinare le reazioni vincolari della Figura 1

$$M = \frac{Pl}{8}; \quad X = \frac{P}{4}; \quad Y = \frac{3P}{4}.$$

Le espressioni delle CdS sono quindi pari a:

$$N_{AC}(s) = \frac{3P}{4} - \frac{P}{2}\frac{s}{l}; \quad N_{CD}(s) = -\frac{P}{4} + \frac{P}{2}\frac{s}{l}; \quad N_{BD}(s) = -\frac{3P}{4} + \frac{P}{2}\frac{s}{l};$$

$$T_{AC}(s) = \frac{P}{4}; \quad T_{CD}(s) = -\frac{P}{4}; \quad T_{BD}(s) = \frac{P}{4};$$

$$M_{AC}(s) = -\frac{Pl}{8} + \frac{Ps}{4}; \quad M_{CD}(s) = \frac{Pl}{8} - \frac{Ps}{4}; \quad M_{BD}(s) = -\frac{Pl}{8} + \frac{Ps}{4}.$$

I diagrammi sono riportati in Figura 2.

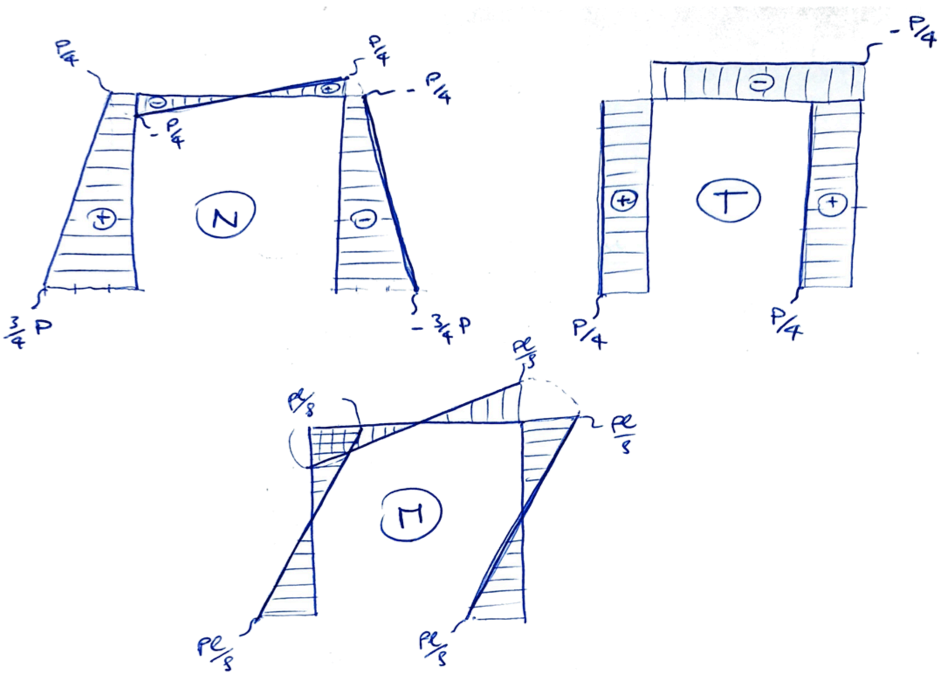

Figura 2: Diagramma delle CdS nel sistema

Problema 2. La sezione trasversale mostrata in figura è soggetta a uno sforzo normale di compressione costante $N = -P$ la cui retta d'azione interseca il piano della figura nel punto F di coordinate, variabili, e_x e e_y.

a) Il baricentro della sezione si trova ad una distanza dall'asse x' pari a:

$$y_G = \frac{2h^2 \frac{h}{2} - h^2 \cdot \frac{h}{3}}{3h^2} = \frac{2}{9}h$$

I momenti d'inerzia sono pari a:

$$J_x = \frac{2}{3}h^4 + 2 \cdot \frac{1}{12}h^4 - \left(\frac{2}{9}h\right)^2 3h^2 = \frac{37}{54}h^4;$$

$$J_y = \frac{16}{12}h^4 - 2 \cdot \frac{1}{12}h^4 = \frac{7}{6}h^4.$$

b) Tramite la formula di Navier è possibile conoscere l'espressione delle tensioni normali:

$$\sigma_z = -\frac{P}{A} - \frac{Pe_y}{J_x} y - \frac{Pe_x}{J_y} x$$

Nel caso in cui $e_x = 0$ le tensioni sono tutte di compressione solo se:

$$-\frac{J_x}{A\left(h - y_G\right)} \le e_y \le \frac{J_x}{A\left(h + y_G\right)} \Rightarrow -\frac{37}{126} h \le e_y \le \frac{37}{198} h \rightarrow\% -0.29h \le e_y \le 0.18h$$