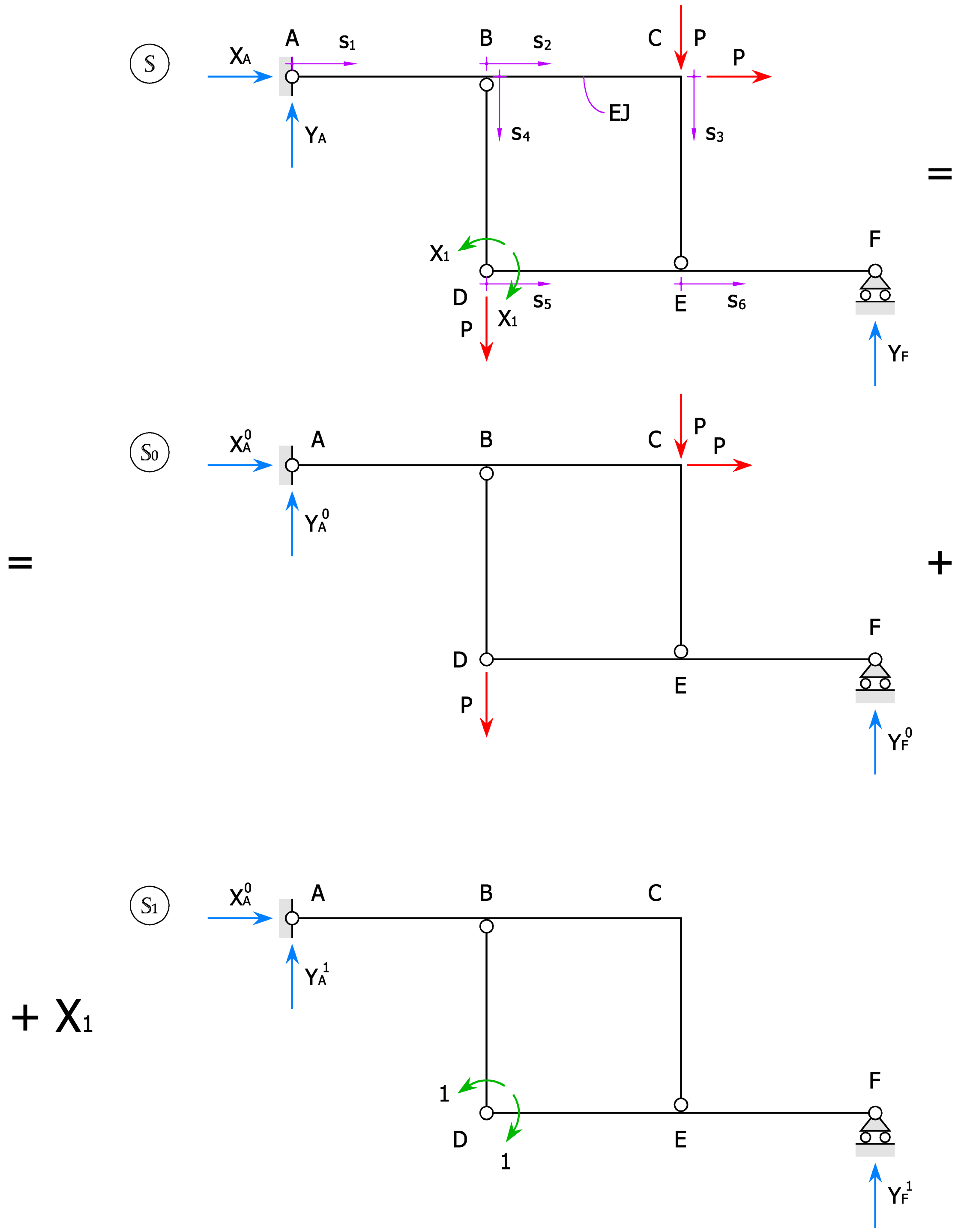
UNIVERSITÀ DI PISA – Facoltà di Ingegneria

Scienza delle Costruzioni (CdLM in Ingegneria Edile – Architettura)
A.A. 2011/2012
Docenti: Salvatore Sergio LIGARÒ & Paolo Sebastiano VALVO
Web: www.dic.unipi.it/paolovalvo/sdc_edarch.html

Prova scritta del 25 giugno 2012 – Soluzione

Problema A

Si risolve il problema col metodo delle forze, scegliendo come incognita iperstatica X_1 la coppia trasmessa dalla molla in D. Pertanto, il sistema $\mathcal{S}$, equivalente a quello effettivo, è decomposto nella somma del sistema $\mathcal{S}_0$, in cui agiscono le azioni esterne, e del sistema $\mathcal{S}_1$, in cui agisce l'incognita iperstatica assunta unitaria, moltiplicato per il valore X_1 dell'incognita iperstatica stessa.



Sistema $\mathcal{S}_0$

Mediante le equazioni di equilibrio statico, si determinano le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione nel sistema $\mathcal{S}_0$. Le reazioni vincolari risultano

$$X_A^0 = -P, \quad Y_A^0 = P, \quad X_F^0 = P.$$

Le caratteristiche della sollecitazione hanno le espressioni riportate nella tabella seguente.

Trave n.	Estremi IJ	Ascissa	Forza normale N_{IJ}^0	Forza di taglio T_{IJ}^0	Momento flettente M_{IJ}^0
1	AB	$0 \le s_1 \le L$	P	P	Ps_1
2	BC	$0 \le s_2 \le L$	P	$-P$	$P(L-s_2)$
3	CE	$0 \le s_3 \le L$	$-2P$	0	0
4	BD	$0 \le s_4 \le L$	$2P$	0	0
5	DE	$0 \le s_5 \le L$	0	P	Ps_5
6	EF	$0 \le s_6 \le L$	0	$-P$	$P(L-s_6)$

Sistema $\mathcal{S}_1$

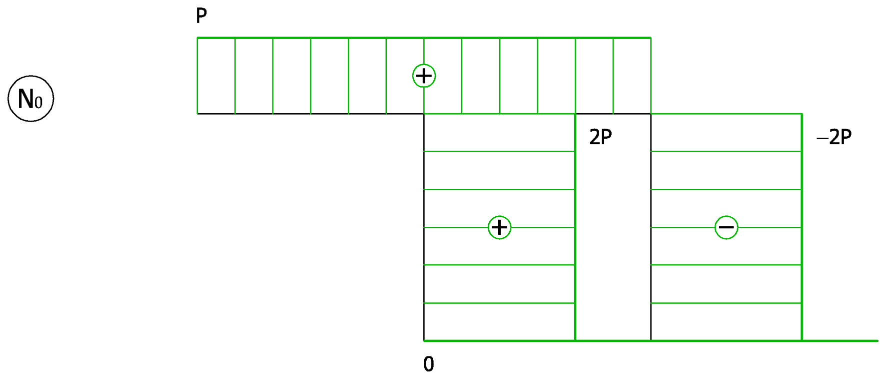
Analogamente, imponendo l'equilibrio statico nel sistema $\mathcal{S}_1$, si trovano le reazioni vincolari

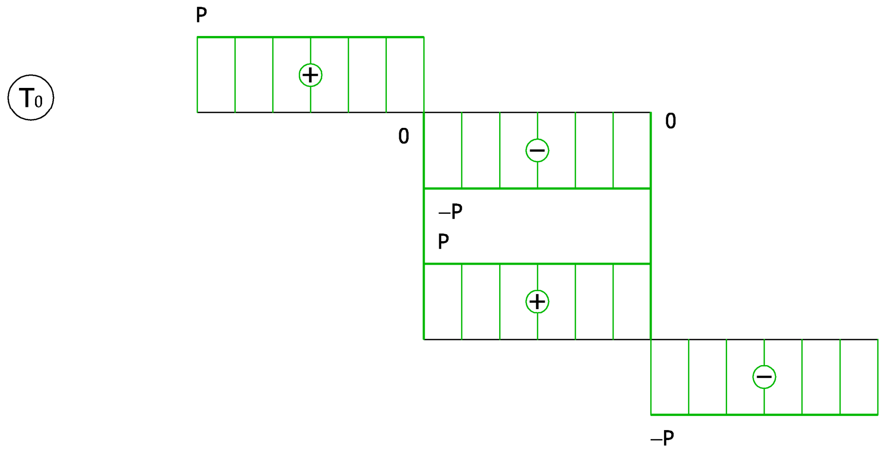
$$X_A^1 = 0, \quad Y_A^1 = 0, \quad X_F^1 = 0.$$

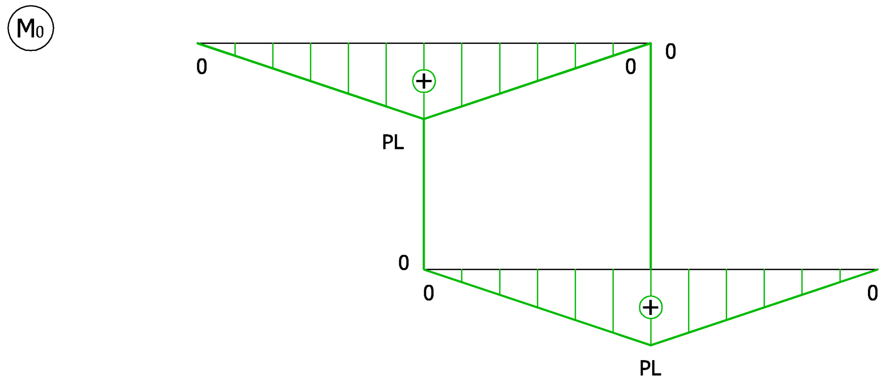
Le caratteristiche della sollecitazione hanno le espressioni riportate nella tabella seguente.

Trave n.	Estremi IJ	Ascissa	Forza normale N_{IJ}^1	Forza di taglio T_{IJ}^1	Momento flettente M_{IJ}^1
1	AB	$0 \le s_1 \le L$	0	0	0
2	BC	$0 \le s_2 \le L$	$\frac{1}{L}$	$\frac{1}{L}$	$\frac{s_2}{L}$
3	CE	$0 \le s_3 \le L$	$\frac{1}{L}$	$-\frac{1}{L}$	$1-\frac{s_3}{L}$
4	BD	$0 \le s_4 \le L$	$-\frac{1}{L}$	$\frac{1}{L}$	$\frac{s_4}{L}$
5	DE	$0 \le s_5 \le L$	$-\frac{1}{L}$	$-\frac{1}{L}$	$1-\frac{s_5}{L}$
6	EF	$0 \le s_6 \le L$	0	0	0

Diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione nel sistema S_0

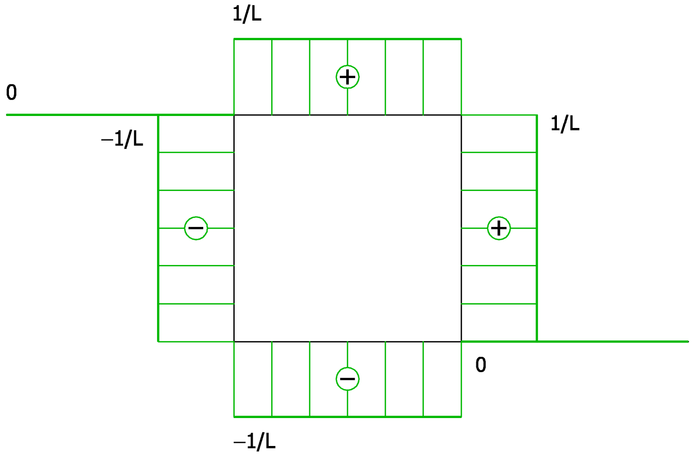




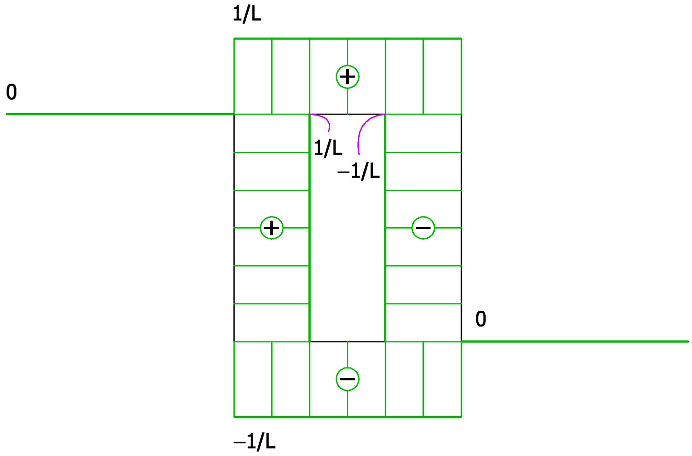


Diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione nel sistema S_1

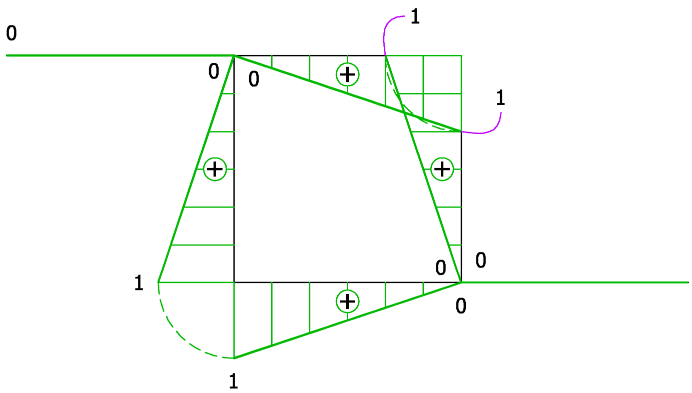
N_1



T_1



M_1



Determinazione dell'incognita iperstatica

Per il sistema in esame, l'equazione di Müller-Breslau risulta

$$\eta_1 = \eta_{10} + X_1 \eta_{11},$$

dove

$$\eta_1 = -\frac{X_1}{k_0}.$$

Applicando il Teorema dei lavori virtuali, si calcolano i valori degli altri coefficienti:

$$\mathcal{L}_e^{1\to 0} = 1 \cdot \eta_{10} = \mathcal{L}_i^{1\to 0} = \int_\Omega M_{IJ}^1 \ \kappa_{IJ}^0 \ ds = \int_\Omega M_{IJ}^1 \frac{M_{IJ}^0}{EJ} ds \quad \Rightarrow \quad \eta_{10} = \frac{1}{3}\frac{PL^2}{EJ};$$

$$\mathcal{L}_e^{1\to 1} = 1 \cdot \eta_{11} = \mathcal{L}_i^{1\to 1} = \int_\Omega M_{IJ}^1 \ \kappa_{IJ}^1 \ ds = \int_\Omega M_{IJ}^1 \frac{M_{IJ}^1}{EJ} ds \quad \Rightarrow \quad \eta_{11} = \frac{4}{3}\frac{L}{EJ}.$$

Infine, si determina il valore dell'incognita iperstatica

$$X_1 = -\frac{PL}{4 + 3\dfrac{EJ}{k_0 L}}.$$

Problema B

Il problema di equilibrio elastico è formulato imponendo, nei punti interni alla regione Ω, il rispetto delle equazioni indefinite di equilibrio:

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad \text{in } \overset{\circ}{\Omega},$$

dove $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ sono le forze di volume, delle equazioni di compatibilità cinematica,

$$\mathbf{E} = \operatorname{sym} \operatorname{grad} \mathbf{u} \quad \text{in } \overset{\circ}{\Omega},$$

e delle equazioni costitutive per materiali elastici lineari,

$$\mathbf{T} = \mathbb{A}\mathbf{E} \quad \text{in } \overset{\circ}{\Omega},$$

dove $\mathbb{A}$ è il tensore di elasticità. Inoltre, devono essere rispettate le condizioni al contorno:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{su AB e AC;}$$
$$\mathbf{Tn} = \mathbf{q} \quad \text{su BC.}$$

In componenti rispetto al riferimento Ox_1x_2, le equazioni di campo si esplicitano come segue:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} = 0, \\ \dfrac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}, \\ \varepsilon_2 = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}, \\ \gamma_{12} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{14}\gamma_{12}, \\ \sigma_2 = C_{21}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{24}\gamma_{12}, \\ \tau_{12} = C_{41}\varepsilon_1 + C_{42}\varepsilon_2 + C_{44}\gamma_{12}; \end{cases}$$

dove C_{ij} sono le costanti di elasticità nella notazione di Voigt, mentre le condizioni al contorno diventano

$$u_1 = u_2 = 0 \quad \text{per } 0 \le x_1 \le a \text{ e } x_2 = 0 \quad \text{e} \quad \text{per } x_1 = 0 \text{ e } 0 \le x_2 \le a$$

e, considerato che sul lato BC $\mathbf{n} \equiv \left\{1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2}\right\}^T$ e $\mathbf{q} \equiv \left\{\tau/\sqrt{2},\ -\tau/\sqrt{2}\right\}^T$,

$$\begin{cases} \sigma_1 + \tau_{12} = \tau \\ \tau_{12} + \sigma_2 = -\tau \end{cases} \quad \text{per } 0 \le x_1 \le a \text{ e } x_2 = a - x_1.$$

Il campo di tensione

$$\mathbf{T} \equiv \begin{bmatrix} \tau & 0 \\ 0 & -\tau \end{bmatrix}$$

non può, per $\tau \neq 0$, essere quello effettivo, in quanto esso è costante in Ω. Infatti, per il legame costitutivo anche il tensore di deformazione $\mathbf{E}$ dovrebbe costante in Ω, mentre il campo di spostamento $\mathbf{u}$ potrebbe essere al più lineare nelle coordinate x_1 e x_2. Le condizioni al contorno sui lati vincolati, peraltro, mostrano che in questo caso dovrebbe essere $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ovunque, da cui $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{T} = \mathbf{0}$.