



AIMETA 2005

**Atti del XVII Congresso dell'Associazione Italiana
di Meccanica Teorica e Applicata**

Firenze, 11-15 settembre 2005

a cura di

Claudio Borri
Luca Facchini
Giorgio Federici
Mario Primicerio

Volume II

Firenze University Press
2006

AIMETA 2005 : atti del XVII Congresso dell'Associazione italiana di
meccanica teorica e applicata : Firenze, 11-15 settembre 2005 : volume II
/ a cura di Claudio Borri, Luca Facchini, Giorgio Federici, Mario Primicerio.
- Firenze, Firenze university press, 2006

(Atti, 19)

<http://digital.casalini.it/8884534593>

Stampa a richiesta disponibile su <http://epress.unifi.it>

ISBN 10: 88-8453-459-3 (online)

ISBN 13: 978-88-8453-459-0 (online)

ISBN 10: 88-8453-460-7 (print)

ISBN 13: 978-88-8453-460-6 (print)

531 (ed. 20)

Meccanica-Congressi-Firenze-2005

© 2006 Firenze University Press

Università degli Studi di Firenze
Firenze University Press
Borgo Albizi, 28, 50122 Firenze, Italy
<http://epress.unifi.it/>

Printed in Italy

Frattura interlaminare secondo il modo I in un laminato composito

Stefano Bennati

Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Università di Pisa, Italy

E-mail: s.bennati@ing.unipi.it

Massimiliano Colleluori

Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale, Università di Pisa, Italy

E-mail: massimiliano.colleluori@studenti.ing.unipi.it

Domenico Corigliano

Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale, Università di Pisa, Italy

E-mail: domenico.corigliano@studenti.ing.unipi.it

Paolo Sebastiano Valvo

Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Università di Pisa, Italy

E-mail: p.valvo@ing.unipi.it

Parole chiave: materiali compositi, delaminazione, frattura, interfaccia elastica, provino DCB

SUMMARY: Si propone un modello meccanico per il provino DCB (Double Cantilever Beam), comunemente utilizzato per la determinazione sperimentale della resistenza alla frattura interlaminare secondo il modo I nei laminati compositi. A tal fine, si schematizza il provino come l'assemblaggio di due sublaminati collegati fra loro da un'interfaccia elasto-fragile. Grazie alla relativa semplicità del modello, è possibile ricavare esplicitamente gli spostamenti dei due sublaminati, le tensioni interlaminari e, conseguentemente, la velocità di rilascio dell'energia potenziale totale del sistema. L'adozione di un opportuno criterio di frattura consente, quindi, di valutare il valore critico del carico o dello spostamento di estremità, come funzioni esplicite dell'ampiezza della zona delaminata. Il confronto con alcuni risultati sperimentali presenti in letteratura appare molto buono.

1. INTRODUZIONE

Un ostacolo severo alla crescente diffusione dei materiali compositi nelle diverse applicazioni dell'ingegneria strutturale è costituito dalla loro elevata sensibilità alla presenza di difetti ed ai fenomeni di degrado. La delaminazione, ovvero la frattura interlaminare tra gli strati di un laminato composito, è una delle modalità di crisi più comuni e più insidiose. Per questo, numerosi studi sono stati dedicati sia alla valutazione sperimentale della resistenza a frattura dei laminati sia alla modellazione dei diversi aspetti coinvolti nel fenomeno (Garg [1988]).

Nel caso della frattura secondo il modo I, la resistenza a frattura è comunemente valutata mediante prove di carico su particolari provini detti "DCB" (Double Cantilever Beam), i cui risultati sono convenzionalmente interpretati sulla base di un modello elementare che vede il laminato come l'unione di due travi a mensola (fig. 1).

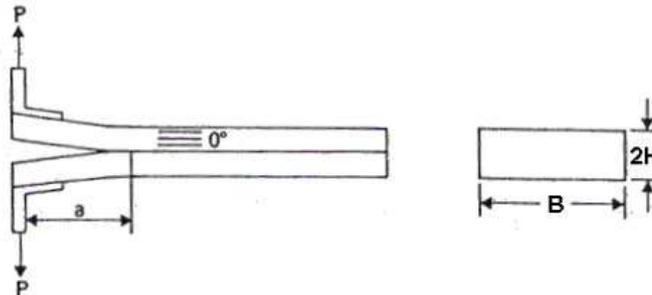


Figura 1 – Provino DCB.

Il modello meccanico che qui si propone rappresenta un'estensione di tale modello elementare, dove il provino DCB è schematizzato come l'assemblaggio di due sublaminati elastici collegati fra loro da un'interfaccia. Quest'ultima è a sua volta modellata come una distribuzione continua ed uniforme di molle elasto-fragili (Allix e Ladevèze [1992]).

Il modello è sufficientemente semplice da consentire la soluzione esplicita del problema, attraverso il metodo delle condizioni iniziali (Hetényi [1946]). Sulla base delle sole caratteristiche meccaniche della matrice e delle fibre del laminato, si possono allora valutare gli spostamenti dei due sublaminati, le tensioni interlaminari e, conseguentemente, la velocità di rilascio dell'energia potenziale totale del sistema al crescere dell'ampiezza della regione delaminata. L'adozione di un opportuno criterio di frattura consente quindi di ricavare il valore critico del carico trasversale e dello spostamento dell'estremità libera del provino come funzioni esplicite dell'ampiezza della zona delaminata. Tra l'altro, ciò consente, a differenza di altri modelli presenti in letteratura, di valutare il carico di "prima delaminazione", ovvero l'intensità del carico capace di generare la nucleazione della frattura in un provino inizialmente integro (Hwu *et al.* [1995], Reedy *et al.* [1997]).

Le previsioni teoriche del modello sono state confrontate con alcuni risultati sperimentali presenti in letteratura (Laksimi *et al.* [1991], Zou *et al.* [2003]). Considerata la semplicità del modello proposto, l'accordo ottenuto appare sorprendente.

2. UN MODELLO PER LA DELAMINAZIONE SECONDO IL MODO I

2.1. Il problema d'equilibrio

Il modello che si propone prevede di rappresentare il provino DCB (o meglio, una sua metà, considerata la simmetria del problema) come una trave elastica su supporto elastico incastrata ad un estremo e soggetta ad un carico P all'altro estremo (fig. 2). La trave ha lunghezza complessiva l , mentre la porzione delaminata, priva del supporto elastico, è lunga a . È conveniente introdurre il rapporto adimensionale $\alpha = a/l$, cosicché le due porzioni del provino, integra e delaminata, avranno rispettivamente lunghezze $(1 - \alpha)l$ e αl . L'assenza di delaminazione corrisponde ad $\alpha = 0$.

Il valore della costante delle molle distribuite che schematizzano il supporto elastico, k , è ricavato direttamente dal modulo di Young della matrice, E_m , tramite la relazione $k = E_m B/H$, dove B è la

larghezza del provino ed H è il suo semispessore. In assenza di dati sulla matrice, è ragionevole porre $k = E_2 B / H$, dove E_2 è il modulo di Young della lamina in direzione trasversale.

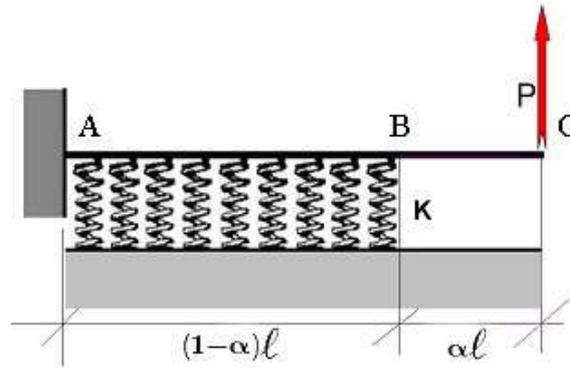


Figura 2 – Il modello proposto.

Il problema d'equilibrio è scomposto in due sottoproblemi corrispondenti ai tratti AB e BC (fig. 3). Inoltre, nell'ipotesi di comportamento lineare, si può applicare il principio di sovrapposizione degli effetti e risolvere il problema per il tratto AB considerando separatamente il carico P e la coppia $P\alpha l$.

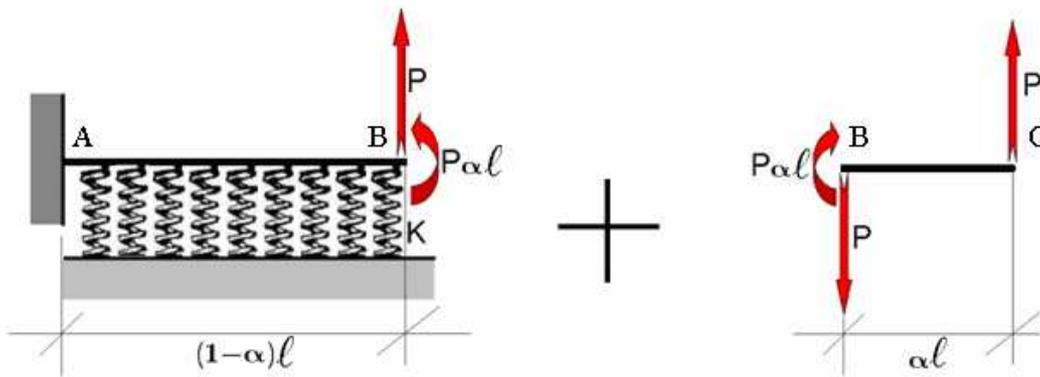


Figura 3 – Scomposizione del problema d'equilibrio.

Siano $E = E_1$ il modulo di Young nella direzione longitudinale e $J = BH^3 / 12$ il momento d'inerzia del semilaminato considerato nel modello. L'equazione della linea elastica per il tratto AB è allora

$$EJv_{AB}^{IV}(s) + kv(s) = 0, \quad s \in [0, (1-\alpha)l], \quad (1)$$

che ammette la soluzione generale nella forma

$$v_{AB}(s) = e^{\mu s} [C_1 \cos(\mu s) + C_2 \sin(\mu s)] + e^{-\mu s} [C_3 \cos(\mu s) + C_4 \sin(\mu s)], \quad (2)$$

dove si è posto

$$\mu = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} \quad (3)$$

e C_1 , C_2 , C_3 e C_4 sono costanti d'integrazione. Secondo il metodo delle condizioni iniziali (Hetényi [1946]), differenziando la (2), si ricavano lo spostamento, la rotazione, il momento flettente e la forza di taglio nel punto A ($s = 0$):

$$\begin{cases} v_0 = v_{AB}(0) = C_1 + C_3; \\ \vartheta_0 = v'_{AB}(0) = \mu(C_1 + C_2 - C_3 + C_4); \\ M_0 = -EJv''_{AB}(0) = 2\mu^2 EJ(-C_2 + C_4); \\ T_0 = -EJv'''_{AB}(0) = 2\mu^3 EJ(C_1 - C_2 - C_3 - C_4). \end{cases} \quad (4)$$

Ricavando le costanti d'integrazione dalle (4) ed utilizzando le note relazioni tra funzioni esponenziali e funzioni iperboliche, si può porre l'espressione della linea elastica (2) nella forma

$$v_{AB}(s) = v_0 F_1(\mu s) + \frac{1}{\mu} \vartheta_0 F_2(\mu s) - \frac{1}{\mu^2 EJ} M_0 F_3(\mu s) - \frac{1}{\mu^3 EJ} T_0 F_4(\mu s), \quad (5)$$

dove si sono introdotte le funzioni ausiliarie:

$$\begin{cases} F_1(\mu s) = \cosh(\mu s) \cos(\mu s); \\ F_2(\mu s) = \frac{1}{2} [\cosh(\mu s) \sin(\mu s) + \sinh(\mu s) \cos(\mu s)]; \\ F_3(\mu s) = \frac{1}{2} \sinh(\mu s) \sin(\mu s); \\ F_4(\mu s) = \frac{1}{4} [\cosh(\mu s) \sin(\mu s) - \sinh(\mu s) \cos(\mu s)]. \end{cases} \quad (6)$$

S'introducano le condizioni al bordo agli estremi A e B:

$$A) \begin{cases} v(0) = 0; \\ v'(0) = 0; \end{cases} \quad B) \begin{cases} -EJv''[(1-\alpha)l] = \alpha P; \\ -EJv'''[(1-\alpha)l] = -P. \end{cases} \quad (7a, b)$$

Tramite le (7a) e le (4), l'espressione (5) si semplifica nella seguente

$$v_{AB}(s) = -\frac{1}{\mu^2 EJ} M_0 F_3(\mu s) - \frac{1}{\mu^3 EJ} T_0 F_4(\mu s), \quad (8)$$

la quale, differenziata e sostituita nelle (7b), permette di ricavare le caratteristiche di sollecitazione all'estremo A:

$$M_0 = \frac{-P/\mu}{\tanh^2[(1-\alpha)\mu l] - \tan^2[(1-\alpha)\mu l] - 2} \cdot \frac{\tanh[(1-\alpha)\mu l] + \tan[(1-\alpha)\mu l] + 2\alpha\mu l}{\cosh[(1-\alpha)\mu l] \cos[(1-\alpha)\mu l]}, \quad (9a)$$

$$T_0 = \frac{2P}{\tanh^2[(1-\alpha)\mu l] - \tan^2[(1-\alpha)\mu l] - 2} \cdot \frac{\{\tanh[(1-\alpha)\mu l] - \tan[(1-\alpha)\mu l]\}\alpha\mu l + 1}{\cosh[(1-\alpha)\mu l] \cos[(1-\alpha)\mu l]}. \quad (9b)$$

Considerando l'equilibrio del tratto di trave BC, non vincolato dal letto di molle, si ricava:

$$v_{BC}(s) = \frac{P}{6EJ} s^3 - \frac{P}{2EJ} \alpha s^2 - C_5 s - C_6, \quad s \in [0, \alpha l], \quad (10)$$

dove C_5 e C_6 sono due costanti d'integrazione, le cui espressioni si ottengono imponendo la continuità dello spostamento e della rotazione nella sezione B:

$$C_5 = \frac{M_0}{2\mu} \{\cosh[(1-\alpha)\mu l] \sin[(1-\alpha)\mu l] + \sinh[(1-\alpha)\mu l] \cos[(1-\alpha)\mu l]\} + \frac{T_0}{2\mu^2} \sinh[(1-\alpha)\mu l] \sin[(1-\alpha)\mu l]; \quad (11a)$$

$$C_6 = \frac{M_0}{2\mu^2} \sinh[(1-\alpha)\mu l] \sin[(1-\alpha)\mu l] + \frac{T_0}{4\mu^3} \{\cosh[(1-\alpha)\mu l] \sin[(1-\alpha)\mu l] - \sinh[(1-\alpha)\mu l] \cos[(1-\alpha)\mu l]\}. \quad (11b)$$

Infine, si può ricavare lo spostamento trasversale della sezione di applicazione del carico,

$$v_C = -\frac{P}{3EJ} \alpha^3 l^3 - \frac{1}{EJ} (C_5 \alpha l + C_6). \quad (12)$$

2.2. Aspetti energetici

L'energia potenziale totale del sistema,

$$\Pi = U - L_e, \quad (13)$$

è definita come la differenza tra l'energia di deformazione elastica immagazzinata dall'interfaccia elastica e dalla struttura,

$$U = \int_0^{(1-\alpha)l} \frac{1}{2} \frac{k v_{AB}^2(s)}{EJ} ds + \int_0^{(1-\alpha)l} \frac{1}{2} \frac{M_{AB}^2(s)}{EJ} ds + \int_0^a \frac{1}{2} \frac{M_{BC}^2(s)}{EJ} ds \quad (14)$$

ed il lavoro delle forze esterne,

$$L_e = P v_C. \quad (15)$$

Sostituendo nella (14) le espressioni trovate in precedenza e sviluppando gli integrali indicati, sarebbe possibile calcolare esplicitamente l'energia. Tuttavia, per evitare lunghi e laboriosi sviluppi matematici, è conveniente sfruttare il Teorema di Clapeyron, secondo cui il lavoro virtuale delle forze esterne è uguale al doppio dell'energia di deformazione elastica, $L_e = 2U$. L'energia potenziale totale del sistema allora diventa

$$\Pi = \frac{1}{2} L_e - L_e = -\frac{1}{2} L_e = -\frac{1}{2} P v_C. \quad (16)$$

Si definisce, inoltre, la velocità di rilascio dell'energia,

$$G = -\frac{d\Pi}{da} = -\frac{1}{l} \frac{d\Pi}{d\alpha}, \quad (17)$$

dove a è la lunghezza della parte delaminata. Sostituendo la (12) nella (16) e questa nella (17), dopo alcuni passaggi qui omissi per brevità, si ricava l'espressione analitica della velocità di rilascio,

$$G = \frac{P^2}{2EJ\mu^2} \left(\alpha\mu l + \frac{1}{2} \frac{\sin[2(1-\alpha)\mu l] + \sinh[2(1-\alpha)\mu l]}{\cos[(1-\alpha)\mu l]^2 + \cosh[(1-\alpha)\mu l]^2} \right)^2. \quad (18)$$

È facile verificare che facendo il limite per k tendente all'infinito, ovvero considerando rigida la parte di provino non delaminata, l'espressione (18) s'identifica con quella riportata in letteratura per il semplice modello a due mensole, di cui il modello proposto può essere considerato un'estensione.

2.3. Crescita della delaminazione

Il criterio di crescita comunemente applicato in questo tipo di problemi afferma che la delaminazione si propaga quando la velocità di rilascio dell'energia attinge un valore critico G_{CR} . Poiché nel modello, grazie alla simmetria del problema, si è considerata metà struttura, è necessario moltiplicare per due e dividere per la larghezza del provino i valori forniti dalla (18), prima di poterli confrontare con i valori riportati in letteratura. Pertanto, il criterio di crescita diventa:

$$G_{TOT} = \frac{2G}{B} = G_{CR}. \quad (19)$$

Si può determinare, allora, il valore del carico corrispondente alla propagazione:

$$P_{CR} = \frac{\mu \sqrt{G_{CR} B E J}}{\alpha \mu l + \frac{1}{2} \frac{\sin[2(1-\alpha)\mu l] + \sinh[2(1-\alpha)\mu l]}{\cos[(1-\alpha)\mu l]^2 + \cosh[(1-\alpha)\mu l]^2}}. \quad (20)$$

3. APPLICAZIONE

A titolo di esempio, si considera il provino descritto nel lavoro di Laksimi *et al.* [1991] (*carbonio-epossidica* con fibre di carbonio *Toray T300* e resina *VICOTEX M10*) avente le seguenti caratteristiche geometriche e meccaniche:

$$\begin{array}{lll} l = 100 \text{ mm}, & B = 20 \text{ mm}, & H = 6.6 \text{ mm}, \\ E_1 = 123680 \text{ N/mm}^2, & E_2 = 17978.4 \text{ N/mm}^2, & G_{CR} = 0.419 \text{ N/mm}. \end{array}$$

Il valore di k si assume pari al rapporto fra il modulo di Young E_2 del laminato e la lunghezza caratteristica nella stessa direzione, cioè il semispessore del provino, $k = B E_2 / H = 54480 \text{ N/mm}^2$. Le figure 4a e 4b mostrano l'andamento della velocità di rilascio dell'energia, G , in funzione del carico applicato, P , per due fissate ampiezze della zona delaminata corrispondenti, rispettivamente, ad $\alpha = 0.2$ ed $\alpha = 0.8$. A titolo di confronto, le figure riportano sia i valori calcolati con l'espressione (18) sia quelli che si ottengono dal più semplice modello a doppia mensola di letteratura,

$$G_{LETT} = \frac{P^2 a^2}{B E J} \quad (21)$$

Come si può vedere, i due valori di G tendono ad avvicinarsi al crescere di α , cioè al diminuire della lunghezza del tratto dotato del supporto elastico.

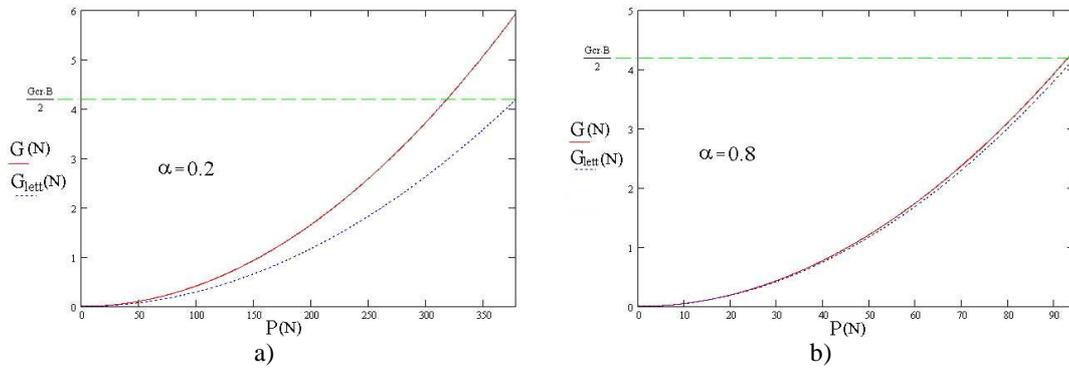


Figura 4 – Velocità di rilascio dell’energia in funzione del carico applicato.

La figura 5 mostra un confronto tra il carico P_{CR} calcolato con la (20) e quello di letteratura,

$$P_{CR.LETT} = \frac{\sqrt{G_{CR}BEJ}}{\alpha l} . \quad (22)$$

Anche in questo caso, le previsioni dei due modelli tendono a coincidere al crescere di α . Inoltre, si noti come il modello proposto fornisca un valore finito di P_{CR} anche per $\alpha = 0$, a differenza di $P_{CR.LETT}$ che tende ad infinito. In altri termini, è possibile stimare anche il carico di “prima delaminazione” per un provino integro, sebbene la validità delle previsioni teoriche così ottenute necessiti di un confronto con prove sperimentali. Nell’esempio suddetto, per $\alpha = 0$, si ottiene $P_{CR} = 1632$ N.

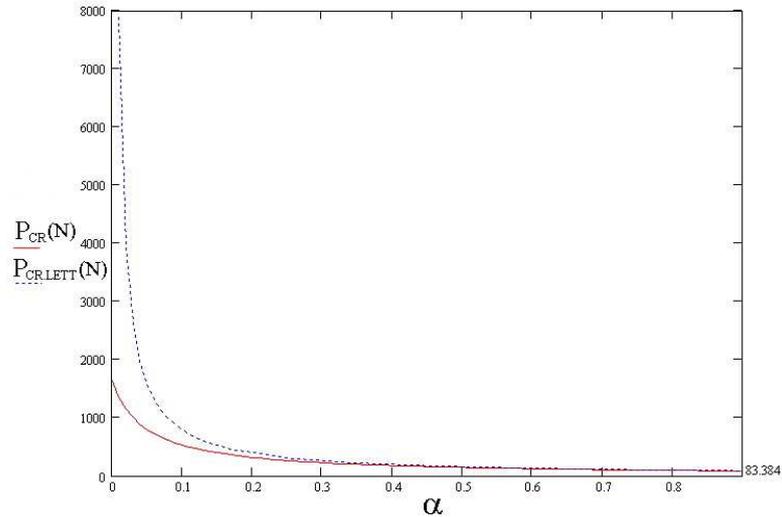


Figura 5 – Carico critico in funzione dell’ampiezza della zona delaminata.

Le figure 6a e 6b riportano i grafici della velocità di rilascio dell'energia, G , in funzione, rispettivamente, del carico P ad α costante e dell'ampiezza di delaminazione α a P costante. Dai grafici si può vedere come, al crescere di α , il carico critico P_{CR} diminuisca mentre, al crescere del carico applicato P , il tasso di rilascio dell'energia G aumenti e, di conseguenza, diminuisca il valore critico di α per il quale si prevede la propagazione della delaminazione.

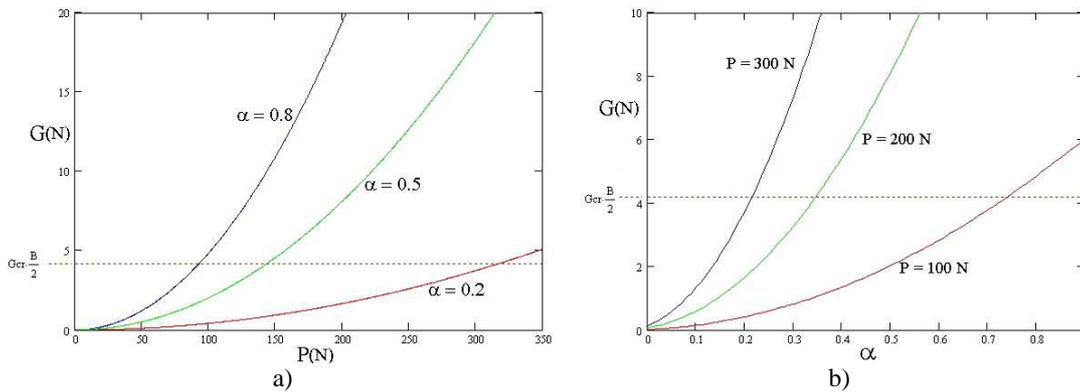


Figura 6 – Velocità di rilascio dell'energia in funzione del carico e dell'ampiezza di delaminazione.

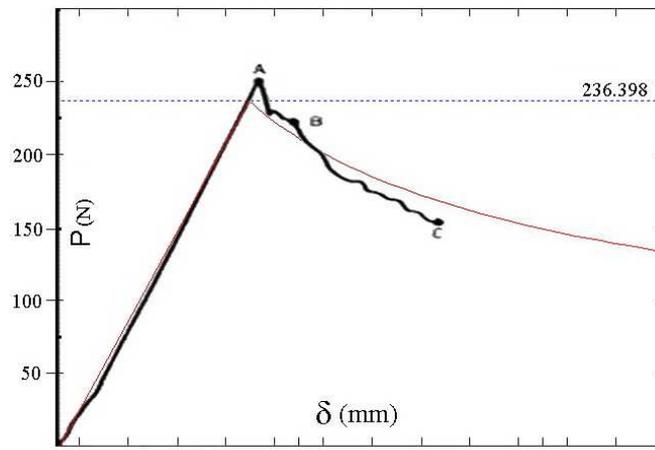


Figura 7 – Confronto con Laksimi *et al.* [1990].

Il grafico della figura 7 riassume l'intera storia di carico-deformazione di un provino DCB sottoposto ad una prova sperimentale a spostamento imposto, $\delta = v_c$. Si distingue un primo tratto pressoché lineare della curva, che va dall'origine al punto A e che rappresenta la risposta elastica del provino ancora integro (ma provvisto di una delaminazione iniziale di ampiezza a_0); nel punto A il

carico attinge il valore critico per l'ampiezza di delaminazione assegnata, cioè corrisponde al raggiungimento del valore critico della velocità di rilascio dell'energia; il tratto ABC della curva rappresenta, quindi, la fase in cui la delaminazione si propaga e il carico diminuisce fino alla completa rottura. La figura mostra il confronto tra i risultati ottenuti da Laksimi *et al.* [1990] (linea grossa) con quelli del modello proposto (linea sottile). Si rileva un'ottima corrispondenza tra le due curve.

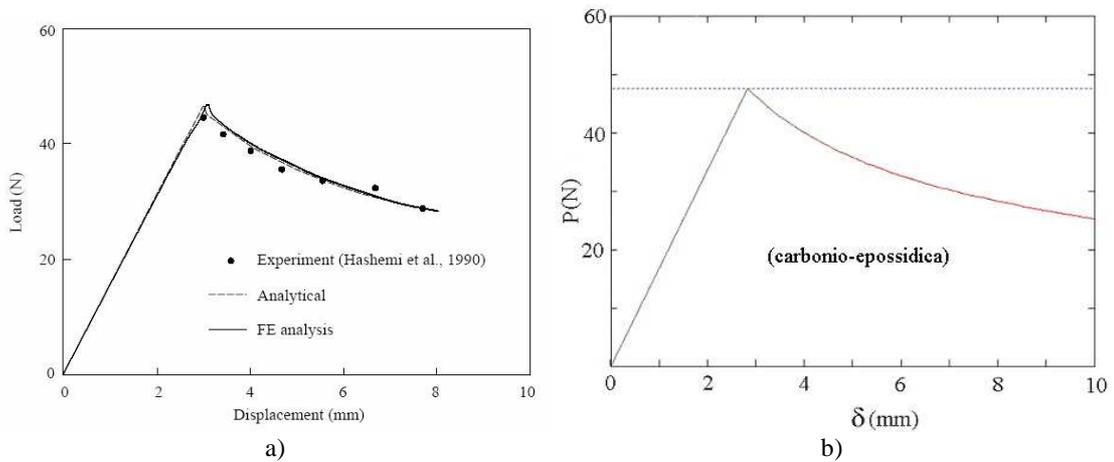


Figura 8 – Confronto con Zou *et al.* [2003] per un provino di *carbonio-epossidica*.

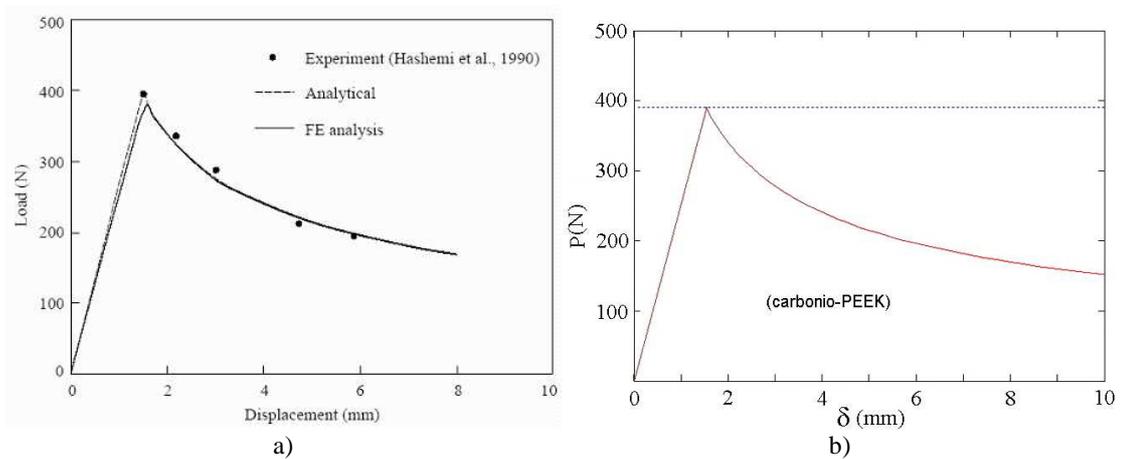


Figura 9 – Confronto con Zou *et al.* [2003] per un provino di *carbonio-PEEK*.

Quale ulteriore raffronto con risultati sperimentali, nelle figure 8a e 8b sono confrontate le previsioni del modello proposto con i risultati di Zou *et al.* [2003], relativi ad un provino di *carbonio-*

epossidica caratterizzato dai seguenti parametri:

$$l = 100 \text{ mm}, \quad B = 15 \text{ mm}, \quad H = 2 \text{ mm}, \quad a_0 = 45 \text{ mm}, \\ E_1 = 130000 \text{ N/mm}^2, \quad E_2 = 3500 \text{ N/mm}^2, \quad G_{CR} = 0.275 \text{ N/mm}, \quad k = BE_2/H = 26250 \text{ N/mm}^2.$$

Nelle figure 9a e 9b, invece, si riporta un confronto con un secondo caso tratto dal lavoro citato, relativo ad un provino di *carbonio-PEEK* caratterizzato da:

$$l = 100 \text{ mm}, \quad B = 15 \text{ mm}, \quad H = 2.55 \text{ mm}, \quad a_0 = 20 \text{ mm}, \\ E_1 = 125000 \text{ N/mm}^2, \quad E_2 = 3600 \text{ N/mm}^2, \quad G_{CR} = 2.39 \text{ N/mm}, \quad k = BE_2/H = 21180 \text{ N/mm}^2.$$

4. CONCLUSIONI

Nella memoria è stato presentato un modello meccanico del provino DCB, del tipo correntemente utilizzato per determinare la resistenza a frattura in modo I dei laminati compositi fibro-rinforzati. Il modello proposto consente di prevedere l'inizio e la crescita della delaminazione in condizioni sia di carico imposto sia di spostamento controllato. In particolare, grazie all'introduzione di un'interfaccia elastica, che tiene conto dell'elasticità della matrice, è possibile calcolare la deformata del provino, l'energia potenziale totale e la velocità di rilascio dell'energia. Nel caso limite in cui si trascuri sia l'elasticità dell'interfaccia sia quella dei sublaminati, le previsioni del modello coincidono con quelle del semplice modello a doppia mensola di letteratura, di cui il presente costituisce una significativa estensione. Inoltre, il modello proposto consente di ricavare i valori del carico o dello spostamento imposto responsabili dell'innescio e del progredire della delaminazione. La soluzione analitica, ottenuta attraverso calcoli lunghi e discretamente complessi, ha ripagato pienamente della fatica spesa per ricavarla. Infatti, i primi confronti con dati sperimentali e previsioni teoriche di altri modelli presenti in letteratura appaiono molto buoni non solo in termini qualitativi ma anche quantitativi.

Riferimenti bibliografici:

- Allix, O., Ladevèze, P. 1992. Interlaminar interface modelling for the prediction of delamination", *Composite Structures*, 22, 235-242.
- Colleluori, M., Corigliano, D. *La delaminazione nei materiali compositi: un caso di frattura interlaminare secondo il modo I*, Tesi di laurea, Università di Pisa 2004.
- Garg, A.C. 1988. Delamination – A damage mode in composite structures, *Engineering Fracture Mechanics*, 29, 557-584.
- Hetényi, M. *Beams on elastic foundation: theory with applications in the fields of civil and mechanical engineering*, Ann Arbor, The University of Michigan Press 1946.
- Hwu, C., Kao, C.J., Chang, L.E. 1995. Delamination fracture criteria for composite laminates, *Journal of Composite Materials*, 29, 1962-1987.
- Laksimi, A., Benzeggagh, M.L., Jing, G., Hecini, M., Roelandt, J.M. 1991. Mode I interlaminar fracture of symmetrical cross-ply laminates", *Composites Science and Technology*, 41, 147-164.
- Reedy, E.D., Mello, F.J., Guess, T.R. 1997. Modeling the Initiation and Growth of Delaminations in Composite Structures, *Journal of Composite Materials*, 31, 812-830.
- Zou, Z., Reid, S.R., Li, S. 2003. A continuum damage model for delaminations in laminated composites, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51, 333-356.