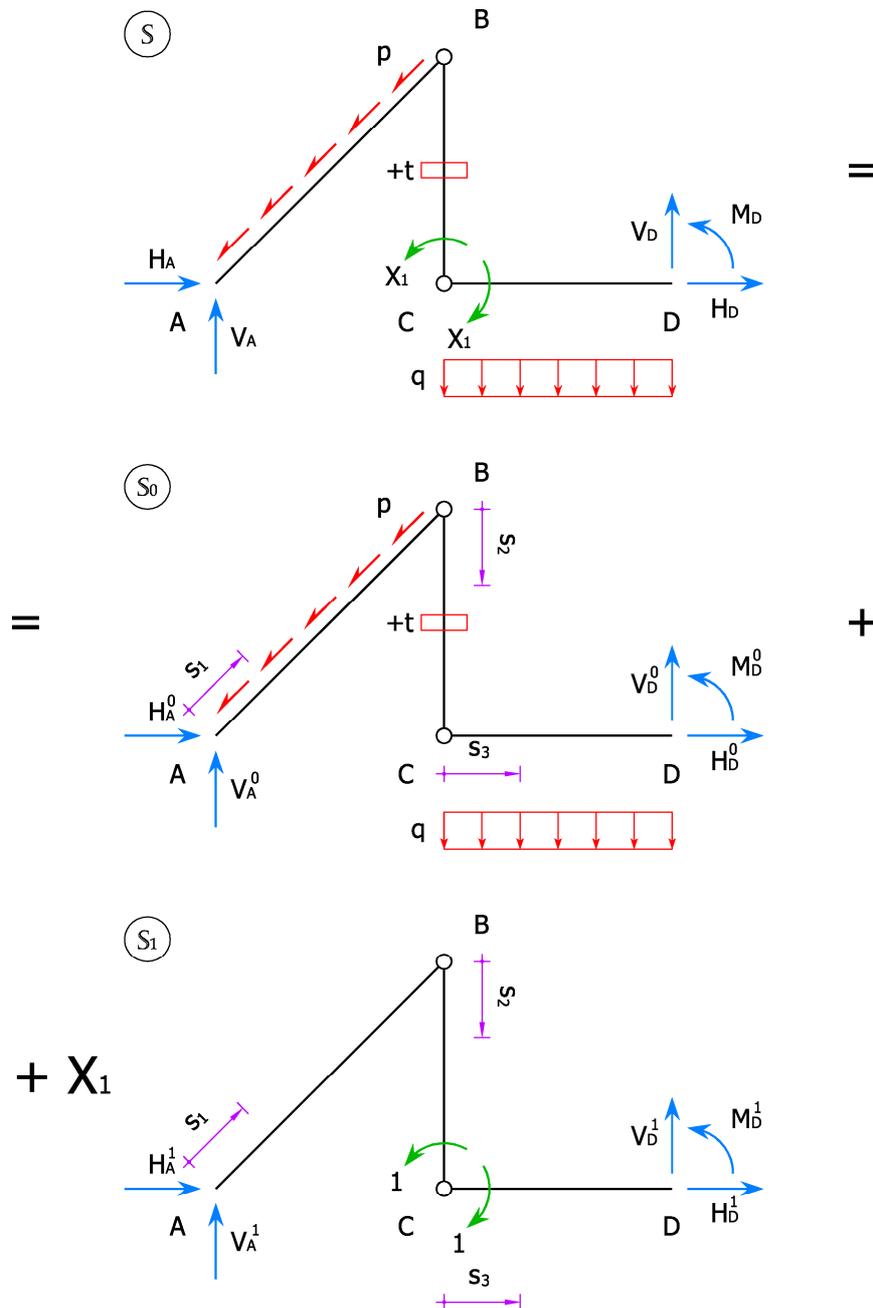




Prova d'esame del 9 giugno 2010 – Soluzione

Problema A

La struttura assegnata è equivalente al sistema S , mostrato nella figura sottostante, dove ai vincoli esterni si sono sostituite le reazioni vincolari ed in corrispondenza della saldatura in C si è introdotta una sconnessione a momento flettente, esplicitando l'incognita iperstatica X_1 . Applicando il Principio di sovrapposizione degli effetti, il sistema S è decomposto nella combinazione del sistema S_0 , nel quale agiscono le azioni esterne (carichi e variazione termica), e del sistema S_1 , nel quale agisce l'incognita iperstatica assunta unitaria, moltiplicato per l'incognita X_1 stessa.



Attraverso le equazioni di equilibrio, quindi, si risolvono i sistemi S_0 ed S_1 , determinando le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione.



1) Reazioni vincolari:

$$\begin{aligned} H_A^0 &= pL, & V_A^0 &= pL, & H_D^0 &= 0, & V_D^0 &= qL, & M_D^0 &= -qL^2/2; \\ H_A^1 &= 1/L, & V_A^1 &= 1/L, & H_D^1 &= -1/L, & V_D^1 &= -1/L, & M_D^1 &= 2. \end{aligned}$$

2) Caratteristiche della sollecitazione nel sistema S_0 :

$$\begin{aligned} N_{AB}^0(s_1) &= -p(\sqrt{2}L - s_1), & T_{AB}^0(s_1) &= 0, & M_{AB}^0(s_1) &= 0; \\ N_{BC}^0(s_2) &= 0, & T_{BC}^0(s_2) &= 0, & M_{BC}^0(s_2) &= 0; \\ N_{CD}^0(s_3) &= 0, & T_{CD}^0(s_3) &= -qs_3, & M_{CD}^0(s_3) &= -qs_3^2/2. \end{aligned}$$

Caratteristiche della sollecitazione nel sistema S_1 :

$$\begin{aligned} N_{AB}^1(s_1) &= -\sqrt{2}/L, & T_{AB}^1(s_1) &= 0, & M_{AB}^1(s_1) &= 0; \\ N_{BC}^1(s_2) &= 1/L, & T_{BC}^1(s_2) &= 1/L, & M_{BC}^1(s_2) &= s_2/L; \\ N_{CD}^1(s_3) &= -1/L, & T_{CD}^1(s_3) &= 1/L, & M_{CD}^1(s_3) &= 1 + s_3/L. \end{aligned}$$

I corrispondenti diagrammi sono riportati nella figura a pagina seguente.

3) Mediante il Teorema dei lavori virtuali si calcolano i coefficienti di Müller-Breslau:

$$\begin{aligned} \eta_{10} &= 1 \cdot \eta_{10} = \mathcal{L}_e^{1 \rightarrow 0} = \mathcal{L}_1^{1 \rightarrow 0} = \\ &= \int_0^{\sqrt{2}L} [N_{AB}^1(s_1) \varepsilon_{AB}^0(s_1) + M_{AB}^1(s_1) \kappa_{AB}^0(s_1)] ds_1 + \int_0^L [N_{BC}^1(s_2) \varepsilon_{BC}^0(s_2) + M_{BC}^1(s_2) \kappa_{BC}^0(s_2)] ds_2 + \\ &+ \int_0^L [N_{CD}^1(s_3) \varepsilon_{CD}^0(s_3) + M_{CD}^1(s_3) \kappa_{CD}^0(s_3)] ds_3 = \\ &= \int_0^{\sqrt{2}L} \left(-\frac{\sqrt{2}}{L}\right) \left[-\frac{p}{EA}(\sqrt{2}L - s_1)\right] ds_1 + \int_0^L \frac{1}{L} \alpha t ds_2 + \int_0^L \left(1 + \frac{s_3}{L}\right) \left(-\frac{q}{2EJ} s_3^2\right) ds_3 = \\ &= \sqrt{2} \frac{pL}{EA} + \alpha t - \frac{7}{24} \frac{qL^3}{EJ}; \\ \eta_{11} &= 1 \cdot \eta_{11} = \mathcal{L}_e^{1 \rightarrow 1} = \mathcal{L}_1^{1 \rightarrow 1} = \\ &= \int_0^{\sqrt{2}L} [N_{AB}^1(s_1) \varepsilon_{AB}^1(s_1) + M_{AB}^1(s_1) \kappa_{AB}^1(s_1)] ds_1 + \int_0^L [N_{BC}^1(s_2) \varepsilon_{BC}^1(s_2) + M_{BC}^1(s_2) \kappa_{BC}^1(s_2)] ds_2 + \\ &+ \int_0^L [N_{CD}^1(s_3) \varepsilon_{CD}^1(s_3) + M_{CD}^1(s_3) \kappa_{CD}^1(s_3)] ds_3 = \\ &= \int_0^{\sqrt{2}L} \frac{1}{EA} \left(-\frac{\sqrt{2}}{L}\right)^2 ds_1 + \int_0^L \left[\frac{1}{EA} \left(\frac{1}{L}\right)^2 + \frac{1}{EJ} \left(\frac{s_2}{L}\right)^2\right] ds_2 + \int_0^L \left[\frac{1}{EA} \left(-\frac{1}{L}\right)^2 + \frac{1}{EJ} \left(1 + \frac{s_3}{L}\right)^2\right] ds_3 = \\ &= 2 \frac{1 + \sqrt{2}}{EAL} + \frac{8}{3} \frac{L}{EJ}. \end{aligned}$$

Infine, dall'equazione di compatibilità cinematica si ricava l'incognita iperstatica:

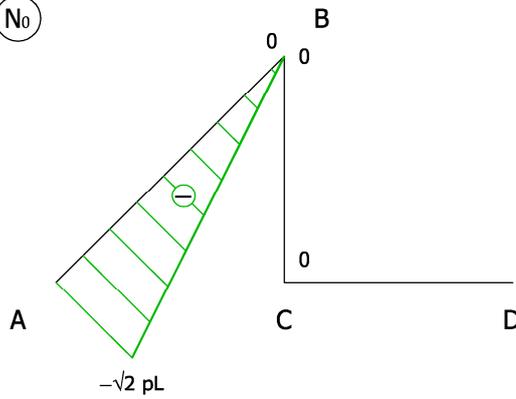
$$\eta_1 = \eta_{10} + X_1 \eta_{11} = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1 = -\frac{\eta_{10}}{\eta_{11}} = \frac{\frac{7}{24} \frac{qL^3}{EJ} - \sqrt{2} \frac{pL}{EA} - \alpha t}{\frac{8}{3} \frac{L}{EJ} + 2 \frac{1 + \sqrt{2}}{EAL}}.$$

4) Nell'ipotesi di aste inestensibili ($EA \rightarrow \infty$),

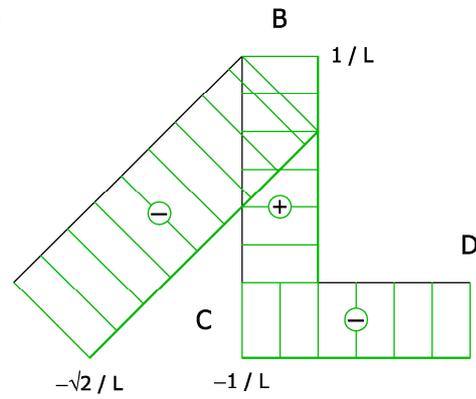
$$X_1 = \frac{7}{64} qL^2 - \frac{3}{8} \frac{EJ}{L} \alpha t.$$



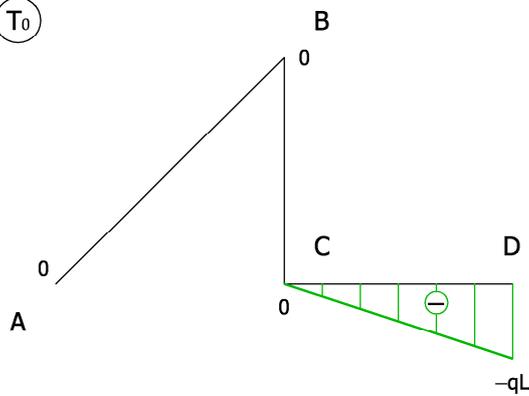
(N₀)



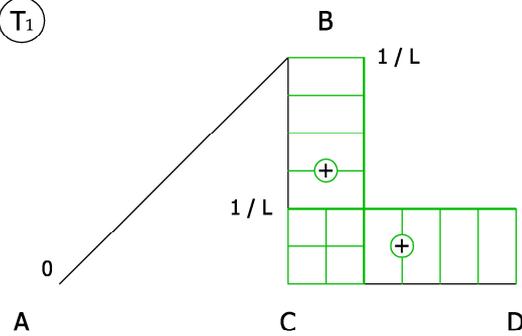
(N₁)



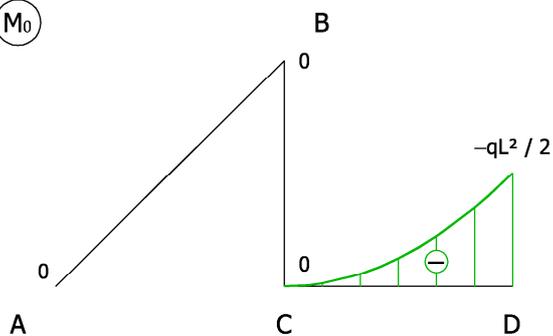
(T₀)



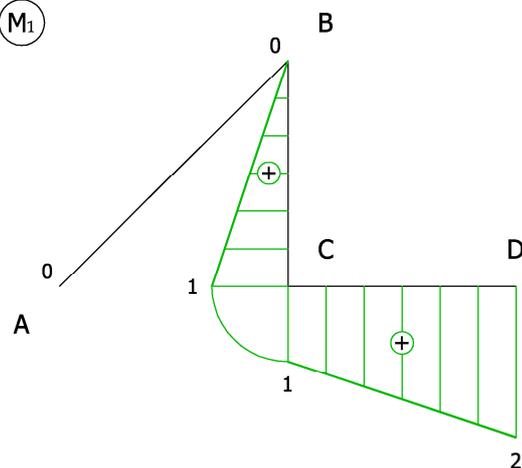
(T₁)



(M₀)



(M₁)





Problema B

1) Gli invarianti dello stato di tensione \mathbf{T} sono

$$I_1 = 4, \quad I_2 = -15, \quad I_3 = 0,$$

per cui lo stato di tensione assegnato è biassiale.

2) La quota idrostatica e quella deviatorica di \mathbf{T} sono, rispettivamente,

$$\mathbf{T}_{id} = \frac{1}{3} I_1 \mathbf{I} \quad \text{e} \quad \mathbf{T}_{dev} = \mathbf{T} - \mathbf{T}_{id},$$

le cui matrici delle componenti, nel sistema di riferimento fissato, risultano

$$[\mathbf{T}_{id}] = \begin{bmatrix} 4/3 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\mathbf{T}_{dev}] = \begin{bmatrix} -1/3 & 2 & 3 \\ 2 & -7/3 & 1 \\ 3 & 1 & 8/3 \end{bmatrix}.$$

3) L'equazione caratteristica le cui radici corrispondono alle tensioni principali,

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0,$$

nel caso in esame diventa

$$\sigma^3 - 4\sigma^2 - 15\sigma = 0,$$

da cui

$$\sigma_I = 2 + \sqrt{19}, \quad \sigma_{II} = 0, \quad \sigma_{III} = 2 - \sqrt{19}.$$

4) I tre cerchi di Mohr si costruiscono considerando i punti, diametralmente opposti, che corrispondono ai vettori tensione agenti sui piani principali,

$$P_I \equiv (\sigma_I, 0), \quad P_{II} \equiv (\sigma_{II}, 0), \quad P_{III} \equiv (\sigma_{III}, 0).$$

I punti che rappresentano i vettori tensione agenti sui piani coordinati, invece, sono

$$A_1 \equiv (\sigma_1, \tau_1), \quad A_2 \equiv (\sigma_2, \tau_2), \quad A_3 \equiv (\sigma_3, \tau_3),$$

dove

$$\tau_1 = \sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{31}^2} = \sqrt{13}, \quad \tau_2 = \sqrt{\tau_{23}^2 + \tau_{12}^2} = \sqrt{5}, \quad \tau_3 = \sqrt{\tau_{31}^2 + \tau_{23}^2} = \sqrt{10}$$

sono le tensioni tangenziali agenti sui piani coordinati.

