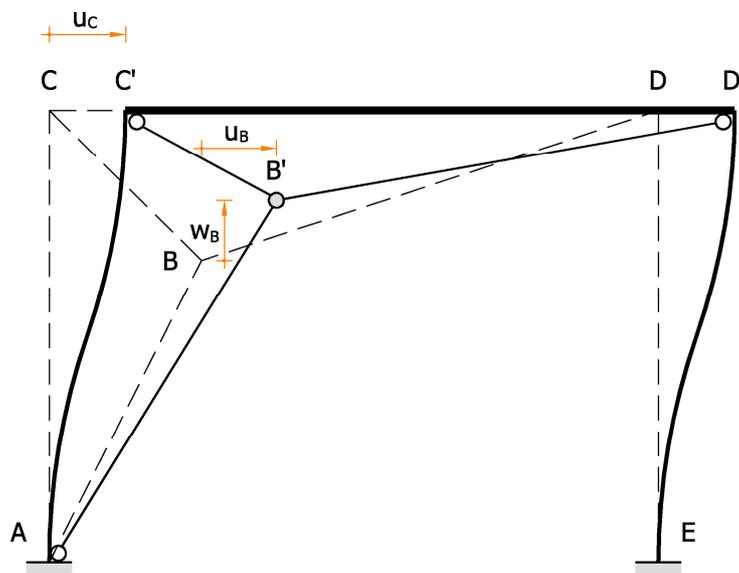




Prova d'esame del 15 febbraio 2012 – Soluzione

La struttura data può essere modellata come un sistema a 3 gradi di libertà. Scegliamo come coordinate lagrangiane gli spostamenti orizzontale e verticale di B e lo spostamento orizzontale di C. Raccogliamo queste variabili nel vettore

$$\{\mathbf{v}\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_B \\ w_B \\ u_C \end{Bmatrix}. \quad (1)$$



Scelta delle coordinate lagrangiane

Esprimiamo gli spostamenti dei punti del sistema in funzione delle coordinate lagrangiane:

$$\begin{aligned} u_B &= v_1, & u_C &= v_3, & u_D &= v_3; \\ w_B &= v_2, & w_C &= 0, & w_D &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Definiamo gli angoli di inclinazione delle aste AB, BC e BD rispetto all'orizzontale

$$\alpha_{AB} = \arctan(2), \quad \alpha_{BC} = \arctan(1), \quad \alpha_{BD} = \arctan(1/3). \quad (3)$$

Esprimiamo gli allungamenti delle aste elastiche in funzione delle coordinate lagrangiane

$$\begin{aligned} \Delta L_{AB} &= u_B \cos \alpha_{AB} + w_B \sin \alpha_{AB} = \frac{1}{\sqrt{5}}(v_1 + 2v_2), \\ \Delta L_{BC} &= (u_B - u_C) \cos \alpha_{BC} - w_B \sin \alpha_{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 - v_2 - v_3), \\ \Delta L_{BD} &= (u_D - u_B) \cos \alpha_{BD} - w_B \sin \alpha_{BD} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3v_1 - v_2 + 3v_3). \end{aligned} \quad (4)$$



Le lunghezze delle travi risultano

$$L_{AB} = \sqrt{5}a, \quad L_{AC} = 3a, \quad L_{BC} = \sqrt{2}a, \quad L_{BD} = \sqrt{10}a, \quad L_{CD} = 4a, \quad L_{DE} = 3a, \quad (5)$$

dove $a = 2000$ mm. Possiamo, quindi, esprimere la forza normale nelle aste tubolari in funzione dei rispettivi allungamenti,

$$N_{AB} = \frac{E_s A_{\phi 168.3 \times 4}}{L_{AB}} \Delta L_{AB}, \quad N_{BC} = \frac{E_s A_{\phi 168.3 \times 4}}{L_{BC}} \Delta L_{BC}, \quad N_{BD} = \frac{E_s A_{\phi 168.3 \times 4}}{L_{BD}} \Delta L_{BD}, \quad (6)$$

dove $A_{\phi 168.3 \times 4}$ è l'area della sezione trasversale, e la forza di taglio nei piedritti,

$$T_{AC} = 12 \frac{E_s J_{HE400A}}{L_{AC}^3} u_C, \quad T_{DE} = 12 \frac{E_s J_{HE400A}}{L_{DE}^3} u_D, \quad (7)$$

dove J_{HE400A} è il momento d'inerzia della sezione trasversale.

Ricaviamo le equazioni di equilibrio dinamico utilizzando il metodo energetico. L'energia potenziale totale del sistema è

$$V = U - W, \quad (8)$$

dove

$$U = \frac{1}{2} \frac{12 E_s J_{HE400A}}{L_{AC}^3} u_C^2 + \frac{1}{2} \frac{12 E_s J_{HE400A}}{L_{DE}^3} u_D^2 + \frac{1}{2} E_s A_{\phi 168.3 \times 4} \left(\frac{\Delta L_{AB}^2}{L_{AB}} + \frac{\Delta L_{BC}^2}{L_{BC}} + \frac{\Delta L_{BD}^2}{L_{BD}} \right) \quad (9)$$

è l'energia di deformazione elastica, mentre

$$W = p_1 u_B - q_1 w_B + p_2 u_C \quad (10)$$

è il lavoro virtuale dei carichi.

L'energia cinetica del sistema è

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 \dot{u}_B^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{w}_B^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{u}_C^2. \quad (11)$$

Sostituendo le espressioni (2)–(5) nelle (8)–(11), si ottengono V ed E_k in funzione delle coordinate lagrangiane. Quindi, per derivazione si ottengono le componenti della matrice di massa

$$[M] = [m_{ij}] = \left[\frac{\partial^2 E_k}{\partial \dot{v}_i \partial \dot{v}_j} \right] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad (12)$$



le componenti della matrice di rigidezza

$$[K] = [k_{ij}] = \left[\frac{\partial^2 U}{\partial v_i \partial v_j} \right] = \frac{\sqrt{10} E_s A_{\phi 168.3 \times 4}}{100 a} \begin{bmatrix} 9 + 2\sqrt{2} + 5\sqrt{5} & 3 + 4\sqrt{2} - 5\sqrt{5} & -9 - 5\sqrt{5} \\ 3 + 4\sqrt{2} - 5\sqrt{5} & 1 + 8\sqrt{2} + 5\sqrt{5} & -3 + 5\sqrt{5} \\ -9 - 5\sqrt{5} & -3 + 5\sqrt{5} & 9 + 5\sqrt{5} + \frac{80\sqrt{10}}{9} \frac{J_{HE400A}}{a^2 A_{\phi 168.3 \times 4}} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

e le componenti del vettore dei carichi

$$\{p\} = \{p_i\} = \left\{ \frac{\partial W}{\partial v_i} \right\} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ -q_2(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix}. \quad (14)$$

Le equazioni del moto in forma matriciale risultano infine

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{v}_3 \end{Bmatrix} + \frac{\sqrt{10} E_s A_{\phi 168.3 \times 4}}{100 a} \begin{bmatrix} 9 + 2\sqrt{2} + 5\sqrt{5} & 3 + 4\sqrt{2} - 5\sqrt{5} & -9 - 5\sqrt{5} \\ 3 + 4\sqrt{2} - 5\sqrt{5} & 1 + 8\sqrt{2} + 5\sqrt{5} & -3 + 5\sqrt{5} \\ -9 - 5\sqrt{5} & -3 + 5\sqrt{5} & 9 + 5\sqrt{5} + \frac{80\sqrt{10}}{9} \frac{J_{HE400A}}{a^2 A_{\phi 168.3 \times 4}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ -q_2(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix}. \quad (15)$$

Prova d'esame di Dinamica delle Strutture del 15 febbraio 2012

Docente: Prof. Ing. Paolo S. VALVO

Matricola dello studente:

$$\text{Matricola} := 400000$$

Lunghezze [m]

$$\begin{aligned} a &:= 2 & L_{AB} &:= \sqrt{5} \cdot a = 4.472 & L_{AC} &:= 3 \cdot a = 6.000 & L_{BC} &:= \sqrt{2} \cdot a = 2.828 \\ & & L_{BD} &:= \sqrt{10} \cdot a = 6.325 & L_{CD} &:= 4 \cdot a = 8.000 & L_{DE} &:= 3 \cdot a = 6.000 \end{aligned}$$

Modulo di Young [N/m²] del materiale (acciaio)

$$E_s := 210 \cdot 10^9$$

Momento di inerzia [m⁴] e area [m²] delle sezioni trasversali delle travi

$$J_{HE400A} := 45070 \cdot 10^{-8} \quad A_{\Phi 168.3 \times 4} := 20.65 \cdot 10^{-4}$$

Masse [kg] e inerzia rotazionale della trave rigida [kg m²]

$$m_1 := \frac{\text{Matricola}}{20} = 20000.0 \quad m_2 := 2 \cdot m_1 = 40000.0 \quad I_2 := \frac{m_2 \cdot L_{CD}^2}{12} = 213333.3$$

Matrice di massa

$$M := \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20000.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 20000.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 40000.0 \end{pmatrix}$$

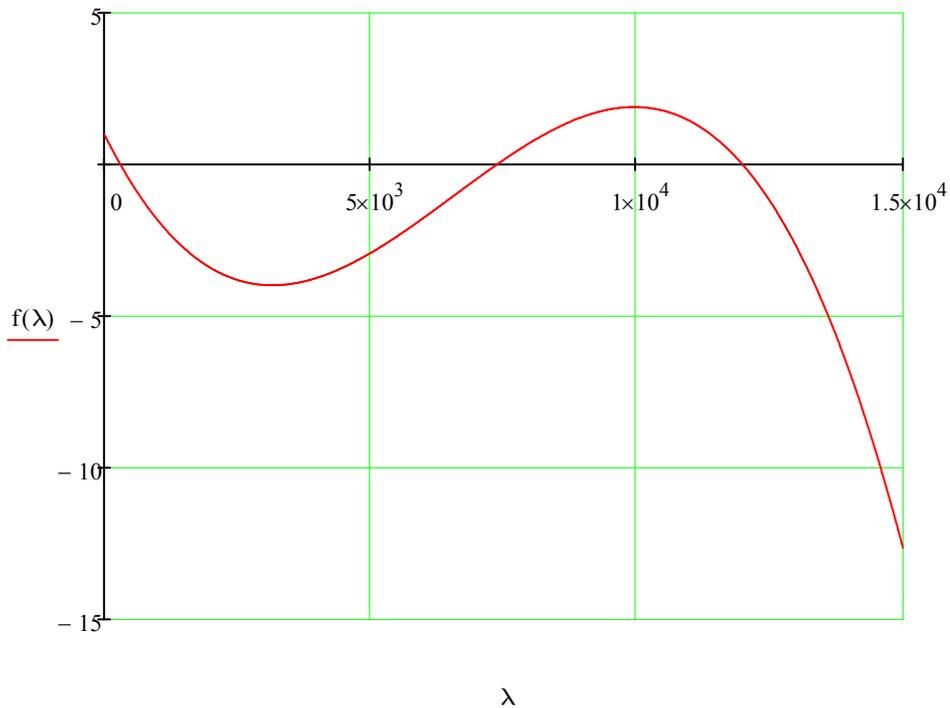
Matrice di rigidità

$$K := \frac{\sqrt{10}}{100} \cdot \frac{E_s \cdot A_{\Phi 168.3 \times 4}}{a} \cdot \begin{pmatrix} 9 + 2\sqrt{2} + 5\sqrt{5} & 3 + 4\sqrt{2} - 5\sqrt{5} & -9 - 5\sqrt{5} \\ 3 + 4\sqrt{2} - 5\sqrt{5} & 1 + 8\sqrt{2} + 5\sqrt{5} & -3 + 5\sqrt{5} \\ -9 - 5\sqrt{5} & -3 + 5\sqrt{5} & 9 + 5\sqrt{5} + \frac{80\sqrt{10} \cdot J_{HE400A}}{9 \cdot a^2 \cdot A_{\Phi 168.3 \times 4}} \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 157762108.3 & -17302553.2 & -138368690.7 \\ -17302553.2 & 161089492.7 & 56089388.3 \\ -138368690.7 & 56089388.3 & 148885024.1 \end{pmatrix}$$

Ricerca degli autovalori

$$f(\lambda) := \frac{|K - \lambda \cdot M|}{|K|} \quad |K| = 4.272 \times 10^{23} \quad |M| = 1.600 \times 10^{13}$$



Vettore dei coefficienti dell'equazione caratteristica

$$\text{vec_coeffs} := f(\lambda) \text{ coeffs} \rightarrow \begin{pmatrix} 1.0 \\ -0.0035303136384482305578 \\ 7.3648928254986294648e-7 \\ -3.7452342054162056144e-11 \end{pmatrix}$$

Autovalori generalizzati

$$\lambda := \text{polyroots}(\text{vec_coeffs}) = \begin{pmatrix} 302.0 \\ 7376.0 \\ 11986.7 \end{pmatrix}$$

Pulsazioni, frequenze e periodi propri

$$\omega := \sqrt{\lambda} = \begin{pmatrix} 17.378 \\ 85.884 \\ 109.484 \end{pmatrix} \quad f_{\omega} := \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \begin{pmatrix} 2.766 \\ 13.669 \\ 17.425 \end{pmatrix} \quad T_{\omega} := \frac{1}{f} = \begin{pmatrix} 0.361560 \\ 0.073159 \\ 0.057389 \end{pmatrix}$$

Ricerca delle masse corrispondenti alle frequenze assegnate

$$f_1 := 4 \quad \omega_1 := 2 \cdot \pi \cdot f_1 = 25.133 \quad \lambda_1 := \omega_1^2 = 631.655$$

$$f_2 := 12 \quad \omega_2 := 2 \cdot \pi \cdot f_2 = 75.398 \quad \lambda_2 := \omega_2^2 = 5684.892$$

$$M(x, y) := \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$$

$$g(\lambda, x, y) := \frac{|K - \lambda \cdot M(x, y)|}{|K|}$$

$$x := m_1 \quad y := m_2$$

Given

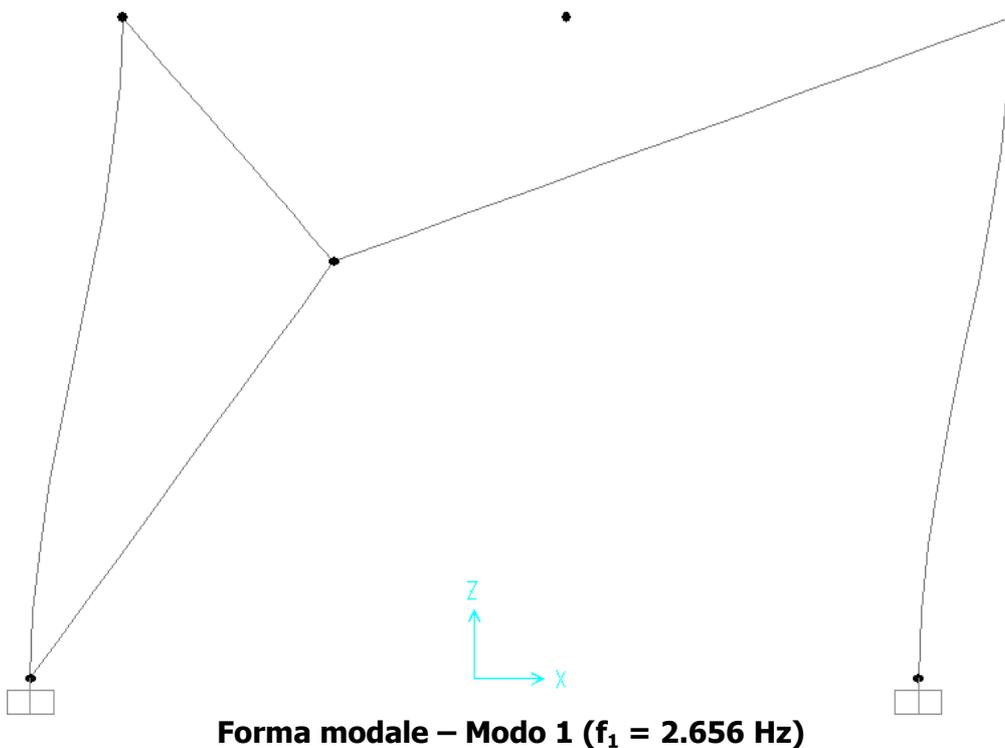
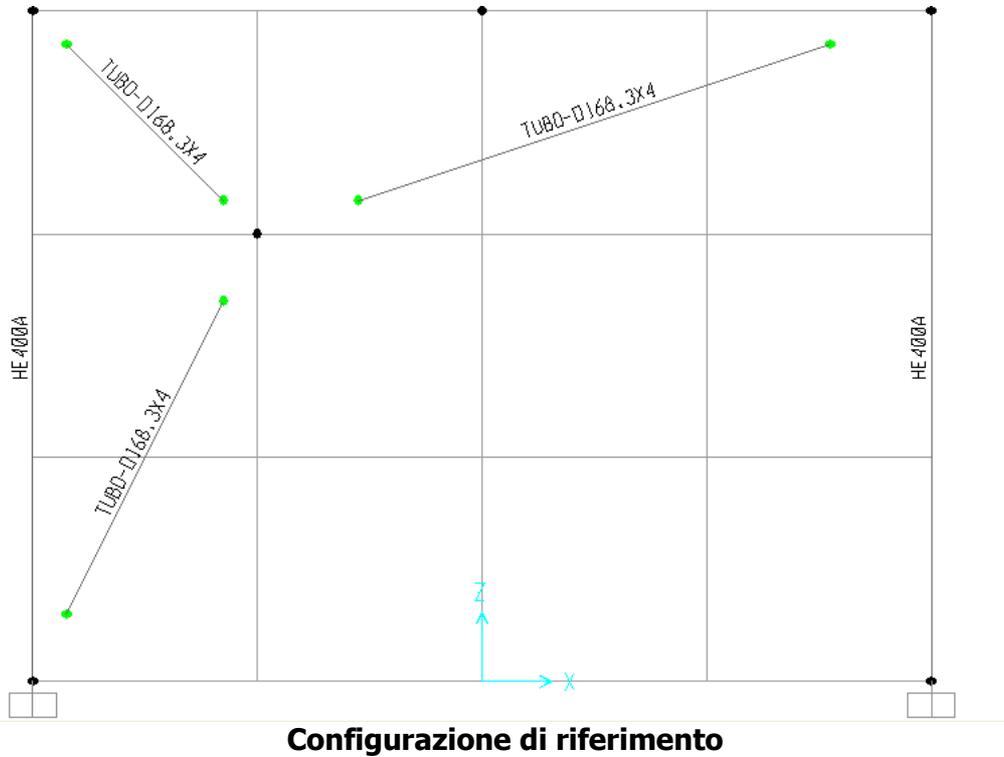
$$g(\lambda_1, x, y) = 0$$

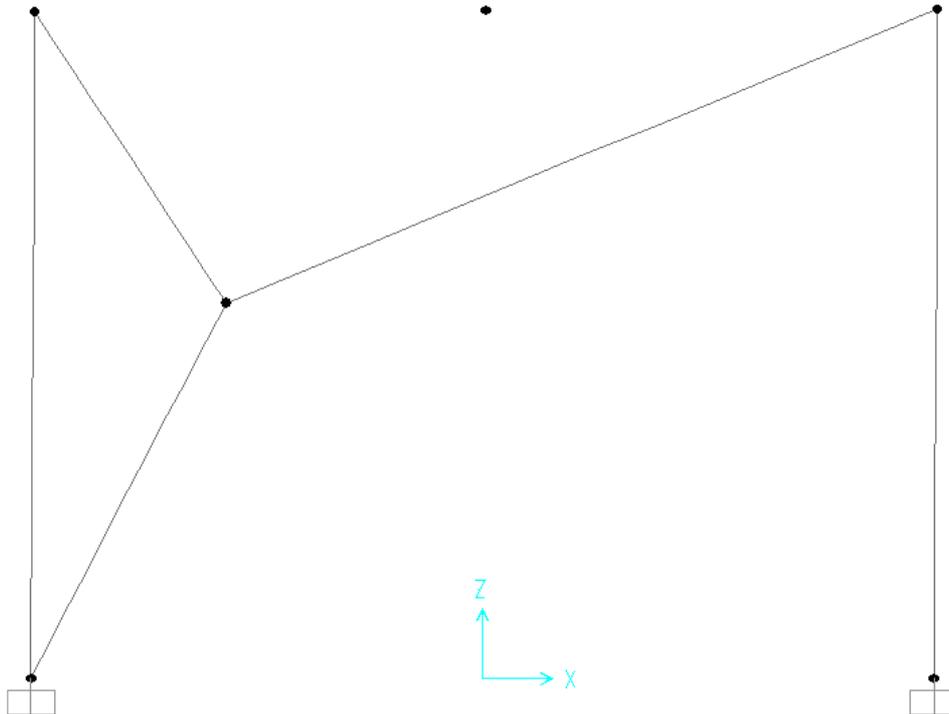
$$g(\lambda_2, x, y) = 0$$

$$\text{Find}(x, y) = \begin{pmatrix} 26343.232 \\ 3896.631 \end{pmatrix}$$

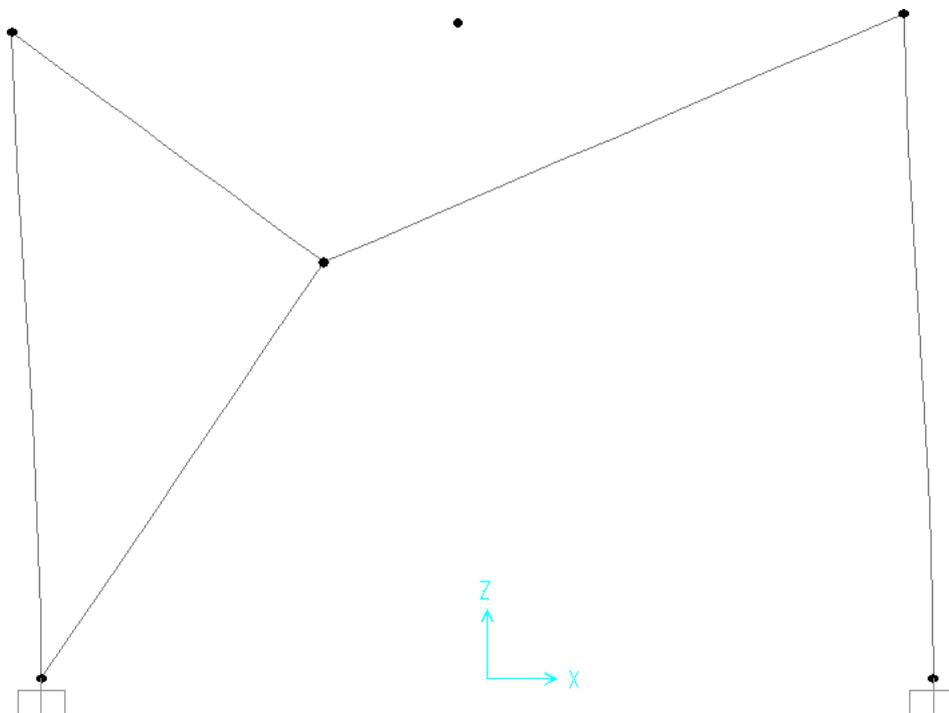


Prova d'esame del 15 febbraio 2012 – Risultati analisi FEM

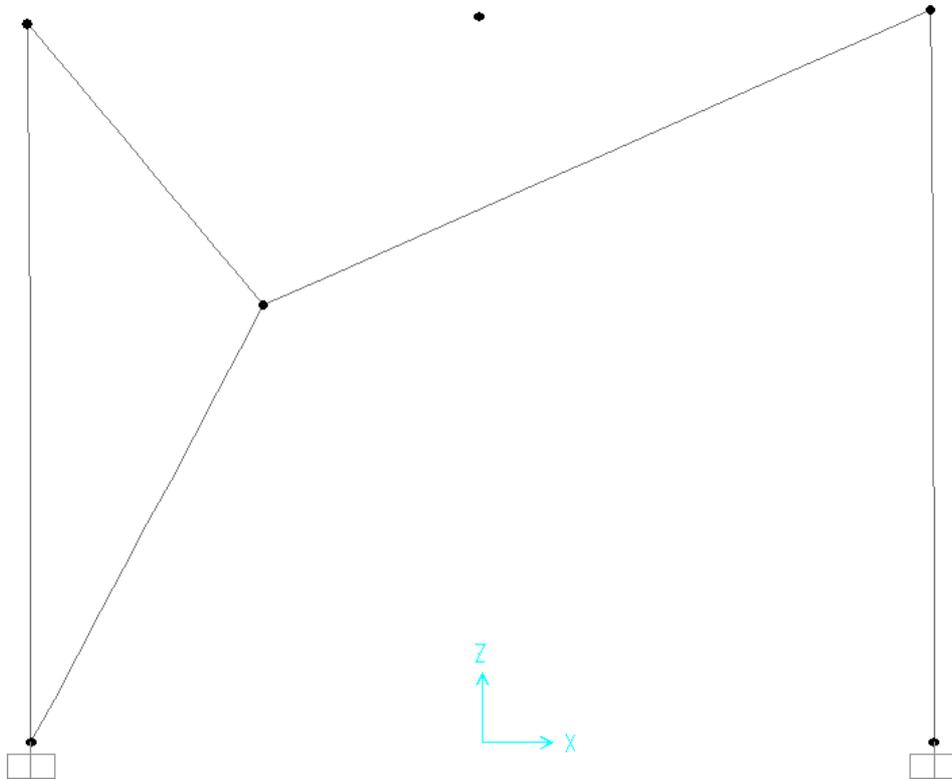




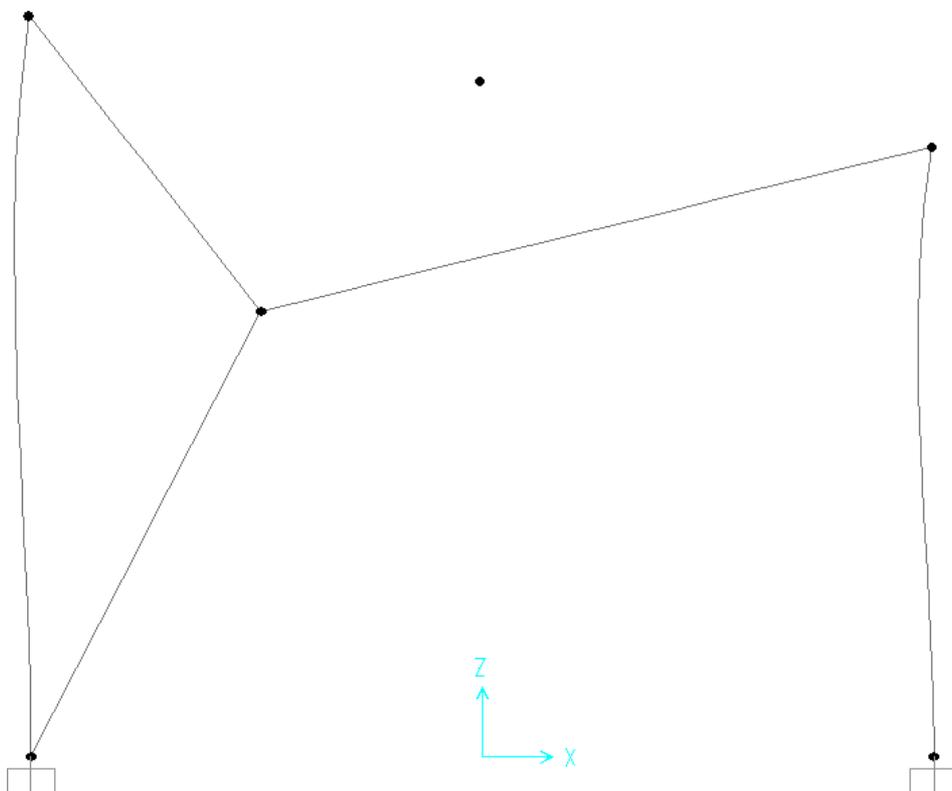
Forma modale – Modo 2 ($f_2 = 13.502$ Hz)



Forma modale – Modo 3 ($f_3 = 16.281$ Hz)



Forma modale – Modo 4 ($f_4 = 27.439$ Hz)



Forma modale – Modo 5 ($f_5 = 46.722$ Hz)

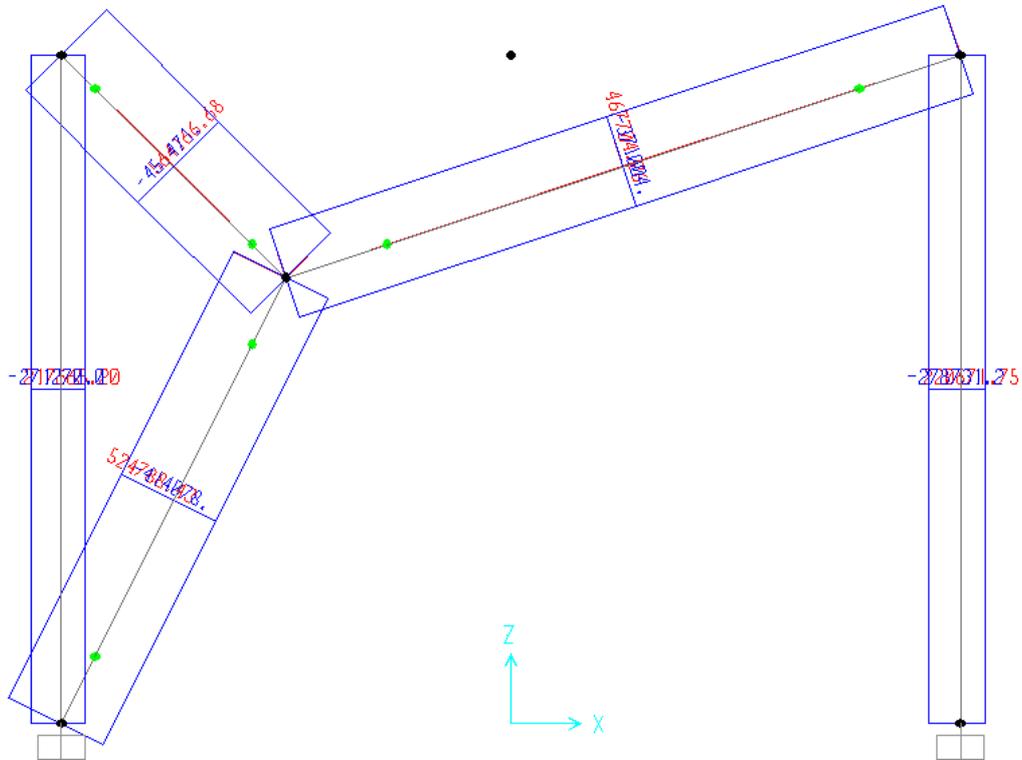


Diagramma involuppo della forza normale
($N_{\min} = -451.5$ kN, $N_{\max} = 564.2$ kN)

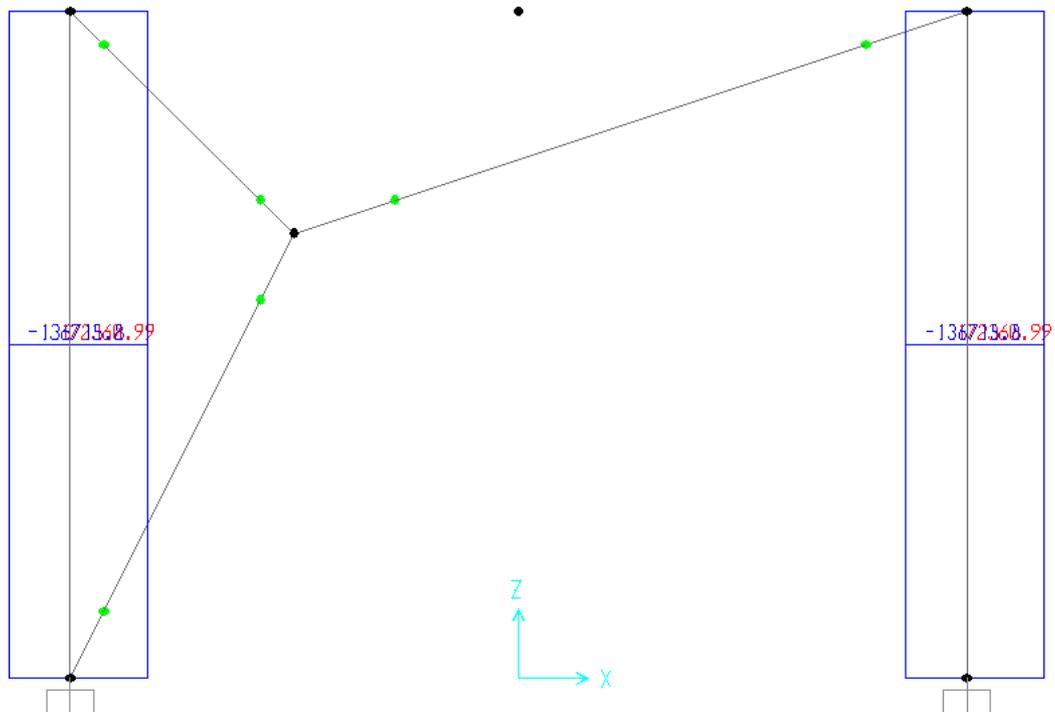


Diagramma involuppo della forza di taglio
($T_{\min} = -136.7$ kN, $T_{\max} = 172.4$ kN)

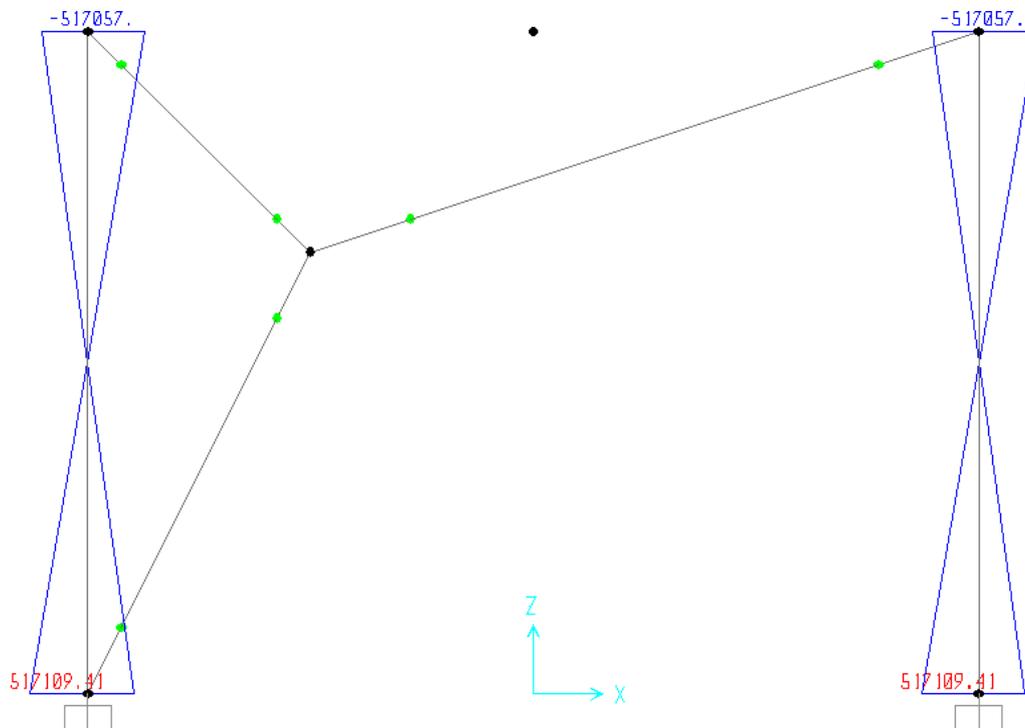


Diagramma involucro del momento flettente
($M_{\min} = -517.1 \text{ kN m}$, $M_{\max} = 517.1 \text{ kN m}$)