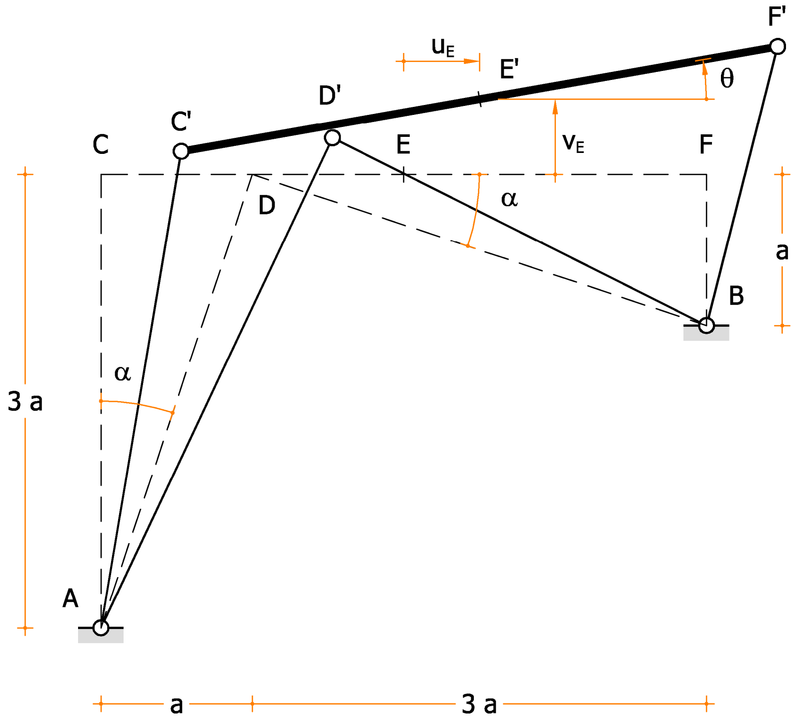
Prova d'esame del 12 gennaio 2012 – Soluzione

La struttura data può essere modellata come un sistema a 3 gradi di libertà. Scegliamo come coordinate lagrangiane le componenti orizzontale e verticale di spostamento del punto E e la rotazione dell'asta CF, che raccogliamo nel vettore

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_E \\ v_E \\ \theta \end{Bmatrix}. \tag{1}$$



Scelta delle coordinate lagrangiane

Esprimiamo gli spostamenti degli altri punti di interesse in funzione delle coordinate lagrangiane:

$$\begin{aligned} &u_C = u_E = v_1, && u_D = u_E = v_1, && u_F = u_E = v_1; \\ &v_C = v_E - 2a\theta = v_2 - 2av_3, && v_D = v_E - a\theta = v_2 - av_3, && v_F = v_E + 2a\theta = v_2 + 2av_3. \end{aligned} \tag{2}$$

dove a è la lunghezza del tratto CD. Indichiamo con

$$\alpha = \arctan(1/3) \tag{3}$$

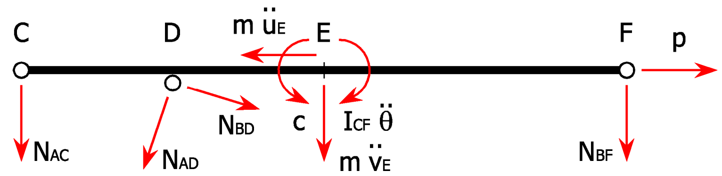
l'angolo di inclinazione dell'asta AD con la verticale, pari anche all'angolo formato dalla direzione dell'asta BD con l'orizzontale. Gli allungamenti delle aste elastiche risultano

$$\begin{aligned} &\Delta L_{AC} = v_C = v_2 - 2av_3, && \Delta L_{AD} = u_D \sin\alpha + v_D \cos\alpha = v_1 \sin\alpha + (v_2 - av_3)\cos\alpha, \\ &\Delta L_{BF} = v_F = v_2 + 2av_3, && \Delta L_{BD} = -u_D \cos\alpha + v_D \sin\alpha = -v_1 \cos\alpha + (v_2 - av_3)\sin\alpha. \end{aligned} \tag{4}$$

Le espressioni della forza normale nelle aste in funzione degli allungamenti sono

$$N_{AC} = \frac{EA_1}{3a}\Delta L_{AC}, \quad N_{AD} = \frac{EA_2}{\sqrt{10}\ a}\Delta L_{AD}, \quad N_{BD} = \frac{EA_2}{\sqrt{10}\ a}\Delta L_{BD}, \quad N_{BF} = \frac{EA_1}{a}\Delta L_{BF}, \tag{5}$$

dove A_1 e A_2 sono, rispettivamente, le aree delle sezioni trasversali dei profili HE200A e 2L70x70x7.



Equilibrio dinamico dell'asta CF

Scriviamo le equazioni di equilibrio dinamico per l'asta CF:

$$\begin{aligned} &m\ddot{u}_E + N_{AD}\sin\alpha - N_{BD}\cos\alpha = p(t), \\ &m\ddot{v}_E + N_{AC} + N_{AD}\cos\alpha + N_{BD}\sin\alpha + N_{BF} = 0, \\ &I_{CF}\ddot{\theta} + am\ddot{v}_E - aN_{AC} + 3aN_{BF} = c(t), \end{aligned} \tag{6}$$

dove $I_{CF} = m(4a)^2/12 = 4ma^2/3$ è l'inerzia rotazionale dell'asta rigida. Sostituendo le espressioni (4) e (5) nelle (6), dopo alcune semplificazioni, si arriva alle equazioni del moto in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}ma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{v}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{EA_2}{\sqrt{10}\ a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EA_1}{3a} + \frac{EA_2}{\sqrt{10}\ a} & \frac{4EA_1}{3} - \frac{EA_2}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{4EA_1}{3a} - \frac{EA_2}{\sqrt{10}\ a} & \frac{16EA_1}{3} + \frac{EA_2}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p(t) \\ 0 \\ c(t)/a \end{Bmatrix}. \tag{7}$$

Prova d'esame di Dinamica delle Strutture del 12 gennaio 2012

Docente: Dott. Ing. Paolo S. VALVO

Matricola dello studente:

$$\text{Matricola} := 400000$$

Lunghezza delle aste

$$a := 1 \qquad L_{AC} := 3\cdot a = 3.000 \qquad L_{AD} := \sqrt{(3\cdot a)^2 + a^2} = 3.162$$

$$L_{BF} := a = 1.000 \qquad L_{CF} := 4\cdot a = 4.000 \qquad L_{BD} := \sqrt{(3\cdot a)^2 + a^2} = 3.162$$

Angolo di inclinazione asta AC

$$\alpha := \operatorname{atan}\left(\frac{1}{3}\right) = 18.435\cdot\text{deg}$$

Modulo di Young e densità del materiale (acciaio)

$$E := 210\cdot 10^{9} \qquad \rho := 7850$$

Area della sezione trasversale delle aste

$$A_1 := 53.83\cdot 10^{-4} \qquad A_2 := 2\cdot 9.40\cdot 10^{-4} = 1.880\times 10^{-3}$$

Massa e inerzia rotazionale dell'asta rigida

$$m := \frac{\text{Matricola}}{10} = 40000.0 \qquad I_{CF} := \frac{m\cdot L_{CF}^{2}}{12} = 53333.3$$

Matrice di massa

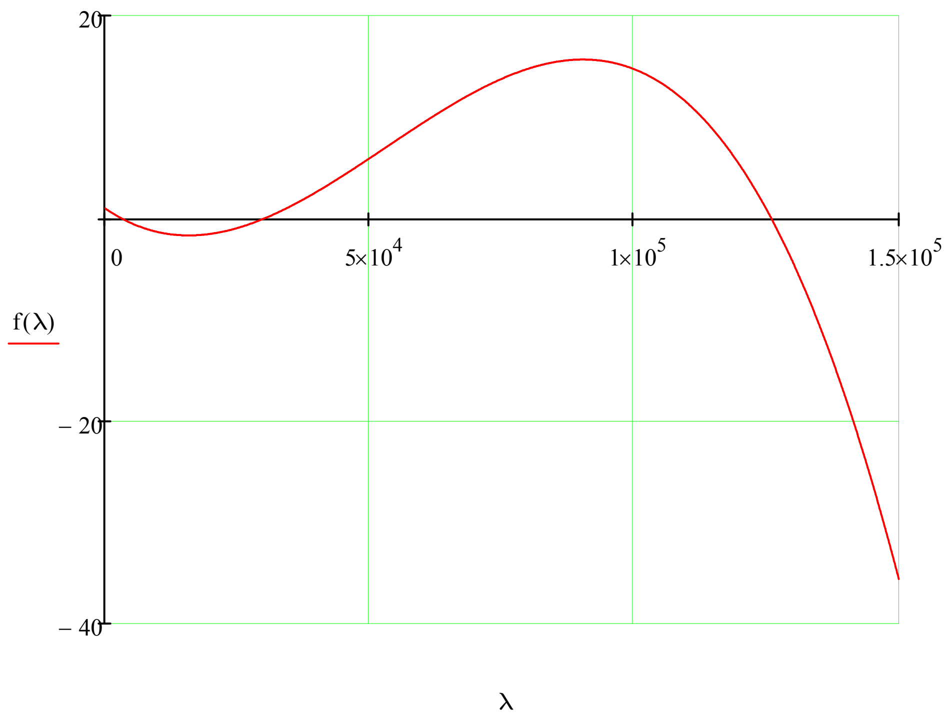
$$M := \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}\cdot m\cdot a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40000.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 40000.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 53333.3 \end{pmatrix}$$

Matrice di rigidezza

$$K := \begin{pmatrix} \frac{E\cdot A_2}{\sqrt{10}\cdot a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4\cdot E\cdot A_1}{3\cdot a} + \frac{E\cdot A_2}{\sqrt{10}\cdot a} & \frac{4\cdot E\cdot A_1}{3} - \frac{E\cdot A_2}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{4\cdot E\cdot A_1}{3\cdot a} - \frac{E\cdot A_2}{\sqrt{10}\cdot a} & \frac{16\cdot E\cdot A_1}{3} + \frac{E\cdot A_2}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 124846722 & 0 & 0 \\ 0 & 1632086722 & 1382393278 \\ 0 & 1382393278 & 6153806722 \end{pmatrix}$$

Ricerca degli autovalori

$$f(\lambda) := \frac{|K - \lambda \cdot M|}{|K|} \qquad |K| = 1.015 \times 10^{27} \qquad |M| = 8.533 \times 10^{13}$$



Vettore dei coefficienti dell'equazione caratteristica

$$\text{vec\_coeffs} := f(\lambda) \text{ coeffs } \rightarrow \begin{pmatrix} 1.0 \\ -0.00036136372579917851886 \\ 1.338908996215490727\text{e-}8 \\ -8.404572387132815547 8\text{e-}14 \end{pmatrix}$$

Autovalori generalizzati

$$\lambda := \text{polyroots}(\text{vec\_coeffs}) = \begin{pmatrix} 3121.2 \\ 30276.8 \\ 125909.3 \end{pmatrix}$$

Pulsazioni, frequenze e periodi propri

$$\omega := \sqrt{\lambda} = \begin{pmatrix} 55.867 \\ 174.002 \\ 354.837 \end{pmatrix} \qquad f := \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \begin{pmatrix} 8.892 \\ 27.693 \\ 56.474 \end{pmatrix} \qquad T := \frac{1}{f} = \begin{pmatrix} 0.112466 \\ 0.036110 \\ 0.017707 \end{pmatrix}$$

Ricerca degli autovettori

Primo autovettore

$x := 1 \qquad y := 1 \qquad z := 1$

Given

$$\left[\left(K - \lambda_1 \cdot M\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_2 = 0 \qquad \left[\left(K - \lambda_1 \cdot M\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_3 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$a_1 := \mathrm{Find}(x, y, z) \qquad a_1 = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{pmatrix}$$

Secondo autovettore

$x := 1 \qquad y := 1 \qquad z := 1$

Given

$$\left[\left(K - \lambda_2 \cdot M\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_1 = 0 \qquad \left[\left(K - \lambda_2 \cdot M\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$a_2 := \mathrm{Find}(x, y, z) \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 0.000 \\ 0.957 \\ -0.291 \end{pmatrix}$$

Terzo autovettore

$x := 1 \qquad y := 1 \qquad z := 1$

Given

$$\left[\left(K - \lambda_3 \cdot M\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_1 = 0 \qquad \left[\left(K - \lambda_3 \cdot M\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$a_3 := \mathrm{Find}(x, y, z) \qquad a_3 = \begin{pmatrix} 0.000 \\ 0.376 \\ 0.927 \end{pmatrix}$$

Autovettori di norma unitaria

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{pmatrix} \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 0.000 \\ 0.957 \\ -0.291 \end{pmatrix} \qquad a_3 = \begin{pmatrix} 0.000 \\ 0.376 \\ 0.927 \end{pmatrix}$$

Normalizzazione rispetto alla matrice di massa

$$\mu_1 := {a_1}^T \cdot M \cdot a_1 \qquad \mu_2 := {a_2}^T \cdot M \cdot a_2 \qquad \mu_3 := {a_3}^T \cdot M \cdot a_3$$

$$\mu_1 = 40000.000 \qquad \mu_2 = 41131.749 \qquad \mu_3 = 51445.938$$

$$\phi_1 := \frac{a_1}{\sqrt{\mu_1}} \qquad \phi_2 := \frac{a_2}{\sqrt{\mu_2}} \qquad \phi_3 := \frac{a_3}{\sqrt{\mu_3}}$$

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 0.005000 \\ 0.000000 \\ 0.000000 \end{pmatrix} \qquad \phi_2 = \begin{pmatrix} 0.000000 \\ 0.004717 \\ -0.001437 \end{pmatrix} \qquad \phi_3 = \begin{pmatrix} 0.000000 \\ 0.001659 \\ 0.004085 \end{pmatrix}$$

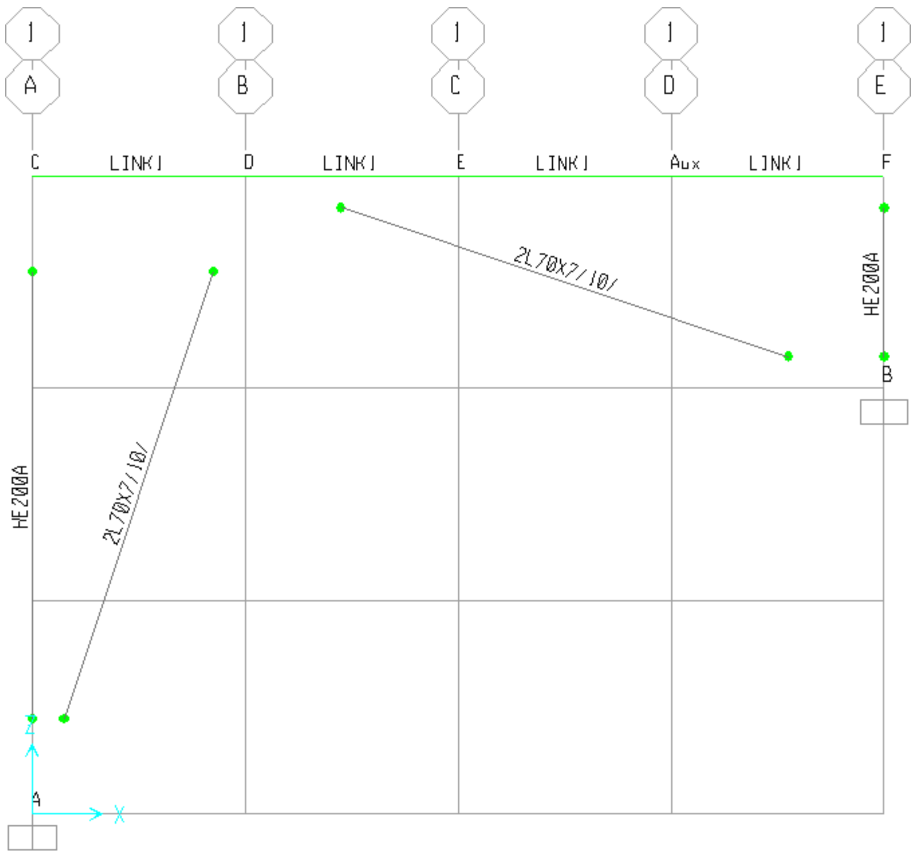
Calcolo dell'impulso

$$c_{max} := \frac{Matricola}{2000} \cdot 1000 = 200000 \qquad p_{max} := \frac{Matricola}{500} \cdot 1000 = 800000.0$$

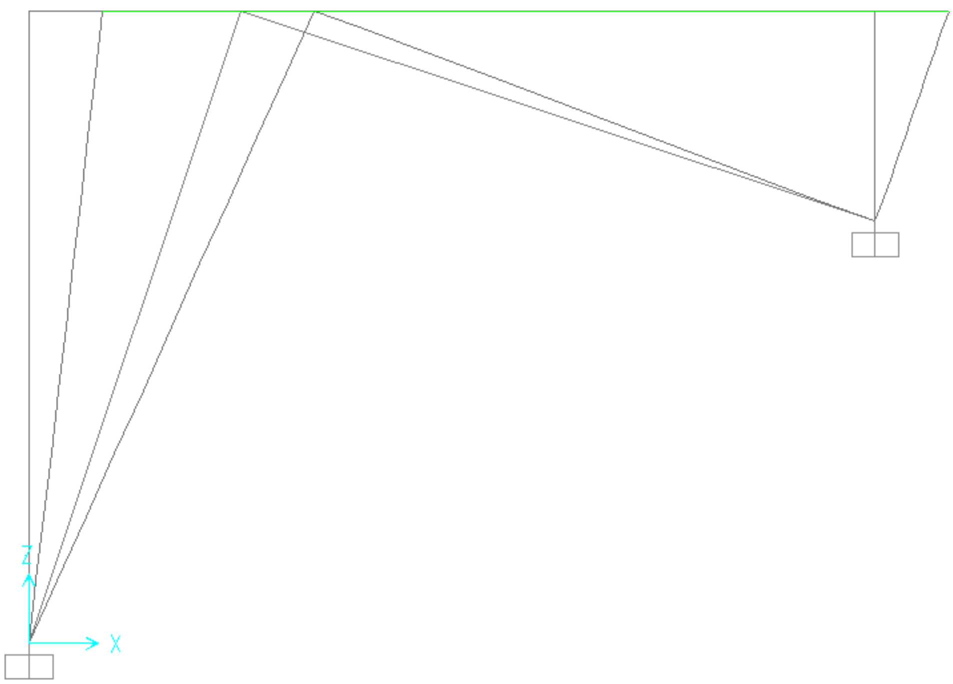
$$I_c := \int_0^{0.5} c_{max} \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{t}{0.5}\right) dt = 63662.0$$

$$I_p := \frac{1}{2} \cdot 0.1 \cdot p_{max} + \frac{1}{2} \cdot 0.2 \cdot p_{max} + 0.2 \cdot \frac{1}{2} \cdot p_{max} = 200000.0$$

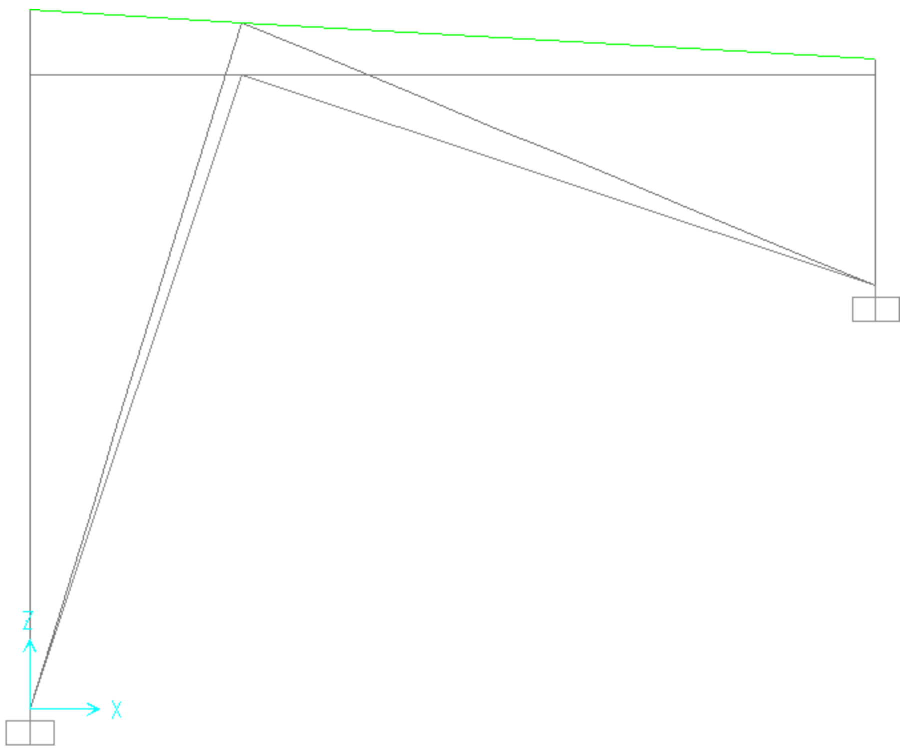
Prova d'esame del 12 gennaio 2012 – Risultati analisi FEM



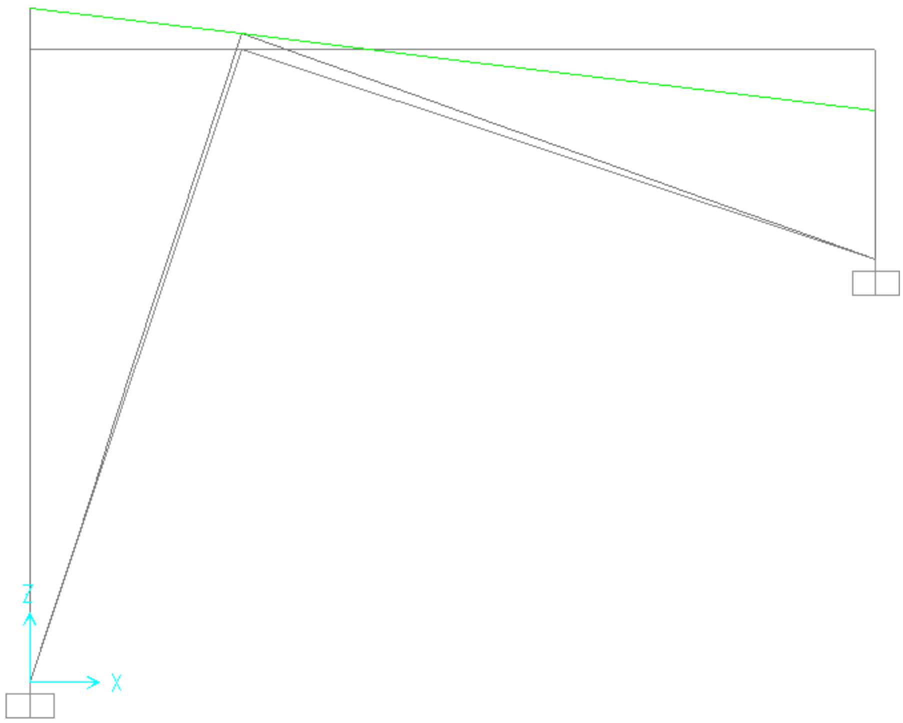
Configurazione di riferimento



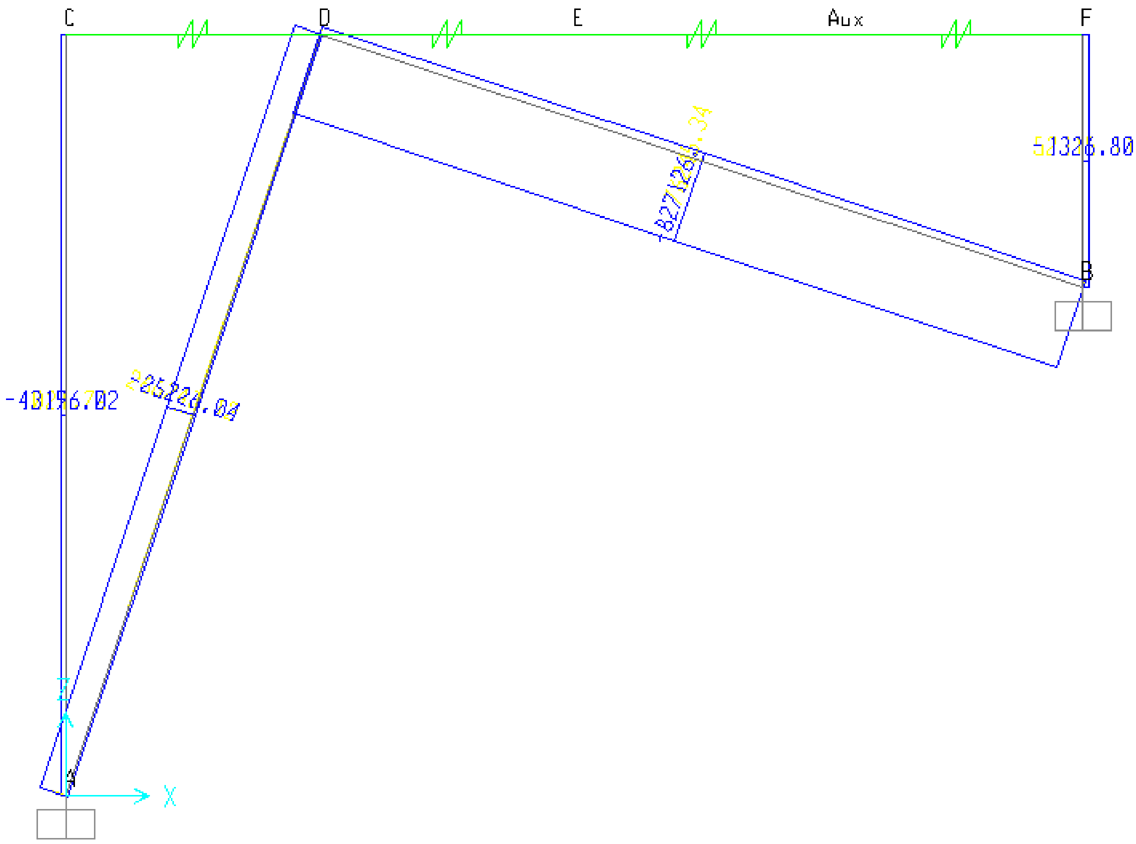
Forma modale – Modo 1 (f_1 = 8.875 Hz)



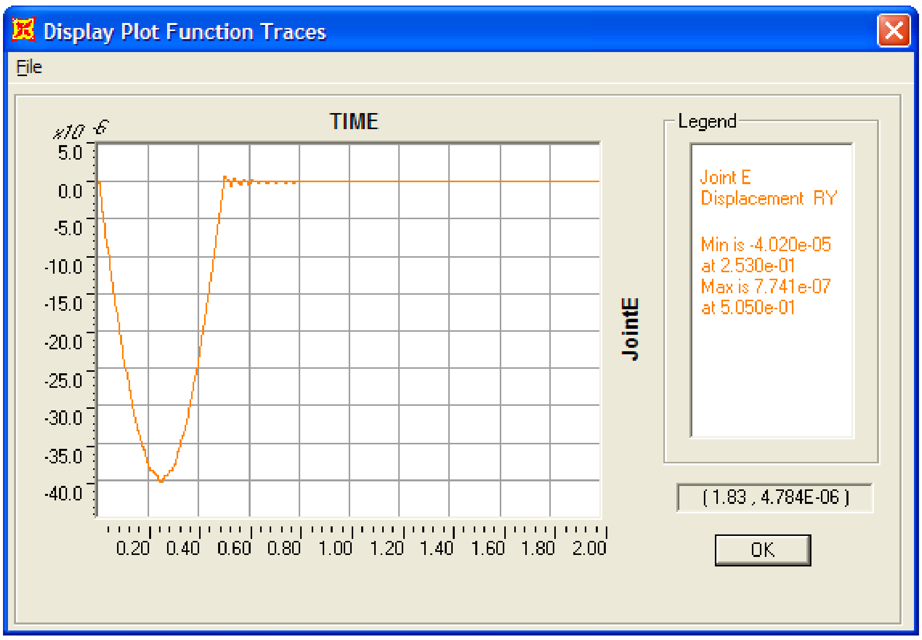
Forma modale – Modo 2 (f_2 = 27.610 Hz)



Forma modale – Modo 3 (f_3 = 56.318 Hz)



Inviluppo della forza normale nelle aste (N_{min} = –827.1 kN, N_{max} = 266.2 kN)



Rotazione dell'asta CF in funzione del tempo (θ_{min} = –4.020x10^{-5}, θ_{max} = 7.741x10^{-7})