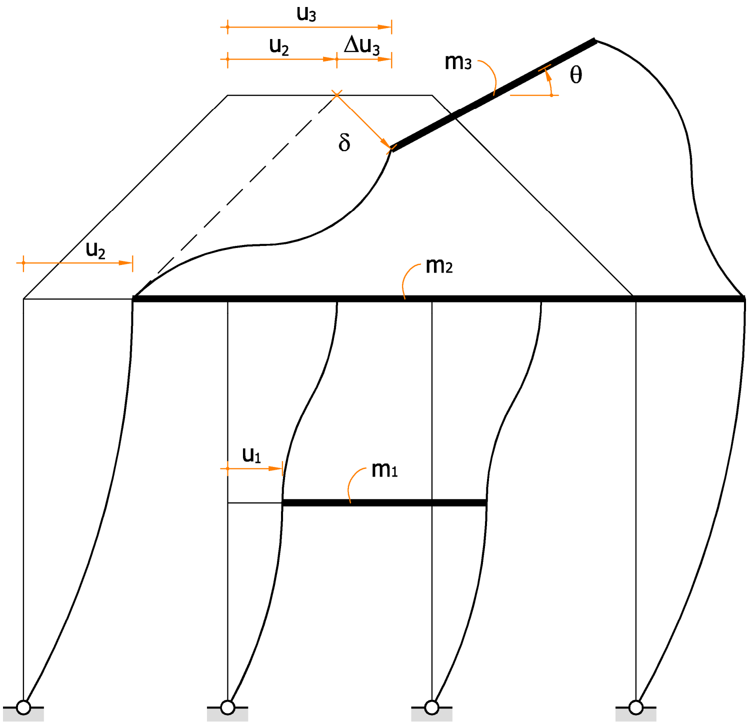
Prova d'esame dell'8 settembre 2011 – Soluzione

Il sistema possiede 3 gradi di libertà. Scelti come coordinate lagrangiane gli spostamenti orizzontali dei traversi rigidi, u_1, u_2 e u_3, possiamo esprimere gli altri parametri di spostamento come segue:

$$\Delta u_3 = u_3 - u_2, \quad \delta = \sqrt{2}(u_3 - u_2), \quad \theta = 2\frac{u_3 - u_2}{L}, \tag{1}$$

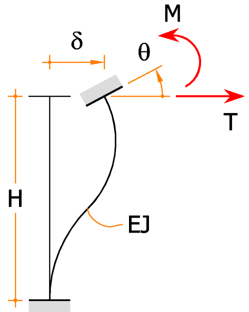
dove L rappresenta la lunghezza del traverso di massa m_3.



Configurazione deformata del sistema

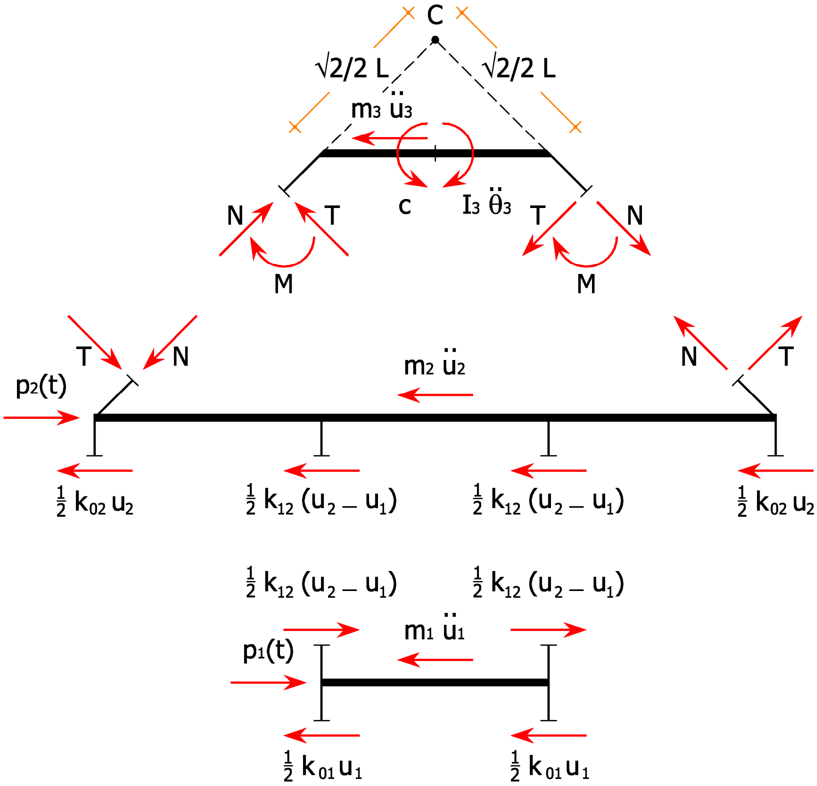
Le travi inclinate che collegano il secondo ed il terzo traverso si comportano come travi incastrate cui sono imposte una traslazione ed una rotazione ad una estremità. Pertanto,

$$T = 12\frac{EJ}{H^3}\delta + 6\frac{EJ}{H^2}\theta \quad \text{e} \quad M = 6\frac{EJ}{H^2}\delta + 4\frac{EJ}{H}\theta. \tag{2}$$



Trave con incastro cedevole

Tenendo conto delle Eq. (1) ed osservando che $H = \sqrt{2}L$, possiamo scrivere le equazioni di equilibrio dinamico per i tre traversi rigidi (nella figura sottostante, per semplicità, non sono indicate le forze verticali e le coppie che agiscono sugli elementi di massa m_2 ed m_3).



Equilibrio dinamico dei traversi rigidi

Si ottengono così:

$$
\begin{aligned}
m_1: &\quad m_1\ddot{u}_1 + k_{01}u_1 - k_{12}(u_2 - u_1) = p_1; \\
m_2: &\quad m_2\ddot{u}_2 - 2T\frac{\sqrt{2}}{2} + 2N\frac{\sqrt{2}}{2} + k_{02}u_2 + k_{12}(u_2 - u_1) = p_2; \\
m_3: &\quad \begin{cases} I_3\ddot{\theta} + 2T\dfrac{\sqrt{2}}{2}L + 2M + m_3\ddot{u}_3\dfrac{L}{2} = c, \\ m_3\ddot{u}_3 + 2T\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 2N\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

dove $I_3 = \frac{1}{12}m_3L^2$. Sostituendo le Eq. (1) e (2) nelle (3) e semplificando, si ottengono:

$$
\begin{aligned}
&m_1\ddot{u}_1 + (k_{01} + k_{12})u_1 - k_{12}u_2 = p_1; \\
&m_2\ddot{u}_2 + m_3\ddot{u}_3 - k_{12}u_1 + (k_{02} + k_{12})u_2 = p_2; \\
&-m_3\ddot{u}_2 + 4m_3\ddot{u}_3 - 156\sqrt{2}\frac{EJ}{L^3}u_2 + 156\sqrt{2}\frac{EJ}{L^3}u_3 = 6\frac{c}{L}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Prova d'esame di Dinamica delle Strutture dell'8 settembre 2011

Docente: Dott. Ing. Paolo S. VALVO

Matricola dello studente:

$M := 400000$

Lunghezza delle aste

$L := 3$

Modulo di Young del materiale (acciaio)

$E := 210 \cdot 10^{9}$

Masse dei piani

$m_1 := 3\% \cdot M = 12000$ $\quad m_2 := 9\% \cdot M = 36000$ $\quad m_3 := 6\% \cdot M = 24000$

Inerzia rotazionale del traverso superiore

$$I_3 := \frac{1}{12} \cdot m_3 \cdot L^2 = 18000.000$$

Momenti di inerzia dei piedritti e delle aste inclinate

$J_{HE240A} := 7763 \cdot 10^{-8}$ $\quad J_{HE360A} := 33090 \cdot 10^{-8}$

Rigidezze equivalenti

$$k_{01} := 2 \cdot \frac{3 \cdot E \cdot J_{HE240A}}{L^3} = 3622733.333$$

$$k_{02} := 2 \cdot \frac{3 \cdot E \cdot J_{HE360A}}{(2 \cdot L)^3} = 1930250.000$$

$$k_{12} := 2 \cdot \frac{12 \cdot E \cdot J_{HE240A}}{L^3} = 14490933.333$$

Equazioni di equilibrio dinamico:

$$m_1 \cdot \frac{d^2}{dt^2} u_1 + \left(k_{01} + k_{12}\right) \cdot u_1 - k_{12} \cdot u_2 = p_1(t)$$

$$m_2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} u_2 + m_3 \cdot \frac{d^2}{dt^2} u_3 - k_{12} \cdot u_1 + \left(k_{02} + k_{12}\right) \cdot u_2 = p_2(t)$$

$$-m_3 \cdot \frac{d^2}{dt^2} u_2 + 4 \cdot m_3 \cdot \frac{d^2}{dt^2} u_3 + 156 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{E \cdot J_{HE360A}}{L^3} \cdot \left(u_3 - u_2\right) = 6 \cdot \frac{c(t)}{L}$$

Matrice di rigidezza

$$K := \begin{pmatrix} k_{01} + k_{12} & -k_{12} & 0 \\ -k_{12} & k_{02} + k_{12} & 0 \\ 0 & -156 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{E \cdot J_{HE360A}}{L^3} & 156 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{E \cdot J_{HE360A}}{L^3} \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 18113666.667 & -14490933.333 & 0 \\ -14490933.333 & 16421183.333 & 0 \\ 0 & -567795431.584 & 567795431.584 \end{pmatrix}$$

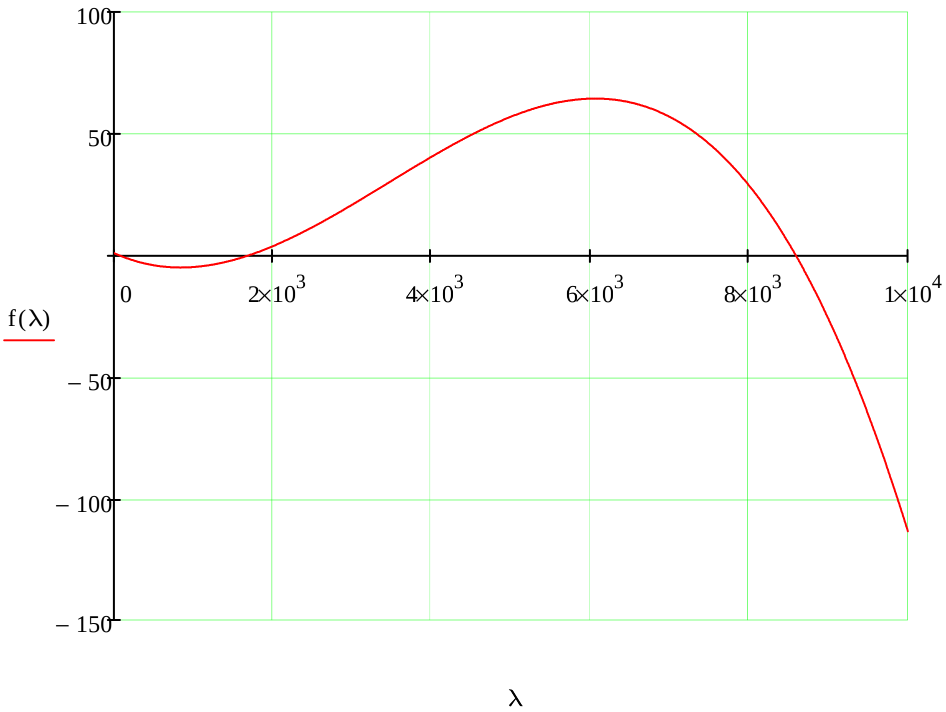
Matrice di massa

$$M := \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & m_3 \\ 0 & -m_3 & 4 \cdot m_3 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 12000 & 0 & 0 \\ 0 & 36000 & 24000 \\ 0 & -24000 & 96000 \end{pmatrix}$$

Ricerca degli autovalori

$$f(\lambda) := \frac{|K - \lambda \cdot M|}{|K|} \qquad |K| = 4.966 \times 10^{22} \qquad |M| = 4.838 \times 10^{13}$$



Vettore dei coefficienti dell'equazione caratteristica

$$vec\_coeffs := f(\lambda)\ coeffs\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1.0 \\ -0.014848517436149041573 \\ 0.0000010083898931780844591 \\ -9.7430956213621829263e-10 \end{pmatrix}$$

Autovalori generalizzati

$$\lambda := polyroots(vec\_coeffs) = \begin{pmatrix} 70.7 \\ 1689.6 \\ 8589.4 \end{pmatrix}$$

Pulsazioni, frequenze e periodi propri

$$\omega := \sqrt{\lambda} = \begin{pmatrix} 8.410 \\ 41.105 \\ 92.679 \end{pmatrix} \qquad f := \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \begin{pmatrix} 1.338 \\ 6.542 \\ 14.750 \end{pmatrix} \qquad T := \frac{1}{f} = \begin{pmatrix} 0.747151 \\ 0.152856 \\ 0.067795 \end{pmatrix}$$

Ricerca degli autovettori

Primo autovettore

$x := 1 \qquad y := 1 \qquad z := 1$

Given

$$\left[\left(K - \lambda_1 \cdot M\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_1 = 0 \qquad \left[\left(K - \lambda_1 \cdot M\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$a_1 := \mathrm{Find}(x, y, z) \qquad a_1 = \begin{pmatrix} 0.509 \\ 0.606 \\ 0.612 \end{pmatrix}$$

Secondo autovettore

$x := 1 \qquad y := 1 \qquad z := 1$

Given

$$\left[\left(K - \lambda_2 \cdot M\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_1 = 0 \qquad \left[\left(K - \lambda_2 \cdot M\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$a_2 := \mathrm{Find}(x, y, z) \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 0.971 \\ -0.145 \\ -0.188 \end{pmatrix}$$

Terzo autovettore

$x := 1 \qquad y := 1 \qquad z := 1$

Given

$$\left[\left(K - \lambda_3 \cdot M\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_1 = 0 \qquad \left[\left(K - \lambda_3 \cdot M\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$a_3 := \text{Find}(x, y, z) \qquad a_3 = \begin{pmatrix} 0.098 \\ -0.576 \\ 0.811 \end{pmatrix}$$

Autovettori di norma unitaria

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0.509 \\ 0.606 \\ 0.612 \end{pmatrix} \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 0.971 \\ -0.145 \\ -0.188 \end{pmatrix} \qquad a_3 = \begin{pmatrix} 0.098 \\ -0.576 \\ 0.811 \end{pmatrix}$$

Normalizzazione rispetto alla matrice di massa

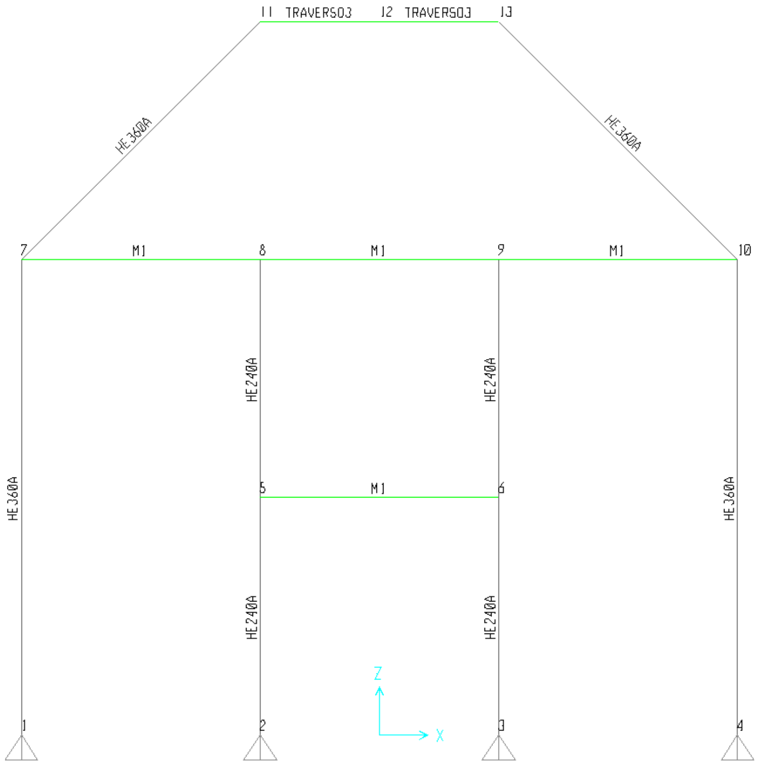
$$\mu_1 := a_1^T \cdot M \cdot a_1 \qquad \mu_2 := a_2^T \cdot M \cdot a_2 \qquad \mu_3 := a_3^T \cdot M \cdot a_3$$

$$\mu_1 = 52229.115 \qquad \mu_2 = 15485.629 \qquad \mu_3 = 75272.130$$

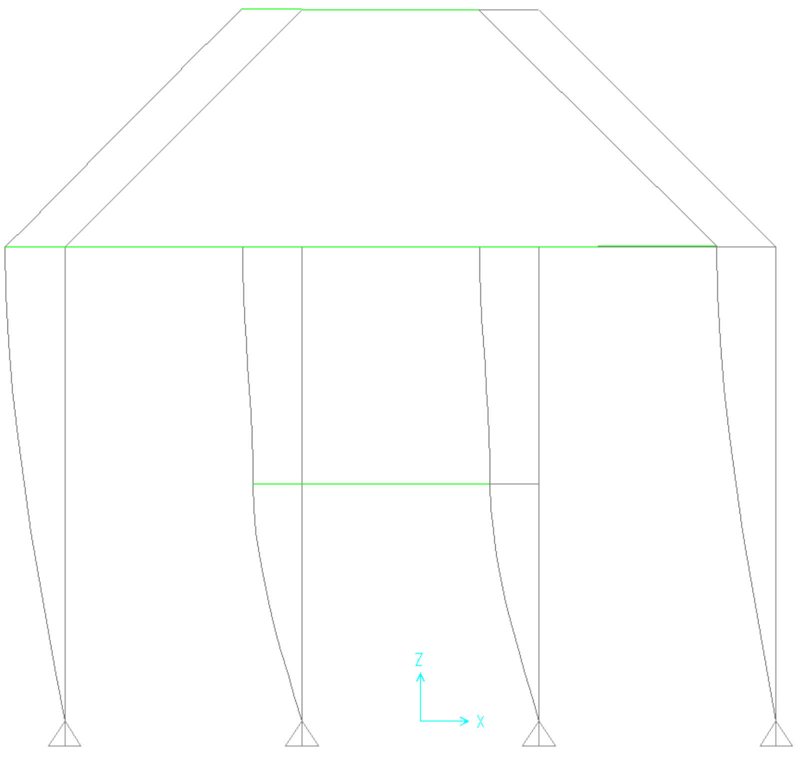
$$\phi_1 := \frac{a_1}{\sqrt{\mu_1}} \qquad \phi_2 := \frac{a_2}{\sqrt{\mu_2}} \qquad \phi_3 := \frac{a_3}{\sqrt{\mu_3}}$$

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 0.002226 \\ 0.002652 \\ 0.002676 \end{pmatrix} \qquad \phi_2 = \begin{pmatrix} 0.007806 \\ -0.001165 \\ -0.001514 \end{pmatrix} \qquad \phi_3 = \begin{pmatrix} 0.000358 \\ -0.002100 \\ 0.002958 \end{pmatrix}$$

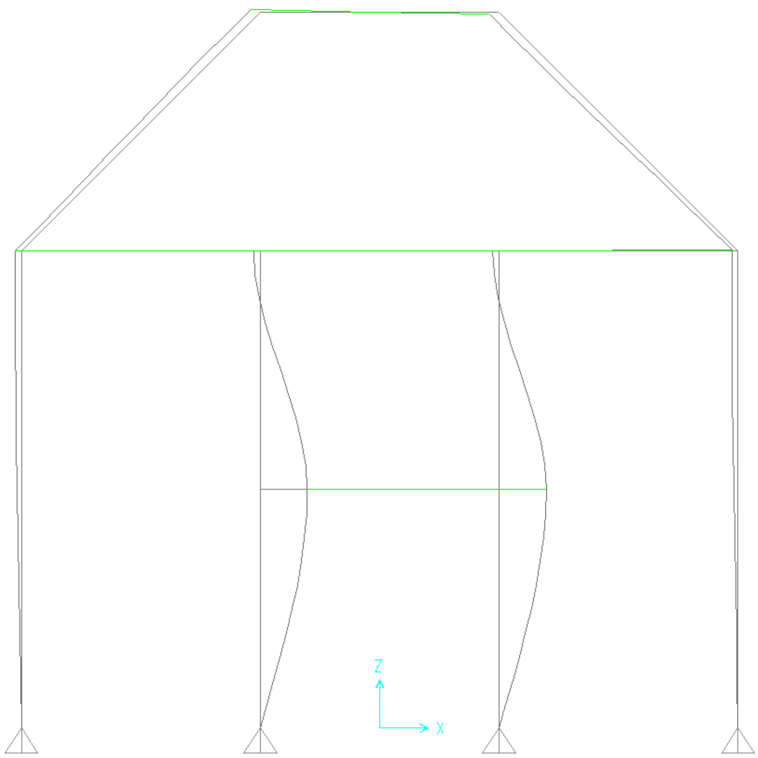
Prova d'esame dell'8 settembre 2011 – Risultati analisi FEM



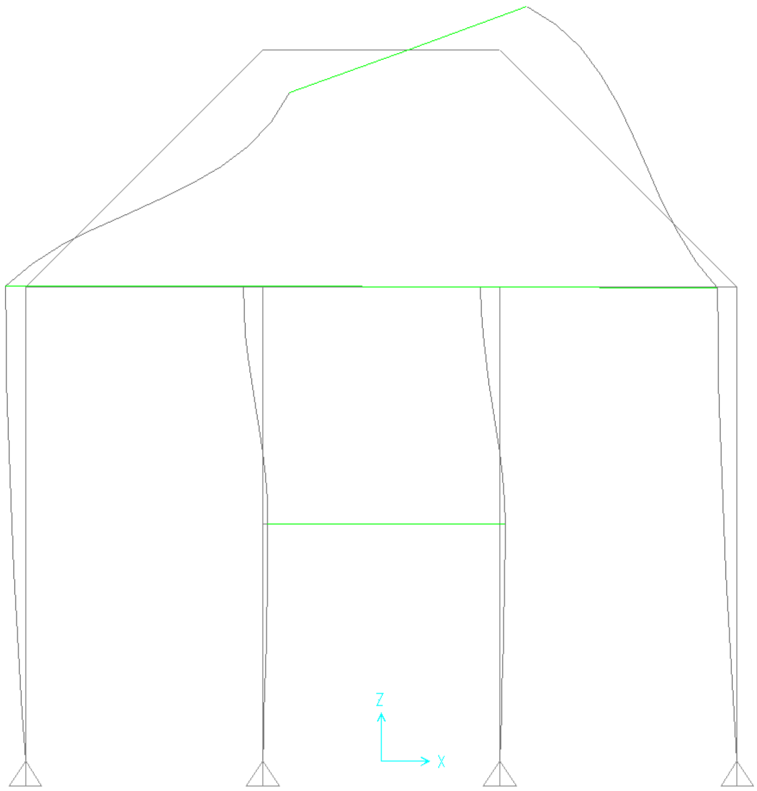
Configurazione di riferimento



Forma modale – Modo 1 (f_1 = 1.2842 Hz)



Forma modale – Modo 2 (f_2 = 6.0203 Hz)



Forma modale – Modo 3 (f_3 = 11.5610 Hz)

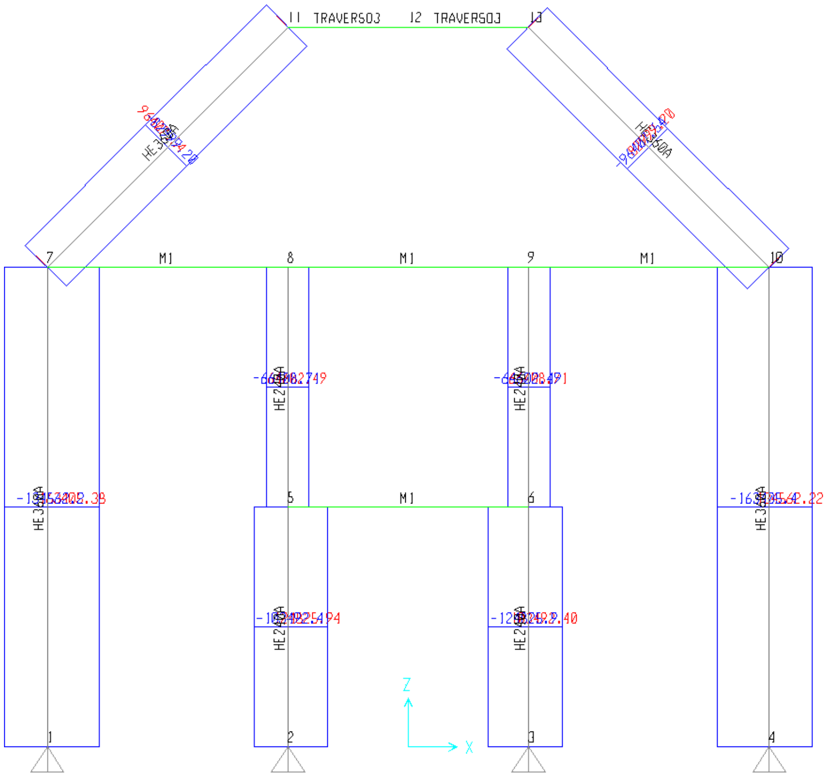


Diagramma inviluppo della forza normale

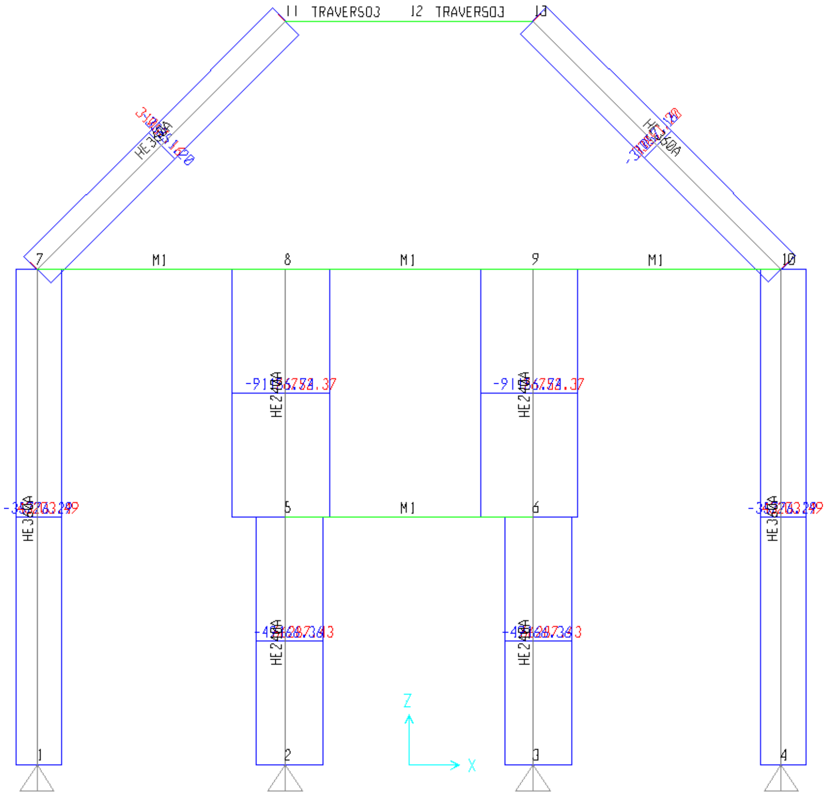


Diagramma inviluppo della forza di taglio

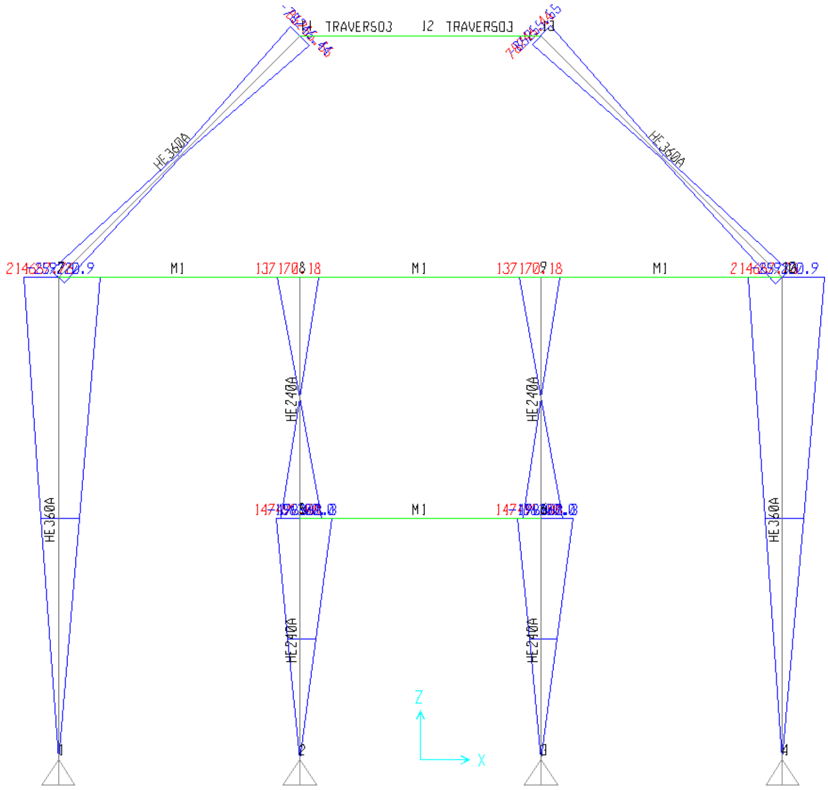


Diagramma inviluppo del momento flettente