

Università di Pisa

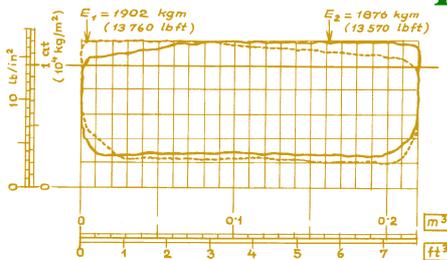


Appunti ed Esercizi di **FISICA TECNICA**

Dispense del corso di Fisica Tecnica
redatte ad uso degli allievi del corso di Laurea in Ingegneria Meccanica dell'Università di Pisa



Paolo Di Marco



INDICATED HORSEPOWER

$$[HP] = [kgm] \cdot [1/min] \cdot [min/s] \cdot [HP/kgm/s]$$

$$N_i = (E_1 + E_2) \cdot n \cdot 1/60 \cdot 1/75$$

$$20.15 = (1902 + 1876) \cdot 24 \cdot 1/60 \cdot 1/75$$

ENGINE DATA

CYLINDER DIAMETER	$d = 41.5 \text{ cm} = 16.7 \text{ in}$
STROKE	$x = 124.4 \text{ cm} = 49 \text{ in}$
DOUBLE STROKE PER MINUTE	$n = 24 \text{ 1/min}$
INDICATED POWER	$N_i = 20.15 \text{ HP}$
EFFECTIVE POWER	$N_E = 14.1 \text{ HP}$
MECHANICAL EFFICIENCY	$\eta_m = 70 \%$
OVERALL EFFICIENCY	$\eta_o = 2.5 \%$
TOTAL ENGINE WEIGHT	$G = 15000 \text{ kg} = 33080 \text{ lb}$
TOTAL ENGINE VOLUME	$V = 323.4 \text{ m}^3 = 11420 \text{ ft}^3$
WEIGHT/POWER RATIO	$G/N = 1064 \text{ kg/HP} = 2347 \text{ lb/HP}$
VOLUME/POWER RATIO	$V/N = 22870 \text{ lit/HP} = 807 \text{ ft}^3/\text{HP}$

OVERALL DIMENSIONS $\left\{ \begin{array}{l} \text{meters } 10.5 \times 4.4 \times 7 \\ \text{feet } 34.45 \times 14.43 \times 23 \end{array} \right.$

Prefazione

Le presenti note espongono i principali concetti di Termodinamica Applicata ed alcune nozioni di Macchine Termiche ad uso degli studenti dei nuovi corsi di Laurea triennali.

Il lettore attento si renderà conto che in alcune parti il rigore della trattazione è indiscutibilmente carente. In particolare, per dare alla trattazione un maggior senso pratico, si fa uso fin dall'inizio di concetti quali calore, temperatura, energia che si considerano noti in maniera almeno intuitiva; tali concetti vengono poi ripresi e definiti in maniera più formale nel seguito. Lo scopo che ci si prefigge non è tanto quello di redigere una trattazione formalmente rigorosa e completa degli argomenti esposti, dato che ve ne sono già disponibili di ottime in biblioteca, ma piuttosto quello di consentire all'allievo di acquisire in breve tempo una conoscenza operativa ed applicativa (ma ugualmente esente da errori concettuali) dei concetti fondamentali, in modo da potersi quanto prima dedicare all'applicazione ai problemi pratici. Per la stessa ragione, e nella incrollabile convinzione che per un allievo ingegnere l'acquisizione di nuove nozioni teoriche debba essere seguita immediatamente e contestualmente dalla loro messa in pratica, il testo è corredato di numerosi esempi applicativi e seguito da esercizi.

Nell'aggiungere alla vasta scelta già esistente un nuovo testo tecnico, ritorna alla mente la sprezzante allocuzione che Ugo Foscolo rivolgeva a Monti: "*Questi è Vincenzo Monti, cavaliere: il traduttore de' traduttore d'Omero*". Si diceva infatti che Monti avesse redatto la sua celebratissima traduzione dell'Iliade conoscendo pochissimo il greco e quindi, per così dire, "appoggiandosi" alle traduzioni precedenti. Con questo non si vuol certo affermare di avere eguagliato i fasti del *Pelide Achille*; semplicemente, si è inteso rendere un servizio utile agli studenti rendendo disponibile un testo sintetico e aderente al contenuto effettivo delle lezioni.

SECONDA EDIZIONE (2006)

In questa seconda edizione, i capitoli sono stati rinumerati più razionalmente in corrispondenza all'ordine in cui vengono presentati a lezione. Inoltre sono stati aggiunti un numero maggiore di riferimenti all'analisi di disponibilità nei capp. 7-8, è stato aggiunto un capitolo sulle macchine idrauliche, ed è stato ampliato il capitolo di trasmissione del calore, con l'inclusione dei sistemi conduttivi con generazione interna.

TERZA EDIZIONE (2009)

In questa terza edizione, il materiale è stato ristrutturato e limitato per un corso semestrale intensivo di 9 crediti. Sono state quindi soppressi i capitoli sulla trasmissione del calore, la cogenerazione, la psicrometria, la combustione e il funzionamento delle turbomacchine, che saranno oggetto di corsi successivi. I capitoli sono stati rinumerati in corrispondenza all'ordine in cui vengono presentati a lezione.

QUARTA EDIZIONE (2010)

E' stato nuovamente aggiunto un breve capitolo sui fondamenti della trasmissione del calore, redatto in cooperazione con il Prof. Nicola Forgiione.

QUINTA EDIZIONE (2016)

E' stato nuovamente aggiunto un breve capitolo sulla psicrometria, redatto in cooperazione con il Prof. Nicola Forgiione.

SESTA EDIZIONE (2022)

Sono stati corretti alcuni refusi e fatte piccole aggiunte ai capitoli 2, 6, 7 e 8 (in particolare, un piccolo cenno al ciclo Stirling). Le parti non incluse nel programma del corso sono state spostate nelle appendici ai vari capitoli.

L'autore è fortemente indebitato con i professori Nicola Forgiione ed Alessandro Franco, che hanno redatto rispettivamente una parte delle dispense e degli esercizi allegati, oltre a rivederne il contenuto. Desidera inoltre ringraziare i numerosissimi studenti che nel corso degli anni passati hanno redatto le soluzioni degli esercizi riportate in appendice, e con suggerimenti, domande argute e segnalazioni di errori hanno contribuito in maniera sostanziale a rendere migliore il presente lavoro ... e anche l'autore stesso.

Le parti di testo scritte in questo carattere rappresentano un'estensione od una riformulazione di concetti precedentemente esposti: esse possono essere tralasciate in una prima lettura e non sono strettamente necessarie alla comprensione.

Alcuni paragrafi riportano argomenti che non fanno parte dell'attuale programma di studio: è stato scelto di mantenerli per lasciare a disposizione dell'allievo del materiale che fa uso della stessa impostazione didattica, per possibili future necessità od approfondimenti. Tali paragrafi sono contrassegnati con (°).

In copertina: Macchina a vapore di James Watt, 1788.

Indice

Parte Prima

- Capitolo 1. Nozioni introduttive di Termodinamica
- Capitolo 2. Termodinamica degli stati
- Capitolo 3. Le equazioni di bilancio di massa, energia ed entropia
- Capitolo 4. I sistemi aperti a regime
- Capitolo 5. L'equazione generalizzata di Bernoulli e la sua applicazione al calcolo dei condotti
- Capitolo 6. Le macchine termiche semplici e l'analisi di disponibilità
- Capitolo 7. I cicli termici delle macchine motrici
- Capitolo 8. I cicli termici delle macchine termiche operatrici
- Capitolo 9. Cenni sui meccanismi di trasmissione del calore (*)
- Capitolo 10. Elementi di Psicrometria (*)

- Appendici.
 - 1. Equazioni di stato per i gas ideali e per i liquidi incomprimibili
 - 2. Trasformazioni reversibili per i gas ideali con calori specifici costanti
 - 3. Proprietà termofisiche dei fluidi.
 - 4. Unità di misura del Sistema Internazionale e fattori di conversione
 - 5. Metodologia per la soluzione di problemi in termodinamica
 - 6. Risoluzione di parte degli esercizi proposti

(*) redatti in cooperazione con Nicola Forgiione

Appunti ed Esercizi di *Fisica Tecnica*

Cap. 1. Nozioni introduttive di Termodinamica

Paolo Di Marco

Versione 2020.00 – 30.09.2020.

La presente dispensa è redatta ad esclusivo uso didattico per gli allievi dei corsi di studi universitari dell'Università di Pisa. L'autore se ne riserva tutti i diritti. Essa può essere riprodotta solo totalmente ed al fine summenzionato, non può essere alterata in alcuna maniera o essere rivenduta ad un costo superiore a quello netto della riproduzione. Ogni altra forma di uso e riproduzione deve essere autorizzata per scritto dall'autore.

L'autore sarà grato a chiunque gli segnali errori, inesattezze o possibili miglioramenti.

Introduzione

Lo scopo di questo primo capitolo è quello di consentire all'allievo di acquisire in poche ore una conoscenza operativa ed applicativa dei concetti fondamentali della termodinamica, nonché una definizione corretta di tutte le variabili di stato, inclusa l'entropia, in modo da potersi quanto prima dedicare all'applicazione ai problemi pratici.

Per dare alla trattazione un maggior senso pratico, si fa uso fin dall'inizio di concetti quali calore, temperatura, energia che si considerano noti in maniera almeno intuitiva. Tali concetti vengono poi definiti in maniera più formale nel seguito.

Le parti di testo scritte in questo carattere rappresentano un'estensione od una riformulazione di concetti precedentemente esposti: esse possono essere tralasciate in una prima lettura e non sono strettamente necessarie alla comprensione.

Definizioni preliminari

Sistema e scambi

Si definisce *sistema* la porzione di spazio che intendiamo studiare. Essa è delimitata da una superficie arbitrariamente scelta, detta *parete* o *contorno*. La rimanente parte di universo (esterna al sistema) è detta *ambiente* o *esterno*. È bene precisare che la parete del sistema è una superficie, pertanto ad essa non è associabile alcuna massa e le proprietà del sistema sono continue attraverso di essa. Ad esempio, se il nostro sistema è l'aria contenuta in una stanza, non possiamo dire che esso è delimitato dai muri della stanza: bisogna precisare se il contorno è costituito dalla superficie interna od esterna dei muri.

Attraverso la parete avvengono gli *scambi* del sistema con l'esterno: tali scambi, come vedremo in seguito, sono sostanzialmente scambi di *massa*, *energia* ed *entropia*. Un sistema che non esercita alcuno scambio con l'esterno (le cui condizioni non sono quindi influenzate da ciò che avviene fuori di esso) si dice *isolato*. Un sistema la cui parete è impermeabile alla massa si dice *sistema chiuso*. Un sistema chiuso ha quindi massa costante e viene detto pertanto anche *massa di controllo*. In contrapposizione, un sistema in cui si ha scambio di massa con l'esterno viene detto *sistema aperto* o *volume di controllo*.

La definizione di sistema, per quanto possa sembrare a prima vista astratta ed inutile, è fondamentale in termodinamica. Data l'arbitrarietà con cui il sistema può essere individuato, è necessario essere sicuri di averlo bene identificato prima di applicarvi leggi o bilanci. Gli errori più insidiosi e gravi nell'applicazione della leggi della termodinamica derivano spesso da una *scorretta identificazione del sistema*.

Proprietà, stato, trasformazione

La materia è costituita da un gran numero di molecole che interagiscono tra loro tramite forze le cui modalità ci sono note. Applicando le leggi della meccanica a tali molecole (un sistema di equazioni differenziali con relative condizioni al contorno) si potrebbe pensare di essere in grado di predire la evoluzione nel tempo di qualunque sistema. In realtà anche ammesso di avere una conoscenza perfetta delle leggi di interazione tra le molecole, numerose difficoltà si frappongono alla realizzazione di ciò. In primo luogo, un sistema anche piccolo, es. 1 cm^3 di aria in condizioni normali, è costituito da circa 2×10^{19} molecole: per predire la sua evoluzione

sarebbero quindi necessarie 12×10^{19} equazioni differenziali (nelle incognite posizione e velocità di ogni molecola) e un numero doppio (trattandosi di equazioni differenziali del secondo ordine) di condizioni al contorno.

Il numero 2×10^{19} è al di fuori della nostra concezione comune. Per farsi un'idea, per contare tali molecole al ritmo di 10000 al secondo occorrerebbero circa 65 milioni di anni, ovvero il tempo trascorso dall'estinzione dei dinosauri!

La risoluzione di tale sistema di equazioni è al di là della capacità attuale, e probabilmente futura, di qualunque supercalcolatore. Tuttavia, gli sviluppi della fisica portano a concludere che non è solo questione di tempo: tale sistema di equazioni è insolubile in linea di principio. Siamo pertanto costretti, per caratterizzare il nostro insieme di molecole, a ricorrere ad una descrizione statistica (termodinamica statistica), oppure a limitarci a fornire delle grandezze complessive a livello macroscopico: quest'ultimo è l'approccio che seguiremo.

Questo d'altra parte pone un limite alle dimensioni minime del sistema, che deve essere abbastanza grande da contenere un numero significativo di molecole. Tale limite fortunatamente è solo un problema teorico in quanto i sistemi che noi considereremo sono di dimensioni largamente superiori ad esso.

Le grandezze in questione sono dette *proprietà* del sistema, e possono essere definite come: attributi del sistema, valutabili mediante un insieme di misure ed operazioni che hanno come risultato un valore numerico.

Tali proprietà devono essere indipendenti dal dispositivo di misura, da altri sistemi e dal tempo. Esempi di proprietà del sistema sono la massa, il volume, la pressione, la temperatura, etc. Una proprietà, per essere tale, deve essere determinabile solo a partire condizioni in cui il sistema si trova e non dal modo in cui le ha raggiunte.

Ad esempio, la posizione di un punto è una proprietà (è misurabile senza alcuna informazione su come il punto l'ha raggiunta) mentre la distanza percorsa dal punto non può essere considerata tale, in quanto per misurarla occorre sapere il comportamento negli istanti precedenti del punto stesso.

Viene detto *stato* del sistema la sua caratterizzazione ad un certo istante di tempo. L'identificazione dello stato richiede dunque la misura di un insieme completo di proprietà, che per tali ragioni sono anche dette *proprietà* (o *variabili*, o *funzioni*: i tre termini verranno usati come sinonimi nel seguito) *di stato*. Le definizioni di *stato* e *proprietà di stato* sono, come si vede, strettamente connesse.

È bene osservare fino da adesso che le proprietà di stato non sono tutte indipendenti. Noi considereremo in genere sistemi in cui se si hanno condizioni di equilibrio, date due proprietà di stato le rimanenti sono univocamente assegnate, e che sono detti pertanto *sistemi bivarianti*. Riprenderemo meglio questo concetto tra un paio di paragrafi.

Uno stato di un sistema si dice *di equilibrio* quando esso non cambia in assenza di stimoli esterni, ovvero quando il sistema non può abbandonarlo se è isolato dall'esterno; l'equilibrio può essere *stabile* (il sistema tende a tornare in tale stato a seguito di una perturbazione), *instabile* (basta una piccola perturbazione perché il sistema si porti in un nuovo stato di equilibrio radicalmente diverso), *metastabile* (è necessaria una perturbazione di una certa entità perché il sistema si porti in un nuovo stato di equilibrio radicalmente diverso).

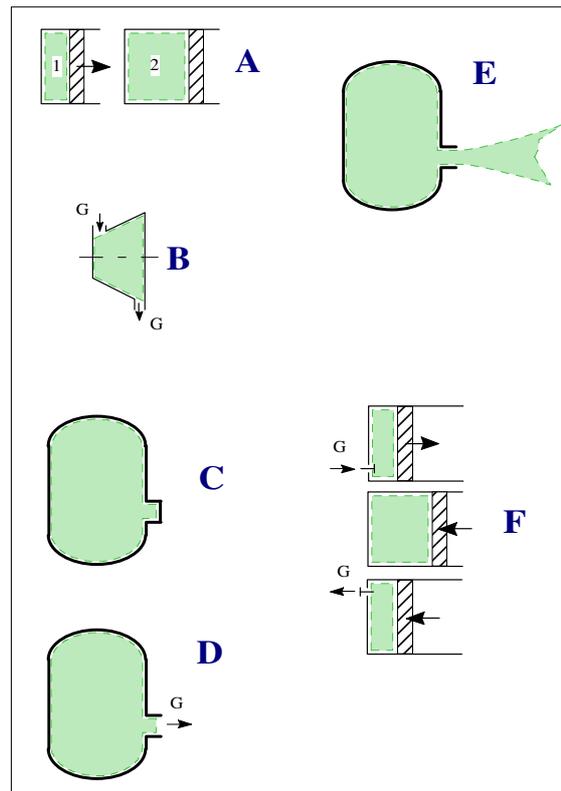


Figura 1.1: Alcuni esempi di sistemi termodinamici: A) sistema chiuso, non a regime; B) sistema aperto a regime stazionario; C) sistema chiuso a regime stazionario; D) sistema aperto, non a regime; E) sistema chiuso non a regime; F) sistema aperto a regime periodico.

Uno stato del sistema si dice *stazionario* se esso non cambia nel tempo. Nella tecnica, un sistema in stato stazionario viene detto anche *a regime permanente*. Si parla invece di sistemi *a regime periodico* se le proprietà non sono costanti nel tempo, ma riassumono lo stesso valore dopo un determinato intervallo di tempo detto appunto *periodo*. Ad esempio, un motore a scoppio a quattro tempi che funziona a velocità costante non può considerarsi a regime permanente perché le misure di temperatura e pressione in un cilindro variano nel tempo; tuttavia la pressione e la temperatura in ogni cilindro tornano ad avere lo stesso valore dopo un intervallo di tempo corrispondente a due giri dell'albero motore: il sistema è pertanto a regime periodico.

La stazionarietà o meno di uno stato dipende non solo dal sistema, ma dal *riferimento scelto*: ad esempio, se io osservo l'espansione di un gas in un ugello da un sistema di riferimento solidale con la parete dell'ugello, non vedo variazione *nel tempo* delle proprietà (es. la pressione) e concludo che lo stato è stazionario. Se invece il mio sistema di riferimento è solidale con una particella che si muove dentro l'ugello, osservo una variazione di pressione nel tempo e concludo che lo stato non è stazionario.

Quando lo stato del sistema cambia nel tempo (e questo si vede perché cambiano le sue proprietà) si dice che esso subisce una *trasformazione*. Una trasformazione può essere spontanea o indotta dagli scambi del sistema con l'esterno.

Ad esempio, una certa quantità di acqua (il sistema) viene riscaldata (la parete del sistema è attraversata da calore), essa si trasforma (la sua temperatura varia). Se si pongono due blocchi di materiale a temperatura diversa dentro un recipiente isolato dall'esterno, essi evolveranno fino a portarsi alla stessa temperatura.

Una trasformazione viene detta *reversibile* se al termine di essa è possibile riportare sia il sistema che l'ambiente nelle condizioni iniziali.

Per quanto a questo livello sembri scontato di poter realizzare un tale tipo di trasformazione, dopo aver introdotto il secondo principio della termodinamica apparirà chiaro che in realtà ogni trasformazione reale è irreversibile e solo in particolari circostanze può essere approssimata come reversibile.

Una trasformazione è detta *quasistatica* quando avviene abbastanza lentamente da poter essere considerata una successione di stati di equilibrio. Il concetto di "abbastanza lento" va inteso relativamente ai tempi di rilassamento caratteristici del sistema: anche l'espansione dei gas in un cilindro di un motore a scoppio, che avviene in millesimi di secondo, può molto spesso essere considerata "abbastanza lenta".

Non è detto che una trasformazione quasistatica sia reversibile: se sono presenti fenomeni dissipativi, quali l'attrito, questo non avviene. Viceversa, una trasformazione reversibile deve necessariamente essere quasistatica.

Variabili intensive ed estensive. Variabili specifiche

Una variabile di stato si dice *estensiva* se il suo valore dipende dalla massa del sistema; tali variabili sono dette anche *additive* perché il loro valore totale può essere ricavato come somma (o integrale) dei valori delle varie parti del sistema. Una variabile si dice invece *intensiva* se il suo valore è una funzione locale, ovvero di un particolare punto del sistema.

Ad esempio, la pressione è una variabile intensiva: può essere diversa in ogni punto del sistema, il suo valore totale nel sistema non si ottiene sommando il valore delle pressioni nelle varie parti. Al contrario, il volume è una variabile estensiva: non è definibile localmente, e se si divide il sistema in parti il volume totale è la somma dei volumi parziali.

Per ogni variabile estensiva è possibile definire una corrispondente *variabile specifica* (o più propriamente *massica*), vale a dire il rapporto tra la variabile in questione e la massa del sistema. In genere le variabili estensive sono indicate con una lettera maiuscola, le corrispondenti variabili specifiche con la corrispondente lettera minuscola. Come primo esempio, il volume del sistema si indica con V , e si misura in m^3 ; la corrispondente variabile specifica (volume specifico) si indica con $v = V/M$, si misura in m^3/kg , e rappresenta il volume della unità di massa.

Le variabili di stato estensive ed intensive di cui faremo uso sono elencate in Appendice 3. La maggior parte di esse verrà definita nei paragrafi successivi.

Alcune variabili di stato e relazioni tra loro

Volume e densità.

Il concetto di *volume* è un concetto primitivo e non verrà definito. Il *volume specifico* (v) rappresenta il volume dell'unità di massa ed è definito rigorosamente come:

$$v = \lim_{dV \rightarrow dV'} \frac{dV}{dM} \quad (1.1)$$

Il limite dV' rappresenta il valore al di sotto del quale il sistema non può essere considerato continuo. La *densità* è il reciproco del volume specifico e rappresenta la *massa* dell'unità di volume e pertanto:

$$\rho = \frac{1}{v} = \lim_{dV \rightarrow dV'} \frac{dM}{dV} \quad (1.2)$$

La densità dell'acqua (a 4 °C e 1 atm) vale 1000 kg/m³; quella dell'aria e del vapore a pressione atmosferica circa 1 kg/m³; quella del mercurio circa 13000 kg/m³. Molto spesso si usa anche la densità relativa (adimensionale) ovvero il rapporto tra la densità del fluido e quella dell'acqua in condizioni standard. La densità relativa dell'acqua è quindi 1, quella del mercurio 13.

Attenzione a non confondere la densità con il *peso specifico* (*peso* dell'unità di volume) che si indica in genere con γ . La relazione tra le due quantità è ovviamente la stessa che c'è tra massa e peso, ovvero $\gamma = g \rho$. Il peso specifico dell'acqua in condizioni standard di temperatura, pressione e gravità è quindi 9806.6 N/m³.

Pressione

Si definisce pressione la componente normale di una forza divisa per la superficie su cui è applicata. In altri termini

$$p = \lim_{dA \rightarrow dA'} \frac{d(\vec{F} \cdot \vec{n})}{dA} \quad (1.3)$$

Dove n è il versore normale alla superficie e per dA' vale la stessa osservazione fatta nel paragrafo precedente per dV' .

Tale quantità è detta più genericamente sforzo normale; nei fluidi a riposo lo sforzo normale è di *tipo idrostatico*, ovvero il suo valore è indipendente dall'orientamento della superficie dA (legge di Pascal).

Esiste anche una componente tangenziale di sforzo, detta *sforzo di taglio*. Noi non considereremo sforzi di taglio in quanto di solito trattiamo sistemi fluidi in condizione vicine a quelle di riposo, e i fluidi per definizione non trasmettono sforzi di taglio statici (questo è il motivo per cui non sono in grado di mantenere una forma propria).

La pressione è detta *assoluta* quando il valore zero è riferito al vuoto; si dice invece *relativa* se il valore zero è assunto alla pressione atmosferica. La differenza tra i due valori è dunque, in condizioni normali, di 1 atm (101.325 kPa). Le variazioni meteorologiche della pressione atmosferica influenzano dunque le letture di pressione relativa, ma non quelle di pressione assoluta.

Come è noto, in un fluido a riposo soggetto al campo gravitazionale, la pressione è proporzionale alla profondità z secondo la legge di Stevin: $p = \rho g z$.

Questo comportamento può essere sfruttato per misurare la pressione tramite un tubo riempito di liquido, da cui l'origine delle unità di misura mm di mercurio (detto anche torr, corrispondente a circa 133.3 Pa) e mm d'acqua (98.066 Pa).

Alcune caratteristiche delle proprietà di stato.

In questo corso, noi ci occuperemo unicamente di *sostanze pure*, ovvero sostanze la cui composizione è *omogenea ed invariabile nel tempo*. Come già accennato, i sistemi contenenti sostanze pure sono *bivarianti*, ovvero, una volta assegnato il valore di due proprietà di stato indipendenti, anche le rimanenti hanno valore assegnato.

Due proprietà di stato non sono indipendenti se il valore di una dipende esclusivamente dal valore dell'altra. Come vedremo in seguito, è questo il caso della pressione e della temperatura per una sostanza bifase, o dell'entalpia e della temperatura per un gas ideale.

Non occorre che una sostanza pura abbia una precisa formula chimica: anche le miscele di due componenti chimici, purché di composizione omogenea, si possono considerare sostanze pure. Possono dunque essere considerate sostanze pure l'acqua, l'ossigeno, ma anche l'aria (miscela di gas) o l'acqua salata (finché il sale non cristallizza). Tuttavia in alcuni testi la definizione di sostanza pura è ristretta alle sole specie chimiche (ovvero, le sostanze costituite da molecole tutte identiche tra loro). Un sistema sede di combustione invece, ancorché omogeneo, non si può considerare comunque una sostanza pura perché la sua composizione varia nel tempo (spariscono i reagenti e compaiono i prodotti della combustione).

E' opportuno soffermarsi adesso su alcune caratteristiche delle funzioni (o proprietà) di stato che ci saranno molto utili nel seguito.

1) L'integrale di una funzione di stato X lungo un qualunque percorso aperto (ovvero, i cui estremi non coincidono) dipende solo dagli estremi di integrazione e non dal percorso.

$$\int_{1A2} dX = \int_{1B2} dX = \dots \quad (1.4)$$

2) L'integrale di una funzione di stato X lungo un qualunque percorso chiuso è nullo.

$$\oint dX = 0 \quad (1.5)$$

3) In un sistema *bivariante*, se X, Y, Z sono funzioni di stato e Y e Z sono *indipendenti*, vale la seguente espressione

$$dX = AdY + BdZ \quad (1.6)$$

dove A e B sono le derivate parziali della funzione X rispetto ad Y e Z

$$A = \left(\frac{\partial X}{\partial Y} \right)_Z ; B = \left(\frac{\partial X}{\partial Z} \right)_Y \quad (1.7)$$

e

$$\left(\frac{\partial A}{\partial Z} \right) = \left(\frac{\partial B}{\partial Y} \right) \quad (1.8)$$

in matematica, la Eq.(6) viene detta *forma differenziale esatta* o semplicemente *differenziale esatto*)

Si potrebbe dimostrare che tutte le condizioni summenzionate sono equivalenti. Nella pratica, questo vuol dire che se una funzione soddisfa anche ad una sola delle condizioni precedenti allora è una funzione di stato e viceversa.

Come vedremo nel seguito, ci interesseremo più alla variazione di una funzione di stato che non al suo valore assoluto: ogni funzione di stato sarà quindi *definita a meno di una costante*, che rappresenta il suo valore in una condizione prefissata. Il valore di tale costante è in principio arbitrario, anche se in alcuni casi viene fissato dalle convenzioni internazionali.

Diagrammi di stato

Come già accennato, noi considereremo solo *sistemi bivarianti*, ovvero sistemi il cui stato è fissato univocamente da *una coppia di variabili di stato indipendenti*. Se lo stato del sistema dipende dai valori di due sole variabili, allora è possibile rappresentarlo con un punto su un piano che verrà pertanto detto diagramma di stato. Per adesso, possiamo introdurre il piano p - V (altri diagrammi, es. p - T , verranno introdotti in seguito) in cui si riporta lo stato del sistema in funzione delle due variabili suddette (punto 1 in Fig.2).

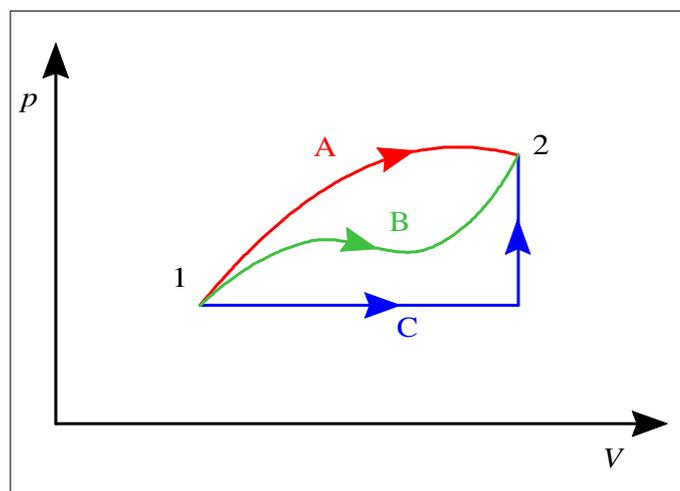


Figura 1.2: Esempi di tre diverse trasformazioni aventi gli stessi stati estremi. In particolare, la trasformazione C è costituita da un ramo a pressione costante (trasformazione *isobara*) ed uno a volume costante (trasformazione *isovolumica* od *isocora*).

Se il sistema subisce una trasformazione e questa trasformazione è *quasistatica* (ovvero, tale che il sistema è in ogni istante infinitamente vicino ad una condizione di equilibrio, ed è quindi possibile definire univocamente i valori del volume e della pressione) allora essa sarà rappresentata sul piano da una linea che connette lo stato iniziale con quello finale (punto 2) e rappresenta la successione di stati occupati successivamente dal sistema. E' evidente che esistono infinite linee (es. le linee 1A2 e 1B2) che connettono i due punti, e quindi infinite modalità di trasformazione che portano il sistema nella stessa condizione finale.

Gli scambi di massa

Portata e velocità del fluido

Si definisce *portata massica* di fluido attraverso una superficie o la massa di fluido che attraversa la superficie (in particolare, la sezione di un condotto) nell'unità di tempo. Essa si indica in genere con G_m (o più semplicemente con G) e si misura in kg/s. Si definisce anche la *portata in volume* di fluido (G_V , misurata in m³/s) come il volume di fluido che attraversa una determinata sezione nella unità di tempo. Queste due quantità sono ovviamente legate dalla stessa relazione che lega massa e volume, ovvero, se la densità è costante nella sezione

$$G_m = \rho G_V \quad (1.9)$$

Il semplice termine *portata* si riferisce in genere alla portata massica (e nel seguito verrà usato con tale significato). Tuttavia, a volte viene anche usato con riferimento alla portata in volume. In caso di ambiguità, è bene controllare le unità di misura che sono specificate.

La velocità di una particella fluida può essere definita, in accordo con la meccanica, come la derivata della sua posizione rispetto al tempo e verrà indicata con \bar{w} (il modulo del vettore sarà indicato con w). In genere, la velocità all'interno di un fluido in moto non è costante in ogni punto: ci si può rendere conto di questo semplicemente osservando la superficie di un fiume da un ponte. In particolare, la velocità è in genere massima nella zona centrale del condotto ed è *nulla* nelle zone di contatto con le superfici solide.

In altre parole, un fluido non scorre su una superficie come fa un solido su un altro solido: la velocità relativa nella zona di contatto è sempre nulla. Lo scorrimento si verifica tra gli strati di fluido immediatamente adiacenti alla superficie, dove i gradienti di velocità sono in genere elevati.

Se la velocità sulla superficie di interesse non è uniforme, possiamo dividere la superficie stessa in elementini di superficie dS e vettore normale \underline{n} , e procedere per integrazione

$$G = \iint_S \rho w_{\perp} dA \quad \text{dove} \quad w_{\perp} = \underline{w} \cdot \underline{n} \quad (1.10)$$

Dove abbiamo considerato solo la componente di velocità perpendicolare alla superficie, in quanto il fluido che scorre parallelamente ad essa non la attraversa. Si può definire una *velocità media* (detta più precisamente *velocità media di portata*, indicata con \bar{w}) del fluido come la velocità del fluido, ipotizzata costante nella sezione, che produrrebbe la stessa portata in volume. Il fluido che attraversa una sezione del condotto in 1 s, in tali condizioni, è quello contenuto in un cilindro di altezza \bar{w} e sezione pari a quella del condotto, A . La velocità media \bar{w} è quindi data da

$$\bar{w} = \frac{\iint_S w_{\perp} dA}{A} \quad (1.11)$$

e si ha

$$G_V = \bar{w} A \quad (1.12)$$

Di conseguenza la relazione che lega la portata massica alla velocità media è

$$G = \rho \bar{w} A \quad (1.13)$$

Seppure in modo molto indicativo, si può dire che nella pratica ingegneristica la velocità media dei liquidi nei condotti ha valori di 2-5 m/s, mentre per gli aeriformi i valori più comuni sono intorno a 10-30 m/s.

ESEMPIO 1.1 - Calcolo del diametro di una tubazione

Una tubazione trasporta una portata $G = 80000$ t/h di acqua marina ($\rho = 1030$ kg/m³) per il raffreddamento del condensatore di una centrale termoelettrica. Supponendo una velocità media nel condotto di 4 m/s, calcolare il diametro della tubazione (supposta circolare).

La portata deve essere convertita in unità SI (kg/s)

$$G = 80000 \frac{\text{t}}{\text{h}} = 80000 \frac{1000 \text{ kg}}{3600 \text{ s}} = 22200 \text{ kg/s}$$

La sezione del condotto si ricava dall'Eq. (11)

$$A = \frac{G}{\rho \bar{w}} = \frac{22200}{1030 \cdot 4} = 5.4 \text{ m}^2$$

e quindi il suo diametro vale

$$D = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 2.6 \text{ m}$$

Da notare che i dati sono realistici. Le opere di presa dell'acqua di raffreddamento delle centrali termoelettriche hanno dimensioni simili.

□

Gli scambi energetici

Lavoro

In meccanica, il lavoro di una forza è dato da:

$$L_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{w} dt \quad (1.14)$$

o in termini infinitesimi da

$$\delta L = \vec{F} \cdot \vec{w} dt = \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (1.15)$$

Nella quale abbiamo utilizzato il simbolo δ al posto di d per evidenziare che, come vedremo in seguito, *il lavoro non è un differenziale esatto*. e quello di una di un sistema di forze di momento M applicate ad un albero rotante con velocità Ω da

$$L_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} \cdot \vec{\Omega} dt \quad (1.16)$$

In termodinamica, il lavoro viene convenzionalmente considerato *positivo* quando il sistema fornisce lavoro all'esterno e *negativo* nel caso contrario. L'unità di misura SI del lavoro è il *joule* (J).

La definizione di lavoro deve essere generalizzata per poter tenere conto di altre forme di lavoro non meccanico. Si definisce pertanto *lavoro generalizzato* "una qualunque azione esercitata dal sistema sull'ambiente il cui unico effetto sull'ambiente può essere ricondotto al sollevamento di un peso".

Ad esempio, il lavoro di un generatore elettrico collegato ad un verricello soddisfa tale condizione (si deve disporre di un motore elettrico e di un verricello di rendimento unitario, ma questo è teoricamente possibile). La definizione può apparire astratta e cervellotica, ma esprime in sostanza il concetto che il lavoro generalizzato è qualunque azione trasformabile teoricamente e *integralmente* in lavoro meccanico

Il lavoro generalizzato è esprimibile tramite il prodotto di una forza generalizzata per uno spostamento generalizzato. A noi interessa in particolare l'espressione del lavoro elettrico:

$$L_{el,12} = \int_{t_1}^{t_2} V I dt \quad (1.17)$$

Lavoro di dilatazione

Una particolare forma di lavoro che si incontra in termodinamica è il lavoro connesso alla variazione di volume di un sistema al cui esterno è applicata una pressione p_0 . Facendo riferimento al caso di un pistone senza attrito (v. Fig.3, ma il risultato ottenuto è del tutto generale) si ottiene

$$L_{12} = - \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{w} dt = - \int_{x_1}^{x_2} (p_0 A) dx = - \int_{V_1}^{V_2} p_0 dV \quad (1.18)$$

In questo caso abbiamo aggiunto il segno negativo per tenere conto della convenzione adottata in termodinamica sul segno del lavoro (positivo se ceduto all'esterno, ovvero quando p_0 e w sono discordi, come in Fig.3). In particolare, se la trasformazione è reversibile, si può considerare $p=p_0$, nel qual caso si ottiene la classica espressione

$$L_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV \quad (1.19)$$

o in termini infinitesimi

$$\delta L = p dV \quad (1.20)$$

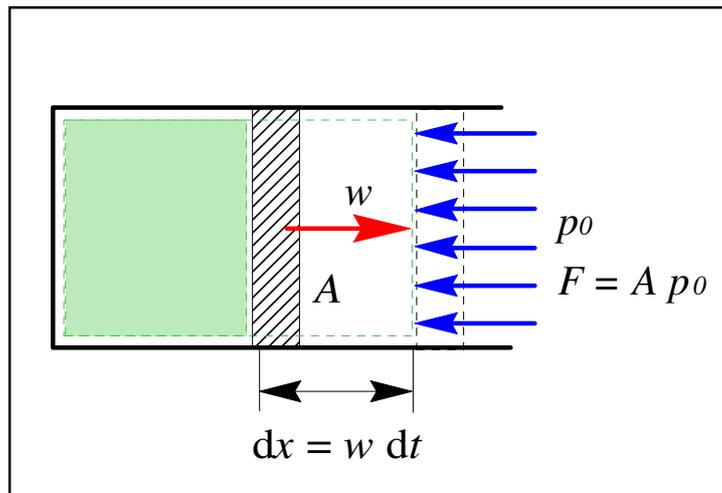


Figura 1.3: Lavoro di dilatazione in un sistema cilindro-pistone.

Si deve notare che in un sistema il lavoro di dilatazione è nullo se il contorno del sistema è *rigido* (variazione di volume nulla) o se le forze esterne sono nulle (es., un gas che si espande nel vuoto: in questo caso la trasformazione è irreversibile). Anche in tal caso però altre forme di lavoro possono essere non nulle (lavoro elettrico, lavoro di un albero rotante, etc.).

La (17) si presta ad una interpretazione grafica del lavoro di dilatazione reversibile: in un diagramma p - V , esso sarà rappresentato dall'area sottesa dalla trasformazione (vedi Fig. 4). Dalla stessa figura, risulta che il lavoro dipende dal *percorso* della trasformazione (è diverso lungo i cammini A e B) e non solo dai suoi estremi, e pertanto *non è una funzione di stato*.

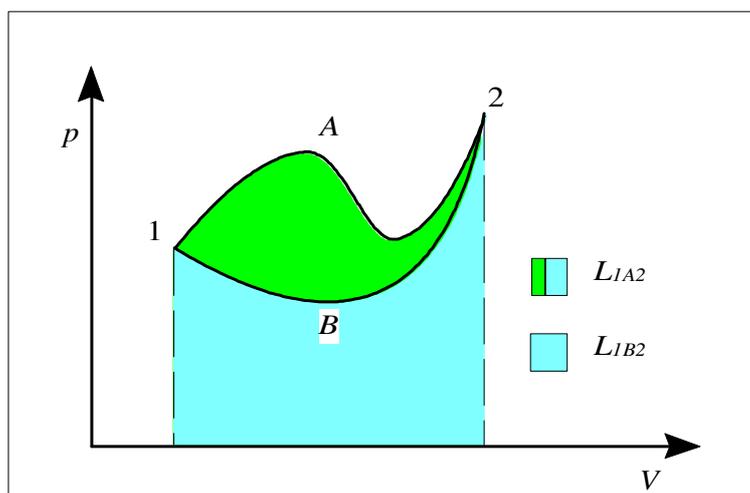


Figura 1.4: Lavoro di dilatazione reversibile in due diverse trasformazioni aventi gli stessi estremi.

Lavoro specifico

Il lavoro specifico è il lavoro compiuto per unità di massa del sistema; nel caso particolare del lavoro di dilatazione si ha

$$\delta l = \frac{1}{M} p \, dV = p \, d\frac{V}{M} = p \, dv \quad (1.21)$$

e analogamente, in forma integrale

$$l_{12} = \int_{v_1}^{v_2} p \, dv \quad (1.22)$$

Il lavoro specifico si misura in J/kg.

Anche il lavoro specifico ha una interpretazione geometrica analoga a quella del lavoro totale, ma facendo riferimento ad un diagramma in cui in ascissa si riporti il *volume specifico* (v) al posto del volume totale (V).

ESEMPIO 1.2 - Calcolo del lavoro di dilatazione

Si comprime reversibilmente anidride carbonica in un sistema cilindro-pistone dalle condizioni iniziali $p_1 = 100 \text{ kPa}$, $V_1 = 0.004 \text{ m}^3$, alla pressione finale $p_2 = 500 \text{ kPa}$. La trasformazione segue la legge $pV^n = \text{costante}$ con $n = 1.22$. Determinare il lavoro di dilatazione.

Abbiamo a che fare con un sistema chiuso (il gas contenuto nell'insieme cilindro-pistone) che subisce una trasformazione reversibile. Per cui, dalla Eq.17

$$L_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{C}{V^n} \, dV = C \int_{V_1}^{V_2} V^{-n} \, dV = \frac{C}{1-n} (V_2^{1-n} - V_1^{1-n})$$

Il valore di V_2 potrebbe essere calcolato dalle legge della trasformazione

$$p_2 V_2^n = \text{cost} = p_1 V_1^n$$

Tuttavia, per evitare la propagazione degli errori di arrotondamento, conviene sostituire direttamente nella precedente espressione per ottenere.

$$\begin{aligned} L_{12} &= \frac{C}{1-n} (V_2^{1-n} - V_1^{1-n}) = \frac{p_1 V_1^n V_1^{1-n}}{1-n} \left[\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{1-n} - 1 \right] = \\ &= \frac{p_1 V_1}{1-n} \left[\left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-n}{n}} - 1 \right] = \frac{p_1 V_1}{1-n} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right] = \\ &= \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 0.004}{-0.22} \left[\left(\frac{500 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^3} \right)^{\frac{0.22}{1.22}} - 1 \right] = -612 \text{ J} \end{aligned}$$

Il segno negativo indica che il lavoro viene fatto dall'ambiente sul sistema, come è logico aspettarsi in una compressione. Da notare che il risultato ha le dimensioni del prodotto pV , ovvero

$$[\text{N/m}^2 \text{ m}^3] = [\text{N m}] = [\text{J}]$$

quindi la verifica dimensionale è consistente. Inoltre, per ottenere il risultato in J abbiamo dovuto riportare i valori numerici delle pressioni in Pa, anche se nel rapporto delle pressioni non sarebbe stato necessario.

□

Lavoro meccanico nei sistemi aperti a regime

Consideriamo un sistema aperto a regime. A titolo di esempio si consideri un compressore a pistone; in questo caso il sistema è in condizioni di regime periodico. Nella fase di aspirazione (1-2, v. Fig.5), considerando nulle le perdite di pressione nei condotti di aspirazione, si può assumere che la pressione nel cilindro e sul pistone rimanga costante e pari al valore lato aspirazione (p_A); il lavoro compiuto *dal pistone* (che indichiamo con la lettera L') sarà pertanto dato da (seguendo un ragionamento analogo a quello riportato nel paragrafo precedente)

$$L'_{12} = p_A(V_2 - V_1) = p_A V_2 \tag{1.23}$$

dove il segno positivo indica che il lavoro viene ceduto dal sistema all'ambiente (la pressione spinge sul pistone) Nella fase successiva di compressione (2-3), con entrambe le valvole chiuse, il lavoro è dato dalla classica espressione

$$L'_{23} = \int_{V_2}^{V_3} p dV \tag{1.24}$$

mentre durante lo scarico nell'ambiente a pressione p_S (fase 3-4), il lavoro è dato da (il segno meno indica che esso viene ceduto al sistema)

$$L'_{34} = p_S(V_4 - V_3) = - p_S V_3 \tag{1.25}$$

In totale, come si vede graficamente in Fig.5, il lavoro scambiato tramite il pistone è dato dall'area del trapezoide 1234, che rappresenta il valore dell'integrale:

$$L'_{14} = - \int_{p_A}^{p_S} V dp \tag{1.26}$$

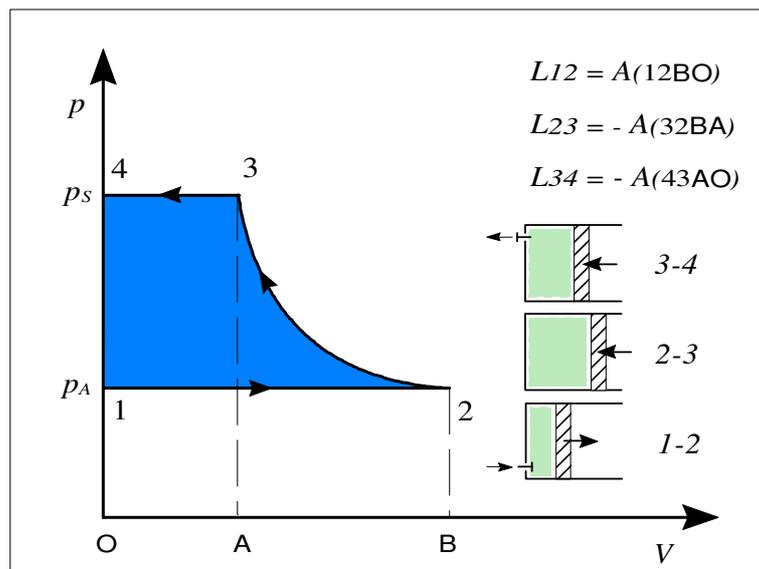


Figura 1.5: Lavoro compiuto sul pistone in un sistema aperto a regime periodico.

Tale lavoro, che effettivamente si cede tramite il pistone (e quindi anche tramite gli organi meccanici ad esso collegati) durante tutto il ciclo, viene detto *lavoro esterno netto* (o anche: *lavoro tecnico* o *lavoro utile*). Esso si indica generalmente con l'apice per non confonderlo con il lavoro di dilatazione nei sistemi chiusi. Quanto appena esposto non ha certo il rigore di una dimostrazione; tuttavia, sebbene tale risultato sia stato ottenuto in un caso particolare, esso è generalizzabile a qualunque sistema aperto a regime (purché ovviamente la trasformazione sia reversibile).

L'espressione precedente può anche essere posta in termini differenziali

$$\delta L' = -V dp \quad (1.27)$$

e anche per unità di massa

$$\delta l' = -v dp, \quad l'_{12} = - \int_{p_1}^{p_2} v dp \quad (1.28)$$

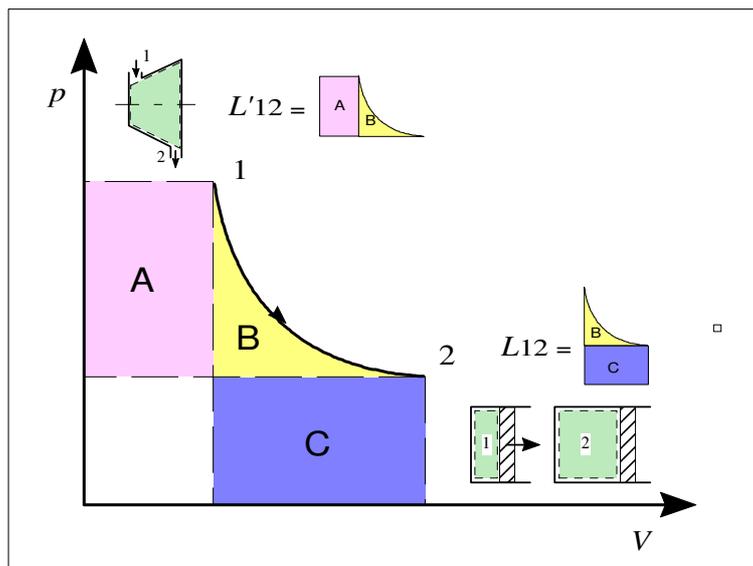


Figura 1.6: Differenza tra il lavoro meccanico per una stessa trasformazione in sistemi chiusi (A) e sistemi aperti a regime (B).

La differenza tra il lavoro utile raccolto in un sistema aperto ed uno chiuso consiste nel fatto che una parte del lavoro scambiato nei sistemi aperti è associato solo alla introduzione od estrazione di fluido dal sistema. Questo lavoro, che non è utilizzabile a fini tecnici, viene detto anche *lavoro di pulsione*.

Come risulta in Fig. 6, la stessa trasformazione dà luogo a due interpretazioni grafiche del lavoro totalmente diverse a seconda che si compia in un sistema chiuso o in uno aperto.

ESEMPIO 1.3 - Calcolo del lavoro utile in sistemi aperti a regime

Si comprime reversibilmente una portata $G = 120 \text{ kg/min}$ di acqua in una pompa, dalle condizioni iniziali $p_1 = 100 \text{ kPa}$, alla pressione finale $p_2 = 500 \text{ kPa}$. La pompa lavora in condizioni di regime. Determinare il lavoro specifico e la potenza assorbita.

Abbiamo a che fare con un sistema aperto a regime (l'acqua contenuta nella pompa) che subisce una trasformazione reversibile. Per cui, dalla Eq.26

$$l'_{12} = - \int_{p_1}^{p_2} v dp$$

L'acqua allo stato liquido si può considerare un fluido incomprimibile, ovvero il cui volume specifico è costante. Si può assumere allora

$$v = \text{costante} = \frac{1}{\rho} \cong \frac{1}{1000} = 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

per cui

$$l'_{12} = - v \int_{p_1}^{p_2} dp = - v (p_2 - p_1) = \frac{1}{1000} (100 \cdot 10^3 - 500 \cdot 10^3) = - 400 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

Il segno negativo indica che il lavoro viene fatto dall'ambiente sul sistema, come è logico aspettarsi in una compressione.

Per ottenere la potenza assorbita dalla pompa (lavoro per unità di tempo) bisogna moltiplicare il lavoro per unità di massa per la massa che attraversa il sistema nell'unità di tempo, ovvero la portata. Quindi

$$W'_{12} = G l'_{12}$$

La portata deve essere espressa nelle unità SI (kg/s)

$$G = 120 \frac{\text{kg}}{\text{min}} = 120 \frac{\text{kg}}{60 \text{ s}} = 2 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

E otteniamo infine

$$W'_{12} = G l'_{12} = 2 \cdot (- 400) = - 800 \text{ W}$$

□

Calore

Si constata sperimentalmente che due sistemi che vengono posti in contatto senza alcuna possibilità di scambiarsi lavoro subiscono comunque una trasformazione che li porta in uno stato finale che si dice di *equilibrio termico*. Tale trasformazione avviene solo se i sistemi sono posti in condizioni di interagire attraverso una parete: deve quindi esistere una forma di scambio differente dallo scambio di lavoro, che (come vedremo meglio in seguito) si traduce ugualmente in una variazione del contenuto di energia del sistema. Tale forma di scambio energetico viene detta *scambio di calore*.

Due sistemi che si scambiano calore vengono detti in *contatto termico*.

Si dice *adiabatica* (da una parola greca che significa "inattraversabile") una parete attraverso cui non può avvenire lo scambio di calore (ad esempio, le pareti di un vaso Dewar, ovvero la versione per laboratorio del comune thermos, sono con ottima approssimazione adiabatiche). Analogamente, verrà detta *trasformazione adiabatica* una trasformazione durante la quale lo scambio di calore è nullo.

Per completezza, si riportano due ulteriori definizioni di calore che si ritrovano nei testi di termodinamica:

- *Calore è uno scambio di energia tra due sistemi associato ad una differenza, anche infinitesima, di temperatura.*
- *Calore è lo scambio di energia associato ad uno scambio di entropia.*

E' evidente che tali definizioni danno per pre-acquisiti i concetti di temperatura e di entropia, che noi invece illustreremo nel seguito.

Da notare che il calore, come il lavoro, è una *forma di energia in transito*. Non è quindi formalmente corretto (anche se è in uso) dire che “un corpo immagazzina calore” o parlare di “calore contenuto in un sistema”: in entrambi i casi il termine corretto da usare è *energia*. Il calore si manifesta come tale solo quando si trasferisce da un sistema ad un altro.

Il calore, avendo le stesse dimensioni dell'energia, viene misurato in joule [J]. Convenzionalmente, si considera *positivo* il calore ceduto dall'ambiente al sistema e *negativo* quello ceduto dal sistema all'ambiente.

Il calore è stato considerato una entità fisica separata dal lavoro, ovvero una sorta di fluido immateriale ed indistruttibile (detto *calorico*) che permeava i corpi trasferendosi dall'uno all'altro, fino a quando James P. Joule (1818-1889), dando sostanza scientifica ad una serie di osservazioni precedenti, non dimostrò in maniera evidente il contrario (intorno al 1840).

Come retaggio della teoria del calorico, sopravvive fino ai giorni nostri una diversa unità di misura per il calore, la *grande caloria* [kcal], definita generalmente come il calore necessario per innalzare di un grado centigrado (precisamente da 14.5 a 15.5 °C) la temperatura di 1 kg di acqua a pressione di 1 atm. Lo stesso Joule stabilì con misure accurate che 1 kcal = 4186.8 J. A seguito dell'obbligo di adozione del Sistema Internazionale di unità di misura (1982 in Italia) la caloria deve essere definitivamente abbandonata in favore del joule.

La corrispondente unità nel sistema britannico, la British Thermal Unit [Btu] equivale a 1055.06 J ed è (purtroppo) tuttora usata per caratterizzare le prestazioni degli impianti di condizionamento dell'aria.

Il calore W_T scambiato per unità di tempo (*potenza termica*, espressa in W) tra due corpi a temperature rispettivamente T_1 e T_2 è dato da (come vedremo meglio nel capitolo sulla trasmissione del calore)

$$W_T = u A (T_2 - T_1) \quad (1.29)$$

dove A è la superficie attraverso cui avviene lo scambio e u è una opportuna quantità, detta *coefficiente globale di scambio* o *conduttanza globale*, che si misura in [W/m² K]: impareremo nel capitolo sulla trasmissione del calore a valutarla in alcuni casi di particolare interesse tecnico. Per ora l'espressione suddetta viene presentata unicamente per richiamare l'attenzione sui punti seguenti:

- Nella pratica, perché avvenga scambio di calore tra due corpi, è necessaria una differenza di temperatura *finita* tra essi;
- Idealmente (talvolta lo faremo in seguito) si può anche supporre che tale differenza di temperatura sia *infinitesima*: questo fa sì, come risulta dell'espressione precedente, che in tali condizioni per scambiare una quantità finita di calore [J] sia necessaria una *superficie infinitamente estesa* od un *tempo infinito*.

- La Eq.(1.29) presenta notevoli analogie con la legge di Ohm ($I = (V_2 - V_1)/R$), che regola il passaggio di corrente nei conduttori, dove W_T gioca lo stesso ruolo della corrente elettrica e la differenza di temperatura quello della differenza di potenziale. Non stupisce quindi che u venga detta *conduttanza termica globale* (reciproco della resistenza termica).

Attenzione a non confondere la conduttanza globale con l'energia interna, che verrà introdotta in seguito. Pur avendo lo stesso simbolo u , le due grandezze non hanno nulla a comune.

Talvolta si fa riferimento anche al *flusso termico*, ovvero il calore scambiato per unità di superficie [W/m^2], espresso da

$$q'' = u(T_2 - T_1) \quad (1.30)$$

Ovviamente, nella tecnica dello scambio termico, si ha interesse ad aumentare quanto possibile il valore del coefficiente globale di scambio: questo consente di scambiare una quantità di calore maggiore a parità di superficie e differenza di temperatura. Fanno ovviamente eccezione i casi in cui si debbano impedire le fughe di calore da un corpo (*isolamento termico*), in cui u deve assumere i valori più bassi possibile.

Lo scambio di energia può assumere forme radicalmente diverse al variare del confine assunto per il sistema, vedi Fig.7. In essa è rappresentato un contenitore A pieno di acqua, riscaldata da una resistenza R connessa ad un generatore elettrico G che a sua volta è azionato da un peso che cade tramite la puleggia P. Gli organi intermedi R e G sono a regime. Supponendo che il generatore abbia rendimento elettrico unitario, la stessa quantità di energia fluisce come lavoro meccanico attraverso il confine 3, come lavoro elettrico attraverso il confine 2 e infine come calore attraverso il confine 1. Se poi si considera come sistema l'insieme di tutti gli organi descritti (il contorno è allora il bordo della figura), esso non scambia alcuna forma di energia con l'ambiente, ma al suo interno energia potenziale si converte in energia termica.

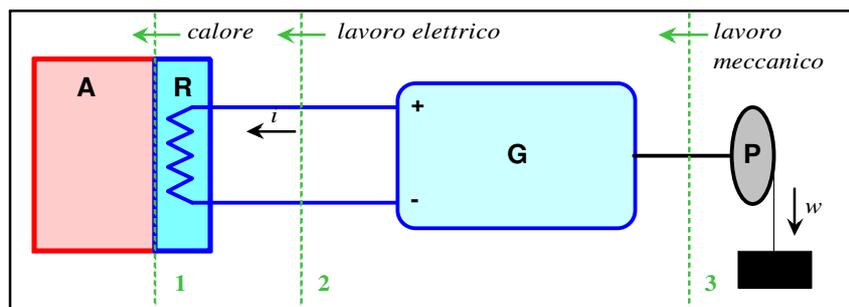


Figura1.7: L'energia fluisce in forme diverse a seconda del confine assunto per il sistema.

Principio zero della termodinamica - Temperatura

Intuitivamente, il nostro concetto di *temperatura* è correlato alla sensazione di caldo o di freddo che riceviamo toccando un corpo. Tuttavia non siamo in grado di misurarla con precisione basandoci solo sui nostri sensi. Abbiamo già visto nel precedente paragrafo che due sistemi posti in contatto senza possibilità di scambiarsi lavoro evolvono verso uno stato comune di *equilibrio termico*. Ci chiediamo allora se esiste una proprietà di stato dei corpi, tale da metterci in grado di stabilire se due corpi sono o meno in equilibrio termico. Nel

seguito, vedremo che tale proprietà esiste, la definiremo *temperatura* e stabiliremo come sia possibile costruire strumenti in grado di misurarla.

Equilibrio termico

Siano A, B, C tre sistemi arbitrari. Poniamo A in contatto termico con C e aspettiamo che i due sistemi si portino in equilibrio termico. Dopodiché poniamo C in contatto con B e constatiamo che i due sistemi sono già in equilibrio termico. Questo comporterà anche che A e B (che non sono mai stati posti in contatto) sono in equilibrio termico tra loro.

In altre parole, se due sistemi sono *separatamente* in equilibrio termico con un terzo sistema, sono anche in equilibrio termico tra loro.

L'affermazione appena fatta appare del tutto ovvia, e lo è a tal punto che solo nei primi anni del secolo ci si rese conto che essa aveva la dignità di un principio della fisica concettualmente precedente al primo e secondo principio della termodinamica, che erano già stati abbondantemente teorizzati. Per non cambiare di nome a questi ultimi, questo principio è stato denominato (Fowler, 1931) *principio zero della termodinamica*.

L'utilità del principio zero sta nel fatto che consente di poter definire il corpo C come un *termometro*, ovvero un apparato in base al quale stabilire se due sistemi sono in equilibrio termico o meno senza doverli porre in contatto termico. Si dirà allora che due corpi sono in equilibrio termico quando con un termometro misureremo lo stesso valore di una proprietà detta *temperatura*. La temperatura è una proprietà di stato.

Termometri e temperatura

La temperatura è una grandezza fondamentale della fisica, ed è pertanto definita dalla sua stessa procedura di misura. Si possono costruire diversi tipi di termometri che sono tutti basati su sistemi di *misura indiretta*: invece della temperatura, si misura una *variabile termometrica* ad essa correlata (es. l'allungamento di una colonna di mercurio, la corrente in un particolare dispositivo elettronico, la pressione in un ampolla contenente gas ...).

Un primo esempio di rudimentale termometro, denominato barotermoscopio, fu descritto da G. Galilei nel 1592. Boyle e Mariotte perfezionarono il termometro a gas attorno al 1660 sviluppando una precedente idea di Amontons. Infine, Fahrenheit inventò il termometro a mercurio nel 1714. Recentemente, col progredire dell'elettronica, si sono resi disponibili a basso costo vari dispositivi di misura di precisione anche molto elevata, quali termocoppie, termistori, termoresistenze.

Bisognerà quindi accertarsi che la relazione tra la variabile termometrica e la temperatura sia *biunivoca*, ovvero che ad un valore della prima corrisponda uno ed un sol valore della seconda, e viceversa). Successivamente, questi termometri andranno *tarati*, ossia messi in condizione di dare tutti la stessa indicazione se posti in contatto con lo stesso corpo.

A titolo di esempio, in Appendice 1 si riportano alcuni cenni sulla taratura del termometro a gas, che rappresenta a tutt'oggi il dispositivo di misura di riferimento e il più preciso, anche se di uso poco pratico. La taratura viene effettuata utilizzando i cosiddetti *punti fissi*, ovvero sistemi di cui è definita esattamente (per convenzione internazionale) la temperatura: alcuni esempi sono riportati in tabelle 1 e 2.

Punto fisso	T (K)	T ($^{\circ}\text{C}$)	T ($^{\circ}\text{R}$)	T ($^{\circ}\text{F}$)
Zero assoluto	0	-273.15	0	-459.67
Punto di solidificazione dell'acqua a $p=101.325$ kPa (1 atm)	273.15	0	491.67	32
Punto triplo dell'acqua	273.16	0.01	491.69	32.02
Punto di ebolliz. dell'acqua a $p=101.325$ kPa (1 atm)	373.15	100	671.67	212

Tabella 1.1: Corrispondenza tra scale di temperatura.

Lord Kelvin (1824-1907) si rese conto che sarebbe stato opportuno disporre, almeno dal punto di vista concettuale, di una scala di temperatura *indipendente dalle proprietà di ogni sostanza*. Vedremo in seguito come, sulla base del secondo principio della termodinamica, egli riuscì a definire una scala di temperature aventi tali caratteristiche, detta *scala termodinamica*. Dal punto di vista pratico, questo non porta alcuna complicazione poiché i valori di temperatura misurati col termometro a gas perfetto (e quindi con ogni altro dispositivo empirico ben tarato) sono *perfettamente coincidenti* con i valori della scala termodinamica.

Accanto alla scala assoluta di temperatura (vale a dire quella del termometro a gas) sopravvivono alcune scale pratiche adottate storicamente in passato: la scala Celsius (detta anche impropriamente centigrada), la scala Fahrenheit, la scala Rankine. Sia la scala Celsius che quella Kelvin dividono l'intervallo di temperatura tra il punto di fusione del ghiaccio e quello di ebollizione dell'acqua in 100 parti: conseguentemente, il grado Celsius e quello Kelvin hanno la stessa ampiezza e *le differenze di temperatura hanno lo stesso valore misurate in entrambe le scale*. Le scale Rankine e Fahrenheit dividono lo stesso intervallo in 180 parti. La tabella 1 riporta i valori di temperatura delle varie scale in corrispondenza di alcuni punti fissi.

Scala internazionale pratica di temperatura

L'uso del termometro campione a gas, per la sua complessità, è limitato ai laboratori specializzati. Si sono quindi misurate le temperature di punti fissi facilmente riproducibili (in genere, punti di fusione o ebollizione di sostanze a pressione atmosferica) allo scopo di consentire tramite essi la taratura dei termometri di uso pratico.

Punto fisso	T (K)
Punto triplo dell'idrogeno	13.81
Punto di ebollizione dell'idrogeno a $p=33,3306$ kPa	17.042
Punto di ebollizione dell'ossigeno a $p=101.325$ kPa (1 atm)	90.188
Punto triplo dell'acqua	273.16
Punto di ebollizione dell'acqua a $p=101.325$ kPa (1 atm)	373.15
Punto di solidificazione dello zinco a $p=101.325$ kPa (1 atm)	692.73
Punto di solidificazione dell'oro a $p=101.325$ kPa (1 atm)	1337.58

Tabella 1.2: Alcuni valori della Scala Internazionale di Temperatura.

L'insieme di tali punti e le regole che definiscono la interpolazione tra un punto e l'altro costituiscono la scala internazionale pratica di temperatura. Tale scala viene periodicamente sottoposta a revisione ed aggiornamento da parte della Conferenza Internazionale di Pesi e Misure. A titolo di esempio, si riportano alcuni punti della scala nella tabella 1.2.

Primo principio della termodinamica. Energia interna

Consideriamo un sistema chiuso che compie una trasformazione ciclica. In generale possiamo osservare che, *in generale*, il lavoro ed il calore scambiati in tale trasformazione sono diversi da zero, ovvero

$$\oint \delta Q \neq 0 \quad , \quad \oint \delta L \neq 0 \quad (1.31)$$

Il che ci permette di asserire che lavoro e calore scambiati non sono (in generale) differenziali esatti. Per tale ragione, indichiamo la relativa quantità infinitesima con il simbolo δ e non d .

Il primo principio della termodinamica può essere enunciato nella maniera seguente:

In un sistema chiuso che compie una trasformazione ciclica la quantità di calore scambiata tra sistema ed esterno è uguale alla quantità di lavoro netto scambiato.

Ovvero, in termini matematici

$$\oint (\delta Q - \delta L) = 0 \quad (1.32)$$

Il primo principio stabilisce in definitiva *l'equivalenza tra lavoro e calore*.

Il primo principio fu enunciato da James P. Joule (1818-1889) a Manchester nel 1849, e venne originariamente pubblicato nella cronaca del giornale locale. Come molti dei fondatori della termodinamica, Joule non aveva laurea né formazione accademica.

Si vede dalla precedente espressione che, a differenza dei due addendi considerati singolarmente, la quantità $\delta Q - \delta L$ è una proprietà di stato (in quanto il suo integrale su un percorso chiuso qualunque è nullo) a cui si dà il nome di *energia totale*:

$$\delta Q - \delta L = dU_t \quad (1.33)$$

ovvero, per unità di massa

$$\delta q - \delta l = du_t \quad (1.34)$$

Dalla meccanica sappiamo che due contributi all'energia totale derivano dall'energia cinetica e potenziale del sistema, che (per unità di massa) sono date rispettivamente da

$$de_c = \frac{1}{2} dw^2 = w dw \quad (1.35)$$

$$de_p = g dz$$

Essendo l'energia totale una proprietà estensiva (e quindi additiva) del sistema, potremo esprimerla come somma di tre contributi:

$$du_t = de_c + de_p + du \quad (1.36)$$

Il terzo contributo (du) viene detto *energia interna* del sistema. Esso rappresenta una novità rispetto alla meccanica e può essere interpretato fisicamente come la somma delle energie cinetiche delle singole molecole, dovuta all'agitazione termica.

Il primo principio della termodinamica non è altro che il principio di conservazione dell'energia in una forma più generale di quello incontrato in meccanica. Possiamo renderci conto di ciò annullando i termini di scambio termico e variazione di energia interna (non considerati in meccanica) nella Eq.(1.33) ottenendo così

$$-\delta l = de_c + de_p \quad (1.37)$$

ovvero, appunto il *principio di conservazione dell'energia meccanica* (il segno negativo deriva dalla convenzione termodinamica sul lavoro scambiato).

In genere i contributi dovuti all'energia cinetica e potenziale (detti anche *termini macroscopici*) sono di entità molto minore rispetto all'energia interna. Trascurandoli, si ottiene una formulazione del primo principio che useremo abbastanza di frequente:

$$\delta q - \delta l = du \quad (1.38)$$

Ci si può rendere conto che i termini macroscopici sono in genere trascurabili con il seguente ragionamento: per riscaldare 1 kg di acqua di 10 K, occorrono circa 42 kJ. Con la stessa quantità di energia, è possibile sollevare quello stesso chilogrammo di acqua da 0 a 4280 m, oppure accelerarlo da condizioni di quiete fino alla velocità di 250 km/h. La verifica è lasciata per esercizio all'allievo.

In tutto il paragrafo non si è minimamente accennato alla reversibilità o meno delle trasformazioni: *il primo principio rimane valido per ogni trasformazione, sia essa reversibile o no.*

Da notare che l'energia interna (come ogni altra proprietà di stato) risulta definita a meno di una costante arbitraria: definiremo tale costante di volta in volta, ma trattando quasi sempre *variazioni di energia*, questo sarà raramente necessario.

Entalpia

Risulta utile definire una nuova variabile, detta *entalpia*, che ci sarà molto utile successivamente nello studio di particolari trasformazioni:

$$H=U+pV \quad (1.39)$$

ed anche, per unità di massa

$$h=u+pv \quad (1.40)$$

L'entalpia, essendo una combinazione di funzioni di stato, è essa stessa *una funzione di stato*. Ha le stesse dimensioni dell'energia e la sua unità SI è pertanto il *joule* ([J/kg] per l'entalpia specifica).

Il nome *entalpia* deriva dal greco "calore interno" e fu coniato dall'olandese Kamerlingh-Onnes intorno al 1930.

Cenni al secondo principio della termodinamica

Nel seguito, il secondo principio della termodinamica verrà trattato preliminarmente al solo scopo di dare una definizione rigorosa dell'entropia. In una successiva sezione del corso, torneremo su di esso per enunciarlo in forme diverse ed illustrarne altre importanti conseguenze sul modo di operare delle macchine termiche. Enunceremo pertanto il secondo principio nella forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_{rev} \frac{\delta Q}{T} = 0 \quad \text{per trasformazioni reversibili} \\ \oint_{irr} \frac{\delta Q}{T} < 0 \quad \text{per trasformazioni irreversibili} \end{array} \right. \quad (1.41)$$

Dove dQ rappresenta la quantità di calore scambiata dal sistema e T la temperatura della superficie del sistema nel punto in cui avviene lo scambio. L'integrale a primo membro viene detto *integrale di Clausius* (da Rudolf Clausius, 1822-1888).

Una prima importante conseguenza del secondo principio della termodinamica è che esiste una classe di trasformazioni (quelle per cui l'integrale di Clausius assume valore positivo) che, anche se non violano il primo principio della termodinamica, *non possono ugualmente mai avvenire*. Torneremo su questo in una successiva parte del corso, quando parleremo più estesamente delle implicazioni del secondo principio.

La seconda conseguenza è che nelle trasformazioni reversibili la quantità dQ_{rev}/T , è una *funzione di stato*, dato che il valore del suo integrale è nullo su qualunque ciclo. Notare che abbiamo aggiunto il suffisso *rev* al calore scambiato per ricordare che ci riferiamo solo a trasformazioni reversibili. A tale funzione di stato Clausius dette il nome di *entropia*:

$$dS = \frac{\delta Q_{rev}}{T} \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{K}} \right] \quad (1.42)$$

e per unità di massa

$$ds = \frac{\delta q_{rev}}{T} \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{kg K}} \right] \quad (1.43)$$

L'entropia ha un significato fisico molto meno intuibile di quello della energia interna: si dice spesso, sulla base di considerazioni derivate dalla meccanica statistica, che l'entropia di un sistema è tanto maggiore quanto maggiore è il suo stato di "disordine". Entropia e disordine sono anche diventati sinonimi in un certo tipo di linguaggio. Tuttavia la definizione scientifica di "disordine" richiederebbe un livello di approfondimento non opportuno in questa sede.

La formulazione del secondo principio qui data può apparire ostica e di difficile interpretazione fisica. Cerchiamo quindi di chiarire il significato dell'integrale di Clausius con un esempio.

ESEMPIO 1.4

Una barra metallica cilindrica ha le due basi mantenute a temperatura T_a e $T_b < T_a$. Il sistema si trova in condizioni stazionarie. La superficie laterale della barra è adiabatica. Determinare il verso degli scambi di calore.

Dato che il sistema è in condizioni stazionarie ($dU = 0$) ed è da escludersi ogni forma di scambio di lavoro ($\delta L = 0$) perché la superficie del sistema è rigida, detti Q_a e Q_b i calori scambiati attraverso le facce a e b, il primo principio fornisce

$$Q_a + Q_b = 0$$

ovvero

$$Q_a = -Q_b$$

in altri termini, il primo principio ci dice solo che gli scambi di calore hanno verso opposto, senza precisare quale dei due sia positivo e quale negativo.

L'integrale di Clausius si riduce alla forma

$$\frac{Q_a}{T_a} + \frac{Q_b}{T_b} < 0$$

Dato che $T_b < T_a$, questo implica che $Q_b < 0$. In altri termini, in assenza di altre azioni esterne, il calore entra dalla faccia a ed esce dalla faccia b, e l'opposto è impossibile perché l'integrale di Clausius sarebbe maggiore di zero. L'esperienza comune ci dice infatti che il calore fluisce *spontaneamente* nella barretta dalle zone più calde a quelle più fredde.

□

Legame tra entropia e calore scambiato

E' indispensabile ricordare sempre che l'entropia è una funzione di stato: *pertanto il suo integrale su una trasformazione ciclica è comunque nullo, indipendentemente dal fatto che la trasformazione considerata sia reversibile o meno.*

Se la trasformazione è reversibile, il calore scambiato è dato da:

$$\delta Q_{rev} = T dS \quad (1.44)$$

Questo ha come conseguenza una interpretazione grafica del calore scambiato durante una trasformazione reversibile: il calore scambiato *reversibilmente* sarà rappresentato dall'area sottesa dalla trasformazione nel diagramma T - S (vedi Fig. 8). Notare l'analogia con la rappresentazione del lavoro di dilatazione scambiato reversibilmente sul diagramma p - V .

Se invece la trasformazione è irreversibile, si può dimostrare (vedi App.2) che (attenzione al segno della disuguaglianza)

$$\delta Q_{irr} < T dS \quad , \quad dS > \frac{\delta Q_{irr}}{T} \quad (1.45)$$

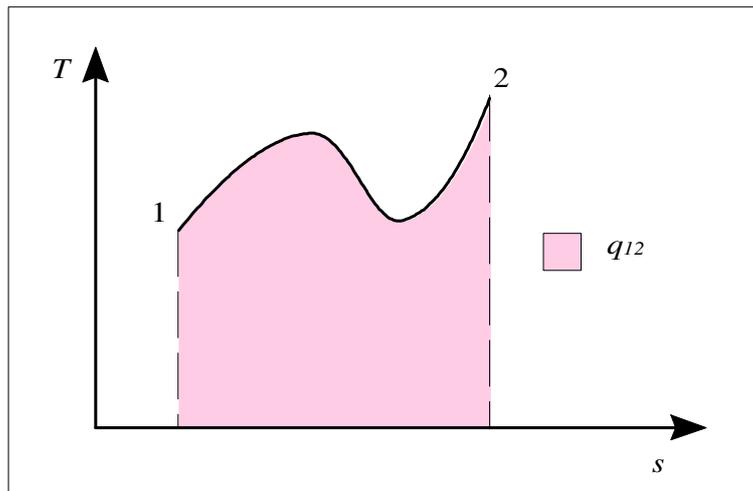


Figura 1.8: Interpretazione grafica del calore scambiato reversibilmente sul diagramma $T - s$.

Dato che è più comodo avere a che fare con delle uguaglianze piuttosto che con disuguaglianze, le due espressioni precedenti possono essere compattate nella forma:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} + \delta S_s \quad (1.46)$$

Dove il termine δS_s , viene definito in varie maniere nei testi di termodinamica: *sorgente entropica, termine di irreversibilità*.

Ovviamente si ha

$$\begin{aligned} \delta S_s &= 0 && \text{per trasformazioni reversibili} \\ \delta S_s &> 0 && \text{per trasformazioni irreversibili} \end{aligned} \quad (1.47)$$

Il lettore a questo punto potrebbe essere confuso dalla moltitudine di relazioni e segni di disuguaglianza riguardo all'entropia. Per riepilogare e fissare le idee, è opportuno riflettere sui seguenti concetti:

1. L'entropia è una funzione di stato, al pari di volume, temperatura, energia interna etc. Il suo integrale su una trasformazione ciclica è quindi *comunque nullo*.
2. La funzione $\delta Q/T$ *non* è sempre una funzione di stato; lo è solo se il calore viene scambiato *reversibilmente*. Il suo integrale su una trasformazione ciclica è detto integrale di Clausius ed è dato dalla Eq.(1.41).
3. La quantità δS_s *non* è una *proprietà termodinamica né una funzione di stato*, e non va confusa con la variazione di entropia, anche se in casi particolari può coincidere con essa.
4. La relazione fondamentale tra entropia e calore scambiato è in ogni caso la Eq.(1.46).

Entropia e trasformazioni adiabatiche

Dalla Eq.(1.46) discende che in una trasformazione *adiabatica* (vale a dire in una trasformazione in cui il calore scambiato è per definizione nullo, $\delta Q=0$) si ha $dS=dS_s$ e quindi

$$\begin{aligned} dS &= 0 && \text{per trasformazioni reversibili} \\ dS &> 0 && \text{per trasformazioni irreversibili} \end{aligned} \quad (1.48)$$

e quindi l'entropia tende sempre a crescere all'interno di un sistema adiabatico. Quando essa raggiunge un massimo, nessuna ulteriore trasformazione può avvenire ed il sistema rimane indefinitamente in tale stato.

Si rimarca che quanto detto vale *solo per sistemi adiabatici*: se un sistema cede una quantità sufficiente di calore all'esterno, la sua entropia può diminuire anche in presenza di trasformazioni irreversibili: basta (vedi Eq. 1.43) che il termine dQ/T (che è negativo, dato che il calore è ceduto) sia in valore assoluto superiore a dS_s .

Dato che un sistema isolato è anche adiabatico, queste considerazioni portarono R. Clausius a formulare in maniera sintetica, in una nota del 1865, i due principi della termodinamica nel modo seguente

- *L'energia di un sistema isolato è costante.*
- *L'entropia di un sistema isolato è crescente.*

In realtà Clausius (esagerando un poco) parlò di *universo* anziché di *sistema isolato*. Nell'opinione di alcuni, tra cui chi scrive, sappiamo ancora troppo poco sulla struttura dell'universo per poter ritenere i due principi validi su tale scala. Questo tuttavia non toglie valore alla fulminante sintesi dell'enunciato, che suscitò una vivissima impressione tra i fisici del tempo.

Legami tra funzioni di stato

Abbiamo già detto più volte come, nei casi che prendiamo in considerazione (sistemi bivarianti), in genere una volta assegnato il valore a due funzioni di stato anche le rimanenti assumono un valore definito. Nel presente paragrafo affrontiamo il problema di determinare la variazione di una funzione di stato nota quella di altre due.

La rilevanza pratica di quanto verrà esposto sta nel fatto che abbiamo la possibilità di misurare *direttamente* (con strumenti) solo tre proprietà: pressione, temperatura e volume. Le rimanenti devono pertanto essere determinate a partire da queste tre.

A rigore, date arbitrariamente due funzioni di stato indipendenti, è possibile costruire per una terza una relazione del tipo dell'Eq.(6). Si possono così ottenere un gran numero di relazioni, tra le quali prenderemo in considerazione solo le più rilevanti ai fini pratici.

Legame tra volume, pressione, e temperatura

Il legame tra variazioni di volume, temperatura e pressione si esprime spesso nella forma

$$\frac{dv}{v} = \beta dT - \kappa dp \quad (1.49)$$

dove

$$\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad (1.50)$$

$$\kappa = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T$$

Il coefficiente β è detto *coefficiente di dilatazione isobara*, in quanto rappresenta la variazione di volume dovuta a quella di temperatura a pressione costante (ciò che ordinariamente viene detto dilatazione termica); β è generalmente maggiore di zero, ovvero le sostanze aumentano di volume al crescere della temperatura, con alcune rimarchevoli eccezioni (es. l'acqua ad 1 bar tra 0 e 4 °C).

Il coefficiente κ è detto invece *coefficiente di comprimibilità isoterma* e rappresenta la variazione di volume dovuta alle variazioni di pressione a temperatura costante (ovvero, la comprimibilità meccanica del corpo). Dato che, per ragioni di stabilità meccanica, ogni corpo deve contrarsi a seguito di un aumento della pressione esterna, κ è sempre maggiore di zero.

Notare che β e κ , come gli altri coefficienti termodinamici che introdurremo in seguito, non sono in generale costanti ma variano al variare, ad es., di temperatura e pressione. La Tab.3 riporta i valori di tali coefficienti per l'acqua a pressione atmosferica.

Temperatura, °C	β , K ⁻¹	κ , Pa ⁻¹
0	-68.14x10 ⁻⁶	50.89x10 ⁻¹¹
10	87.90x10 ⁻⁶	47.81x10 ⁻¹¹
20	206.6x10 ⁻⁶	45.90x10 ⁻¹¹
30	303.1x10 ⁻⁶	44.77x10 ⁻¹¹
40	385.4x10 ⁻⁶	44.24x10 ⁻¹¹
50	457.8x10 ⁻⁶	44.18x10 ⁻¹¹
60	523.4x10 ⁻⁶	44.32x10 ⁻¹¹
70	585.3x10 ⁻⁶	44.97x10 ⁻¹¹

Tabella 1.3: coefficienti β e κ per l'acqua a pressione $p = 1$ bar.

ESEMPIO 1.5 - Dilatazione termica del liquido in un impianto di riscaldamento

Un impianto di riscaldamento domestico contiene un volume $V = 50$ L di acqua alla pressione $p_i=1$ bar e alla temperatura iniziale $T_i=20$ °C. Il sistema è dotato di un vaso di espansione, in contatto con l'atmosfera, che fa sì che la pressione al suo interno si mantenga costante, e viene riscaldato fino alla temperatura finale di esercizio $T_2 = 70$ °C. Sapendo che per l'acqua $\beta = 400 \times 10^{-6}$ K⁻¹, (che si può considerare un valore medio nell'intervallo considerato) trovare l'incremento di volume dell'acqua.

Applicando la Eq.(1.49), tenuto conto che $dp=0$, si ha

$$\frac{dv}{v} = \beta dT$$

Ovvero anche, moltiplicando numeratore e denominatore per la massa del sistema

$$\frac{dV}{V} = \beta dT$$

Integrando tra i due stati estremi, supponendo, $\beta = cost$ nell'intervallo di integrazione

$$\ln \frac{V_2}{V_1} = \beta (T_2 - T_1)$$

Dato che ipotizziamo che le variazioni di volume siano piccole, si può considerare il rapporto $V_2/V_1 \cong 1$ e quindi, approssimando $\ln(1+x) \cong x$ (la verifica è lasciata al lettore)

$$\frac{V_2 - V_1}{V_1} = \beta(T_2 - T_1)$$

da cui infine

$$V_2 - V_1 = V_1 \beta (T_2 - T_1) = 50 \cdot 400 \cdot 10^{-6} (70 - 20) = 1.0 \text{ L}$$

Dalla Tab.3, si nota che in effetti β varia fortemente nell'intervallo di temperature considerato. Una valutazione più accurata si può avere dividendo l'integrale in 5 intervalli di 10 °C ciascuno entro i quali assumere i valori di β più accurati: la sua esecuzione è lasciata per esercizio al lettore.

□

Relazione tra energia interna, temperatura e volume

La relazione tra energia interna, temperatura e volume si esprime in genere nella forma

$$du = c_v dT + B_u dv \quad (1.51)$$

dove

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \left[\frac{\text{J}}{\text{kg K}} \right] \quad (1.52)$$

$$B_u = \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right]$$

c_v è detto *calore specifico a volume costante*, ed il significato di tale nome è spiegato dal seguente esempio. Il coefficiente B_u non ha molta importanza per i nostri scopi.

ESEMPIO 1.6 - Riscaldamento a volume costante

Un recipiente rigido contiene una massa $M = 5 \text{ kg}$ di azoto alla pressione iniziale $p_1 = 2 \text{ bar}$ e alla temperatura iniziale $T_1 = 20 \text{ °C}$. Il sistema viene riscaldato a volume costante con una quantità di calore $Q_{12} = 5000 \text{ J}$. Sapendo che per l'azoto $c_v = 743 \text{ J/kg K}$, trovare l'incremento di temperatura del gas.

Dato che le pareti del sistema sono rigide, il lavoro scambiato nella trasformazione è nullo. Il primo principio si riduce pertanto a

$$du = dq$$

(in questo caso, essendo lo scambio di lavoro nullo, il calore scambiato diviene una funzione di stato)

e tenendo conto della Eq.(1.51), considerando anche che $dv = 0$

$$c_v dT = dq$$

da cui si vede che c_v può essere interpretato fisicamente come il rapporto tra il calore fornito a volume costante ed il corrispondente incremento di temperatura.

Integrando tra i due stati estremi, supponendo $c_v = \text{cost}$ nell'intervallo di integrazione

$$c_v (T_2 - T_1) = q_{12}$$

e moltiplicando entrambi i membri per la massa del sistema

$$M c_v (T_2 - T_1) = Q_{12}$$

da cui infine

$$T_2 - T_1 = \frac{Q_{12}}{M c_v} = \frac{5000}{5 \cdot 743} = 1.35 \text{ K}$$

□

Relazione tra entalpia, temperatura e pressione

La relazione tra entalpia, temperatura e pressione si esprime in genere nella forma

$$dh = c_p dT + B_h dp \quad (1.53)$$

dove

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \left[\frac{\text{J}}{\text{kg K}} \right] \quad (1.54)$$

$$B_h = \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T \left[\frac{\text{J}}{\text{kg Pa}} \right]$$

Da notare che tale relazione cade in difetto nel caso che il nostro sistema sia una sostanza bifase: come vedremo in seguito, in tal caso pressione e temperatura *non sono variabili indipendenti*.

c_p è detto *calore specifico a pressione costante*, ed il significato di tale nome è spiegato dal seguente esempio. Anche il coefficiente B_h , come B_u , non ha molta importanza per i nostri scopi.

ESEMPIO 1.7 - Riscaldamento a pressione costante

Un recipiente contiene una massa $M = 5 \text{ kg}$ di azoto alla pressione iniziale $p_1 = 2 \text{ bar}$ e alla temperatura iniziale $T_1 = 20 \text{ °C}$. Il sistema viene riscaldato a pressione costante con una quantità di calore $Q_{12} = 5000 \text{ J}$. Sapendo che per l'azoto $c_p = 1040 \text{ J/kg K}$, trovare l'incremento di temperatura del gas.

Supponendo che la trasformazione sia reversibile e che l'unica forma di scambio di lavoro sia il lavoro di dilatazione, possiamo scrivere il primo principio come

$$du = \delta q - p dv$$

ovvero

$$du + p dv = \delta q$$

possiamo sommare al primo membro il prodotto $v dp$, che, essendo la pressione costante, è nullo, ottenendo

$$du + p dv + v dp = \delta q$$

$$d(u + pv) = \delta q$$

$$dh = \delta q$$

Tenendo conto della Eq.(1.53), considerando anche che $dp = 0$

$$c_p dT = \delta q$$

da cui si vede che c_p può essere interpretato fisicamente come il rapporto tra il calore fornito a pressione costante ed il corrispondente incremento di temperatura.

Integrando tra i due stati estremi, supponendo $c_p = \text{cost}$ nell'intervallo di integrazione

$$c_p(T_2 - T_1) = q_{12}$$

e moltiplicando entrambi i membri per la massa del sistema

$$M c_p(T_2 - T_1) = Q_{12}$$

da cui infine

$$T_2 - T_1 = \frac{Q_{12}}{M c_p} = \frac{5000}{5 \cdot 1040} = 0.96 \text{ K}$$

□

Relazioni di Gibbs (o del Tds)

Riprendiamo l'espressione del primo principio per unità di massa, Eq.(1.38); ipotizzando le trasformazioni reversibili e il lavoro solo di dilatazione, possiamo sostituire

$$\begin{aligned} \delta l &= p \, dv \\ \delta q &= T \, ds \end{aligned} \tag{1.55}$$

Si ottiene quindi

$$du = T \, ds - p \, dv \tag{1.56}$$

ovvero

$$T \, ds = du + p \, dv \tag{1.57}$$

aggiungendo ad entrambi i membri il differenziale del prodotto pv , e ricordando la definizione di entalpia (Eq. 1.37), si ha inoltre

$$T \, ds = dh - v \, dp \tag{1.58}$$

le Eqq.(1.57) e (1.58) sono dette *equazioni del Tds o di Gibbs* (dal chimico-fisico americano J.W. Gibbs, 1839-1903) e permettono, ad esempio, di calcolare le variazioni di entropia note quelle di energia interna e di volume.

Spesso lo studente si chiede se le relazioni suddette, che sono state ottenute ipotizzando trasformazioni reversibili, sono valide anche nel caso di trasformazioni irreversibili: dato che esse esprimono variazioni di funzioni di stato, e queste sono indipendenti dal tipo di trasformazione, esse saranno applicabili ad ogni trasformazione, sia essa reversibile o meno. È importante notare anche che, come sempre, la loro validità è comunque ristretta al caso in cui gli stati iniziale e finale sono *stati di equilibrio*. Ad esempio, se il sistema è costituito inizialmente da due masse di acqua di diversa temperatura a contatto ma non mescolate, questo non è uno stato di equilibrio (dato che il sistema evolve *spontaneamente* fino a quando la temperatura non diviene uniforme) e le relazioni di Gibbs non sono applicabili nella forma sopra esposta.

Notare che dalla Eq.55 discende una definizione rigorosa di temperatura (una volta definite

entalpia ed entropia) ovvero $T = \left(\frac{\partial h}{\partial s} \right)_p$

Relazioni tra entropia, pressione, volume e temperatura.

Combinando le Eqq.(1.51) e (1.57) si ottiene facilmente

$$ds = \frac{c_v}{T} dT + \frac{B_u + p}{T} dv = \frac{c_v}{T} dT + \frac{\beta}{\kappa} dv \quad (1.59)$$

ed in maniera analoga, combinando le (1.53) e (1.58)

$$ds = \frac{c_p}{T} dT + \frac{B_h - v}{T} dp = \frac{c_p}{T} dT - \beta v dp \quad (1.60)$$

le relazioni suddette permettono di calcolare le variazioni di entropia note quelle di volume e temperatura o di pressione e temperatura.

Legami tra i coefficienti termodinamici

Nei paragrafi precedenti abbiamo introdotto un certo numero di coefficienti (detti coefficienti termodinamici, es. c_p , β , B_h ...) che variano da sostanza a sostanza e la caratterizzano dal punto di vista termodinamico. Tali coefficienti devono essere determinati sperimentalmente. Sembrerebbe quindi che per caratterizzare una sostanza occorra fare un gran numero di esperimenti. Tuttavia le proprietà dei differenziali esatti ci vengono in aiuto: si può dimostrare che *tutti i coefficienti termodinamici sono esprimibili in funzione di tre soli*: in genere (seguendo un approccio dovuto originariamente a Bridgman, 1914) si fa riferimento a c_p , β , κ , che sono i più facili da determinare sperimentalmente. La Tab.4 riporta il legame tra i coefficienti termodinamici che abbiamo introdotto ed i tre fondamentali.

Coefficiente	Definizione	Legame con c_p , β , κ
c_v	$\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v$	$c_v = c_p - \frac{T\beta^2 v}{\kappa}$
B_u	$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T$	$B_u = \frac{\beta T}{\kappa} - p$
B_h	$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T$	$B_h = (1 - \beta T) v$

Tabella 1.4: Legame tra i coefficienti termodinamici.

BIBLIOGRAFIA

Quasi tutti i testi di termodinamica riportano un'introduzione alle grandezze termodinamiche ed ai relativi principi. In particolare per approfondimenti si può consultare:

- Y.A. Cengel, Termodinamica e Trasmissione del Calore, McGraw-Hill, 1998, capp. 1, 3, 5, 6.
- J. Moran and H. Shapiro, Fundamentals of Engineering Thermodynamics, Wiley, NY, capp. 1, 2, 5, 6.

Chi cercasse una introduzione razionale alle grandezze termodinamiche può consultare:

- E.P. Gyftopoulos, G.P. Beretta, Thermodynamics – Foundations and Applications, McMillan, NY, 1991, cap. 14.

Ed infine un'ottima introduzione, con cenni storici ai vari approcci, si trova su:

- A. Bejan, Advanced Engineering Thermodynamics, Wiley, NY, 1988, capp. 1 e 2.

ESERCIZI

ESERCIZIO 1.1

Identificare un sistema per lo studio dei processi indicati nel seguito, classificarlo in aperto o chiuso, a regime o meno, e determinare le sue interazioni con l'esterno (la risposta non è sempre univoca: lo scopo dell'esercizio è abituarsi a schematizzare varie configurazioni).

- Riscaldamento di una bombola di gas, con valvola chiusa;
- un estintore a CO₂ in funzione (valvola aperta);
- una pentola di acqua che bolle;
- una billetta di acciaio che viene temprata in un bagno d'olio;
- un frigorifero domestico in funzione;
- la turbina a vapore di un impianto termoelettrico a regime;
- un razzo dopo il lancio;
- il motore di aereo alla velocità di crociera.

ESERCIZIO 1.2

Determinare la pressione assoluta su un batiscafo immerso in mare alla profondità di 4000 m. La densità dell'acqua marina è 1020 kg/m³ e la pressione atmosferica sul livello del mare vale 980 hPa. [40.11 Mpa]

ESERCIZIO 1.3

Il camino di una centrale termoelettrica deve trasportare una portata volumetrica $G_V = 577$ m³/s di fumi. Supponendo che il camino sia circolare e di adottare un valore della velocità media del fluido di 15 m/s, calcolare il diametro del camino.

[7 m]

ESERCIZIO 1.4

Dell'ossido nitroso, con calore specifico a volume costante $c_v = 0,674$ kJ/kg K, $B_u = 0$, fluisce con una velocità di 5 m/s e ad una temperatura di 120 °C in una tubazione posta a 120 m rispetto al livello del mare. Si valuti l'energia cinetica e_c , l'energia potenziale gravitazionale e_p e l'energia interna u di 1 kg di gas assumendo il mare come livello di riferimento per l'energia

potenziale gravitazionale e considerando nulla alla temperatura di 0 °C l'energia interna del gas.

$$[u = 80880 \text{ J/kg}; e_c = 12.5 \text{ J/kg}; e_p = 1177 \text{ J/kg}]$$

ESERCIZIO 1.5

Un gas contenuto in un sistema chiuso cilindro pistone è inizialmente nelle condizioni $p_1 = 4$ bar, $V_1 = 0.15 \text{ m}^3$. Esso si espande reversibilmente a pressione costante fino ad un volume $V_2 = 0.36 \text{ m}^3$. Calcolare il lavoro di dilatazione.

$$[L = 84 \text{ kJ}]$$

ESERCIZIO 1.6

Ripetere il calcolo del precedente esercizio nella ipotesi che, a partire dalle stesse condizioni iniziali, l'espansione avvenga secondo la legge $pV = \text{cost}$.

$$[L = 52.5 \text{ kJ}]$$

ESERCIZIO 1.7

Ripetere il calcolo del precedente esercizio nella ipotesi che, a partire dalle stesse condizioni iniziali, l'espansione avvenga secondo la legge $pV^{1.4} = \text{cost}$.

$$[L = 44.7 \text{ kJ}]$$

ESERCIZIO 1.8

Tracciare su un diagramma p - V le trasformazioni relative ai tre esercizi precedenti e giustificare graficamente che il lavoro maggiore si ottiene nella espansione isobara.

ESERCIZIO 1.9

Una massa $M = 1.5 \text{ kg}$ di fluido refrigerante è contenuta in un insieme pistone chiuso cilindro e viene compressa reversibilmente secondo la legge $pv^n = \text{cost}$ dalle condizioni iniziali $p_1 = 200 \text{ kPa}$, $v_1 = 83.54 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$ allo stato finale $p_2 = 1 \text{ MPa}$, $v_2 = 21.34 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$. Determinare:

1. il volume iniziale e finale del contenitore;
2. il valore dell'esponente n ;
3. il lavoro compiuto.

$$[1. V_1 = 0.125 \text{ m}^3; V_2 = 0.032 \text{ m}^3; 2. n = 1.18; 3. L = -38.6 \text{ kJ}]$$

ESERCIZIO 1.10

Un gas contenuto in un sistema chiuso cilindro pistone subisce le due trasformazioni seguenti:

- *Trasformazione 1-2*: espansione da $p_1 = 300 \text{ kPa}$, $v_1 = 0.019 \text{ m}^3/\text{kg}$ a $p_2 = 150 \text{ kPa}$, secondo la legge $pv = \text{cost}$.
- *Trasformazione 2-3*: compressione isobara fino al volume $v_3 = v_1$.

Tracciare la trasformazione sul piano p - v e determinare il lavoro per unità di massa in tutto il processo.

$$[l = 1.1 \text{ kJ/kg}]$$

ESERCIZIO 1.11

In un sistema chiuso pistone-cilindro una certa quantità di vapore subisce una trasformazione per effetto della quale la sua energia interna U aumenta di 800 kJ. Se il calore somministrato durante il processo è stato pari a 850 kJ, valutare l'entità del lavoro in gioco.

$$[L = 50 \text{ kJ}]$$

ESERCIZIO 1.12

Un compressore (sistema aperto a regime) comprime reversibilmente un fluido dalle condizioni $p_1 = 0.1$ MPa, $v_1 = 1.5$ m³/kg alla pressione finale $p_2 = 400$ kPa seguendo la legge $p v = \text{cost}$.

- Determinare il lavoro esterno netto per unità di massa necessario.
- Ripetere il calcolo nel caso che la trasformazione sia isovolumica ($v = \text{cost}$).
- Tracciare nei due casi le trasformazioni sul piano p - v ed individuare graficamente su di esso il lavoro compiuto nei due casi precedenti.

[a. $l = -208$ kJ/kg; b. $l = -450$ kJ/kg]

ESERCIZIO 1.13

Un serbatoio chiuso, rigido ed adiabatico di volume $V = 0.2$ m³ contiene aria la cui densità iniziale è $\rho = 1.2$ kg/m³. Un mulinello che assorbe 40 W viene azionato per 20 min all'interno del serbatoio. Determinare:

- il volume specifico finale dell'aria;
- la variazione di energia interna specifica dell'aria.

[1. $v_2 = 0.83$ m³/kg (invariato rispetto allo stato iniziale); 2. $\Delta u = 200$ kJ/kg]

ESERCIZIO 1.14

Un gas in un insieme pistone-cilindro senza aperture subisce due trasformazioni reversibili in serie. La trasformazione 1-2 è isocora ed implica uno scambio di calore $Q_{12} = 500$ kJ. La trasformazione 2-3 è isobara a $p = 400$ kPa con uno scambio di calore $Q_{23} = -450$ kJ. Sono noti i valori di energia interna allo stato iniziale e finale, $U_1 = 1200$ kJ e $U_3 = 3500$ kJ. Le variazioni di energia cinetica e potenziale sono trascurabili. Nell'ipotesi che venga compiuto unicamente lavoro di dilatazione, trovare la variazione di volume tra lo stato iniziale e quello finale.

[$\Delta V = -5.625$ m³]

ESERCIZIO 1.15

Un motore elettrico lavora a regime assorbendo dalla rete una potenza elettrica $W_{el} = 1.5$ kW. L'albero ha una coppia resistente $M = 2$ kgf m e ruota ad un numero di giri $n' = 500$ rpm. Determinare:

- il calore dissipato dal motore in un'ora di funzionamento;
- la temperatura della carcassa del motore T_c , se lo scambio termico con l'aria ambiente avviene secondo la legge $W_t = hA (T_c - T_a)$ con $hA = 5$ W/K e $T_a = 20$ °C.

[1. 1.7 MJ; 2. 114 °C]

ESERCIZIO 1.16

Un gas in un sistema chiuso pistone cilindro subisce un ciclo termodinamico composto dalle seguenti trasformazioni reversibili:

Trasformazione 1-2: compressione a $pV = \text{cost}$ dalle condizioni $p_1 = 1$ bar, $V_1 = 1.5$ m³, fino alla pressione $p_2 = 2$ bar.

Trasformazione 2-3: trasformazione isovolumica

Trasformazione 3-1: trasformazione adiabatica con $L_{31} = 150$ kJ.

Determinare il calore scambiato totalmente nel ciclo.

[$Q = 47$ kJ]

ESERCIZIO 1.17 (adatto alla risoluzione tramite calcolatore)

Si misurano sperimentalmente i seguenti dati di pressione e volume durante l'espansione di un gas in un insieme pistone cilindro di un motore a combustione interna:

PUNTO	p (bar)	V (cm ³)
1	20.0	454
2	16.1	540
3	12.2	668
4	9.9	780
5	6.0	1175
6	3.1	1980

- Stimare (integrando con la regola dei trapezi) il lavoro compiuto durante l'espansione.
- Le espansioni di questo genere di seguono generalmente la legge $pV^n = \text{cost}$ (detta *politropica*). Tramite interpolazione, determinare il valore dell'esponente n , ripetere il calcolo del lavoro compiuto e confrontarlo con il precedente. (*Suggerimento*: determinare la pendenza della linea $\log p - \log V$ tramite interpolazione lineare).

ESERCIZIO 1.18

Un sistema chiuso compie un ciclo termodinamico costituito da tre trasformazioni. Durante il primo processo il lavoro è 5 kJ e il calore scambiato è 23 kJ. Nella seconda trasformazione non vi è lavoro in gioco e il calore scambiato è -50 kJ. La terza trasformazione è adiabatica.

- Trovare la variazione di energia relativa ad ogni trasformazione
 - Trovare il lavoro in gioco nelle terza trasformazione
- [a) 18 kJ, -50 kJ, 32 kJ; b) $L_{31} = -32$ kJ]

APPENDICI

APPENDICE 1.1 *Misura di temperatura con il termometro a gas.*

Il termometro viene fatto operare facendo mantenere al gas un volume costante e misurando la pressione nel bulbo. Si constata sperimentalmente che le misure divengono ben ripetibili e *indipendenti dal tipo di gas adottato* quando la pressione nel bulbo scende sotto un valore limite. Si stabilisce inoltre *arbitrariamente* che la pressione nel bulbo è direttamente proporzionale alla temperatura misurata. Si definisce pertanto la temperatura come

$$T = a \lim_{p \rightarrow 0} \frac{P}{P_0}$$

Dove a rappresenta il valore (arbitrario) che la temperatura assume in una condizione prefissata, facilmente ripetibile e caratterizzata da un valore univoco delle temperatura, detta *punto fisso*, a cui il gas del termometro ha una pressione p_0 . Nel nostro caso si adotta come punto fisso il *punto triplo dell'acqua*, a cui si assegna, per motivi storici, il valore di temperatura di 273.16 K. Il limite ci ricorda che bisogna operare in condizioni di sufficiente rarefazione del gas.

Il punto triplo dell'acqua rappresenta una condizione (facilmente riproducibile) in cui acqua allo stato solido, liquido e vapore *coesistono in equilibrio ed in assenza di altri gas*. Tale condizione, come vedremo in seguito, è caratterizzata da un valore univoco della temperatura e della pressione.

Da notare che *a priori* avremmo potuto scegliere qualunque altra funzione matematica per legare la temperatura alla pressione: a posteriori, come vedremo, la scelta fatta si dimostrerà oculata.

La definizione *operativa* di temperatura risulta pertanto:

$$T = 273.16 \lim_{p \rightarrow 0} \frac{P}{P_{TP}}$$

l'unità di misura SI della temperatura è il *kelvin* [K].

Il termometro a gas presenta alcune limitazioni, tra le quali il fatto che tutti i gas divengono liquidi sotto una certa temperatura, ed è quindi impossibile misurare con esso temperature inferiori ad 1 K.

APPENDICE 1.2 Dimostrazione dell'Eq.(1.45).

Dati due stati A e B arbitrari, consideriamo il ciclo termodinamico costituito dalle due trasformazioni seguenti (anche il percorso delle trasformazioni è arbitrario):

- trasformazione *irreversibile* AiB;
- trasformazione *reversibile* BrA.

Essendo il ciclo nel suo complesso irreversibile, l'integrale di Clausius dovrà essere negativo:

$$\oint_{AiBrA} \frac{dq}{T} < 0$$

Ovvero, dividendo l'integrale in due parti corrispondenti alla prima ed alla seconda delle trasformazioni ipotizzate:

$$\int_{AiB} \frac{dq_{irr}}{T} + \int_{BrA} \frac{dq_{rev}}{T} < 0$$

invertendo il senso della trasformazione reversibile BrA si ha

$$\int_{AiB} \frac{dq_{irr}}{T} - \int_{ArB} \frac{dq_{rev}}{T} < 0$$

ma per definizione

$$\int_{ArB} \frac{dq_{rev}}{T} = \int_A^B ds$$

per cui

$$\int_{AiB} \frac{dq_{irr}}{T} - \int_A^B ds < 0 \Rightarrow \int_{AiB} \frac{dq_{irr}}{T} < \int_A^B ds$$

dato che i punti A e B sono del tutto arbitrari, la disequazione vale anche per gli integrandi. Si ha quindi infine

$$\boxed{ds > \frac{dq_{irr}}{T}}$$

APPENDICE 1.3 Tabella riassuntiva delle principali grandezze introdotte e delle relative unità di misura.

Proprietà	Simb.	Definizione	Unità SI	Altre unità tecniche
Volume	V	=	<i>metro cubo</i> [m ³]	
Temperatura	T	=	<i>kelvin</i> [K]	<i>celsius</i> [°C]: $T(K) = T(^{\circ}C) + 273.15$ <i>farhenheit</i> [°F]: $T(K) = [T(^{\circ}F) - 32] / 1.8 + 273.15$ <i>rankine</i> [°R]: $T(K) = T(^{\circ}R) / 1.8$
Massa	M	=	[kg]	1 lb = 0.4536 kg
Portata massica	G	=	[kg/s]	
Portata volumica	G_V	=	[m ³ /s]	
Volume specifico	v	V/M	[m ³ /kg]	
Pressione	p	F_n/A	<i>pascal</i> [Pa]	1 bar = 10 ⁵ Pa 1 kg/cm ² = 1 ata = = 98.0665 kPa 1 atm = 101.325 kPa 1 psi = 6894.76 Pa 1 mm Hg = 133.322 Pa 1 mm H ₂ O = 9.80665 Pa
Lavoro	L	=	<i>joule</i> [J]	1 kcal = 4186.8 J 1 kgm = 9.80665 J 1 kWh = 3.6 × 10 ⁶ J 1 Btu = 1055.06 J
Calore	Q	=	<i>joule</i> [J]	<i>v. lavoro</i>
Energia interna	U	=	<i>joule</i> [J]	
Entalpia	H	$U + pV$	<i>joule</i> [J]	
Entropia	S	dQ_{rev}/T	[J/K]	
Energia interna specifica	u	U/M	[J/kg]	
Entalpia spec.	h	H/M	[J/kg]	
Entropia spec.	s	S/M	[J/kg K]	
Calore specifico a $v=cost$	c_v	$\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v$	[J/kg K]	
Calore specifico a $p=cost$	c_p	$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p$	[J/kg K]	

Appunti ed Esercizi di *Fisica Tecnica*

Cap. 2. Termodinamica degli stati

Paolo Di Marco

Versione 2022.00 – 03.01.2022.

La presente dispensa è redatta ad esclusivo uso didattico per gli allievi dei corsi di studi universitari dell'Università di Pisa. L'autore se ne riserva tutti i diritti. Essa può essere riprodotta solo totalmente ed al fine summenzionato, non può essere alterata in alcuna maniera o essere rivenduta ad un costo superiore a quello netto della riproduzione. Ogni altra forma di uso e riproduzione deve essere autorizzata per scritto dall'autore.

L'autore sarà grato a chiunque gli segnali errori, inesattezze o possibili miglioramenti.

Introduzione

In questo capitolo ci occuperemo delle metodologie per il calcolo delle proprietà delle sostanze in differenti stati. Una volta introdotti alcuni concetti fondamentali sul comportamento delle sostanze e sulle loro transizioni di fase, vengono illustrati i diagrammi di stato e le tavole termodinamiche, che sono la fonte primaria per ottenere i dati richiesti. Verranno quindi sviluppati modelli di comportamento semplificati, di validità più ristretta, che spesso consentono una più agevole valutazione delle proprietà stesse.

Stati di aggregazione, fasi e transizione di fase

Si dice che un sistema è costituito da una *sostanza pura* se in esso è presente una sostanza di composizione omogenea e invariabile nel tempo. Si definisce invece *componente* una sostanza di composizione chimica fissata. Una sostanza pura, quindi può essere costituita da un solo componente o da diversi componenti. L'acqua distillata, ad esempio, avendo una formula chimica definita, è una sostanza pura avente un solo componente, mentre l'acqua potabile, a causa dei sali in essa disciolti, è una sostanza pura multicomponente. L'aria, essendo una miscela di gas, è una sostanza pura multicomponente, mentre l'ossigeno è una sostanza pura monocomponente. Fino a quando non si verificano cambiamenti di stato, non vi sono differenze di comportamento tra le sostanze pure monocomponente e pluricomponente.

Una sostanza pura può presentarsi in differenti *stati di aggregazione* fisica: *solido*, *liquido*, *aeriforme*. Per quanto a prima vista questo sia accettabile per tutti, le stesse definizioni di solido, liquido ed aeriforme sono per certi aspetti ambigue e variano a seconda del contesto scientifico in cui ci si trova: nel campo dell'ingegneria, usualmente si definisce *solido* lo stato di aggregazione dotato di forma e volume proprio, *liquido* lo stato di aggregazione dotato di volume, ma non di forma propria e *aeriforme* lo stato di aggregazione caratterizzato dal non avere né forma né volume proprio. Tuttavia, ad un esame più approfondito ed in presenza di misure accurate queste definizioni appaiono carenti, in quanto, indipendentemente dallo stato di aggregazione, una sostanza subisce comunque variazioni di volume per effetto delle variazioni di temperatura e/o di pressione. In chimica, per esempio, si usa definire solida una sostanza caratterizzata dall'aver un reticolo cristallino: in tale contesto, sostanze amorfe (ovvero prive di reticolo cristallino) quali il vetro e l'asfalto dovrebbero essere definiti liquidi! Ciascuno degli stati di aggregazione di una sostanza pura è chiamato *fase*; più propriamente si definisce fase l'insieme di tutte le parti omogenee di un sistema aventi lo stesso valore delle proprietà intensive e specifiche: es. l'insieme delle bolle di vapore all'interno di un liquido. All'interno di un sistema, possono essere presenti più fasi che sono delimitate da *interfacce* attraverso le quali alcune proprietà (ad es. la densità) sono *discontinue* (nel caso precedente, attraversando la superficie di una bolla la densità passa bruscamente dal valore tipico del liquido a quello tipico del vapore). Caratteristica tipica delle fasi è che esse possono essere separate meccanicamente (es. se si pone in quiete un sistema contenente bolle di vapore, per gravità tutto il vapore si porterà verso l'alto).

Descriviamo adesso un semplice esperimento allo scopo di esaminare il comportamento di una sostanza pura monocomponente che cambia fase

Nel seguito, ci renderemo conto che non sempre le transizioni di fase avvengono nel modo descritto, e che per particolari valori della pressione del sistema le trasformazioni possono avvenire con modalità leggermente diverse.

Si consideri una massa unitaria di sostanza pura monocomponente in fase solida contenuta in un sistema pistone-cilindro. Si supponga che la trasformazione sia reversibile. Essendo la trasformazione isobara, segue che il calore ceduto al sistema è pari all'incremento di entalpia (vedi Cap.1), il che si manifesta con un aumento della temperatura e del volume. La dilatazione per effetto del riscaldamento è tuttavia di piccolissima entità. Somministrando ancora calore ha inizio il processo di *fusione* (il processo inverso è detto *solidificazione*), ossia inizia a comparire la fase liquida e contemporaneamente si nota che la temperatura cessa di crescere e resta costante. In questa condizione il sistema è detto *bifasico* . Sebbene la pressione e la temperatura siano uniformi all'interno del sistema bifasico, le proprietà specifiche, come la densità, presentano una discontinuità passando da una fase all'altra. La ulteriore somministrazione di calore comporta un aumento progressivo della massa della fase liquida fino alla completa scomparsa della fase solida.

La quantità di calore fornita al sistema per effettuare il *cambiamento di fase* dell'intera massa presente è una misura dell' *entalpia di fusione* . Quest'ultima può anche essere vista come somma della variazione di energia interna del sistema e del lavoro di dilatazione scambiato con l'ambiente durante la trasformazione del solido in liquido.

Quando la fase solida è completamente scomparsa, la temperatura comincia nuovamente ad aumentare fino a quando non compare la fase aeriforme ed ha inizio l' *evaporazione* (il processo inverso è detto *condensazione o liquefazione*). L'energia termica fornita successivamente comporta un aumento della quantità di aeriforme a temperatura costante. Quando la sostanza è tutta in fase aeriforme, il suo volume è notevolmente maggiore di quello della fase liquida, e, continuando a somministrare calore al sistema, la temperatura cresce nuovamente.

Ripetendo l'esperimento per differenti valori di pressione si osserva che i passaggi di fase solido-liquido e liquido-aeriforme avvengono sempre a temperatura costante, ma il valore di tale temperatura varia al variare della pressione.

Ad esempio, per l'acqua, alla pressione di 0.5 bar la transizione liquido-vapore avviene alla temperatura di 76 °C; alla pressione di 1 atm (1.01325 bar) la transizione avviene a $T = 100$ °C; alla pressione di 2 bar la transizione avviene a $T = 120.2$ °C. In alta montagna (2000 m) dove la pressione atmosferica media vale 79.5 kPa, la transizione avviene a 93 °C.

La *regola delle fasi* (o di *Gibbs*) dà importanti informazioni sui legami tra temperatura e pressione per una sostanza pura monocomponente e nella forma semplificata che ci interessa è:

$$V = 3 - F \tag{2.1}$$

dove F indica il numero delle fasi coesistenti in equilibrio e V , detta *varianza* , indica il numero di variabili indipendenti tra p e T . Da tale regola si evince che:

- un sistema costituito da *una sola* fase è *bivariante* : è possibile variare arbitrariamente sia la pressione che la temperatura senza mutare il numero di fasi presenti.
- un sistema costituito da *due* fasi in equilibrio è *monovariante* : una volta assegnata o la pressione o la temperatura, non è possibile cambiare arbitrariamente l'altra variabile senza

mutare il numero di fasi presenti; ovvero, esiste una *corrispondenza biunivoca* tra la temperatura e la pressione di un sistema bifasico in equilibrio.

- un sistema costituito da tre fasi in equilibrio è *zerovariante*: ovvero, esiste una sola coppia di valori di temperatura e di pressione per cui questo può avvenire. Tali valori sono detti *pressione tripla e temperatura tripla*.

LA SUPERFICIE $p-v-T$

Abbiamo più volte ribadito che lo stato di una sostanza pura è completamente identificato da due variabili di stato indipendenti, oltre alla massa del sistema stesso.

Più precisamente, il *principio di stato* stabilisce ulteriori limitazioni a questa regola: in particolare, il sistema deve interagire con l'esterno scambiando solo calore e lavoro meccanico e l'influenza del moto macroscopico e del campo gravitazionale deve essere trascurabile. Un tale sistema viene detto *sistema semplice*.

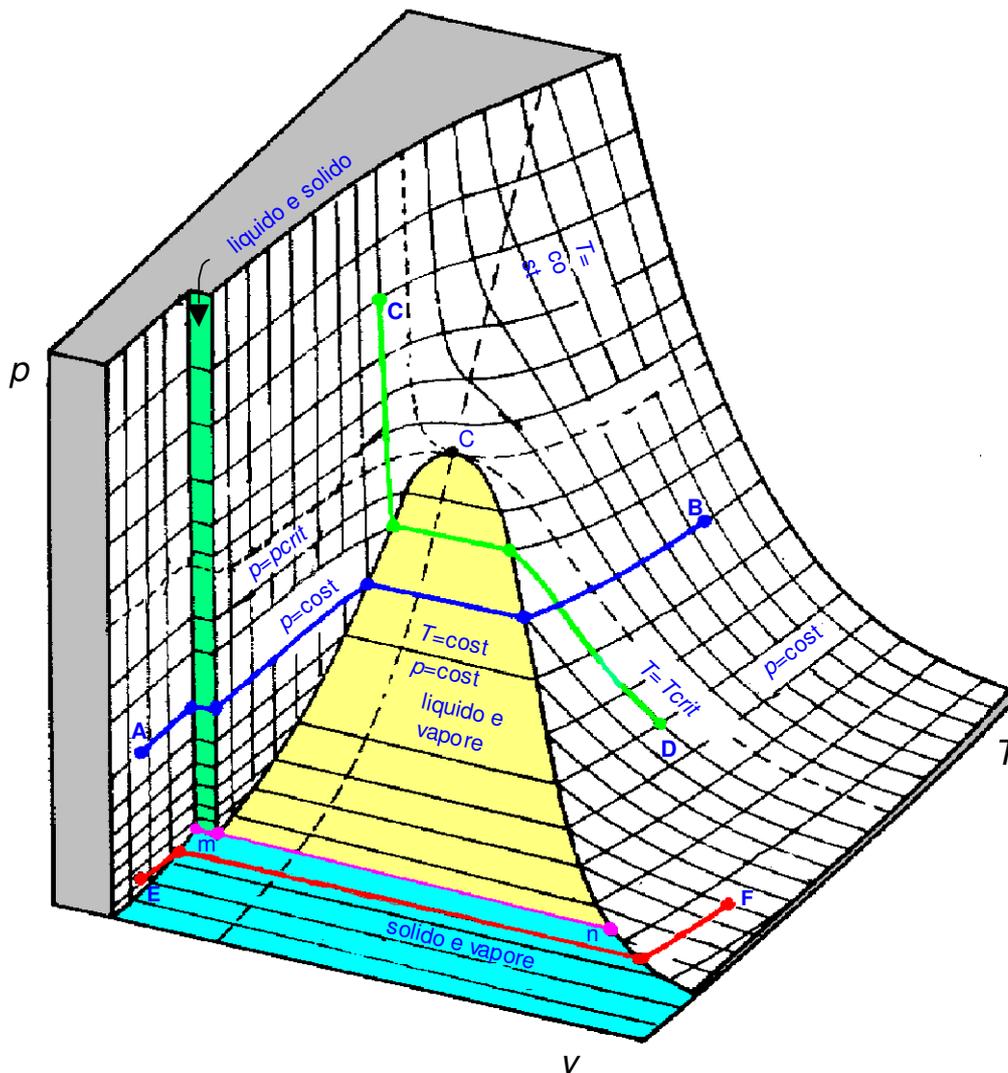


Figura 2.1. Superficie $p-v-T$

Conseguentemente tutti gli stati di equilibrio di un tale sistema possono essere rappresentati da una superficie in uno spazio a tre dimensioni p, v, T ; tale superficie è detta *superficie caratteristica*, o *superficie p - v - T* della sostanza. La superficie suddetta ha qualitativamente l'aspetto indicato in Fig.1. E' da notare che la figura non è in scala in quanto i volumi specifici del solido e del liquido sono in genere di alcuni ordini di grandezza inferiori a quello dell'aeriforme.

Si nota che i punti rappresentativi dei possibili *stati monofasici* costituiscono tre regioni corrispondenti alle fasi solida, liquida ed aeriforme. Tali regioni sono separate da altre tre (in colore) che rappresentano gli *stati bifasici*: un sistema plurifasico in equilibrio è detto *saturo*.

Osservando la superficie caratteristica $f(p, v, T) = 0$ appare chiaro che nelle tre regioni monofasiche lo stato è univocamente determinato dalla conoscenza dei valori di una qualsiasi coppia di coordinate tra p, v e T , in quanto le tre proprietà sono tra loro indipendenti.

Nelle regioni bifasiche, invece, temperatura e pressione sono tra loro dipendenti; fissata ad esempio la temperatura, due fasi possono coesistere in equilibrio in corrispondenza di un solo valore di pressione. Per tale motivo le tre regioni bifasiche sono dei settori cilindrici con generatrice parallela all'asse dei volumi specifici. La conoscenza di p e T , in questo caso, non permette di individuare univocamente lo stato, ma il segmento luogo degli infiniti possibili stati di equilibrio per la miscela, ciascuno dei quali corrisponde ad un diverso valore del volume specifico.

Si osserva ancora che le zone di coesistenza delle fasi liquido-vapore, solido-liquido e solido-vapore confinano lungo una linea (m - n): in queste condizioni le tre fasi coesistono in equilibrio e lo stato è quindi detto *stato triplo*: come anticipato precedentemente, questo stato è caratterizzato da un'unica coppia di valori di pressione e temperatura, (detti *pressione tripla* e *temperatura tripla*) caratteristici della sostanza considerata.

Sul diagramma è anche rappresentato l'andamento di trasformazioni a *pressione costante* (A-B, E-F) ed a *temperatura costante* (C-D).

Per continuare le nostre considerazioni sulla superficie caratteristica, appare più opportuno considerare le sue proiezioni sul piano p - v (diagramma di Andrews) e sul piano p - T (diagramma di Regnault).

Diagramma pressione-volume specifico (diagramma di Andrews)

Il diagramma p - v , ottenuto proiettando la superficie caratteristica $f(p, v, T) = 0$ sul piano pressione-volume specifico, è riportato qualitativamente in Fig.2 per una sostanza pura monocomponente con una sola fase solida che fondendo espande. Sia le regioni monofasiche che quelle bifasiche della superficie caratteristica si proiettano in questo piano come aree. La linea tratteggiata $abcdef$ rappresenta una *trasformazione isoterma*. Si nota che le curve *isoterme* (luogo degli stati che corrispondono alla stessa temperatura) hanno un tratto orizzontale all'interno delle zone bifasiche: infatti, poiché in tali regioni pressione e temperatura non sono indipendenti, le isoterme divengono anche isobare (e per questo talvolta sono dette *isotermobariche*).

Le linee che delimitano le regioni bifasiche sono rappresentative di stati in cui la sostanza è ancora in condizioni di saturazione: in particolare per la miscela liquido-aeriforme si avranno rispettivamente solo liquido saturo e solo vapore saturo secco, e quindi le linee mC ed nC sono dette *curva limite inferiore* e *curva limite superiore*. Tali curve tendono a convergere con l'aumento della pressione (il che vuol dire che la differenza tra il volume specifico del vapore saturo secco e del liquido saturo diminuisce all'aumentare della pressione) e si uniscono in un

punto che viene detto *punto critico*. I valori di temperatura e pressione corrispondenti a tale stato sono detti *temperatura critica* e *pressione critica* e sono caratteristici di ogni particolare sostanza (es. per l'acqua si ha $p_c = 221$ bar, $T_c = 364$ °C; per le altre sostanze, vedi Tab.a1 in appendice). La particolare isoterma che passa per il punto critico viene detta *isoterma critica*. Si denotano inoltre con le dizioni di (v. Fig.2):

- *liquido sottoraffreddato* o *compresso* gli stati il cui punto rappresentativo è a sinistra della curva limite inferiore e al di sotto della isobara critica;
- *liquido saturo* gli stati che sono sulla curva limite inferiore;
- *vapore saturo* o *miscela bifase* gli stati interni alla regione bifasica liquido-gas;
- *vapore saturo secco* gli stati che sono sulla curva limite superiore;
- *vapore surriscaldato* gli stati compresi tra la curva limite superiore e l'isoterma critica.
- *gas* gli stati compresi al di sopra della isoterma critica ed al di sotto della isobara critica.
- *fluido compresso* gli stati al di sopra della isobara critica;

Le definizioni di *gas* e *fluido compresso* variano leggermente da un testo ad un altro. Alcuni testi definiscono *gas* tutti gli stati al di sopra dell'isoterma critica.

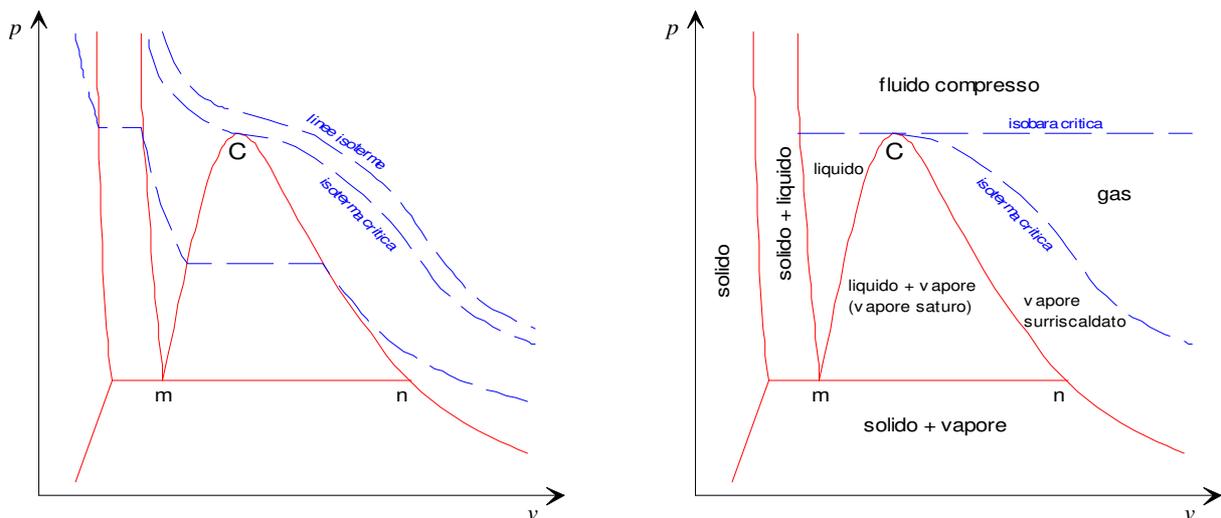


Figura 2.2. Diagramma di Andrews (p - v) e relative zone di esistenza delle fasi

Titolo del vapore saturo

Osservando il piano p - v si nota che la conoscenza del volume specifico e della pressione (oppure della corrispondente temperatura) identifica lo stato di un vapore saturo. Risulta comodo definire una nuova proprietà di stato, detta *titolo* del vapore saturo ed indicata con x , che esprime la composizione massica della miscela

$$x = \frac{\text{massa del vapore}}{\text{massa totale del sistema}} = \frac{M_g}{M_{TOT}} \quad (2.2)$$

Il titolo è una grandezza adimensionale definita solo per il vapore saturo, e può assumere valori compresi tra 0 (curva limite inferiore) ed 1 (curva limite superiore).

Il luogo dei punti aventi eguale titolo definisce sui diagrammi di stato le curve *isotitole* che, come quelle estreme coincidenti con le curve limiti inferiore e superiore, convergono tutte nel punto critico.

Il volume specifico può essere espresso in funzione del titolo e dei volumi del liquido saturo e del vapore saturo secco sfruttando il fatto che il volume è una proprietà additiva (nel seguito, i pedici *f* e *g* fanno riferimento rispettivamente al liquido saturo ed al vapore saturo secco)

$$V = V_f + V_g = M_f v_f + M_g v_g$$

$$v = \frac{V}{M} = \frac{M_f}{M} v_f + \frac{M_g}{M} v_g = (1-x)v_f + xv_g \quad (2.3)$$

da cui infine

$$v = v_f + x(v_g - v_f)$$

La relazione precedente mostra che per un vapore saturo esiste, a ciascuna pressione o temperatura, una corrispondenza biunivoca tra volume specifico e titolo; lo stato può quindi essere caratterizzato anche dalla coppia di proprietà *p* (oppure *T*) ed *x*.

La relazione suddetta ha anche una facile interpretazione grafica: il titolo nel punto *d* di Fig.2 è dato infatti dal rapporto delle lunghezze dei segmenti, $\underline{cd} / \underline{ce}$.

Relazioni simili valgono ovviamente per le altre proprietà specifiche, ovvero energia interna, entalpia ed entropia (la dimostrazione è analoga a quella riportata sopra per *v*):

$$u = u_f + x(u_g - u_f) = u_f + x u_{fg}$$

$$h = h_f + x(h_g - h_f) = h_f + x h_{fg} \quad (2.4)$$

$$s = s_f + x(s_g - s_f) = s_f + x s_{fg}$$

Le relazioni suddette permettono di ricavare *v*, *u*, *h* e *s* per una miscela bifase noti *x* e le corrispondenti proprietà del liquido saturo e del vapore saturo secco. Consentono anche, viceversa, di ricavare il titolo, una volta nota una qualsiasi tra le variabili *v*, *u*, *h* e *s*, e le corrispondenti proprietà del liquido saturo e del vapore saturo secco.

Oltre al titolo, in alcune applicazioni ha interesse definire il *grado di vuoto*, ϵ , ovvero il rapporto tra il *volume* occupato dalla fase vapore ed il volume totale, come illustrato nel seguente esempio.

ESEMPIO 2.1

Si consideri una bombola del volume $V = 15$ L che contiene $M = 2$ kg di propano, a temperatura ambiente di 20 °C. Determinare titolo e grado di vuoto.

 *La soluzione è riportata nel file C2GVUOTO.XLS*

Il volume specifico vale:

$$v = \frac{V}{M} = \frac{0.015}{2} = 0.0075 \text{ m}^3/\text{kg}$$

Le tabelle termodinamiche forniscono per il propano in condizioni di saturazione alla temperatura di 20 °C, una pressione di saturazione di 0.83 MPa, ed i volumi specifici del liquido saturo e del vapore saturo secco valgono rispettivamente $v_f = 0.001999$ e $v_g = 0.05525$

m³/kg. Conseguentemente, dato che il volume specifico è compreso tra i due valori indicati, il fluido è effettivamente in condizioni di saturazione ed il titolo è dato da, v. Eq.(2.3)

$$x = \frac{v - v_f}{v_g - v_f} = \frac{0.0075 - 0.001999}{0.05525 - 0.001999} = 0.1033$$

Il grado di vuoto si può determinare da

$$\varepsilon = \frac{V_g}{V} = \frac{M_g v_g}{V} = \frac{x M v_g}{V} = \frac{x v_g}{v} = \frac{0.1033 \cdot 0.05525}{0.0075} = 0.761$$

Notare che a causa dell'alto volume specifico della fase vapore, il grado di vuoto cresce molto più rapidamente del titolo. Questo è mostrato in Fig.3 , dove, *a parità di volume totale del recipiente*, si riporta in funzione del titolo la massa di fluido contenuta nel recipiente ed il corrispondente grado di vuoto. Inoltre, trattandosi di fluido in saturazione, la pressione della bombola dipende solo dalla temperatura e non dà alcuna indicazione sulla massa di fluido contenuta nel recipiente.

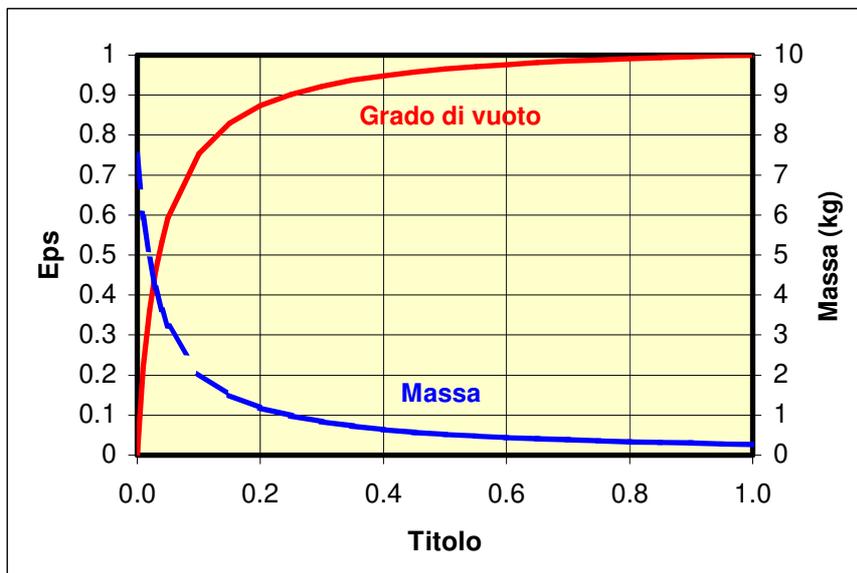


Figura 2.3. Variazione della massa contenuta nel recipiente e del titolo con il grado di vuoto.

□

Diagramma p - T (diagramma di Regnault)

La proiezione della superficie caratteristica sul piano p - T è detta appunto diagramma p - T o *diagramma di Regnault* o anche *diagramma di fase*. In Fig.4 è riportato il diagramma p - T relativo ad una sostanza pura monocomponente che fondendo espande.

Poiché, come si è visto le regioni bifasiche della superficie caratteristica sono rappresentate da settori cilindrici con generatrice parallela all'asse del volume specifico, le loro proiezioni sul piano p - T sono delle linee e, in particolare, la linea comune alle tre regioni bifasiche (linea tripla) si proietta in un punto detto *punto triplo*. La linea AT è detta (a seconda del verso in cui viene attraversata) di *sublimazione o brinamento*, la linea BT è detta di *fusione o solidificazione*, la linea CT è detta di *evaporazione o condensazione*. Esse delimitano i domini di esistenza delle fasi solida, liquida ed aeriforme, come indicato in Fig.4.

La linea di solidificazione ha pendenza positiva nella figura, mentre il contrario accade per sostanze che solidificando espandono (come l'acqua).

La corrispondenza biunivoca tra p e T per sistemi bifasici in equilibrio, è di notevole importanza applicativa; in questo ambito lo è soprattutto quella relativa alle miscele liquido vapore in condizioni di saturazione. Il legame funzionale rappresentato dalla linea CT è fornito in forma tabellare per i vari fluidi nelle cosiddette *tabelle del vapore saturo*, che riportano anche altre grandezze utili che utilizzeremo in seguito. Un esempio per l'acqua è riportato in Tab.1.

E' bene sottolineare infine che la conoscenza della pressione e della temperatura sebbene non sempre consenta l'identificazione dello stato, permette in ogni caso d'individuare la fase o le fasi presenti, come chiarito dal seguente esempio.

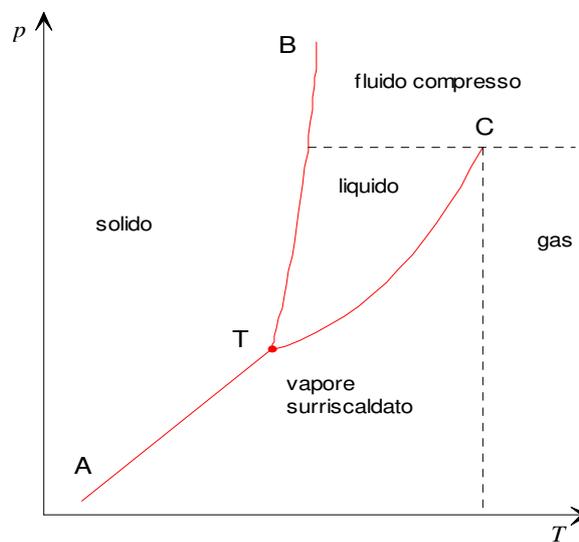


Figura 2.4. Diagramma di fase o di Regnault (p - T) e relativi campi di esistenza delle fasi.

ESEMPIO 2.2 – Identificazione dello stato

Si consideri un sistema costituito da acqua alla temperatura di 60 °C ed alla pressione di 7×10^5 Pa; ci si chiede se lo stato è identificato e quali fasi costituiscono il sistema.

Consultando la Tab.1, od un programma di calcolo delle proprietà termodinamiche, si deduce che la pressione è maggiore di quella a cui il sistema dovrebbe trovarsi per essere in condizione di saturazione alla temperatura di 60 °C, (ovvero 0.2 bar) ed inferiore alla pressione critica (221.5 bar). Esso è quindi costituito dalla sola fase liquida (liquido sottoraffreddato) e, per la regola delle fasi, lo stato è identificato dalla conoscenza dei valori di pressione e temperatura.

□

Altri diagrammi di stato

Diagramma temperatura-entropia

In Fig.5 è riportato un diagramma qualitativo temperatura-entropia specifica per una sostanza pura monocomponente con una sola fase solida che fondendo espande. La zona bifasica

liquido-aeriforme è delimitata dall'isoterma del punto triplo (segmento ab) e dalle curve limiti inferiore e superiore, ac e bc . All'interno di questa regione le isoterme sono anche isobare. Le curve a pressione costante (dette *isobare*) hanno andamento $d-m-n-h$. Nella regione del liquido le isobare si addensano sulla curva limite inferiore in quanto, come si vedrà in seguito, l'entropia della sostanza in fase liquida è poco dipendente dalla pressione. Pertanto in due stati di equilibrio caratterizzati dalla stessa temperatura ma da valori di pressione diversi, come i punti d ed e riportati in Fig.5, il valore dell'entropia specifica è praticamente lo stesso e quindi i due punti sono di fatto coincidenti.

Si noti che in Fig.5 la zona del liquido sottoraffreddato è stata esageratamente espansa per meglio evidenziare quanto detto; su di un diagramma quantitativo la regione del liquido è praticamente coincidente con la curva limite inferiore. Una rappresentazione in scala per l'acqua è riportata in appendice, Fig.a2.

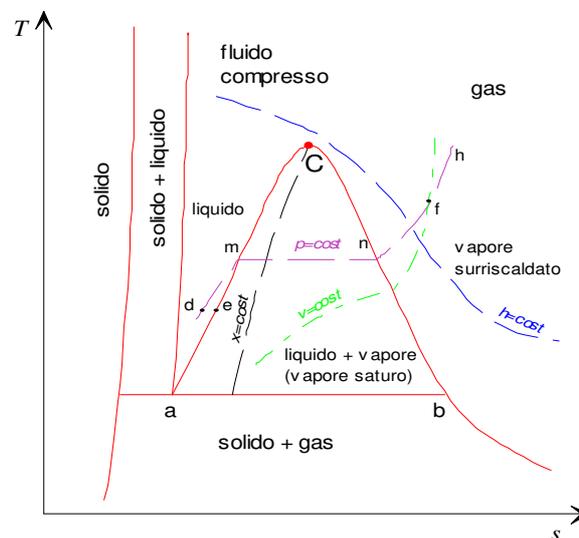


Figura 2.5. Diagramma entropico o T - s e relativi campi di esistenza delle fasi. La isobara critica (che delimita inferiormente la zona del fluido compresso) e la isoterma critica (che divide la zona del gas da quella del vapore surriscaldato) non sono riportate per non sovraccaricare il disegno.

La pendenza di un'isobara può essere valutata dalla relazione tra entropia, temperatura e pressione:

$$ds = \frac{c_p}{T} dT + \frac{(B_h - v)}{T} dp$$

da cui

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = \frac{c_p}{T} \quad , \quad \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_p = \frac{T}{c_p} \quad (2.5)$$

Ne segue che l'isobara è una curva monotona crescente, avendo pendenza positiva pari a T/c_p . In relazione a questo ultimo punto si nota che spostandosi lungo un'isobara verso valori

crescenti della temperatura, dal punto n al punto h di Fig.5, la pendenza della curva aumenta, essendo trascurabile la variazione di c_p rispetto a quella di T .

Dalla seconda relazione di Gibbs ($dh = Tds + vdp$) segue che le aree sottese dalle isobare rappresentano le variazioni di entalpia specifica; in particolare, l'area sottesa al tratto di isobara-isoterma compreso tra le curve limiti rappresenta l'entalpia di vaporizzazione.

Sul diagramma possono essere tracciate anche le linee a volume costante, dette *isocore*. Procedendo in maniera analoga a quanto fatto per le isobare, si determina che la loro pendenza è data da T/c_v . Dato che è sempre $c_v < c_p$, le isocore sono più inclinate delle isobare.

Diagramma entalpia-entropia

Il diagramma entalpia-entropia specifiche, introdotto nel 1904 dal triestino Ricard Mollier (1863-1935), è, come si vedrà nel seguito, di grande utilità pratica per il calcolo dei sistemi aperti a regime.

In Fig.6 è riportato un diagramma qualitativo $h-s$, per una sostanza pura monocomponente, relativamente alle zone di maggior interesse, ovvero alla regione bifasica liquido-gas ed a quella dell'aeriforme. Iniziando col considerare la regione bifasica, si osserva che le isobare-isoterme hanno andamento lineare; infatti, la seconda equazione di Gibbs fornisce:

$$ds = \frac{1}{T} dh - \frac{v}{T} dp$$

da cui

$$\left(\frac{\partial s}{\partial h}\right)_p = \frac{1}{T}, \quad \left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_p = T \quad (2.6)$$

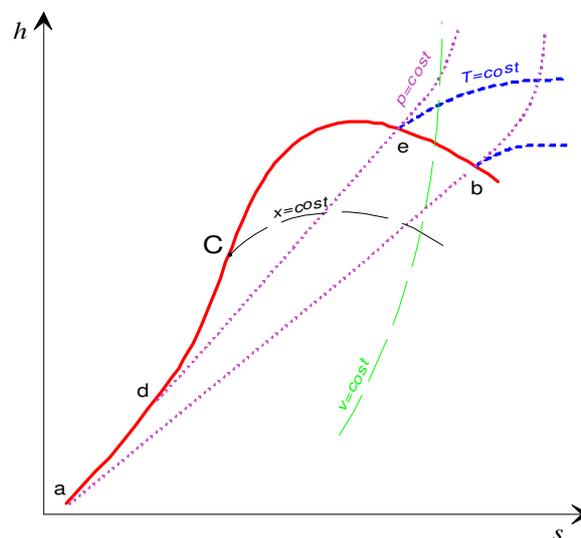


Figura 2.6. Diagramma di Mollier ($h-s$)

Dalla Fig.6 si rileva che l'isobara de ha pendenza maggiore della ab ; ciò è deducibile dalla equazione precedente notando che la temperatura di saturazione corrispondente alla pressione della de è maggiore di quella corrispondente alla pressione della ab . Si deduce ancora che al punto critico è:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_p = T_c \neq 0 \quad (2.7)$$

e che quindi il punto critico *non* è il massimo della curva *acb* (vedi Fig.6).

Dalla Eq.(2.7) segue anche che l'isobara è una curva monotona crescente. Le isoterme in corrispondenza della curva limite superiore si separano dalle isobare e tendono, al diminuire della pressione, a diventare orizzontali. Come vedremo in seguito, ciò è in accordo con il fatto che l'entalpia, secondo il modello di gas ideale, è funzione soltanto della temperatura.

Percorrendo l'isobara nel verso delle temperature crescenti la pendenza (data dalla temperatura stessa) va aumentando, pertanto le curve a pressione costante presentano la concavità rivolta verso l'alto.

In Appendice è riportato il diagramma di Mollier per l'acqua, Fig.a3. Lo stato scelto come riferimento è quello in cui si ha solo liquido saturo al punto triplo; per tale stato si ritiene arbitrariamente $h = s = 0$.

Diagramma pressione-entalpia

In Fig.7 è riportato un diagramma qualitativo pressione-entalpia specifica per una sostanza pura monocomponente, relativamente alle zone di maggior interesse nell'ambito della termodinamica applicata. Questo diagramma è di particolare utilità per il calcolo delle proprietà nei componenti costituenti un ciclo frigorifero.

La zona delle miscele bifasiche è delimitata dalle curve limite; il vertice di tale regione è il punto critico, C. La lunghezza del tratto di isobara nella regione bifasica rappresenta l'entalpia di vaporizzazione corrispondente a quella pressione di saturazione. La lunghezza di questi segmenti decresce all'aumentare della pressione. Le isoterme hanno andamento praticamente verticale nella zona dei liquidi in quanto, come si vedrà successivamente, la dipendenza dell'entalpia di un liquido dalla pressione è trascurabile. Nella regione bifasica l'isoterma è ovviamente orizzontale; nella zona del vapore surriscaldato assume pendenza negativa e tende a diventare verticale nel campo delle basse pressioni in quanto (vedi in seguito) l'entalpia di un aeriforme a bassa pressione è funzione solo della temperatura.

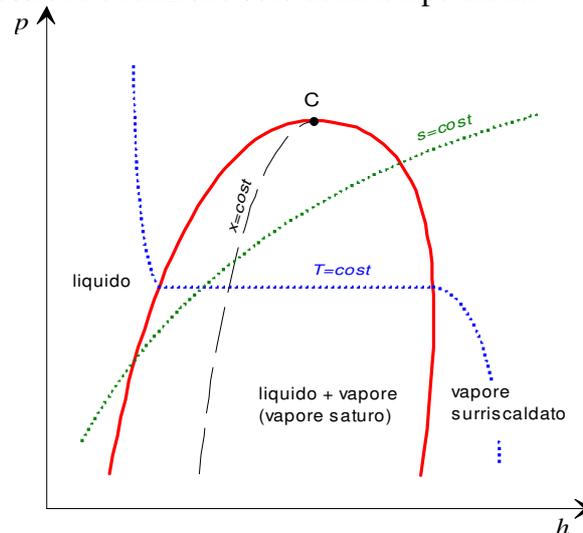


Figura 2.7. Diagramma $p-h$

Le *isoentropiche*, linee ad entropia costante, sono anch'esse rappresentate in Fig.7.

Dalla seconda equazione di Gibbs si può ricavare che le isoentropiche hanno in ciascun punto pendenza pari al valore della densità nel punto stesso.

Le tavole termodinamiche ed i programmi di calcolo

I diagrammi termodinamici forniscono utili informazioni qualitative sull'andamento delle trasformazioni ed anche risultati quantitativi non troppo accurati. Per ottenere tali risultati con una migliore precisione, si ricorre alle tabelle termodinamiche o ai programmi per il calcolo delle proprietà termodinamiche.

Le tabelle termodinamiche sono in genere di due tipi: *tabelle del vapore saturo* (notare che il termine vapore non fa necessariamente riferimento all'acqua) e *tabelle del liquido compresso e del vapore surriscaldato*.

La tabella del vapore saturo fa riferimento alla sostanza in condizioni di saturazione. Sebbene talvolta essa possa avere una forma leggermente differente, essa contiene in genere le informazioni riportate in Tab.1. Le colonne A e B contengono rispettivamente la pressione e la temperatura di saturazione: esse rappresentano quindi quantitativamente il legame funzionale rappresentato dalla linea di evaporazione-condensazione sul diagramma $p-T$. Le colonne C e D contengono rispettivamente il volume specifico del liquido saturo e quello del vapore saturo secco: da esse, noto (oltre naturalmente alla pressione od alla temperatura) il titolo e tramite la Eq.(2.3) è possibile ricavarsi il volume specifico della miscela bifasica. Tali colonne sono anche la rappresentazione numerica delle curve limite inferiore e superiore sul diagramma $p-v$. Le colonne E e F rappresentano rispettivamente l'entalpia specifica del liquido saturo e quella del vapore saturo secco (curve limiti inferiore e superiore nel diagramma $p-h$). Infine le colonne G ed H rappresentano l'entropia specifica del liquido saturo e quella del vapore saturo secco (curve limiti inferiore e superiore nel diagramma $T-s$). Ovviamente, noto il titolo (oltre naturalmente alla pressione od alla temperatura) è possibile con questa tabella calcolare il volume specifico, l'entalpia e l'entropia specifica di una miscela bifasica utilizzando le Eq.(2.3)-(2.4). Anche l'energia interna può essere calcolata sottraendo il prodotto pv al valore dell'entalpia.

Le tabelle del liquido compresso e vapore surriscaldato hanno l'aspetto riportato in Tab.2. Esse contengono l'andamento delle proprietà v , h ed s in funzione della temperatura lungo una isobara. Si noti il brusco salto che tali proprietà subiscono quando la temperatura supera il valore di saturazione e si passa dalla fase liquida quella di vapore surriscaldato (tra 120 e 130°C nel caso considerato).

Le tabelle termodinamiche presentano una serie di inconvenienti, tra cui il maggiore consiste nella necessità di interpolare il valori quando non è riportato in esse il valore esatto di temperatura o pressione richiesto. Nel caso del vapore surriscaldato, è talvolta necessario interpolare tra due tabelle relative a differenti pressioni. A questo ha fatto di recente rimedio la disponibilità di programmi di calcolo che sono in grado di fornire le proprietà di una ampia gamma di sostanze per qualunque valore delle variabili di ingresso (vedi bibliografia).

ESEMPIO 2.3 – Riscaldamento a volume costante

Si consideri una bombola del volume $V = 15$ L che contiene $M = 2$ kg di propano, a temperatura ambiente di 20 °C. Determinare il valore raggiunto dalla pressione se il contenitore si porta alla temperatura di 80 °C e l'energia che è necessario fornire.

Abbiamo a che fare con un sistema chiuso, dal contorno rigido: questo implica che non ci sono scambi di lavoro con l'esterno ed il volume si mantiene costante.

Il volume specifico della miscela (calcolato nell'esempio 2.1) vale 0.0075 m³/kg.

Lo stati iniziale e finale sono identificati dalla coppia di variabili di stato volume specifico (costante) e temperatura (variabile)

Tramite il programma CATT, si ottengono i dati seguenti per il propano nello stato iniziale e finale.

Stato	T	p	v	u	h	s	x	
	°C	MPa	m ³ /kg	kJ/kg	kJ/kg	kJ/kg K		
1.	20	0.8362	0.0075	-18.23	-11.95	4.577	0.1033	Miscela bifase
2.	80	3.131	0.0075	217.7	241.1	5.305	0.5271	Miscela bifase

Da cui si vede che nello stato finale il fluido è ancora in condizioni di saturazione e la pressione supera i 3 MPa (30 bar): questo potrebbe provocare il cedimento del contenitore ed illustra chiaramente il pericolo derivante dall'espore bombole chiuse alle fonti di calore.

La energia necessaria per la trasformazione viene fornita sotto forma di calore (abbiamo escluso gli scambi di lavoro essendo il recipiente rigido) e per il primo principio della termodinamica abbiamo

$$du = dq$$

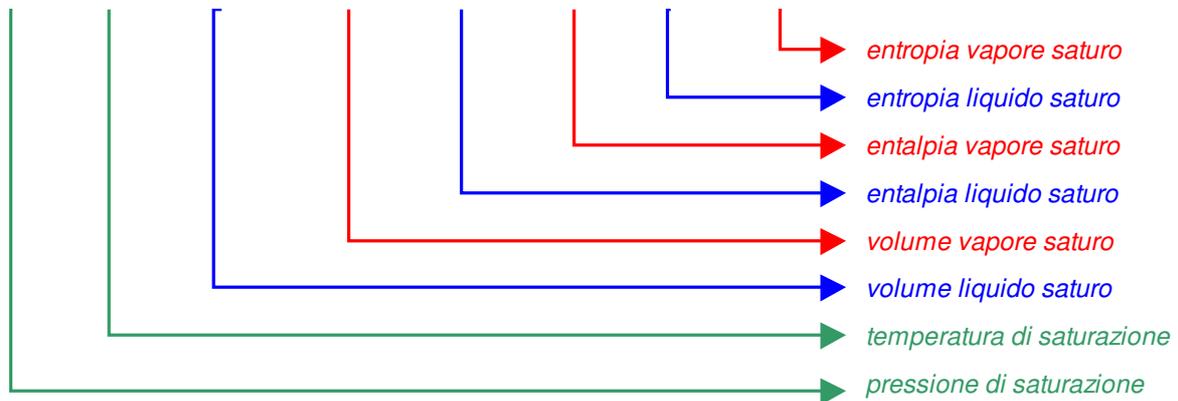
$$q_{12} = u_2 - u_1$$

$$Q_{12} = U_2 - U_1 = M (u_2 - u_1) = 2 \cdot (217.7 + 18.2) = 472 \text{ kJ}$$

Si potrebbe in seguito determinare, in base a considerazioni di trasmissione del calore, il *tempo* necessario perché la trasformazione avvenga (ovvero il tempo necessario a trasferire la quantità di calore Q_{12}), che è importante conoscere per stabilire i tempi di intervento di eventuali sistemi di sicurezza.



A	B	C	D	E	F	G	H
p [bar]	T [°C]	v_f [m³/Kg]	v_g [m³/Kg]	h_f [kJ/Kg]	h_g [kJ/Kg]	s_f [kJ/kg K]	s_g [kJ/kg K]
0.05	32.898	0.0010052	28.19	137.77	2561.6	0.4763	8.3960
0.07	39.025	0.0010074	20.53	163.38	2572.6	0.5591	8.2767
0.08	41.534	0.0010084	18.10	173.86	2577.1	0.5925	8.2296
1.0	99.362	0.0010434	1.694	417.51	2675.4	1.3027	7.3598
2.0	120.23	0.0010608	0.8854	504.70	2706.3	1.5301	7.1298
10.0	179.98	0.0011274	0.1943	762.61	2776.2	2.1382	6.5828
15.0	198.29	0.0011539	0.1317	844.67	2789.9	2.3145	6.4406
17.0	204.31	0.0011633	0.1166	871.84	2793.4	2.3713	6.3957
20.0	212.37	0.0011766	0.09954	908.59	2797.2	2.4469	6.3367
30.0	233.84	0.0012163	0.06663	1008.4	2802.3	2.6455	6.1837
40.0	250.33	0.0012521	0.04975	1087.4	2800.3	2.7965	6.0685
50.0	263.91	0.0012858	0.03943	1154.5	2794.2	2.9206	5.9735
60.0	275.55	0.0013187	0.03244	1213.7	2785.0	3.0273	5.8908
70.0	285.79	0.0013513	0.02737	1267.4	2773.5	3.1219	5.8162
90.0	303.31	0.0014179	0.02050	1363.7	2744.6	3.2867	5.6820
100	310.96	0.0014526	0.01804	1408.0	2727.7	3.3605	5.6198
110	318.05	0.0014887	0.01601	1450.6	2709.3	3.4304	5.5595
120	324.65	0.0015268	0.01428	1491.8	2689.2	3.4972	5.5002
130	330.83	0.0015672	0.01280	1532.0	2667.0	3.5616	5.4408
140	336.64	0.0016106	0.01150	1571.6	2642.4	3.6242	5.3803
148	341.06	0.0016481	0.01056	1603.1	2620.7	3.6736	5.3305
150	342.13	0.0016579	0.01034	1611.0	2615.0	3.6859	5.3178
160	347.33	0.0017103	0.009308	1650.5	2584.9	3.7471	5.2531
170	352.26	0.0017696	0.008371	1691.7	2551.6	3.8107	5.1855
180	356.96	0.0018399	0.007498	1734.8	2513.9	3.8765	5.1128



200	365.70	0.0020370	0.005877	1826.5	2418.4	4.0149	4.9412
-----	--------	-----------	----------	--------	--------	--------	--------

Tab.1 - Proprietà termodinamiche del vapor d'acqua saturo

$p=2$ bar			
Temp.	Volume Specifico	Entalpia Specifica	Entropia Specifica
°C	m ³ /kg	kJ/kg	kJ/kg/K
10	0.001	42.19	0.151
20	0.001002	84.13	0.2965
30	0.001004	125.9	0.4368
40	0.001008	167.7	0.5724
50	0.001012	209.5	0.7036
60	0.001017	251.3	0.831
70	0.001023	293.1	0.9547
80	0.001029	335	1.075
90	0.001036	377	1.192
100	0.001043	419.1	1.307
110	0.001052	461.3	1.418
120	0.00106	503.7	1.528
130	0.9102	2727	7.179
140	0.935	2748	7.23
150	0.9596	2769	7.279
175	1.02	2820	7.397
200	1.08	2870	7.507
225	1.14	2921	7.61
250	1.199	2971	7.709
275	1.258	3021	7.802
300	1.316	3072	7.893
350	1.433	3174	8.063
400	1.549	3277	8.222
450	1.665	3381	8.371
500	1.781	3487	8.513
550	1.897	3595	8.648
600	2.013	3704	8.777

Tab. 2.2 - Acqua compressa e vapore surriscaldato a $p=2$ bar

MODELLI SEMPLIFICATI DEI FLUIDI TERMODINAMICI: IL GAS IDEALE E IL LIQUIDO INCOMPRESSIBILE.

La equazione di stato $f(p, v, T) = 0$ assume nel caso generale una forma matematica assai complessa che la rende inutilizzabile, salvo l'uso con un calcolatore. Tuttavia, per alcune classi di sostanze essa assume una forma matematica semplice che permette di utilizzarla direttamente, come vedremo in seguito.

Il modello di fluido incompressibile

L'equazione di stato $f(p, v, T) = 0$ per una sostanza pura in fase liquida si fonda usualmente sull'ipotesi di *comportamento incompressibile*, ovvero sull'ipotesi di ritenere il volume specifico costante lungo una qualunque trasformazione.

E' bene precisare che nessuna sostanza reale è incompressibile e che il modello di liquido incompressibile, a differenza del modello di gas ideale che verrà esposto in seguito, non rappresenta un comportamento asintotico, ma un'idealizzazione che consente di

semplificare notevolmente la metodologia per il calcolo delle proprietà. L'assunzione fatta risulta comunque soddisfacentemente verificata negli stati termodinamici del liquido lontani dallo stato critico. Per tale ragione, porre costante il volume specifico non corrisponde ad assegnarli un determinato valore numerico (come accade ad es. nel caso della costante dei gas). Nella pratica si sceglie come costante un idoneo valor medio nel campo di pressione e temperatura di interesse.

Nell'ipotesi di comportamento incomprimibile, l'equazione di stato per una sostanza pura in fase liquida è semplicemente:

$$v = \text{cost} \quad (2.8)$$

E' evidente quindi che una sostanza a comportamento incomprimibile non ha possibilità di scambiare lavoro reversibile di dilatazione con l'ambiente.

Il calcolo della variazione di energia interna risulta immediato, semplificando la relazione generale per $dv=0$

$$du = c_v dT \quad (2.9)$$

dato che ovviamente per un fluido incomprimibile i coefficienti di β e k sono nulli, dalle relazioni generali (v. Tab.4 del Cap.1) segue che i calori specifici a pressione costante e a volume costante sono uguali: usualmente il pedice viene quindi soppresso.

La variazione di entalpia è data quindi da

$$dh = d(u + pv) = du + pdv + vdp = c dT + vdp \quad (2.10)$$

Infine, nell'ipotesi di $v = \text{cost.}$, la prima equazione di Gibbs diventa:

$$ds = \frac{c}{T} dT \quad (2.11)$$

La quale mostra che per un fluido incomprimibile temperatura ed entropia *non sono variabili indipendenti*. Le relazioni presentate, consentono di valutare le variazioni delle proprietà u, h, s per una sostanza pura in fase liquida, ovviamente nell'ambito dell'approssimazione di tale modello idealizzato.

Il modello di gas ideale

Equazione di stato

Osservazioni sperimentali su sostanze in fase gassosa consentono di asserire che in condizioni particolari (che esamineremo in dettaglio in seguito) l'equazione di stato $f(p, v, T) = 0$ assume una forma relativamente semplice:

$$pV = n \Re T \quad (2.12)$$

dove n è il numero di moli della sostanza ed \Re è una costante, il cui valore è pari a 8315 J/kmol K e non dipende dal tipo di gas considerato, per cui essa viene detta *costante universale dei gas*. Questo vuol dire che il comportamento di questa sostanza dipende solo dal numero di moli presenti e non dalla natura delle molecole. Tale fluido viene detto *gas ideale* o anche *gas perfetto*.

E' stato dimostrato che un comportamento del tipo indicato dall'equazione precedente è predicibile teoricamente considerando il gas come un insieme di punti materiali (che rappresentano le singole molecole) che interagiscono tra di loro e con le pareti unicamente tramite urti elastici.

Dato che di solito facciamo riferimento, anziché ad una mole, ad una massa unitaria di fluido, è opportuno riarrangiare l'equazione precedente facendovi comparire il volume specifico. Dividendo ambo i membri per la massa totale di gas M e introducendo la massa molare, $\mu = M/n$, si ottiene:

$$p \frac{V}{M} = \frac{n}{M} \Re T \quad (2.13)$$

$$pv = \frac{\Re}{\mu} T = RT$$

dove è evidente che la costante R (detta talvolta *costante caratteristica* del gas) assume un valore diverso per ciascun gas. I valori di μ ed R sono riportati, per alcune sostanze, in Tab.a2. Ovviamente, la relazione precedente può essere riscritta in termini della costante caratteristica, del volume totale e della massa

$$pV = MRT \quad (2.14)$$

ESEMPIO 2.4 – Massa di gas contenuta in una bombola

Una bombola del volume di 14 L contiene ossigeno alla pressione di 70 bar ed alla temperatura di 20 °C. Assumendo la validità del modello di gas ideale, calcolare la massa di gas contenuta nella bombola.

Dalla Tab.a1, per l'ossigeno si ha $R= 260.83$ J/kg K; dalla relazione precedente quindi (esprimendo tutte le grandezze in unità SI)

$$M = \frac{pV}{RT} = \frac{7 \cdot 10^6 \cdot 0.014}{260.83 \cdot 293.15} = 1.28 \text{ kg}$$

Notare che dal programma CATT si ottiene $v = 0.01043$ m³/kg, da cui $M = V/v = 1.34$ kg: il modello di gas ideale ha quindi in queste condizioni un errore di circa il 4.5 %.

□

Calcolo delle variazioni di energia interna, entalpia ed entropia per un gas ideale.

Per un gas ideale, l'energia interna e l'entalpia *dipendono unicamente dalla temperatura*. Ne segue anche che per un gas ideale u , h e T *non sono variabili di stato indipendenti* e assegnare un valore determinato ad una coppia tra loro non consente di determinare univocamente lo stato del sistema.

Ciò fu mostrato come risultato sperimentale da Joule e Thompson, che idearono un celebre esperimento per dimostrare che l'espansione isoentalpica di un gas, in condizioni prossime a quelle ideali, è anche isoterma. Il fatto che nel diagramma h - s (illustrato in precedenza) le isoterme tendano a diventare isoentalpiche per bassi valori della pressione conferma ulteriormente quanto affermato.

In altri termini, i coefficienti B_u e B_h nelle Eq.(1.48) e (1.50) del Cap.1 sono *identicamente nulli* per un gas ideale e tali relazioni possono essere riscritte nella forma

$$\begin{aligned} du &= c_v(T) dT \\ dh &= c_p(T) dT \end{aligned} \quad (2.15)$$

dove i calori specifici a pressione e volume costante dipendono al più dalla temperatura, come illustrato in Fig.8.

Le variazioni di entropia sono quindi esprimibili nella forma

$$\begin{aligned} ds &= c_v \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dv \\ ds &= c_p \frac{dT}{T} - \frac{v}{T} dp \end{aligned} \quad (2.16)$$

che, ricavando p/T e v/T dalla equazione, di stato possono essere espresse anche come

$$\begin{aligned} ds &= c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v} \\ ds &= c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Infine, combinando opportunamente le Eq. (2.13) e (2.15) è possibile verificare che

$$R = c_p - c_v \quad (\text{detta relazione di Mayer}) \quad (2.18)$$

introducendo il rapporto tra c_p e c_v , indicato generalmente con k , si ottengono ancora le relazioni

$$c_p = \frac{Rk}{k-1} \quad c_v = \frac{R}{k-1} \quad \text{con } k = \frac{c_p}{c_v} \quad (2.19)$$

da cui risulta che *tutte le proprietà del gas ideale sono calcolabili una volta nota una coppia qualsiasi* tra i coefficienti k , c_p , c_v ed R .

Per integrare le equazioni presentate tra due generici stati di equilibrio occorre esplicitare il legame funzionale tra i calori specifici e la temperatura. Fortunatamente, è stato sperimentalmente osservato che, per le sostanze di più comune impiego, la variazione di dei calori specifici, relativa ad intervalli di temperatura non molto ampi, è sufficientemente limitata. E' pertanto possibile, con buona approssimazione, ritenere costanti i calori specifici in tali intervalli della temperatura. In Tab.a2 sono riportati, per alcuni gas, i valori medi di c_p e c_v , impiegabili nell'intervallo di temperatura 0-100°C

Laddove non sia possibile ritenere i calori specifici costanti, o perché si è in presenza di un salto di temperatura molto ampio, o perché è richiesta una maggiore accuratezza, risulta necessario correlare i dati sperimentali con funzioni analitiche. Di solito si adottano espressioni polinomiali del tipo:

$$\frac{c_p}{R} = \alpha + \beta T + \gamma T^2 + \delta T^3 + \varepsilon T^4 \quad (2.20)$$

i cui coefficienti sono riportati in Tab.a3. La Fig.8 riporta le variazioni di c_p e c_v con la temperatura per l'azoto.

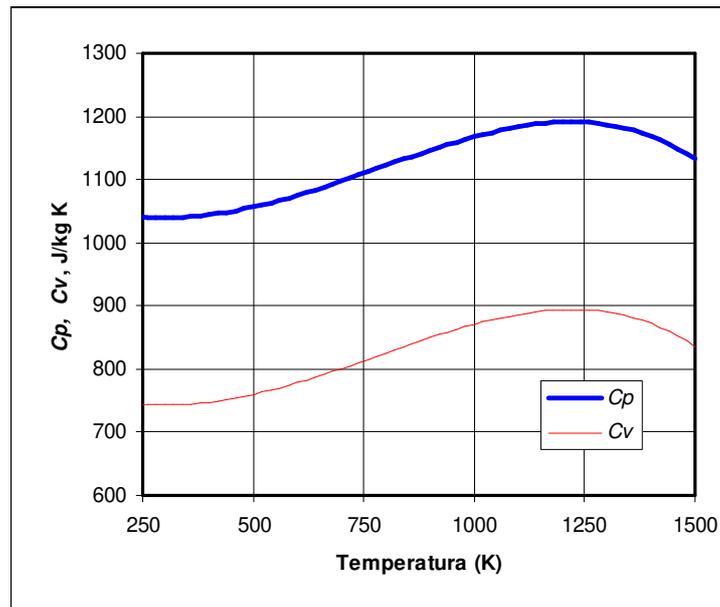


Figura 2.8. Variazione di c_p e c_v con la temperatura per l'azoto. La differenza tra i due valori vale comunque $c_p - c_v = R$.

ESEMPIO 2.5 – Variazioni di entalpia ed entropia per un gas

Determinare la variazioni di entalpia ed entropia specifiche dell'azoto in una trasformazione che lo porta dalle condizioni $p_1 = 0.1$ MPa, $T_1 = 300$ K alle condizioni $p_2 = 3$ MPa, $T_2 = 1000$ K.

☞ *La soluzione per i casi a e b è riportata nel file C2GASPROP.XLS*

Metodo a (c_p costante)

Considerando l'azoto un gas ideale con $c_p = \text{cost} = 1039.2$ J/kg K e $R = 296,91$ J/kg K si ha integrando le Eqq. (2.15) e (2.17)

$$h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1) = 727.4 \text{ kJ/kg}$$

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - R \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) = 241.3 \text{ J/kg K}$$

Metodo b (c_p dipendente da T)

Considerando l'azoto un gas ideale con c_p dipendente dalla temperatura, secondo la Tab.a3, si ha

$$h_2 - h_1 = R \left[\alpha (T_2 - T_1) + \frac{\beta}{2} (T_2^2 - T_1^2) + \frac{\gamma}{3} (T_2^3 - T_1^3) + \frac{\delta}{4} (T_2^4 - T_1^4) + \frac{\epsilon}{5} (T_2^5 - T_1^5) \right] = 764.5 \text{ kJ/kg}$$

$$s_2 - s_1 = R \left[\alpha \ln \frac{T_2}{T_1} + \beta (T_2 - T_1) + \frac{\gamma}{2} (T_2^2 - T_1^2) + \frac{\delta}{3} (T_2^3 - T_1^3) + \frac{\epsilon}{4} (T_2^4 - T_1^4) \right] - R \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) = 289.3 \text{ J/kg K}$$

Metodo c (tabelle termodinamiche)

Infine dalle tabelle termodinamiche (programma CATT) si ottiene

$$h_2 - h_1 = 766.7 \text{ kJ/kg}$$

$$s_2 - s_1 = 289 \text{ J/kg K}$$

□

Trasformazioni e diagrammi di stato per un gas ideale.

Per un gas ideale una trasformazione isoterma è retta dall'equazione

$$pv = RT = \text{cost.} \quad (2.21)$$

E quindi è rappresentata da un ramo di iperbole equilatera sul diagramma p - v .

Una relazione per la trasformazione adiabatica reversibile (ovvero, isoentropica) può essere ricavata imponendo $dS = 0$ nella seconda delle Eq.(2.17)

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} = 0 \Rightarrow c_p \frac{dT}{T} = R \frac{dp}{p} \quad (2.22)$$

Da cui integrando tra due estremi generici, per $c_p = \text{cost}$

$$c_p \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = R \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} \Rightarrow c_p \ln \frac{T_2}{T_1} = R \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (2.23)$$

$$\left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{c_p} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^R \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{R/c_p} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}}$$

e quindi infine

$$T p^{\frac{1-k}{k}} = \text{cost} \quad (2.24)$$

Sfruttando l'equazione di stato dei gas ideali, Eq.(2.13), si vede che due espressioni alternative per la trasformazione adiabatica sono

$$T v^{k-1} = \text{cost} \quad p v^k = \text{cost} \quad (2.25)$$

Tutte le trasformazioni suddette non sono che dei casi particolari di una trasformazione detta *politropica* che può esprimersi nelle tre forme seguenti

$$T p^{\frac{1-n}{n}} = \text{cost} \quad , \quad T v^{n-1} = \text{cost} \quad , \quad p v^n = \text{cost} \quad (2.26)$$

In particolare, per una isoterma si ha $n = 1$, per un'adiabatica $n = k$ e per una isobara $n = 0$. Anche una isovolumica può essere vista come un caso particolare della trasformazione suddetta per $n = \infty$.

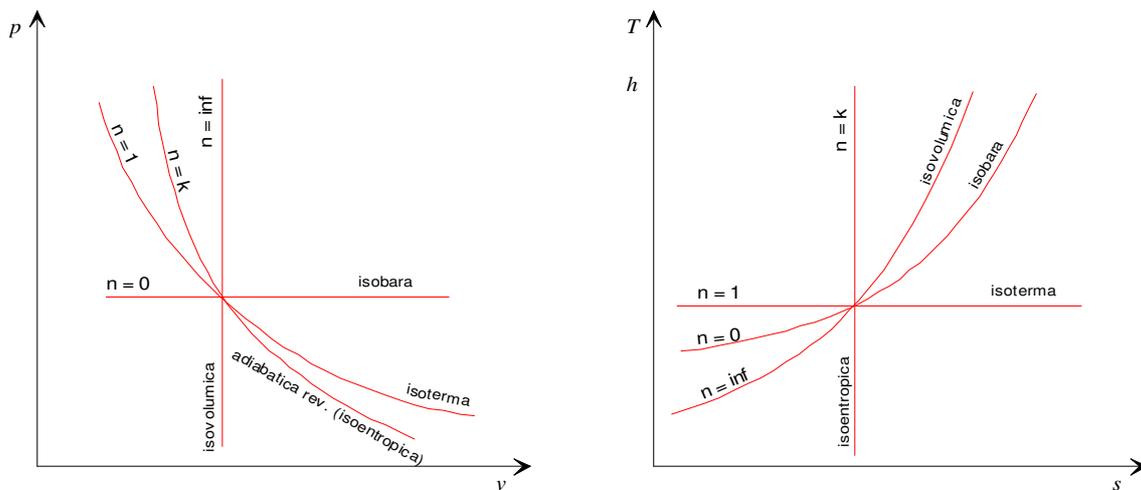


Figura 2.9. Diagrammi di stato per gas ideale.

Sui diagrammi di stato del gas ideale non si riporta la zona di coesistenza delle fasi, in quanto, come vedremo in dettaglio in un prossimo paragrafo, per il gas ideale non si hanno cambiamenti di fase e tale modello è applicabile per stati sufficientemente lontani dal punto critico della sostanza. Inoltre, dato che l'entalpia e la temperatura sono legati da una relazione diretta, i diagrammi $h-s$ e $T-s$ differiscono unicamente per il fattore di scala dell'asse y (ovvero il fattore c_p , non necessariamente costante lungo l'asse stesso) e hanno qualitativamente lo stesso andamento. Le linee che rappresentano le varie trasformazioni su tali diagrammi possono, almeno nel caso in cui c_p sia costante, essere tracciate con semplici considerazioni di geometria analitica una volta note una coppia di costanti del gas (ad es. R e k). Tali diagrammi sono riportati in Fig.9.

Alla luce delle espressioni riportate in questo paragrafo, è abbastanza semplice ricavare il lavoro ed il calore scambiati reversibilmente da un gas ideale nelle principali trasformazioni: tramite integrazione diretta del $p dv$, $-v dp$, $T ds$: le relative espressioni sono riportate in App.2.

Comportamento reale dei gas

Nessuna sostanza si comporta esattamente secondo il modello di gas ideale; pur tuttavia, tale modello costituisce, per qualsiasi sostanza, il comportamento asintotico al decrescere della pressione o al crescere della temperatura. Per valutare se una sostanza si comporta o meno secondo il modello di gas ideale, si può calcolare il cosiddetto fattore di comprimibilità, Z

$$Z = \frac{pv}{RT} \quad (2.27)$$

E' evidente che quando il gas segue il comportamento ideale $Z=1$. Ad esempio, in Fig.10, è riportato il fattore di comprimibilità Z dell'azoto in funzione della pressione, per differenti valori della temperatura. Dall'osservazione del diagramma si può notare che quando la pressione tende a zero, per qualunque valore della temperatura, il rapporto Z tende ad uno, ossia l'azoto si comporta da gas ideale. Si noti inoltre che alla temperatura di 300 K, ovvero a temperatura ambiente, è possibile adoperare per l'azoto l'equazione del modello gas ideale fino ad una pressione di circa 10 MPa (per cui si ha $Z= 1.0056$); tale limite è ovviamente funzione della precisione che si desidera ottenere).

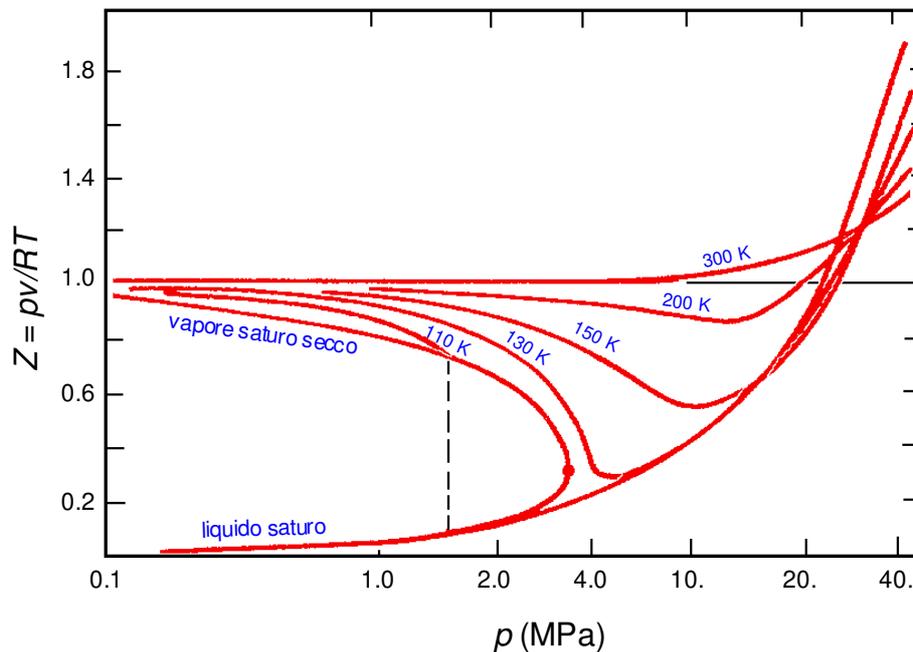


Figura 2.10. Fattore di comprimibilità dell'azoto

Si supponga di raffreddare isobaricamente il gas, inizialmente alla temperatura di 300 K, alla pressione di 4 Mpa: il rapporto Z decresce al diminuire della temperatura ed assume valori minori di uno, ossia la densità aumenta più di quanto previsto dal modello del gas ideale. Ciò può essere giustificato intuitivamente notando che la riduzione della distanza tra le molecole comporta l'allontanamento dal campo di validità dell'ipotesi di assenza di forze intermolecolari, assunta per il modello del gas ideale. In queste condizioni di pressione e temperatura, le forze molecolari sono del tipo attrattivo e pertanto il modello ideale *sottostima* il valore di densità del gas. Al contrario, per pressioni molto elevate, maggiori di 30 MPa, il rapporto Z è sempre maggiore di uno: in queste condizioni le forze intermolecolari sono *repulsive* e pertanto la densità del gas è *minore* di quella corrispondente al comportamento ideale.

Un grafico molto più significativo del precedente si ottiene riportando il valore di Z in funzione della *pressione ridotta* e della *temperatura ridotta*, definite rispettivamente come

$$p_r = \frac{p}{p_c} \quad T_r = \frac{T}{T_c} \quad (2.28)$$

dove p_c e T_c sono rispettivamente la pressione e la temperatura critica della sostanza. Tale grafico è riportato in Fig.11: si nota che i punti sperimentali relativi a diversi fluidi si raggruppano lungo le stesse linee, cosicché si può asserire che i parametri suddetti individuano quantitativamente un comportamento generale, valido per qualunque sostanza.

ESEMPIO 2.6 – Fattore di comprimibilità

Si calcoli il fattore di comprimibilità del metano a $p = 20.88 \text{ MPa}$ e $T = 13.2 \text{ °C}$. Si confronti il risultato con i dati del diagramma di Fig.11.

Dalle tabelle del metano si ha che nelle condizioni specificate $v = 0.005683 \text{ m}^3/\text{kg}$. Dalla Tab.a2, si ha inoltre $R = 518.46 \text{ kJ/kg}$, $p_c = 4.64 \text{ MPa}$, $T_c = 190.9 \text{ K}$. Pertanto

$$Z = \frac{pv}{RT} = 0.80$$

si ha inoltre

$$p_r = \frac{p}{p_c} = 4.5 \quad T_r = \frac{T}{T_c} = 1.5$$

dalla Fig.11 si ha pertanto approssimativamente $Z = 0.82$.

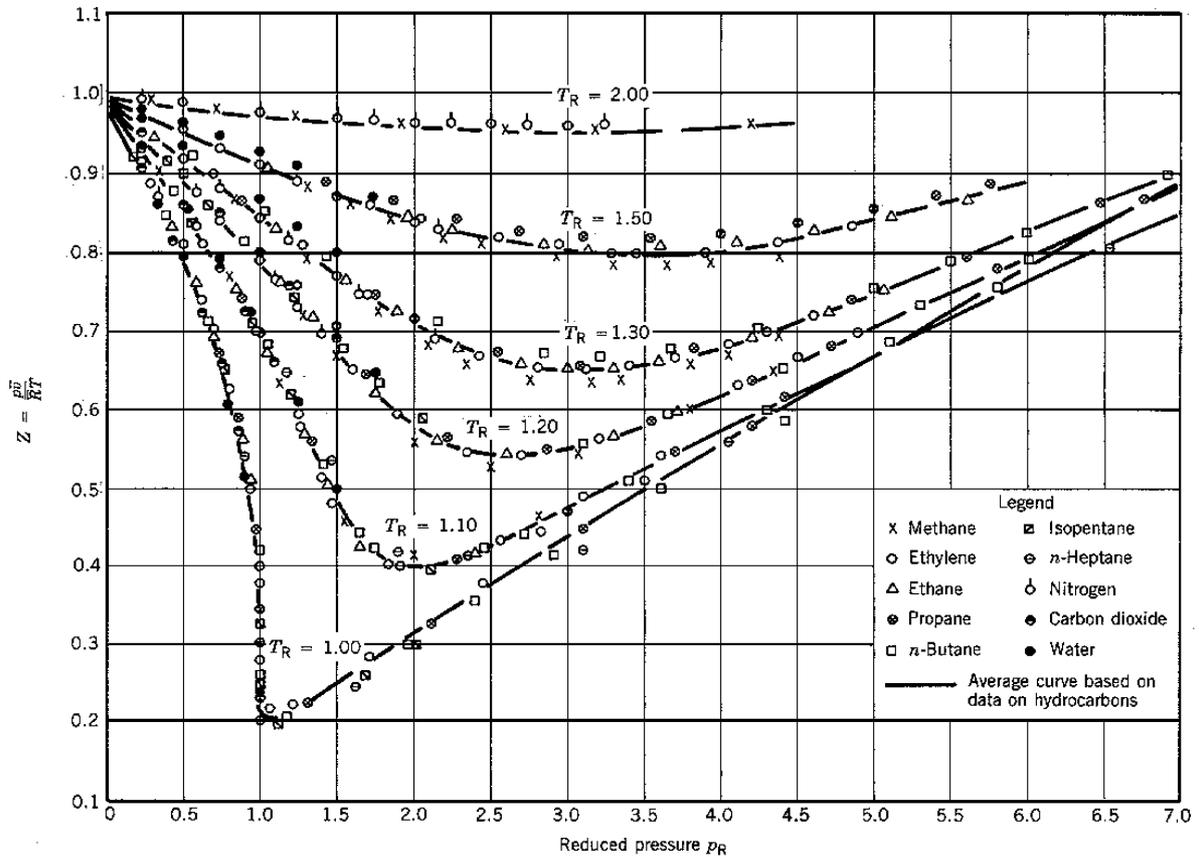


Figura 2.11. Fattore di comprimibilità generalizzato.

La Fig. 2.11 è una delle espressioni del *principio degli stati corrispondenti*, che stabilisce che il comportamento di tutte le sostanze, espresso in termini di parametri ridotti, come la temperatura e la pressione critica, è identico. In realtà molti fluidi deviano più o meno da questo comportamento; la deviazione può essere quantificata tramite il fattore acentrico ω ,

definito come $\omega = 1 + \log_{10} \left(\frac{p_{v,sat}}{p_{cr}} \right)_{T_r=0.7}$

La definizione si basa sul fatto che a $T_r = 0.7$ la pressione di vapore ridotta dovrebbe valere 0.1. Un valore di ω prossimo a zero è quindi indice che il fluido rispetta il principio degli stati corrispondenti. I valori del fattore acentrico sono compresi indicativamente tra 0.002 e 0.6, e sulla base di esso è possibile costruire equazioni di stato più accurate.

Applicabilità del modello di gas ideale

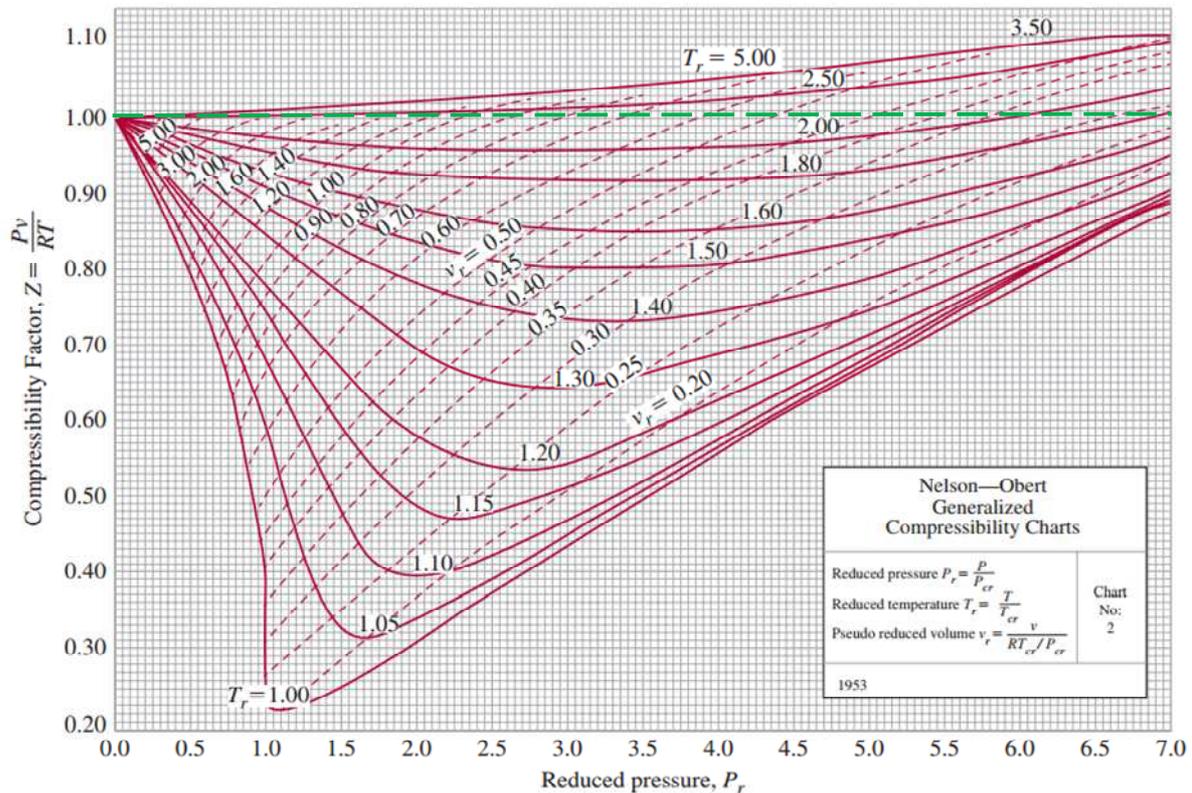


Figura 2.12. Fattore di comprimibilità generalizzato.

Nell'affrontare un calcolo, spesso ci si chiede se il modello di gas ideale sia applicabile o meno al fluido considerato: l'applicabilità di tale modello infatti semplifica notevolmente i calcoli ed evita il ricorso alle tabelle termodinamiche. Nel seguito sono esposti alcuni criteri di giudizio. Naturalmente tali criteri hanno valore puramente indicativo e in definitiva si può affermare che l'applicabilità o meno del modello di gas ideale dipende dal grado di precisione con cui si vogliono ottenere i risultati.

Il criterio più generale consiste nel calcolare il fattore di comprimibilità Z facendo uso delle tabelle o di un programma di calcolo: il suo scostamento dal valore unitario ci dà l'idea della precisione con cui il modello di gas ideale è accettabile. Indicativamente, si può ritenere accettabile un valore di Z superiore a 0.95.

L'uso del diagramma generalizzato di Fig.11 ci mostra che per $T_r > 2$ il valore di Z si mantiene sempre superiore a 0.95: questo indica che *quando la temperatura supera il doppio della temperatura critica il modello di gas ideale è comunque applicabile*. Come si vede dal diagramma di Fig. 2.12, che riporta le curve in un campo più ampio di pressione ridotta, tale affermazione cade però in difetto per pressioni molto alte, indicativamente per $p_r > 7$.

Inoltre, si vede dalla stessa Fig. 2.12 che tutte le curve tendono ad 1 al diminuire della pressione ridotta: *quindi il modello di gas ideale risulta comunque applicabile per $p_r < 0.01$* (ma questo limite aumenta al crescere del valore della temperatura ridotta).

In definitiva, le regioni in cui il modello di gas ideale è applicabile sono riportate nel diagramma p_r-T_r di Figura 2.13.

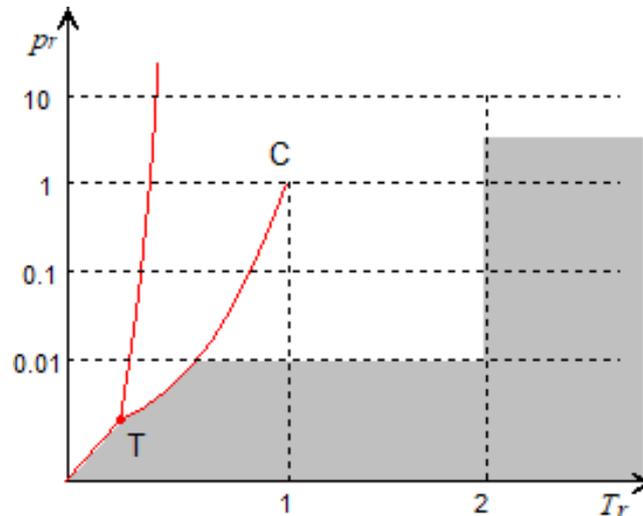


Figura 2.13. Diagramma p_r-T_r in cui sono riportate in grigio le regioni per cui il modello di gas ideale risulta applicabile.

Infine, un ulteriore aiuto indicativo ci può venire dall'esame dei diagrammi di stato $T-s$, $h-s$ e $p-h$. Dato che nel gas ideale l'entalpia dipende solo dalla temperatura e non dalla pressione, nelle zone di tali diagrammi *dove le isoterme tendono a diventare anche isoentalpiche* (e viceversa) si può pensare che il fluido abbia un comportamento prossimo a quello del gas ideale.

Generalmente si può dire che i gas che costituiscono l'aria (azoto più ossigeno) in condizioni di temperatura ambiente o superiore (300 K) possono essere considerati gas ideali. Lo stesso non vale per il vapore acqueo nelle condizioni di pressione e temperatura tipiche all'ingresso in turbina ($p \approx 10$ MPa e $T \approx 500^\circ\text{C}$). Invece, il vapore acqueo nelle condizioni in cui si trova disperso nell'aria atmosferica, avendo una pressione parziale molto bassa (0.002 MPa) può essere considerato un gas ideale. Ovviamente, per qualunque sostanza in condizioni bifasiche il modello di gas ideale è inapplicabile, per non parlare delle sostanze allo stato liquido.

Bisogna infine notare che il fatto che il modello di gas ideale sia applicabile non implica assolutamente che c_p possa essere considerato costante: quest'ultima è un'ipotesi ulteriormente restrittiva e può essere applicata se le variazioni di temperatura non sono alte (indicativamente, inferiori a 100 K). Anche in questo caso, la decisione dipende dal grado di accuratezza dei risultati desiderato.

CONFRONTO TRA I VARI MODELLI DI FLUIDO CONSIDERATI

La tabella 1 riassume le equazioni di stato per i vari modelli di fluido che abbiamo considerato

<i>Gas ideale</i>	<i>Fluido reale monofase</i>	<i>Liquido incompressibile</i>
$pV = n_M \mathfrak{R}T$ $pV = MRT$ $pv = RT$	$T = f(p, v)$ $\frac{dv}{v} = \beta dT - \kappa dp$	$v = cost.$
$R = c_p - c_v$, $k = \frac{c_p}{c_v}$ $c_p = \frac{Rk}{k-1} = f(T)$ $c_v = \frac{R}{k-1} = f(T)$	$\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$ $\kappa = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T$ $c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p$	$c_p = c_v = c$
$du = c_v(T) dT$	$du = c_v(v, T) dT + B_u(T, v) dv$	$du = c(T) dT$
$dh = c_p(T) dT$	$dh = c_p(p, T) dT + B_h(T, p) dp$	$dh = c(T) dT + v dp$
$ds = c_v(T) \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v}$ $ds = c_p(T) \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p}$	$ds = \frac{c_v}{T} dT + \frac{B_u + p}{T} dv$ $ds = \frac{c_p}{T} dT + \frac{B_h - v}{T} dp$	$ds = c(T) \frac{dT}{T}$
$\beta = \frac{1}{T}$ $\kappa = \frac{1}{p}$ $B_u = B_h = 0$	$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v = c_p - \frac{T \beta^2 v}{\kappa}$ $B_u = \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T = \frac{\beta T}{\kappa} - p$ $B_h = \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T = (1 - \beta T) v$	$\beta = \kappa = 0$ $B_u = 0$ $B_h = v$
<p>NOTE Un fluido reale è completamente caratterizzato una volta noti i coefficienti c_p, β e κ. Un gas ideale è caratterizzato una volta noti due coefficienti a scelta tra c_p, c_v, k o R. Un liquido incompressibile è completamente caratterizzato dai valori di c e v. Le relazioni di Gibbs $du = T ds - p dv$, $dh = T ds + v dp$ sono valide per qualunque fluido, purchè la trasformazione avvenga tra due stati di equilibrio</p>		

Tabella 2.1. Equazioni di stato per i gas ideali, fluidi reali, e i liquidi incompressibili

APPLICAZIONE: CALCOLO DELLE VARIAZIONI DI ENTALPIA E DI ENTROPIA

In questo paragrafo affronteremo il problema del calcolo delle variazioni di entalpia e di entropia per i vari tipi di fluido che abbiamo considerato, riassumendo ed applicando, per maggiore chiarezza, le relazioni introdotte in precedenza. Un confronto tra le forme che tali relazioni assumono per i vari fluidi è anche riportato sinteticamente nell'Appendice 1.

Calcolo delle variazioni di entalpia

Come vedremo in seguito, per poter portare a termine i calcoli correlati al bilancio di energia, è molto spesso necessario determinare la variazione di entalpia nella trasformazione compiuta dal fluido. Ovviamente, lo stato iniziale e finale della trasformazione devono essere fissati, ovvero (per sistemi bivarianti, quali sono tutti quelli che noi consideriamo) deve essere noto il valore di due variabili di stato *indipendenti*, che di solito sono pressione e temperatura. Tuttavia, se il fluido si trova nello stato di vapore saturo, tali variabili non sono indipendenti e occorre sostituirne una con il titolo x od un'altra variabile specifica (v, u, s) da cui si può ricavare il titolo con le note relazioni del vapore saturo.

Una volta fissato lo stato del sistema, le variazioni di entalpia possono essere determinati con i seguenti metodi:

- tramite *tabelle*, specifiche per il fluido considerato;
- con il calcolatore, tramite appositi *codici di calcolo*;
- graficamente, tramite *diagrammi*, specifici per il fluido considerato;
- mediante *calcolo diretto*; questo è possibile solo in casi particolari (gas ideale, fluido incomprimibile).

Per quanto riguarda il calcolo diretto, si ricorda che in generale la variazione di entalpia (per *fluidi monofase*) è data da

$$dh = c_p(p, T) dT + B_h(T, p) dp \quad (2.29)$$

Nel caso di *trasformazione isobara* si ha comunque, per qualunque fluido

$$dh = c_p(T, p) dT \quad (2.30)$$

Per i *gas ideali*, indipendentemente dal fatto che la trasformazione sia isobara o meno, l'entalpia dipende solo dalla temperatura e la sua variazione è data da (v. esempio 2.5)

$$dh = c_p(T) dT \quad (2.31)$$

Per i *fluidi incomprimibili*, la variazione di entalpia assume la forma

$$dh = c(T) dT + v dp \quad (2.32)$$

molto spesso, dato il basso valore del volume specifico dei liquidi, il secondo termine è trascurabile. Si può pertanto affermare che, con buona approssimazione, anche l'entalpia dei liquidi incomprimibili dipende solo dalla temperatura. In mancanza di dati più accurati, la si può porre uguale a quella del liquido in condizioni di saturazione *alla stessa temperatura* (e non alla stessa *pressione*!).

Infine, consideriamo una *trasformazione isobara* (e quindi anche *isoterma*) di un *vapore saturo*. Considerando la relazione che lega l'entalpia al titolo, Eq.(2.4), se la si differenzia mantenendo la pressione (e quindi anche h_g e h_f) costanti, si trova che la variazione

infinitesima di entalpia *a pressione costante* (e quindi anche *isoterma*) è data in questo caso da

$$dh = (h_g - h_f) dx = h_{fg} dx \quad (2.33)$$

ESEMPIO 2.7 – Calcolo delle variazioni di entalpia dell’acqua

Determinare l’entalpia dell’acqua alla temperatura di 40 °C ed alla pressione di 200 bar.

Metodo a (esatto)

Tramite le tabelle termodinamiche dell’acqua compressa e vapore surriscaldato o tramite un programma per calcolatore si ricava il valore più accurato

$$h = 185.14 \text{ kJ/kg}$$

Metodo b (liquido incomprimibile)

Considerando l’acqua un liquido incomprimibile si ha

$$dh = c(T) dT + v dp$$

ed integrando rispetto allo stato di riferimento (punto triplo dell’acqua, $p_t = 611 \text{ Pa}$, $T_t = 0.01 \text{ °C}$, $h_t = 0 \text{ kJ/kg}$), considerando come costanti $c = 4.186 \text{ kJ/kg K}$, $v = 0.001 \text{ m}^3/\text{kg}$ si ha

$$h = h_t + c(T - T_t) + v(p - p_t) =$$

$$= 4186(40 - 0.001) + 0.001(2 \cdot 10^7 - 611) = 167440 + 20000 = 187.44 \text{ kJ/kg}$$

con un errore di circa l’1%. Si vede che in molti casi il secondo termine è trascurabile e l’entalpia dell’acqua sottoraffreddata può essere valutata come

$$h = c(T - T_t) \cong 4.2 T \text{ (kJ/kg)}$$

dove la temperatura è espressa in centigradi (il risultato è 168 kJ/kg). Quest’ultima formula è utilissima per un calcolo di prima approssimazione che molto spesso è più che soddisfacente.

Metodo b (entalpia del liquido saturo)

Tramite la tabella del vapore saturo si pone l’entalpia circa uguale a quella del liquido saturo alla stessa temperatura:

$$h \cong 167.54 \text{ kJ/kg}$$

come si vede, l’errore è di circa il 10% (ma si potrebbe eliminare quasi totalmente aggiungendo il termine vp).



Calcolo delle variazioni di entropia

Analogamente alle variazioni di entalpia, anche le variazioni di entropia possono essere ricavate da tabelle, diagrammi o codici di calcolo.

Per quanto riguarda il calcolo diretto, si ricorda che in generale la variazione di entropia (per *fluidi monofase*) può essere espressa come

$$ds = \frac{c_v(v, T)}{T} dT + \frac{B_u(v, T) + p}{T} dv \quad (2.34)$$

$$ds = \frac{c_p(p, T)}{T} dT + \frac{B_h(p, T) - v}{T} dp$$

Nel caso di *trasformazione isobara* si ha comunque, per qualunque fluido

$$ds = c_p(T, p) \frac{dT}{T} \quad (2.35)$$

Per quanto riguarda i gas ideali, il problema è stato già affrontato nell'esempio 2.5. Le relazioni (2.34) divengono:

$$\begin{aligned} ds &= c_v(T) \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v} \\ ds &= c_p(T) \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Per i *fluidi incomprimibili*, e anche per i solidi, la variazione di entropia assume la forma, v. Eq.(2.11)

$$ds = \frac{c(T)}{T} dT \quad (2.37)$$

Nel caso in cui il calore specifico sia costante, le (2.36) e (2.37) sono facilmente integrabili. Il problema del calcolo delle variazioni di entropia per materiali incomprimibili è affrontato nel successivo esempio 2.8.

Infine, per una *trasformazione isobara* (e quindi anche *isoterma*) di un *vapore saturo*, si ha, analogamente all'Eq.(2.33),

$$ds = (s_g - s_f) dx = s_{fg} dx \quad (2.38)$$

ESEMPIO 2.8 – Calcolo delle variazioni di energia ed entropia per un sistema adiabatico

Un blocchetto di acciaio al carbonio ($c_{p1} = 434 \text{ J/kg K}$) della massa di 200 g, alla temperatura $T_{in,1} = 400 \text{ °C}$ è gettato in un recipiente adiabatico che contiene 2 kg di acqua ($c_{p2} = 4187 \text{ J/kg K}$) alla temperatura $T_{in,2} = 20 \text{ °C}$. Entrambi i materiali possono essere considerati incomprimibili e con calore specifico costante. Determinare la temperatura del sistema all'equilibrio e la sua variazione di entropia.

Non essendovi variazioni di volume, sono nulli gli scambi di lavoro con l'esterno. Essendo in aggiunta il sistema chiuso ed adiabatico, si ha per il primo principio

$$U_f - U_i = 0$$

Si assume che il sistema si porti in una condizione finale di equilibrio termico e quindi che l'acqua ed il ferro raggiungano la stessa temperatura finale, T_f (vedi la discussione in merito alla conclusione dell'esempio). Sia l'acqua che il ferro sono considerati materiali incomprimibili (il fatto che il ferro sia solido non ha rilevanza), quindi con calori specifici a pressione costante ed a volume costante uguali tra loro. Essendo l'energia interna una proprietà additiva, la sua variazione può essere considerata la somma delle variazioni delle due parti del sistema e quindi,

$$U_f - U_i = (U_{f,1} - U_{i,1}) - (U_{f,2} - U_{i,2})$$

da cui essendo per i materiali incomprimibili (v. Eq.(2.9) $du = c dT$

$$M_1 c_1 (T_{i,1} - T_f) = M_2 c_2 (T_f - T_{i,2})$$

Dall'ultima relazione si ricava facilmente T_f

$$T_f = \frac{M_1 c_1 T_{i,1} + M_2 c_2 T_{i,2}}{M_1 c_1 + M_2 c_2} = 23.9 \text{ }^\circ\text{C}$$

La variazione di entropia specifica dell'acqua può essere ricavata integrando l'espressione dell'energia per un liquido incomprimibile tra lo stato iniziale e finale, v. Eq.(2.11)

$$ds = c \frac{dT}{T}$$

$$s_{f,1} - s_{i,1} = c_1 \ln \frac{T_f}{T_{i,1}} = -355 \text{ J/kg K}$$

$$s_{f,2} - s_{i,2} = c_2 \ln \frac{T_f}{T_{i,2}} = 55.3 \text{ J/kg K}$$

Nelle quali, si ricorda, è indispensabile esprimere le temperature in kelvin. Si noti che l'entropia del blocco di ferro diminuisce (perchè la sua temperatura decresce). Dato che anche l'entropia è una grandezza estensiva e quindi additiva, la variazione totale di entropia del sistema si ricava moltiplicando le variazioni precedenti per le relative masse e sommando

$$S_f - S_i = M_1 c_1 \ln \frac{T_f}{T_{i,1}} + M_2 c_2 \ln \frac{T_f}{T_{i,2}} = 39.6 \text{ J/K}$$

La variazione totale di entropia del sistema è positiva, e quindi, essendo il sistema adiabatico, la trasformazione è irreversibile. Si potrebbe anche dimostrare che ogni ulteriore trasformazione che porti il sistema in uno stato in cui la temperatura dell'acciaio differisce da quella dell'acqua, anche se rispetta il primo principio, implica una diminuzione di entropia, ed è pertanto impossibile. In altri termini, l'entropia del nostro sistema *adiabatico* ha raggiunto un *massimo*, il che corrisponde a una condizione di equilibrio stabile, da cui è impossibile uscire in assenza di azioni esterne.

□

BIBLIOGRAFIA

Tabelle termodinamiche

- L. Haar, J.S. Gallagher, G.S. Kell, NBS/NRC Steam Tables, Hemisphere, 1983 (tabelle del vapore acqueo approvate dal National Bureau of Standards).
- C. Borgnakke e R.E. Sonntag, Thermodynamic and Transport Properties, Wiley, 1997 (contiene anche un dischetto con il programma di calcolo CATT, v. sotto)
- W.C. Reynolds, Thermodynamic Properties in SI, Stanford University Press, 1979 (tabelle diagrammi e formule per il calcolo delle proprietà di molte sostanze in unità SI)

Programmi per il calcolo di proprietà termodinamiche (alcuni esempi)

- Il programma REFPROP, sviluppato dall'ente americano NIST (*National Institute of Standards and Technology*) costituisce probabilmente la raccolta più ampia e documentata di proprietà fisiche e termodinamiche dei fluidi. Consente anche il calcolo delle proprietà delle miscele di fluidi, oltre che la costruzione di tabelle e diagrammi. Vi sono inoltre macro da inserire direttamente in Excel o in Matlab. Una versione ridotta è disponibile gratuitamente.
- Il programma CoolProp (<http://www.coolprop.org/>), disponibile gratuitamente, consente il calcolo delle proprietà termodinamiche di 122 sostanze o miscele. E' interfacciabile con molti linguaggi o utilities, tra cui Matlab ed Excel.
- La libreria di funzioni TPX, (<http://www.me.caltech.edu/me/software/tpx/>) sviluppata da D. Goodwin presso il California Institute of Technology e disponibile gratuitamente in rete permette di calcolare le proprietà termodinamiche di alcune sostanze (acqua, azoto, ossigeno, metano, idrogeno, R134a) importando una macro direttamente nei fogli di lavoro Microsoft Excel. E' compatibile con le versioni di Excel almeno fino alla 2016.
- Il programma ALLPROPS, che gira su un PC in ambiente Windows, riporta le proprietà termodinamiche di circa 40 sostanze dando la scelta all'utente tra molte coppie di variabili di input. E' anche possibile costruire diagrammi e tabelle.
- Il programma CATT, (C. Borgnakke, R.E. Sonntag, v. sopra) che gira su un PC in ambiente Windows, riporta le proprietà termodinamiche di 25 sostanze dando la scelta all'utente tra 8 possibili coppie di variabili di input. Con qualche accorgimento, il programma è ancora installabile sulle attuali versioni di Windows.

ESERCIZI

ESERCIZIO 2.1

Una bombola di volume $V = 5$ L contiene argon (Ar) alla pressione $p = 200$ bar e temperatura $T = 20$ °C. Determinare a) la massa M del gas; b) il volume che esso occuperebbe alla pressione di 1 bar e alla temperatura di 0 °C (tale volume è talvolta indicato come *volume normale* e misurato in normal-metri cubi, Nm³).

Dati: considerare l'Ar come un gas ideale con $k = c_p / c_v = 1.667$ e $c_p = \text{cost.} = 520.3$ J/kg K
 $[M = 1.639$ kg, $V = 0.932$ Nm³ ($R = 208.18$ J/kg K)]

ESERCIZIO 2.2

Un cilindro verticale chiuso da un pistone senza attrito contiene azoto a temperatura $T = 100$ °C. Il pistone ha una massa $M_p = 5$ kg ed un diametro $D = 100$ mm. La pressione dell'ambiente esterno è 97 kPa. Se il cilindro ha un volume $V = 2$ dm³, determinare la massa M di gas contenuta nel cilindro.

Dati: considerare l'azoto come un gas ideale con $R = 296.8$ J/kg K, $k = 1.41$.

$[M = 1.864$ g]

ESERCIZIO 2.3 (adatto alla soluzione tramite calcolatore)

Servendosi delle tabelle del vapore o di un programma di calcolo delle proprietà termodinamiche, determinare lo stato dell'acqua (liquido sottoraffreddato, miscela bifase, vapore surriscaldato, gas) in ciascuna delle condizioni seguenti:

- a) 120 °C, 150 kPa d) 160 °C, 0.4 m³/kg
 b) 300 °C, 0.01 m³/kg e) 0.35 Mpa, 0.4 m³/kg
 c) 200 kPa, 110 °C f) 5 kPa, 10 °C

$[a)$ vap surr; $b)$ bifase $x = 0.424$; $c)$ liquido sottoraff.; $d)$ vap surr; $e)$ bifase $x = 0.763$; $e)$ liquido sottoraff.]

ESERCIZIO 2.4

Un serbatoio cilindrico alto 10 m contiene acqua e vapore in equilibrio alla temperatura $T = 180$ °C. Il livello del liquido all'interno è 2 m. Calcolare il titolo e la differenza di pressione tra la parte più alta e quella più bassa del serbatoio.

Dati: $v_l = 0.001127$ m³/kg, $v_v = 0.194045$ m³/kg.

$[x = 0.022, p = 17813$ Pa]

ESERCIZIO 2.5

Un recipiente di volume assegnato $V = 100$ dm³ contiene 10.79 kg di R12 a $p = 0.6$ MPa. Determinare il titolo ed entalpia specifica.

Dati: $v_f = 0.000757$ m³/kg, $v_v = 0.029132$ m³/kg, $h_f = 56.799$ kJ/kg, $h_v = 196.568$ kJ/kg

$[x = 0.3, h = 98.73$ kJ/kg]

ESERCIZIO 2.6

Un recipiente di volume assegnato $V = 100$ dm³ contiene 1.5 kg di ammoniaca a $p = 1$ MPa. Determinare il titolo.

Dati: $v_f = 0.001658$ m³/kg, $v_v = 0.128528$ m³/kg

$[x = 0.515]$

ESERCIZIO 2.7

Valutare le variazioni di energia interna, entalpia ed entropia per azoto nelle seguenti condizioni: $p_1 = 1 \text{ bar}$, $T_1 = 300 \text{ K}$, $p_2 = 13 \text{ bar}$, $T_2 = 1100 \text{ K}$., nelle seguenti ipotesi

a) supponendolo un gas ideale con $R = 296.91 \text{ J/kg K}$, $k = 1.4$.

b) adottando la seguente formula per c_p

$$\frac{c_p}{R} = 3.675 - 1.208 \cdot 10^{-3} T + 2.324 \cdot 10^{-6} T^2 - 0.632 \cdot 10^{-9} T^3 - 0.226 \cdot 10^{-12} T^4$$

Sugg. ci si può aiutare con il file EXCEL C2GASPROP.XLS

[a) $\Delta u = 593.8 \text{ kJ/kg}$; $\Delta h = 831.4 \text{ kJ/kg}$; $\Delta s = 588 \text{ J/kg K}$ ($c_p = 1039 \text{ J/kg K}$);

b) $\Delta u = 644.6 \text{ kJ/kg}$; $\Delta h = 882.1 \text{ kJ/kg}$; $\Delta s = 649.6 \text{ J/kg K}$]

ESERCIZIO 2.8

Valutare il fattore di compressibilità ($Z = pv/RT$) per l'ammoniaca a 100 °C , 2 Mpa , usando un diagramma di stato. Ripetere il calcolo con un grafico del fattore di compressibilità generalizzato.

Dati: $p_c = 112.8 \text{ bar}$, $T_c = 405.4 \text{ K}$.

[$Z = 0.905$]

ESERCIZIO 2.9

Un recipiente rigido del volume di 15 litri contiene 10 kg di acqua in condizioni di saturazione a 30 °C e viene lentamente riscaldato.

a. Al momento in cui il sistema diviene monofase, esso sarà costituito da liquido sottoraffreddato o da vapore surriscaldato?

b. Ripetere il calcolo nel caso che la massa di acqua sia 1 kg .

[a. *liquido sottoraffreddato*; b. *vapore surriscaldato*;]

ESERCIZIO 2.10

Valutare la massa di metano trasportato in un recipiente di 0.5 m^3 nelle seguenti condizioni:

a) $p = 200 \text{ bar}$, $T = 25 \text{ °C}$

b) vapore saturo a $p = 5 \text{ bar}$ (e quindi $T = -138 \text{ °C}$), $x = 0.01$.

Confrontare i risultati per il caso a) utilizzando il modello di gas ideale e le tabelle termodinamiche.

Per rispondere alla domanda b) occorre consultare le tabelle termodinamiche.

[a) 64.7 kg (*gas ideale*) 78.5 kg (*tabelle*); b) 130.89 kg]

ESERCIZIO 2.11

Una massa $M = 0.25 \text{ kg}$ di vapore saturo secco alla pressione 0.1 Mpa , contenuto in un sistema chiuso cilindro-pistone, viene compresso reversibilmente ed a temperatura costante fino allo stato di liquido saturo. Determinare la variazione di entropia e di energia interna nonché il lavoro ed il calore trasferiti.

[$\Delta U = -522 \text{ kJ}$; $\Delta S = -1.51 \text{ kJ/K}$; $L = -42.3 \text{ kJ}$; $Q = -564 \text{ kJ}$]

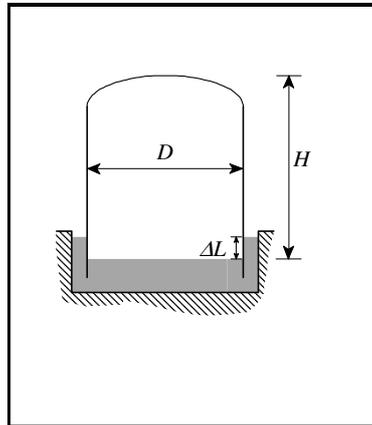
ESERCIZIO 2.12

Un gas (considerato ideale e con calore specifico costante) avente $R = 287 \text{ J/Kg K}$; $c_p = 992 \text{ J/kg K}$ e contenuto in un sistema pistone-cilindro senza aperture viene compresso secondo una isoterma reversibile dalla pressione $p_1 = 1 \text{ bar}$ e dalla temperatura $T_1 = 25 \text{ °C}$ fino alla pressione $p_2 = 20 \text{ bar}$ per essere poi riespanso adiabaticamente e reversibilmente fino alla pressione $p_3 = 1 \text{ bar}$.

Determinare la temperatura ed il volume specifico finali del gas nonché i valori del lavoro netto e del calore scambiato con l'esterno per unità di massa.

$[T_3 = 125.3 \text{ K}; v_3 = 0.36 \text{ m}^3/\text{kg}; l = -135 \text{ kJ/kg}; q = -256 \text{ kJ/kg}]$

ESERCIZIO 2.13



Un gasometro (vedi figura) è schematizzabile come un cilindro di diametro $D = 40 \text{ m}$ e altezza $H = 15 \text{ m}$ e contiene metano alla temperatura di $25 \text{ }^\circ\text{C}$. La pressione atmosferica esterna è 980 hPa e il mantello ha una massa complessiva di 500 t . Determinare:

1. la pressione all'interno del gasometro;
2. il dislivello ΔL nella guardia idraulica;
3. la massa del metano contenuto;
4. la variazione di quota del mantello se la pressione atmosferica diviene 1040 hPa .
5. il dislivello nella guardia idraulica nel caso di cui sopra.

[1) 1019 hPa ; 2) 390 mm ; 3) 12400 kg ; 4) 0.83 m ; 5) rimane invariato]

ESERCIZIO 2.14

Un recipiente di volume 40 L contiene aria alla pressione di 5 MPa e temperatura di 400 K . Determinare:

1. la massa di aria contenuta;
2. la pressione nel recipiente dopo che l'aria si è raffreddata a temperatura ambiente ($27 \text{ }^\circ\text{C}$)
3. il calore scambiato durante tale processo.

[1) 1.72 kg ; 2) 3.75 MPa 3) -123 kJ]

ESERCIZIO 2.15

Un tubo di vetro sigillato contiene R22 alla temperatura di $20 \text{ }^\circ\text{C}$. Se lo si raffredda fino alla temperatura di $-20 \text{ }^\circ\text{C}$, iniziano a formarsi piccole gocce di liquido sulla parete del tubo (vale a dire, il sistema raggiunge le condizioni di saturazione). Determinare quale è la pressione nel tubo a $20 \text{ }^\circ\text{C}$.

Suggerimento: si ha a che fare con una trasformazione a volume costante il cui stato finale è vapore saturo secco. Per risolvere questo esercizio si deve disporre delle tabelle termodinamiche del fluido R22.

$[p = 0.2896 \text{ Mpa}]$

ESERCIZIO 2.16

In un sistema chiuso pistone-cilindro, 50 kg di vapore si trovano alla temperatura $T_1 = 70\text{ °C}$ con un titolo $x_1 = 0.40$. Determinare il lavoro da spendere per portare il vapore nelle condizioni di liquido saturo ($x_2 = 0$) mediante una compressione adiabatica reversibile, e la temperatura finale del sistema. Tracciare la trasformazione sul diagramma T - s .

[$L_{12} = - 20.750\text{ kJ}$, $T_1 = 341.5\text{ °C}$]

ESERCIZIO 2.17

Un sistema costituito da 0.2 kg di vapore, alla pressione di 200 kPa ed alla temperatura di 200 °C, è compresso isotermicamente in maniera reversibile in un sistema chiuso cilindro-pistone con un rapporto di compressione 10.

- Mostrare il processo su un diagramma T - s .
- Trovare il volume all'inizio ed alla fine del processo.
- Trovare il calore ed il lavoro scambiati.

[b) $V_1 = 0.216\text{ m}^3$, $V_2 = 2.31 \times 10^{-4}\text{ m}^3$; c) $Q_{12} = -489.7\text{ kJ}$, $L_{12} = - 130\text{ kJ}$]

APPENDICE 2.1 – TABELLE, FIGURE E DIAGRAMMI

	<u>temp. critica</u> K	<u>pressione critica</u> Mpa	<u>vol. spec. critico</u> (cm ³ /g)	<u>temp. tripla</u> K	<u>pressione tripla</u> kPa
Acqua, H ₂ O	647	22.1	3.1	273.16	0.611
Alcool etilico, C ₂ H ₅ OH	516.5	6.39	3.6		
Alcool metilico, C ₃ H ₃ OH	513.2	7.98	3.7		
Ammoniaca, NH ₃	405.4	11.3	4.25	195.4	6.060
Anidride carbonica, CO ₂	304.3	7.40	2.2	216.55	517
Anidride solforosa, SO ₂	430.8	7.88	1.9	197.68	0.167
Argon, Ar	150.9	4.86	1.88	83.81	68.9
Aria	133.2	3.77	2.9		
Azoto, N ₂	125.9	3.39	3.25	63.18	12.5
<i>n</i> -Butano, C ₄ H ₁₀	425.9	3.65	4.4	2.19	5.1
Cloro, Cl	417	7.71			
Cloroformio, C H Cl ₃	536.6	5.47			
Elio, He	5.2	0.228	14.4		
<i>n</i> -Esano, C ₆ H ₁₄	508.2	2.99	4.25		
Etano, C ₂ H ₆	305.4	4.94	4.75	89.89	8x10 ⁻⁴
Etilene, C ₂ H ₄	282.6	5.85	4.6	104.00	0.12
Freon 12 CCl ₂ F ₂	384.7	4.01			
Idrogeno, H ₂	33.2	1.30	32.3	13.84	7.02
Kripton; Kr	209.4	5.50			
Mercurio, Hg				234.20	1.65x10 ⁻⁷
Metano, CH ₄	190.9	4.64	6.2	90.68	11.7
Monoss. di carbonio, CO	132.9	3.50	3.32	68.10	2.03
Neon, Ne	44.2	2.7	2.1	24.57	43.1
Ossigeno, O ₂	154.3	5.03	2.3	54.36	0.152
Ottano, C ₈ H ₁₈	569.3	2.5	4.25		
Propano, C ₃ H ₈	368.7	4.36	1.94		
R134a, C F ₃ C H ₂ F	374.3	4.067			
Xenon, Xe	289.8	5.88			

Tab. a1: Dati critici e tripli di alcune sostanze

SOSTANZA	μ	$R = \mathcal{R}/\mu$	c_p	c_v	k
	kg/kmol	J/kgK	J/kgK	J/kgK	
Acetilene, C ₂ H ₂	26,039	319,43			
Acqua, H ₂ O	18,016	461,70	1872.3	1410.8	1.327
Alcool etilico C ₂ H ₅ OH	46.069	180.48	2496.3	2315.8	1.078
Alcool metilico, C ₃ H ₃ OH	32.04	259.5			
Ammoniaca, NH ₃	17,032	488,38	2130.0	1641.8	1.297
Anidride carbonica, CO ₂	44,012	188,99	841.8	652.9	1.289
Anidride solforosa, SO ₂	64,066	129,83			
Argon, Ar	39,950	208,21	520.3	312.2	1.667
Aria	28,966	287,13	1003.5	716.5	1.400
Azoto, N ₂	28,014	296,91	1041.6	744.8	1.400
<i>n</i> -Butano, C ₄ H ₁₀	58,124	143,04	1716.4	1573.4	1.091
Cloro, Cl	70.91	117.3			
Cloroformio, C H Cl ₃	119.38	69.64			
Elio, He	4,0028	2078,0	5192.6	3115.6	1.667
<i>n</i> -Esano, C ₆ H ₁₄	507.9	3.03			
Etano, C ₂ H ₆	30,071	276,60	1766.2	1489.7	1.186
Etilene, C ₂ H ₄	28,055	296,48	1548.2	1251.8	1.237
Freon 12 CCl ₂ F ₂	120,914	68,77			
Idrogeno, H ₂	2,0158	4126,4	14209.1	10084.9	1.409
Kripton, Kr	83.8	99.21			1.667
Metano, CH ₄	16,044	518,46	2253.7	1735.4	1.299
Metanolo CH ₃ OH	32.042	259.48	1405.0	1145.5	1.227
Monoss. di carbonio, CO	28,012	296,93	1041.3	744.5	1.400
Neon, Ne	20,184	412,10	1029.9	617.9	1.667
Ossido di azoto, NO	30,007	277,19			
Ossigeno, O ₂	31,891	260,83	921.6	661.8	1.393
Ottano, C ₈ H ₁₈	114.23	72.79	1711.3	1638.5	1.044
Propano, C ₃ H ₈	44,097	188,55	1679.4	1490.9	1.126
R134a, C F ₃ C H ₂ F	102.03	81.49			
Xenon, Xe	131.3	63.32			1.667

Tab. a2: Proprietà di vari gas ideali (c_p , c_v e k valutati a 300 K)

Gas	α	$\beta \times 10^3$	$\gamma \times 10^6$	$\delta \times 10^9$	$\epsilon \times 10^{12}$
CO	3.710	-1.619	3.692	-2.032	0.240
CO ₂	2.401	8.735	-6.607	2.002	0
H ₂	3.057	2.677	-5.810	5.521	-1.812
H ₂ O	4.070	-1.108	4.152	-2.964	0.807
O ₂	3.626	-1.878	7.055	-6.764	2.156
N ₂	3.675	-1.208	2.324	-0.632	-0.226
Aria	3.653	-1.337	3.294	-1.913	0.2763
SO ₂	3.267	5.324	0.684	-5.281	2.559
CH ₄	3.826	-3.979	24.558	-22.733	6.963
C ₂ H ₂	1.410	19.057	-24.501	16.391	-4.135
C ₂ H ₄	1.426	11.383	7.989	-16.254	6.749
Gas monatomici*	2.5	0	0	0	0

$$\frac{c_p}{R} = \alpha + \beta T + \gamma T^2 + \delta T^3 + \epsilon T^4$$

T espressa in K, equazioni valide da 300 a 1000 K

- per i gas monoatomici, es. He, Ne, e Ar, c_p è costante in un ampio intervallo di temperatura e pari a $5/2 R$

Tab. a3: Espressioni approssimate per il calcolo di c_p per gas ideali

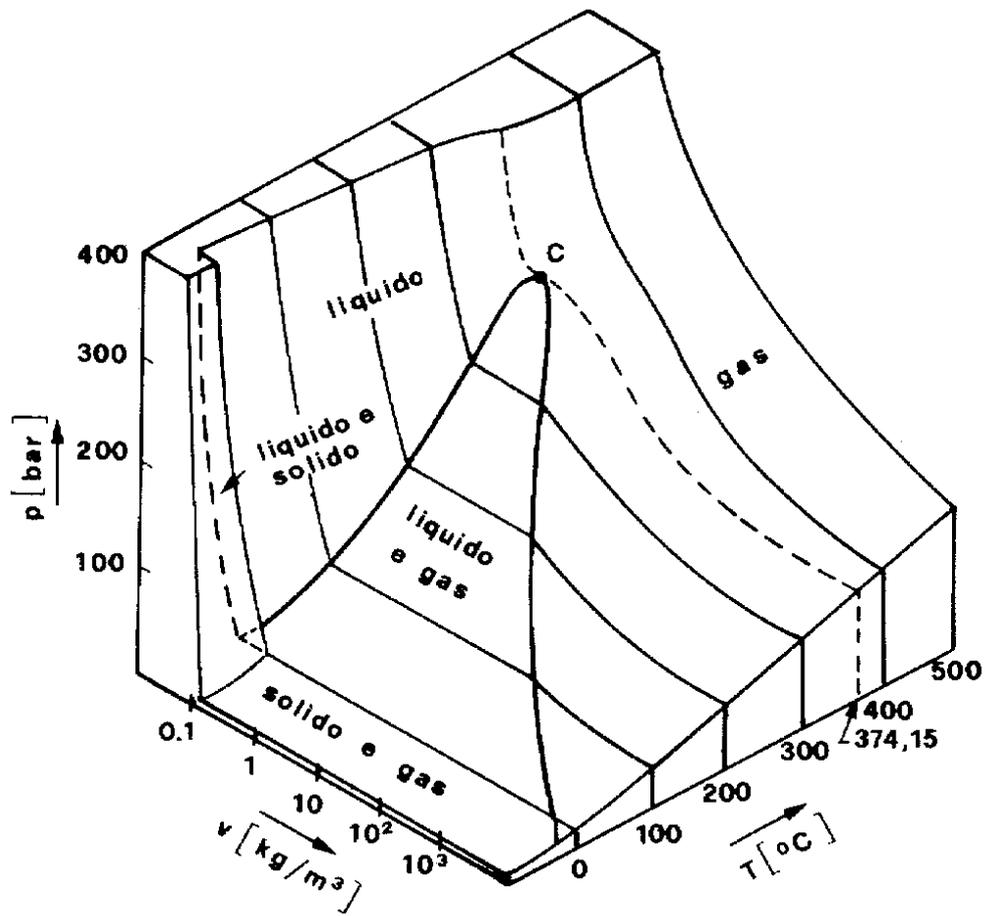


Figura a1. Superficie p - v - T per l'acqua.

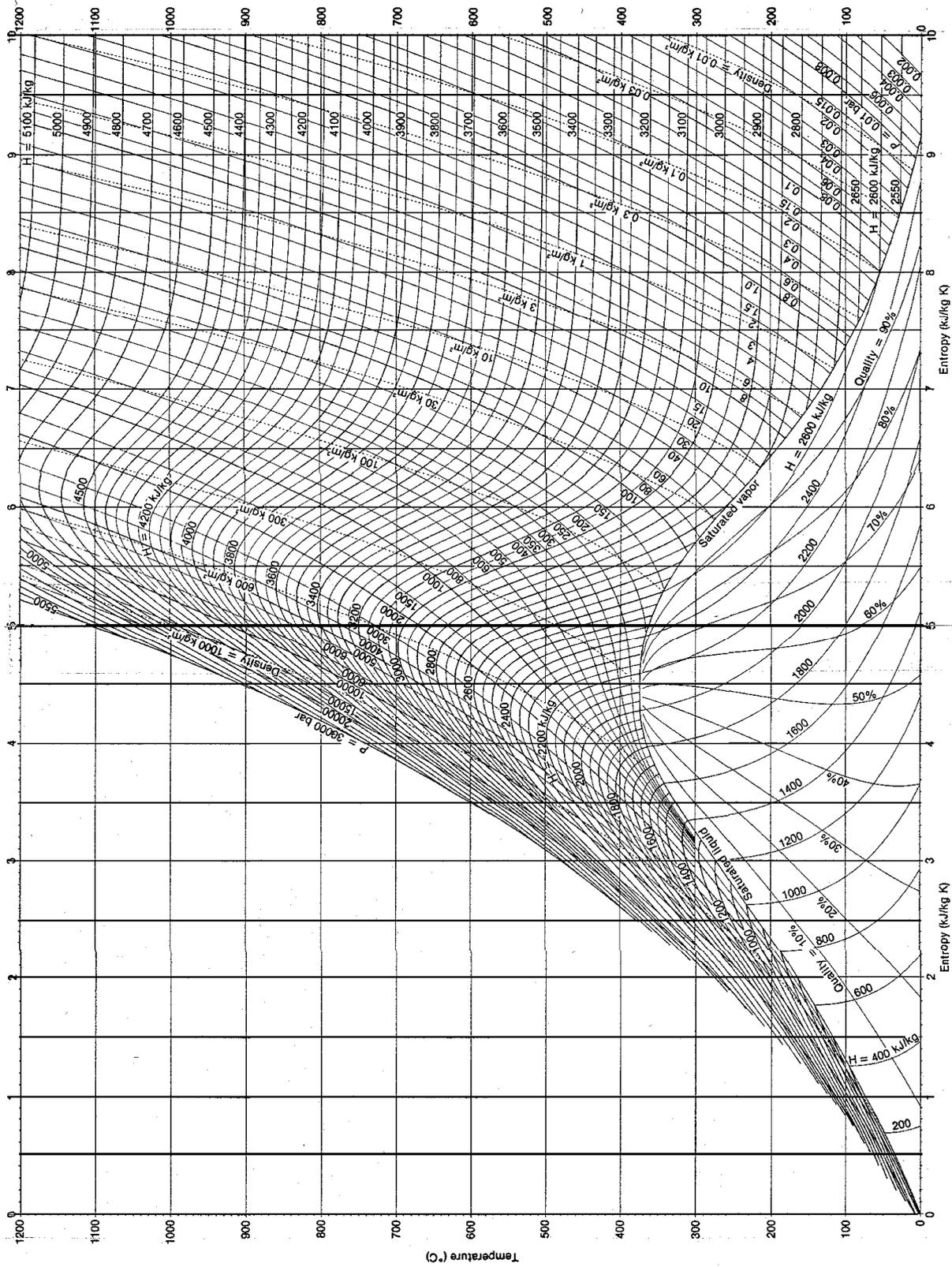


Figura a2. Diagramma T-s per l'acqua.

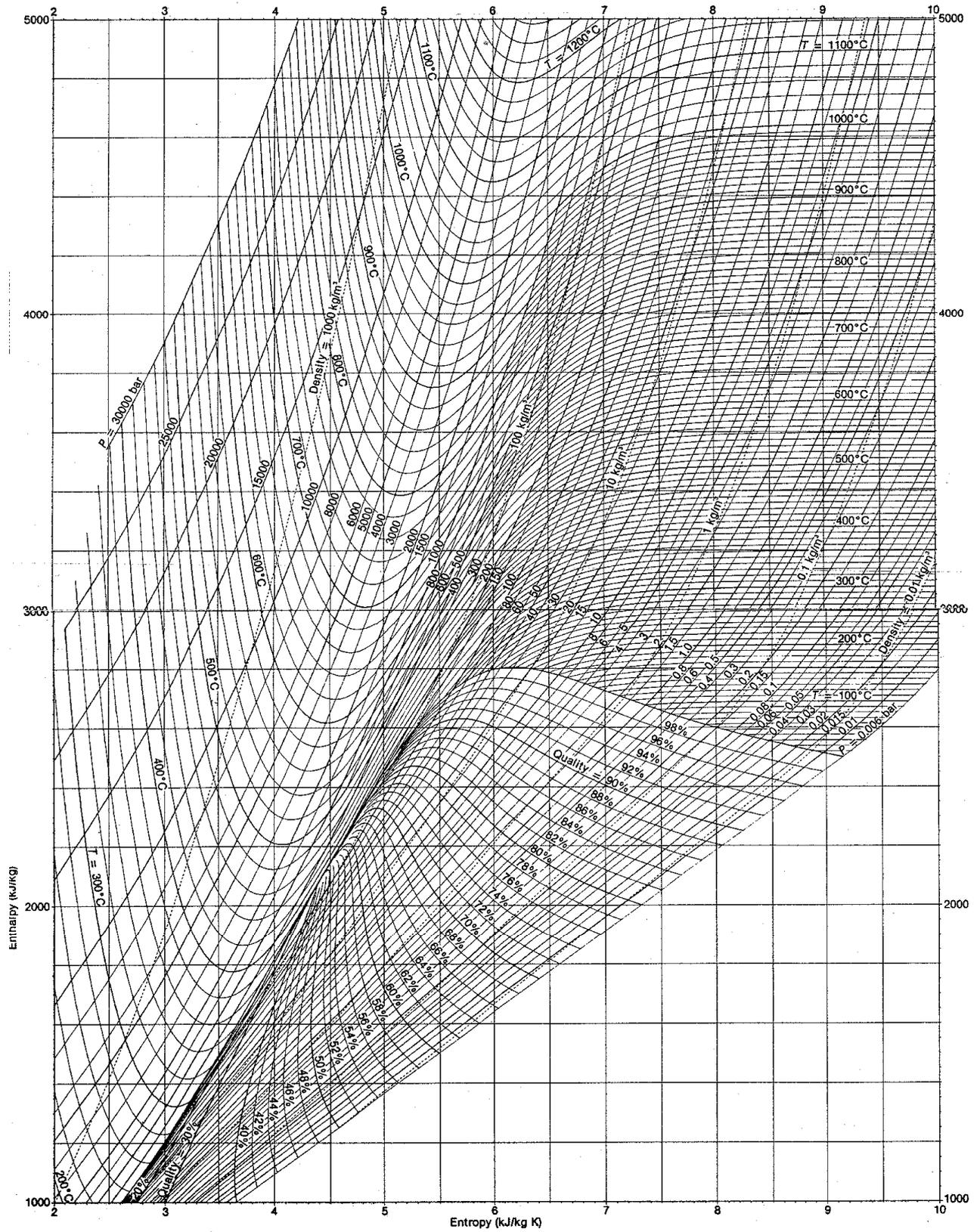


Figura a3. Diagramma di Mollier per l'acqua.

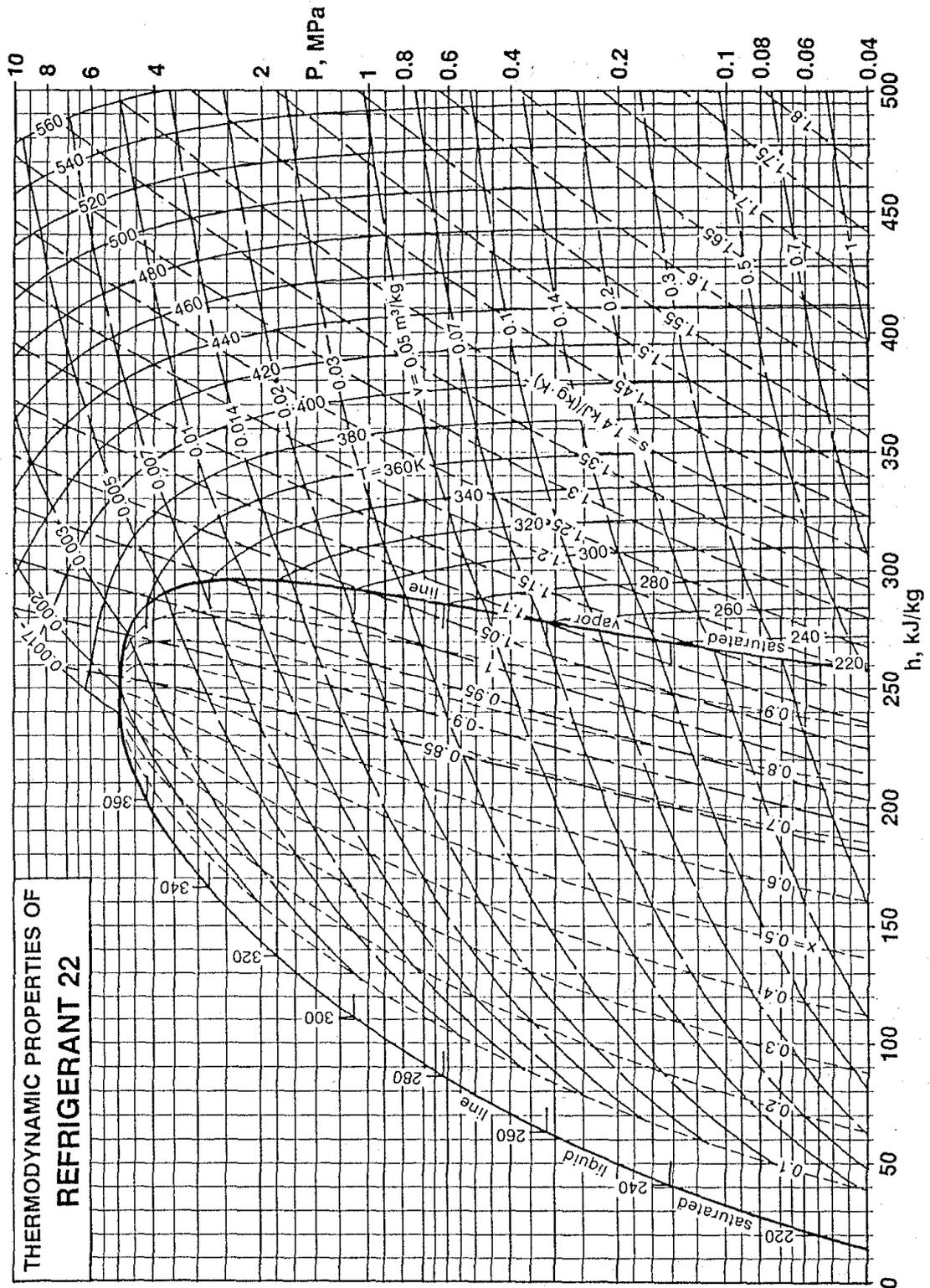


Figura a4. Diagramma $p-h$ per il refrigerante R-22.

APPENDICE 2.2 – PROPRIETÀ DELLE MISCELE DI GAS IDEALI

Come esposto all'inizio di questo capitolo, una miscela di gas in cui non hanno luogo variazioni di composizione (questo vuol dire che sono assenti reazioni chimiche o condensazione di alcuni componenti) può essere considerata una *sostanza pura*, ancorchè *non monocomponente*. In particolare, considereremo qui la caratterizzazione e le proprietà delle miscele di gas ideali. Una di queste miscele è l'aria atmosferica *secca* (in assenza di vapore acqueo) che è costituita per la maggior parte di azoto, ossigeno e argon.

Composizione di una miscela di gas: frazione in massa e frazione molare

Ovviamente, sia la massa M che il numero di moli n di una miscela sono date dalla somma delle masse e delle moli dei suoi componenti

$$M_m = \sum_i M_i \quad , \quad n_m = \sum_i n_i \quad (2.39)$$

Si definisce *frazione in massa* del componente i -esimo

$$x_{m,i} \triangleq \frac{M_i}{M_m} \quad (2.40)$$

E *frazione molare* del componente i -esimo

$$y_i \triangleq \frac{n_i}{n_m} \quad (2.41)$$

È noto che, a pressione e temperatura costante, il volume occupato da un gas dipende solo dal numero di moli; la frazione molare coincide quindi con la frazione in volume.

Si ha ovviamente

$$\sum_i x_{m,i} = 1 \quad , \quad \sum_i y_i = 1 \quad (2.42)$$

La *massa molare* del componente i -esimo è definita come

$$\mu_i \triangleq \frac{M_i}{n_i} \quad (2.43)$$

La massa della miscela può essere espressa come

$$M_m = \sum_i \mu_i n_i \quad (2.44)$$

ed è quindi possibile definire la *massa molare apparente* (o peso molecolare medio) della miscela come

$$\mu_m \triangleq \frac{M_m}{n_m} = \frac{\sum_i \mu_i n_i}{n_m} = \sum_i y_i \mu_i \quad (2.45)$$

Si può infine facilmente ricavare la seguente relazione tra $x_{m,i}$ e y_i

$$x_{m,i} = y_i \frac{\mu_i}{\mu_m} \quad (2.46)$$

ESEMPIO 5-2.1 – Composizione e massa molare dell'aria secca

L'aria secca standard ha la seguente composizione su base volumetrica (e quindi molare): Azoto ($\mu_{N_2}=28.01$ kg/kmol) $y_{N_2} = 78.1\%$, Ossigeno ($\mu_{O_2}=31.89$ kg/kmol) $y_{O_2} = 21.0\%$, Argon ($\mu_{Ar}=39.95$ kg/kmol) $y_{Ar} = 0.9\%$. L'ulteriore gas presente in quantità maggiore, l'anidride carbonica, ha una percentuale (per ora ...) trascurabile, $y_{CO_2} = 0.04\%$. Determinare la massa molare apparente dell'aria e le frazioni in massa dei vari componenti.

Dalla (2.45)

$$\mu_m = \sum_i y_i \mu_i = 0.781 \cdot 28.01 + 0.210 \cdot 31.89 + 0.009 \cdot 39.95 = 28.93 \text{ kg/kmol}$$

Un'analisi più accurata (che tiene conto di tutti i componenti) porterebbe al valore comunemente accettato $\mu_m = 28.966$ kg/kmol. Dalla (2.46)

$$x_{m,N_2} = 0.781 \frac{28.01}{28.93} = 75.6\% \quad , \quad x_{m,O_2} = 0.210 \frac{31.89}{28.93} = 23.2\% \quad , \quad x_{m,Ar} = 0.009 \frac{39.95}{28.93} = 1.2\%$$

□

Comportamento di una miscela di gas ideali: leggi di Dalton e Amagat

Secondo la legge di Gibbs – Dalton ogni componente della miscela di gas ideali agisce come se occupasse da solo il volume V alla temperatura T della miscela: infatti, essendo il volume delle molecole trascurabile, ogni molecola del gas ha la possibilità di occupare una qualunque posizione nel volume stesso. Ogni componente segue pertanto la legge dei gas ideali

$$p_i V = n_i \mathfrak{R} T \quad (2.47)$$

La pressione totale esercitata dalla miscela è la somma delle sue *pressioni parziali* (legge di Dalton)

$$p = \sum_i p_i = \sum_i \frac{n_i \mathfrak{R} T}{V} = \frac{\mathfrak{R} T}{V} \sum_i n_i = n_m \frac{\mathfrak{R} T}{V} = \frac{m_m}{\mu_m} \frac{\mathfrak{R} T}{V} = m_m \frac{\mathfrak{R}}{\mu_m} \frac{T}{V} = m_m R_m \frac{T}{V} \quad (2.48)$$

Dove risulta possibile definire una costante specifica della miscela R_m analogamente a quanto fatto per i gas monocomponente

$$R_m = \frac{\mathfrak{R}}{\mu_m} = \frac{\mathfrak{R}}{\sum_i y_i \mu_i} \quad (2.49)$$

In particolare, la costante specifica dell'aria secca risulta essere $R = 8315/28.966 = 287.1$ J/kg K

Il volume della miscela può essere considerato la somma dei *volumi parziali*, ovvero i volumi che i singoli componenti occuperebbero alla temperatura e alla pressione a cui si trova la miscela (*legge di Amagat*)

$$V = \sum_i V_i = \sum_i \frac{m_i R_i T}{p} = \quad (2.50)$$

Dalle espressioni sopra si possono valutare facilmente le pressioni e i volumi parziali in funzione di quelli totali

$$p_i = y_i p \quad , \quad V_i = y_i V \quad (2.51)$$

e si nota in particolare che la frazione molare può essere espressa in funzione del numero di moli, della pressione parziale o del volume parziale

$$y_i = \frac{n_i}{n_m} = \frac{p_i}{p} = \frac{V_i}{V} \quad (2.52)$$

e tramite la (2.46) si possono trovare le corrispondenti espressioni per le frazioni in massa $x_{m,i}$.

Per valutare se una miscela di gas ha comportamento ideale, si possono considerare i fattori di comprimibilità di ogni componente. In alternativa, ci si può riferire alla pressione ed alla temperatura ridotta, valutando approssimativamente una temperatura ed una pressione *pseudocritica* con la *regola di Kay*

$$T_{C,m} = \sum_i y_i T_{C,i} \quad , \quad p_{C,m} = \sum_i y_i p_{C,i} \quad (2.53)$$

L'errore così commesso non supera il 10% nella maggior parte delle applicazioni.

Proprietà delle miscele di gas ideali: energia interna, entalpia ed entropia.

L'energia interna, l'entalpia e l'entropia sono proprietà estensive e possono essere quindi determinate come somma di quelle dei componenti della miscela

$$U_m = \sum_i U_i \quad , \quad H_m = \sum_i H_i \quad , \quad S_m = \sum_i S_i \quad (2.54)$$

In termini di grandezze specifiche (massiche) si ha quindi, con semplici passaggi

$$u_m = \sum_i x_{m,i} u_i \quad , \quad h_m = \sum_i x_{m,i} h_i \quad , \quad s_m = \sum_i x_{m,i} s_i \quad (2.55)$$

è possibile estendere le relazioni precedenti alle variazioni delle proprietà di stato e di nuovo si ha, con semplici passaggi, supponendo i calori specifici costanti

$$\begin{aligned} du_m &= \bar{c}_v dT \quad , \quad \bar{c}_v = \sum_i x_{m,i} c_{v,i} \\ dh_m &= \bar{c}_p dT \quad , \quad \bar{c}_p = \sum_i x_{m,i} c_{p,i} \\ ds_m &= \bar{c}_v \frac{dT}{T} + R_m \frac{dv}{v} = \bar{c}_p \frac{dT}{T} - R_m \frac{dp}{p} \end{aligned} \quad (2.56)$$

Si può anche definire l'esponente dell'adiabatica k e continuano a valere le relazioni associate

$$\bar{k} = \frac{\bar{c}_p}{\bar{c}_v}, \quad R_m = \bar{c}_p - \bar{c}_v, \quad \bar{c}_p = R_m \frac{\bar{k}}{\bar{k}-1}, \quad \bar{c}_v = R_m \frac{1}{\bar{k}-1} \quad (2.57)$$

Se i calori specifici non possono essere considerati costanti con la temperatura il calcolo diviene più complesso, e occorre valutare separatamente le variazioni di energia interna o entalpia dei gas della miscela. Rimane comunque valida la regola di additività delle proprietà di stato estensive.

ESEMPIO 5-2.2 – Riscaldamento ed espansione di una miscela di gas ideali

Una miscela costituita da 0.4 kg di Azoto e 0.3 kg di Anidride Carbonica, alla pressione iniziale di $p_1=4$ bar, e alla temperatura iniziale $T_1=300$ K, viene riscaldata isovolumicamente fino a $T_2=800$ K e successivamente fatta espandere adiabaticamente e reversibilmente fino a $p_3=4$ bar. Determinare Q_{12} e T_3 e il volume finale della miscela V_3 .

Una volta ottenute le proprietà dei due gas dalla Tab. a2, si ricavano i coefficienti della miscela dalle (2.56) e (2.57)

$$x_{m,N_2} = \frac{0.4}{0.4+0.3} = 0.57, \quad x_{m,CO_2} = \frac{0.3}{0.4+0.3} = 0.43$$

$$\bar{c}_v = \sum_i x_{m,i} c_{v,i} = 0.57 \cdot 744.8 + 0.43 \cdot 652.9 = 705.28 \text{ J/kg K}$$

$$\bar{c}_p = \sum_i x_{m,i} c_{p,i} = 0.57 \cdot 1041.6 + 0.43 \cdot 841.8 = 955.68 \text{ J/kg K}$$

$$R_m = \bar{c}_p - \bar{c}_v = 250.4 \text{ J/kg K}$$

$$\bar{k} = \frac{\bar{c}_p}{\bar{c}_v} = 1.36$$

dopodichè si ha semplicemente

$$Q_{12} = M (u_{m2} - u_{m1}) = M \bar{c}_v (T_2 - T_1) = (0.3+0.4) \cdot 705.28 (800 - 300) = 246.8 \text{ kJ}$$

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} = 4 \cdot \frac{800}{300} = 10.67 \text{ bar}$$

$$T_3 = T_2 \left(\frac{p_3}{p_2} \right)^{\frac{\bar{k}-1}{\bar{k}}} = 800 \left(\frac{4}{10.67} \right)^{0.265} = 617 \text{ K}$$

$$V_3 = \frac{M R_m T_3}{p_3} = \frac{0.7 \cdot 250.4 \cdot 617}{4 \cdot 10^5} = 0.27 \text{ m}^3$$

□

ESEMPIO 5-2.3 – Mescolamento adiabatico di due gas ideali a calore specifico costante

Un serbatoio rigido ed adiabatico è diviso in due camere da un setto interno: la prima contiene un volume a $V_{1N}=0.4 \text{ m}^3$ di Azoto a $T_{1N}=373 \text{ K}$ e $p_{1N}=2 \text{ bar}$, la seconda contiene un volume $V_{1C}=0.6 \text{ m}^3$ di Anidride Carbonica a $T_{1C}=293 \text{ K}$ e $p_{1C}=1 \text{ bar}$. Il setto viene rimosso e i due gas si mescolano. Determinare la temperatura e pressione finale e la variazione di entropia del sistema. Entrambi i fluidi possono essere considerati gas ideali con calore specifico costante.

Determiniamo innanzitutto la massa, il numero di moli e la frazione molare dei due componenti

$$M_N = \frac{p_{1N}V_{1N}}{R_N T_{1N}} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 0.4}{296.91 \cdot 373} = 0.72 \text{ kg} \quad , \quad M_C = \frac{p_{1C}V_{1C}}{R_C T_{1C}} = \frac{1 \cdot 10^5 \cdot 0.6}{188.99 \cdot 293} = 1.08 \text{ kg}$$

$$n_N = \frac{M_N}{\mu_N} = \frac{0.72}{28.01} = 0.0257, \quad n_C = \frac{M_C}{\mu_C} = \frac{1.08}{44.01} = 0.0245 \quad , \quad n_m = n_N + n_C = 0.0502$$

$$y_N = \frac{n_N}{n_m} = \frac{0.0257}{0.0502} = 0.512, \quad y_C = \frac{n_C}{n_m} = \frac{0.0245}{0.0502} = 0.488$$

Essendo il sistema isolato, l'energia interna è costante, e i due gas si portano alla stessa temperatura finale

$$U_{m2} = U_{N2} + U_{C2} = U_{N1} + U_{C1} \quad \rightarrow \quad U_{N2} - U_{N1} = U_{C1} - U_{C2}$$

$$\rightarrow M_N c_{vN} (T_2 - T_{1N}) = M_C c_{vC} (T_2 - T_{1C})$$

$$T_2 = \frac{M_N c_{vN} T_{1N} + M_C c_{vC} T_{1C}}{M_N c_{vN} + M_C c_{vC}} = \frac{0.72 \cdot 744.8 \cdot 373 + 1.08 \cdot 652.9 \cdot 293}{0.72 \cdot 744.8 + 1.08 \cdot 652.9} = 327.5 \text{ K}$$

Per trovare la pressione finale possiamo usare l'equazione di stato della miscela, dopo aver determinato la sua costante specifica; il volume occupato sarà la somma dei due volumi iniziali.

$$\mu_m = y_N \mu_N + y_C \mu_C = 0.512 \cdot 28.01 + 0.488 \cdot 44.01 = 35.82 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$$

$$R_m = \frac{\mathfrak{R}}{\mu_m} = \frac{8315}{35.82} = 232.15 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

$$p_2 = \frac{M_m R_m T_2}{V_2} = \frac{(0.72 + 1.08) \cdot 232.15 \cdot 327.5}{(0.4 + 0.6)} = 1.39 \text{ bar}$$

Infine, la variazione di entropia sarà data da

$$\Delta S_s = S_{N2} + S_{C2} - (S_{N1} + S_{C1}) = \Delta S_N + \Delta S_C$$

Bisogna però tenere presente che nello stato finale ognuno dei due gas si trova alla sua pressione parziale, data dalla (2.52)

$$\begin{aligned}\Delta S_N &= M_N \left[c_{pN} \ln \left(\frac{T_2}{T_{1N}} \right) - R_N \ln \left(\frac{y_N p_2}{p_{1N}} \right) \right] = \\ &= 0.72 \left[1041.6 \ln \left(\frac{327.5}{373} \right) - 296.91 \ln \left(\frac{0.512 \cdot 1.39}{2} \right) \right] = 123.33 \frac{\text{J}}{\text{K}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta S_C &= M_C \left[c_{pC} \ln \left(\frac{T_2}{T_{1C}} \right) - R_C \ln \left(\frac{y_C p_2}{p_{1C}} \right) \right] = \\ &= 1.08 \left[841.8 \ln \left(\frac{327.5}{293} \right) - 188.99 \ln \left(\frac{0.488 \cdot 1.39}{1} \right) \right] = 180.38 \frac{\text{J}}{\text{K}}\end{aligned}$$

$$\Delta S_s = \Delta S_N + \Delta S_C = 303.71 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

La variazione di entropia è positiva, il che indica che il processo di miscelamento è (come del resto era ovvio supporre) irreversibile. Da notare che entrambi i gas subiscono una variazione di entropia positiva, a causa della forte diminuzione di pressione.

□

Appunti ed Esercizi di *Fisica Tecnica*

Cap. 3. Le equazioni di bilancio di massa, energia ed entropia

Paolo Di Marco

Versione 2020.00 – 27.10.2020.

La presente dispensa è redatta ad esclusivo uso didattico per gli allievi dei corsi di studi universitari dell'Università di Pisa. L'autore se ne riserva tutti i diritti. Essa può essere riprodotta solo totalmente ed al fine summenzionato, non può essere alterata in alcuna maniera o essere rivenduta ad un costo superiore a quello netto della riproduzione. Ogni altra forma di uso e riproduzione deve essere autorizzata per scritto dall'autore.

L'autore sarà grato a chiunque gli segnali errori, inesattezze o possibili miglioramenti.

Introduzione

Nel presente capitolo vengono introdotte le equazioni di bilancio della massa, dell'energia e dell'entropia nella forma più generale in cui vengono affrontate nel presente corso. Queste equazioni costituiscono la parte centrale del corso: nei capitoli seguenti, esse verranno opportunamente semplificate ed applicate allo studio dei sistemi aperti e delle macchine termiche, che rappresenta il nostro principale obiettivo. Risulta quindi evidente che è necessario comprenderle in maniera approfondita. La comprensione del concetto di "bilancio", unita naturalmente alla capacità di metterlo in pratica in varie situazioni, costituisce inoltre, a parere di chi scrive, una delle abilità fondamentali dell'ingegnere.

E' bene ricordare che le equazioni di bilancio della termodinamica sono valide indipendentemente dal fluido considerato e dal tipo di trasformazione che avviene (reversibile o meno). Le ipotesi sul fluido e sul tipo di trasformazione vengono introdotte in una fase successiva dello studio.

GENERALITA' SUL BILANCIO DI UNA GRANDEZZA ESTENSIVA

Per una qualunque proprietà *estensiva*, X , è possibile scrivere un'equazione di bilancio che si esprime generalmente nella forma:

$$\begin{aligned} \text{Variazione nel tempo } \Delta t \text{ di } X = & \quad \text{Quantità di } X \text{ generata nel sistema nel tempo } \Delta t \\ & - \text{Quantità di } X \text{ distrutta nel sistema nel tempo } \Delta t \\ & + \text{Quantità di } X \text{ entrata (per flusso o convezione) nel sistema nel} \\ & \quad \text{tempo } \Delta t \\ & - \text{Quantità di } X \text{ uscita (per flusso o convezione) dal sistema nel} \\ & \quad \text{tempo } \Delta t \end{aligned}$$

Per quanto riguarda gli ultimi due termini (entrata ed uscita) è possibile operare una ulteriore distinzione al loro interno: infatti la proprietà X può uscire dal sistema *fluendo* attraverso le pareti del sistema stesso oppure esserne *trasportata fuori* insieme alla massa uscente: nel primo caso si parla di *termine di flusso*, nel secondo di *termine convettivo* (dal latino *conveho*, trasporto insieme) o, talvolta, *advettivo*. Ad esempio, l'energia può uscire dal sistema attraverso le pareti (sotto forma di calore o lavoro) od esserne trasportata fuori insieme alla massa uscente, che porta via con sé la propria energia cinetica, potenziale ed interna.

Non sempre tutti i termini suddetti sono presenti. In particolare, valgono le regole seguenti, che consentono spesso di semplificare notevolmente l'equazione di bilancio:

- Se un sistema è a *regime*, il termine di **variazione** è nullo.
- Se un sistema è *isolato*, tutti i termini di **entrata ed uscita** sono nulli.
- Se un sistema è *chiuso*, i termini **convettivi** sono nulli.
- Se una grandezza ammette un *principio di conservazione* (cioè non si crea né si distrugge) i termini di **generazione** o **distruzione** sono per definizione nulli.

Il concetto di bilancio è applicabile non solo alle grandezze che abbiamo incontrato in termodinamica, ma anche con modifiche non sostanziali a grandezze non proprie della fisica (ad es. al flusso di denaro, alla popolazione di un paese, alle specie animali in un ecosistema ...). E' inoltre possibile fare un *bilancio di quantità di moto*, molto usato in fluidodinamica.

Bilancio di massa

Il *principio di conservazione della massa* è uno dei cardini della fisica classica, quindi assumeremo nulli i termini di produzione e distruzione di tale grandezza.

$$\frac{dM}{dt} = \sum_i G_i - \sum_u G_u \quad (3.1)$$

L'equazione suddetta rappresenta in forma matematica un concetto abbastanza evidente intuitivamente: la variazione di massa per unità di tempo in un sistema è data dalla differenza tra le somme delle portate entranti meno quelle uscenti.

ESEMPIO 3.1 – Bilancio di massa

In una vasca, che inizialmente contiene 100 kg di acqua, entrano attraverso un rubinetto 5 kg/s di acqua, mentre dallo scarico ne escono 2 kg/s. Determinare la massa di acqua contenuta nella vasca dopo 4 minuti.

Abbiamo a che fare con un sistema (la massa di acqua contenuta nella vasca) *non a regime, aperto*, con un solo ingresso ed una sola uscita.

L'equazione di bilancio della massa può allora essere scritta nella forma

$$\frac{dM}{dt} = G_i - G_u \Rightarrow dM = (G_i - G_u) dt$$

essendo le portate costanti, l'equazione può essere facilmente integrata tra gli stati iniziale e finale

$$\int_{M_i}^{M_f} dM = \int_{t_i}^{t_f} (G_i - G_u) dt$$

da cui infine:

$$\int_{M_i}^{M_f} dM = (G_i - G_u) \int_{t_i}^{t_f} dt \Rightarrow M_f - M_i = (G_i - G_u)(t_f - t_i)$$

$$M_f = 100 + (5 - 2) \cdot (240 - 0) = 820 \text{ kg}$$

□

Per i sistemi chiusi, si ha per definizione che tutte le portate sono nulle (essendo la superficie del sistema impermeabile alla massa) e quindi la equazione precedente si riduce a

$$\begin{cases} G_u = G_i = 0 \\ M = cost \end{cases} \quad (3.2)$$

questa è la ragione per cui i sistemi chiusi vengono detti anche masse di controllo (in quanto si studia la evoluzione di una quantità di massa fissata).

Nel caso di sistemi aperti *a regime* la massa contenuta è ugualmente costante (in quanto, essendo il sistema a regime, nessuna proprietà dipende dal tempo) ma in questo caso, dato che le portate non sono nulle, la equazione di bilancio di massa si riduce a

$$\begin{cases} \sum_i G_i = \sum_u G_u = G \\ M = cost \end{cases} \quad (3.3)$$

ed in particolare, per sistemi con un solo ingresso ed una sola uscita

$$G_u = G_i = G \quad (3.4)$$

Bilancio di energia

Analogamente alla massa, la fisica classica assume anche che *l'energia si conserva*.

Nel corso di questo secolo, la fisica relativistica ha sostituito i due principi di conservazione della massa e dell'energia con un unico *principio di conservazione della massa-energia* (o più propriamente, principio di conservazione dell'energia relativistica): ovvero la *somma* delle due grandezze (che naturalmente in questo caso vanno espresse nelle stesse unità) si conserva. Tuttavia nella maggior parte delle applicazioni ingegneristiche le trasformazioni di massa in energia e viceversa sono trascurabili, per cui si può continuare a ipotizzare che le due grandezze si conservino separatamente.

Anche nel caso dell'energia dunque i termini di generazione e distruzione dovrebbero essere nulli. Tuttavia, nella maggioranza dei casi si considera solo *un bilancio parziale* di energia. Ad esempio, quando nel nostro sistema sono presenti reazioni chimiche, si può pensare che l'energia chimica di combustione, anziché essere introdotta con i reagenti, sia *“prodotta”* all'interno del sistema; diversamente, dovremmo aggiungere un termine di natura chimica all'entalpia dei prodotti entranti. Analogamente, nel caso di reazioni nucleari, bisognerebbe considerare il bilancio massa-energia ed è più semplice pensare che l'energia venga *“creata”* dentro il sistema stesso anziché essere dovuta alla distruzione di massa (di entità comunque trascurabile) derivante dalle trasmutazioni atomiche. In tutti questi casi, si aggiunge un termine W_c , ovviamente *fittizio*, di *creazione di energia* alla equazione di bilancio.

Nella sua forma più generale, il bilancio di energia si scrive quindi come

$$\frac{d(U + E_c + E_p)}{dt} = W_t - W_m + \sum_i G_i (u_i + e_{ci} + e_{pi}) - \sum_u G_u (u_u + e_{cu} + e_{pu}) + W_c \quad (3.5)$$

E' bene ribadire ancora una volta la natura *fittizia* del termine W_c : esso deriva dal fatto che alcune forme di energia sono state *escluse* dal bilancio.

Nella W_t e W_m indicano rispettivamente la potenza termica e la potenza meccanica scambiate. Dal punto di vista ingegneristico, risulta utile suddividere la potenza meccanica scambiata in due termini: la prima rappresenta la potenza scambiata attraverso la parte di superficie del sistema non attraversata dalla massa, la seconda quella scambiata in corrispondenza delle aperture del sistema

$$W_m = W'_m + W_p \quad (3.6)$$

la differenza consiste nel fatto che, mentre la prima aliquota è *utilizzabile dal punto di vista tecnico* (ed è pertanto detta *potenza utile*) la seconda, pur dovendo essere computata tra i contributi di scambio meccanico, rappresenta la potenza scambiata nella introduzione od estrazione di fluido dal sistema: pertanto essa costituisce un *contributo intrinseco* al funzionamento di un sistema aperto e *non è utilizzabile tecnicamente*.

Ovviamente, tale distinzione non ha significato per un sistema chiuso.

La potenza di estrazione/introduzione è detta anche *potenza di pulsione* e per una apertura di superficie A su cui agisce la pressione p , attraversata dal fluido con velocità w , è esprimibile come

$$|W_{pi}| = F_i w_i = p_i A_i w_i = p_i v_i \rho_i A_i w_i = p_i v_i G_i \quad (3.7)$$

dove si è sfruttata la identità $\rho v=1$. Il segno deve considerarsi *negativo* per le aperture di ingresso (lavoro fatto sul sistema) e *positivo* per le bocche di uscita.

Si ha pertanto

$$W_p = - \sum_i p_i v_i G_i + \sum_u p_u v_u G_u \quad (3.8)$$

e sostituendo nella equazione di bilancio

$$\begin{aligned} \frac{d(U + E_c + E_p)}{dt} = W_t - W'_m + \sum_i p_i v_i G_i - \sum_u p_u v_u G_u + \\ \sum_i G_i (u_i + e_{ci} + e_{pi}) - \sum_u G_u (u_u + e_{cu} + e_{pu}) + W_c \end{aligned} \quad (3.9)$$

le sommatorie al secondo membro possono essere raggruppate come segue

$$\begin{aligned} \frac{d(U + E_c + E_p)}{dt} = W_t - W'_m \\ + \sum_i G_i (u_i + p_i v_i + e_{ci} + e_{pi}) - \sum_u G_u (u_u + p_u v_u + e_{cu} + e_{pu}) + W_c \end{aligned} \quad (3.10)$$

ed infine si può introdurre l'entalpia ($h=u+pv$) al posto della energia interna

$$\frac{d(U + E_c + E_p)}{dt} = W_t - W'_m + \sum_i G_i (h_i + e_{ci} + e_{pi}) - \sum_u G_u (h_u + e_{cu} + e_{pu}) + W_c \quad (3.11)$$

Questo vuol dire che la variazione nella unità di tempo della energia totale (cinetica più potenziale più interna) del sistema è pari alla potenza termica entrante, meno la potenza *utile* (ovvero quella utilizzabile dal punto di vista tecnico, che per convenzione si considera positiva se uscente), più l'energia introdotta nel sistema dal flusso di massa entrante, meno l'energia estratta dal sistema dal flusso di massa uscente. Questi ultimi due termini sono appunto termini *convettivi*, dato che rappresentano il flusso di energia trasportato dal flusso di massa, ed includono il lavoro necessario per la introduzione/estrazione del flusso stesso.

A questo punto dovrebbe essere chiaro perché nei termini convettivi compaia l'entalpia al posto della energia interna. La ragione è che alla introduzione (o alla estrazione) di una quantità di massa dal sistema è associato un lavoro per unità di tempo, pari a $G_i p_i v_i$. Tale termine, pur dovendo figurare tra i contributi meccanici al bilancio di energia, non è utilizzabile tecnicamente e viene pertanto conglobato tra i contributi all'energia del sistema dovuti allo scambio di massa.

Le tabelle seguenti riassumono le forme più comuni in cui il bilancio di energia viene espresso per i sistemi chiusi e per quelli aperti a regime. In tutte le espressioni si è assunto $W_c=0$. Altre forme verranno considerate nei casi esposti nel seguito.

$\frac{d(U + E_c + E_p)}{dt} = W_t - W_m$	[W]	Bilanci di energia riferiti a tutto il sistema, per unità di tempo.
$\frac{dU}{dt} = W_t - W_m$	[W]	Come sopra, ma con energia potenziale e cinetica trascurabili.
$\frac{du}{dt} = \frac{W_t}{M} - \frac{W_m}{M}$	[W/kg]	Ottenuta dalla precedente dividendo per M (riferita ad 1 kg di fluido)
$du = dq - dl$	[J/kg]	Ottenuta dalla precedente moltiplicando per dt (trasf. infinitesima)
$(u_2 - u_1) = q_{12} - l_{12}$	[J/kg]	Ottenuta per integrazione dalla precedente

Tabella 1: Forme del bilancio di energia (I principio) per sistemi chiusi.

$0 = W_t - W'_m + G[(h_i + e_{ci} + e_{pi}) - (h_u + e_{cu} + e_{pu})]$	[W]	Bilancio di energia riferiti a tutto il sistema, per unità di tempo.
$W_t - W'_m + G(h_i - h_u) = 0$	[W]	Come sopra, ma con energia potenziale e cinetica trascurabili.
$h_u - h_i = q_{iu} - l'_{iu}$	[J/kg]	Ottenuta dalla precedente dividendo per G (riferita ad 1 kg di fluido che attraversa il sistema)
$dh = dq - dl'$	[J/kg]	Riferita ad una "trasformazione infinitesima" (per un sistema con ingresso e uscita distanti un infinitesimo).

Tabella 2: Forme del bilancio di energia (I principio) per sistemi aperti a regime con un solo ingresso ed una sola uscita.

Nel successivo capitolo 5, l'equazione di bilancio dell'energia verrà estesamente applicata ai sistemi aperti a regime, che sono quelli di maggiore interesse tecnico. Per adesso vediamo due applicazioni a *sistemi aperti non a regime*.

ESEMPIO 3.2 – Riempimento di una bombola con gas perfetto da una linea di alimentazione.

Si vuole riempire una bombola di volume $V = 5 \text{ L}$, che contiene inizialmente azoto alla pressione $p_1 = 2 \text{ bar}$ ed alla temperatura $T_1 = 20 \text{ °C}$, prelevando azoto da una linea di alimentazione alla pressione $p_a = 200 \text{ bar}$ ed alla temperatura $T_a = 15 \text{ °C}$. Determinare la massa di azoto contenuta della bombola e la sua temperatura al termine del riempimento, quando la pressione nella bombola raggiunge i 200 bar. L'azoto può essere considerato un gas perfetto con calori specifici costanti e il sistema può essere considerato adiabatico.

 *La soluzione è riportata nel file C3RIEMP-GP.XLS*

Abbiamo a che fare con un sistema (la quantità di azoto contenuta nella bombola) *non a regime, aperto*, con un solo ingresso. La superficie del sistema è *rigida ed adiabatica*, quindi gli scambi di lavoro utile e di calore con l'esterno sono nulli ed il volume V del sistema è costante. Definiamo G_a la portata entrante (incognita e variabile nel tempo).

Le equazioni di bilancio della massa e dell'energia possono allora essere scritte (trascurando i termini cinetico e potenziale) nella forma

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = G_a \\ \frac{dU}{dt} = G_a h_a \end{cases}$$

combinando le quali si ottiene

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dM}{dt} h_a \Rightarrow dU = dM h_a$$

e integrando tra la condizione iniziale e finale

$$U_2 - U_1 = (M_2 - M_1) h_a$$

Nel caso di un gas perfetto si possono usare le relative equazioni di stato, assumendo entalpia ed energia interna nulle a 0 K ¹ e calori specifici costanti:

$$u = c_v T \quad , \quad U = M c_v T \quad , \quad h_a = c_p T_a$$

sostituendo nella equazione precedente si ha

$$c_v M_2 T_2 - c_v M_1 T_1 = (M_2 - M_1) c_p T_a$$

tenuto conto che dall'equazione di stato (v. Cap.3)

$$MT = \frac{pV}{R}$$

si ottiene

$$\frac{c_v}{R} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = (M_2 - M_1) c_p T_a$$

ed essendo $V_2 = V_1 = V$

¹ Si potrebbe verificare facilmente che si ottiene lo stesso risultato ponendo $u_0 = 0$ e $h_0 = p_0 v_0 = RT_0$ ad una qualunque temperatura arbitraria $T = T_0$

$$\frac{c_v V}{R} (p_2 - p_1) = (M_2 - M_1) c_p T_a$$

Dalla equazione precedente si ricava M_2 , ricordando che $M_1 = \frac{p_1 V}{R T_1}$ e $k = \frac{c_p}{c_v}$

$$\begin{aligned} M_2 &= \frac{p_1 V}{R T_1} + \frac{V}{k R T_a} (p_2 - p_1) = \\ &= \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 0.005}{296.91 \cdot 293.15} + \frac{0.005}{1.4 \cdot 296.91 \cdot 288.15} (2 \cdot 10^7 - 2 \cdot 10^5) = 0.838 \text{ kg} \end{aligned}$$

e si ricava infine T_2 dall'equazione di stato

$$T_2 = \frac{p_2 V}{R M_2} = \frac{2 \cdot 10^7 \cdot 0.005}{296.91 \cdot 0.838} = 401.9 \text{ K} = 128.7 \text{ °C}$$

La bombola quindi si riscalda; infatti, è pericoloso toccare le bombole appena sono state riempite: talvolta il riempimento si esegue in un bagno d'acqua per smaltire il calore, ed in questo modo si aumenta anche la quantità di gas introdotta. Ma perché accade questo? Il gas che viene introdotto successivamente comprime il gas già presente nella bombola, riscaldandolo. Da un punto di vista energetico, il lavoro meccanico (di pulsione) fatto per introdurre il gas si traduce in incremento di energia interna del sistema.

Nel caso che non sia accettabile considerare il fluido nella bombola un gas ideale, ci saremmo dovuti fermare alla equazione $dU = dM h_a$ e fare uso delle tabelle termodinamiche. La equazione differenziale suddetta dovrebbe allora essere *integrata numericamente*, calcolando l'incremento di energia conseguente ad un piccolo incremento di massa e quindi determinando le rimanenti variabili di stato dal valore del volume specifico $v = V/M$ e dell'energia interna, che determinano lo stato del sistema in ogni istante. Detto procedimento andrebbe ripetuto fino a determinare l'incremento di massa che provoca il raggiungimento della pressione finale desiderata.

Nel caso considerato, se si assume per l'azoto il comportamento di gas reale e si calcolano le proprietà termodinamiche con le relative tabelle, dopo alcuni tentativi si ottiene $M_2 = 0.8 \text{ kg}$, $T_2 = 116 \text{ °C}$.

□

ESEMPIO 3.3 – Svuotamento di una bombola.

Da una bombola di volume $V = 15 \text{ L}$, che contiene inizialmente isobutano saturo alla temperatura $T_1 = 20 \text{ °C}$, viene prelevata una portata costante $G_u = 0.02 \text{ kg/s}$ di vapore (di isobutano) saturo secco. Determinare la potenza termica scambiata tra la bombola e l'ambiente nell'ipotesi che la temperatura del sistema si mantenga costante.

Abbiamo a che fare con un sistema (la quantità di isobutano contenuta nella bombola) *non a regime, aperto*, con una sola uscita. La superficie del sistema è *rigida* ma non *adiabatica*, quindi lo scambio di lavoro utile con l'esterno è nullo. Il volume totale V è costante. Dato che la temperatura è costante, anche la pressione e le varie grandezze di saturazione (v_f etc.), tra cui quindi anche h_g , si mantengono costanti.

Le equazioni di bilancio della massa e dell'energia possono allora essere scritte (trascurando i termini cinetico e potenziale) nella forma

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = -G_u \\ \frac{dU}{dt} = W_T - G_u h_g \end{cases}$$

Procedendo come nell'esempio precedente, otteniamo integrando le due equazioni

$$\begin{cases} M_2 - M_1 = -G_u \Delta t \\ U_2 - U_1 = W_T \Delta t - G_u h_g \Delta t \end{cases}$$

Dove Δt è l'intervallo di tempo considerato (vedremo che il risultato non dipende da esso).

Bisogna notare che abbiamo anche implicitamente ammesso che W_T sia costante, come sarebbe dimostrabile e come sarà verificato a posteriori.

Convieni adesso (come molto spesso nelle trasformazioni a pressione costante) far comparire l'entalpia al posto dell'energia interna, sfruttando la relazione $H = U + pV$

$$\begin{cases} M_2 - M_1 = -G_u \Delta t \\ H_2 + p_2 V_2 - U_1 + p_1 V_1 = W_T \Delta t - G_u h_g \Delta t \end{cases}$$

Ed essendo $p_2 = p_1$, $V_2 = V_1$

$$\begin{cases} M_2 - M_1 = -G_u \Delta t \\ H_2 - H_1 = W_T \Delta t - G_u h_g \Delta t \end{cases}$$

Per completare il calcolo sono necessari alcuni laboriosi passaggi matematici. La seconda equazione può essere rielaborata come segue

$$M_2 h_2 - M_1 h_1 = (W_T - G_u h_g) \Delta t$$

Dalla definizione di titolo risulta

$$v = v_f + x (v_g - v_f) = v_f + x v_{fg}$$

$$h = h_f + x (h_g - h_f) = h_f + x h_{fg}$$

ricavando x dalla prima equazione e sostituendo nella seconda si ha

$$x = \frac{v - v_f}{v_{fg}}$$

$$h_1 = h_f + \frac{v_1 - v_f}{v_{fg}} h_{fg}$$

$$h_2 = h_f + \frac{v_2 - v_f}{v_{fg}} h_{fg}$$

Le ultime due relazioni possono essere sostituite nella equazione di bilancio dell'energia per ottenere

$$M_2 \left(h_f + \frac{v_2 - v_f}{v_{fg}} h_{fg} \right) - M_1 \left(h_f + \frac{v_1 - v_f}{v_{fg}} h_{fg} \right) = (W_T - G_u h_g) \Delta t$$

Con alcuni passaggi algebrici si ottiene

$$(M_2 - M_1) \left(h_f - \frac{v_f}{v_{fg}} h_{fg} \right) + \frac{h_{fg}}{v_{fg}} (M_2 v_2 - M_1 v_1) = (W_T - G_u h_g) \Delta t$$

Tenendo infine conto che dal fatto che il volume è costante si ha

$$M_2 v_2 = M_1 v_1 = V$$

e che quindi il secondo termine del primo membro si annulla, e dal bilancio di massa risulta

$$M_2 - M_1 = -G_u \Delta t$$

il bilancio di energia si semplifica (finalmente!) in

$$-G_u \Delta t \left(h_f - \frac{v_f}{v_{fg}} h_{fg} \right) = (W_T - G_u h_g) \Delta t$$

$$W_T = G_u \left(h_g - h_f + \frac{v_f}{v_{fg}} h_{fg} \right) = G_u \left(1 + \frac{v_f}{v_{fg}} \right) h_{fg}$$

Nelle ipotesi fatte la potenza è quindi proporzionale alla portata spillata ed indipendente dal tempo e dal volume del recipiente.

Dal programma CATT si ottengono i dati per l'isobutano saturo alla temperatura di 20 °C:

$$p = 0.3018 \text{ MPa}, \quad v_f = 0.001796 \text{ m}^3/\text{kg}, \quad v_{fg} = 0.1248 \text{ m}^3/\text{kg}, \quad h_{fg} = 335 \text{ kJ/kg},$$

e sostituendo si ottiene infine

$$W_T = 0.002 \left(1 + \frac{0.001796}{0.1248} \right) \cdot 335 = 680 \text{ W}$$

Da notare che, dato che v_f / v_{fg} è generalmente molto minore di 1, la relazione ottenuta può essere approssimata come

$$W_T \cong G_u h_{fg} = 0.002 \cdot 335 = 670 \text{ W}$$

Quindi, come era logico aspettarsi, è necessario fornire calore dall'esterno principalmente per "produrre" il vapore che viene estratto dalla bombola.

Per quello che abbiamo appreso sulla trasmissione del calore, la bombola si deve trovare ad una temperatura inferiore a quella ambiente per potere ricevere calore da esso. Questo spiega la formazione di condensa o addirittura di ghiaccio su recipienti dai quali viene estratta una elevata quantità di vapore.

Con questo metodo è anche possibile mantenere refrigerati grossi recipienti contenenti gas liquefatti (es. azoto liquido) spillando continuamente una piccola portata di vapore da essi.

□

ESEMPIO 3.4 – Transitorio in un generatore di vapore.

Un generatore di vapore di volume $V = 18 \text{ m}^3$ fornisce una portata $G = 6 \text{ kg/s}$ di vapore saturo secco a $p_1 = 70 \text{ bar}$. L'acqua di alimento si trova a 20°C. La massa di acqua e vapore contenuta nel generatore è pari a $M = 10 \text{ t}$. Improvvisamente per un guasto si interrompe l'erogazione di calore, ma il generatore continua ad erogare la stessa portata di vapore saturo secco e ad essere rifornito di acqua di alimento. Valutare come diminuisce la pressione del vapore erogato.

📄 *La soluzione è riportata nel file C3GVAP.XLS*

Applichiamo le nostre equazioni di bilancio al sistema aperto costituito dal fluido contenuto nel generatore. Dato che le portate di ingresso e di uscita si mantengono costanti dal bilancio di massa si ha

$$\frac{dM}{dt} = G_i - G_u = 0 \quad \rightarrow \quad M = \text{cost}, \quad G_i - G_u = G \quad (a)$$

ovvero, si dice che il sistema è a *regime di massa*.

Il bilancio di energia, tenuto conto che il sistema è adiabatico ed il lavoro scambiato è nullo, si trascurano i termini cinetico e potenziale e abbiamo un solo ingresso ed una sola uscita

$$\frac{dU}{dt} = \cancel{W_s} - \cancel{W_m} + G (h_i - h_u) \quad (b)$$

Dove h_i ed h_u rappresentano rispettivamente le entalpie dell'acqua in ingresso e del vapore saturo secco in uscita. Infine si deve aggiungere la condizione che il volume del sistema è costante, che unita alla condizione $M = \text{cost}$ ci dice in definitiva che

$$V, M = \text{cost} \quad \rightarrow \quad \frac{V}{M} = v = v_f + x(v_f - v_g) = \text{cost} \quad (c)$$

Sviluppando il bilancio di energia, tenuto conto che $M = \text{cost}$, si ottiene

$$M \frac{du}{dt} + u \frac{dM}{dt} = G (h_i - h_u) \quad (d)$$

La integrazione su un intervallo di tempo finito del bilancio di energia (d) è complicato dal fatto che anche l'entalpia del vapore saturo secco in uscita, h_u varia con la pressione. Possiamo però ottenere il valore istantaneo di dp/dt , sviluppando u in funzione di p e v nella forma

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)_v dp + \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_p dv \quad \rightarrow \quad \frac{du}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)_v \frac{dp}{dt}$$

Dove, in forza della (c), si ha $dv = 0$. Per cui

$$\frac{dp}{dt} = \frac{G}{M} \frac{(h_i - h_u)}{\left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)_v}$$

da cui si vede (come era lecito aspettarsi) che la velocità di depressurizzazione diminuisce all'aumentare della massa di acqua contenuta nel generatore ed aumenta all'aumentare della portata.

Rimane ora da valutare la derivata di u rimasta, $\left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)_v$, relativamente difficile da calcolare

analiticamente; tuttavia essa può essere stimata in maniera approssimata come rapporto incrementale, con l'aiuto di un programma di calcolo, considerando ad esempio $\Delta p = 1$ bar. Nelle condizioni iniziali del problema (a 70 bar, appena dopo l'interruzione della potenza termica) si ha

$$\left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)_v \cong \frac{u(p + \Delta p, v) - u(p, v)}{\Delta p} = 5.2 \times 10^{-2} \text{ J/kg Pa}$$

Noti i valori delle rimanenti proprietà a $p = 70$ bar

$$v_1 = v_2 = v = \frac{V}{M} = 0.0018 \text{ m}^3/\text{kg}, \quad h_i = 90.5 \text{ kJ/kg}, \quad h_u = h_g = 2772.3 \text{ kJ/kg}$$

si ottiene infine

$$\frac{dp}{dt} = -3.1 \times 10^4 \text{ Pa/s} \quad (\text{ovvero, circa 1 bar ogni 3 s})$$

Se contemporaneamente alla erogazione di calore si interrompe anche l'erogazione di acqua di alimento, le cose si complicano perché il sistema non è più a regime di massa e non si può più annullare dM/dt nella equazione (b), né considerare il volume specifico costante.

Infine, nella realtà, bisogna anche tener conto che le strutture metalliche del generatore, raffreddandosi, forniscono energia al vapore, per cui il processo non è propriamente adiabatico: questa "inerzia termica" delle strutture metalliche mitiga il transitorio di pressione e potrebbe essere valutata introducendo un termine aggiuntivo di scambio termico, o considerando le strutture metalliche come parte del sistema.

Lo stesso tipo di trattazione (con massa ovviamente non costante) si può applicare per studiare la depressurizzazione del recipiente (vessel) di un reattore nucleare in caso di una rottura che comporti perdita di refrigerante (Loss Of Coolant Accident, LOCA). In questo caso è necessario disporre di un modello accurato della portata (variabile nel tempo) che fuoriesce in funzione della pressione nel recipiente. Bisogna inoltre tener conto che non sempre (in dipendenza della portata e della posizione della rottura) il fluido che fuoriesce è vapore saturo secco.

□

Bilancio di entropia

Il secondo principio della termodinamica ammette in generale l'esistenza di un termine di produzione dell'entropia, quindi scriveremo l'equazione di bilancio nella forma:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_k \frac{W_{tk}}{T_k} + \sum_i G_i s_i - \sum_u G_u s_u + \dot{S}_{irr} \quad (3.12)$$

Dove il termine W_{tk}/T_k rappresenta il flusso di entropia associato al flusso termico totale W_{tk} . E' bene ricordare che la temperatura T_k rappresenta la temperatura della superficie del sistema nel punto in cui è attraversata dal flusso termico. La sommatoria è introdotta per tenere conto che parti diverse della superficie di contorno possono trovarsi a diverse temperature.

Detto termine può essere trascritto in una forma più semplice introducendo una opportuna temperatura media, detta *temperatura media di scambio*, definita come

$$\frac{1}{T_{ms}} = \frac{\sum_k W_{tk}/T_k}{\sum_k W_{tk}} = \frac{\sum_k W_{tk}/T_k}{W_t} \quad (3.13)$$

Sostituendo la (3.13) nella (3.12) si ottiene

$$\frac{dS}{dt} = \frac{W_t}{T_{ms}} + \sum_i G_i s_i - \sum_u G_u s_u + \dot{S}_{irr} \quad (3.14)$$

Il termine \dot{S}_{irr} viene detto *termine di irreversibilità* e rappresenta l'incremento di entropia per unità di tempo dovuto alla irreversibilità delle trasformazioni che avvengono nel sistema. Come già esposto nelle note introduttive del corso, tale termine è *nullo* se le trasformazioni sono *reversibili*, *positivo* se le trasformazioni sono *irreversibili*, mentre è *impossibile* che tale termine assuma un valore *negativo*. L'equazione ci dice quindi che la variazione di entropia per unità di tempo è pari al flusso di entropia attraverso le pareti del sistema, più l'entropia introdotta dal flusso di massa entrante, meno l'entropia estratta dal sistema dal flusso di massa uscente, più l'eventuale contributo \dot{S}_{irr} (da alcuni definito anche *sorgente entropica*) dovuto alle irreversibilità.

I fenomeni naturali che causano irreversibilità possono essere classificati in due gruppi. Il primo comprende i *fenomeni dissipativi*, ovvero le conversioni di energia nella forma di lavoro in energia interna (fenomeni di attrito, resistenza ohmica). Il secondo comprende fenomeni che hanno una *tendenza spontanea* ad evolvere verso l'equilibrio (reazioni chimiche, equalizzazione delle temperature in un corpo, fenomeni di mescolamento, espansione libera di un gas nel vuoto, passaggio di calore da corpi più caldi a corpi più freddi).

Per un sistema isolato (ovvero che non ha alcuna interazione con l'esterno) il bilancio entropico si riduce alla forma

$$\frac{dS}{dt} = \dot{S}_{irr} \geq 0 \quad (3.15)$$

che esprime matematicamente il fatto che l'entropia di un sistema *isolato* è *costante* se le trasformazioni sono reversibili e *strettamente crescente* se le trasformazioni sono irreversibili. Per un *sistema chiuso* il bilancio entropico è dato da

$$\frac{dS}{dt} = \frac{W_t}{T_{ms}} + \dot{S}_{irr} \quad (3.16)$$

moltiplicando entrambi i termini per dt si ottiene l'espressione già enunciata nel Cap.1 (generalizzata allo scambio con più sorgenti a temperatura diversa)

$$dS = \frac{dQ}{T_{ms}} + dS_{irr} \quad (3.17)$$

Infine per un *sistema aperto a regime* con un solo ingresso ed una sola uscita si ha

$$G (s_u - s_i) = \frac{W_t}{T_{ms}} + \dot{S}_{irr} \quad (3.18)$$

e in particolare, se il sistema, oltre ad essere a regime, è *adiabatico*

$$G (s_u - s_i) = \dot{S}_{irr} \quad (3.19)$$

il che vuol dire che per un sistema aperto a regime *adiabatico* l'entropia specifica del fluido all'uscita deve essere maggiore (per trasformazioni irreversibili) od uguale (per trasformazioni reversibili) a quella in ingresso.

Una importante conseguenza dell'analisi precedente è che una trasformazione *adiabatica reversibile* è comunque *isoentropica*, indipendentemente dal tipo di sistema e dal fluido considerato.

ESEMPIO 3.5 – Riempimento di una bombola con gas perfetto.

Valutare se il processo di riempimento adiabatico di una bombola di azoto illustrato nell'ESEMPIO 3.2 è reversibile o meno.

 *La soluzione è riportata nel file C3RIEMP-GP.XLS*

Le equazioni di bilancio della massa e dell'entropia possono essere nella forma

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = G_a \\ \frac{dS}{dt} = G_a s_a + \dot{S}_{irr} \end{cases}$$

combinando le quali si ottiene

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dM}{dt} s_a + \dot{S}_{irr} \Rightarrow \dot{S}_{irr} dt = dS - dM s_a$$

e integrando tra la condizione iniziale e finale

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{S}_{irr} dt = S_{irr} = S_2 - S_1 - (M_2 - M_1) s_a = M_2 (s_2 - s_a) - M_1 (s_1 - s_a)$$

Nel caso di un gas perfetto con calori specifici costanti (v Cap.3):

$$S_{irr} = M_2 \left(c_p \ln \frac{T_2}{T_a} - R \ln \frac{p_2}{p_a} \right) - M_1 \left(c_p \ln \frac{T_1}{T_a} - R \ln \frac{p_1}{p_a} \right)$$

dove è necessario esprimere le temperature in kelvin. Sostituendo i valori trovati nell'esempio 3.2 si ottiene

$$S_{irr} = 0.838 \left(1039 \ln \frac{401.9}{288.15} - 296.91 \ln \frac{200}{200} \right) - 0.0115 \left(1039 \ln \frac{293.15}{288.15} - 296.91 \ln \frac{2}{200} \right) =$$

$$= 274 \text{ J/K}$$

il che conferma (con alcune cautele aggiuntive che sono illustrate nel seguito) che il processo non è reversibile: infatti è impossibile "riestrarre" dalla bombola tutto l'azoto alla pressione costante di 200 bar in assenza di altre azioni esterne.

Ripetendo il calcolo con una pressione di alimentazione dell'azoto $p_a = 50$ bar si troverebbe $S_{irr} = -66$ J/K, ovvero un processo impossibile (la verifica è lasciata per esercizio all'allievo: non si dimentichi di ricalcolare anche M_2 e T_2); infatti, abbastanza ovviamente, è impossibile riempire una bombola a 200 bar avendo a disposizione azoto alla pressione di 50 bar e senza nessun'altra azione esterna!

Si può anche verificare che per $p_a = 100$ bar si ottiene $S_{irr} = 103.7$ J/K: allora questo processo è possibile ed irreversibile? In realtà bisogna essere cauti: procedendo come abbiamo fatto otteniamo un valore "integrale" della produzione di entropia: se tale risultato è negativo vuol dire che sicuramente *almeno una parte* del processo è impossibile, ma se S_{irr} è positivo bisogna ulteriormente verificare che il termine di irreversibilità *rimanga positivo durante tutto il processo*, ovvero che $\dot{S}_{irr}(t) > 0 \forall t$; nel caso considerato si può verificare che per pressioni della bombola crescenti da 2 a 100 bar si ha $S_{irr} = 130$ J/K > 0 mentre da 100 a 200 bar si ha $S_{irr} = -26.5$ J/K < 0 , quindi una parte del processo è (come ovvio) impossibile.

Più in generale, rielaborando la equazione di bilancio entropico per il sistema in questione si ha

$$\dot{S}_{irr} dt = dS - dM s_a = d(Ms) - dM s_a = Mds + s dM - dM s_a =$$

$$= Mds + dM (s - s_a) = M \left(\frac{c_p}{T} dT - \frac{R}{p} dp \right) - (s - s_a) dM$$

questa quantità deve sempre mantenersi non negativa e la verifica è piuttosto complessa ma fattibile sostituendo ad M la sua espressione in funzione di p e T .

□

ESEMPIO 3.6 – Riempimento di una bombola con gas perfetto da un compressore.

Si vuole riempire una bombola di volume $V = 20$ L, che contiene inizialmente aria alla pressione $p_1 = 1$ bar ed alla temperatura $T_1 = 20$ °C, tramite un compressore che preleva aria dall'ambiente alle stesse condizioni ($p_a = p_1$, $T_a = T_1$). Determinare la massa di azoto contenuta della bombola e la sua temperatura quando la pressione nella bombola raggiunge il valore $p_2 = 10$ bar. L'aria può essere considerata un gas perfetto con calori specifici costanti e il sistema può essere considerato adiabatico e la trasformazione reversibile.

Abbiamo a che fare con un sistema (costituito dalla bombola e dal compressore e dai tubi di collegamento, delimitati dalla loro superficie interna) *non a regime, aperto*, con un solo

ingresso. La superficie del sistema è *adiabatica*, ma non indeformabile (è attraversata dall'asse che fornisce lavoro al compressore) quindi gli scambi di calore con l'esterno sono nulli, ma non quelli di lavoro utile. Inoltre, il volume V del sistema è costante e lo si può considerare pari a quello della bombola (trascurando il contributo del compressore).

Definiamo G_a la portata entrante (incognita e potenzialmente anche variabile nel tempo).

Le equazioni di bilancio della massa, dell'energia e dell'entropia possono allora essere scritte (tenuto conto delle ipotesi suddette e trascurando i termini cinetico e potenziale) nella forma

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = G_a \\ \frac{dU}{dt} = -W'_m + G_a h_a \\ \frac{dS}{dt} = G_a s_a \end{cases}$$

Sostituendo il valore della portata dato dalla prima equazione nelle due seguenti si ha

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = -W'_m + \frac{dM}{dt} h_a \\ \frac{dS}{dt} = \frac{dM}{dt} s_a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} dU = -W'_m dt + h_a dM \\ dS = s_a dM \end{cases}$$

integrando tra lo stato iniziale e quello finale, tenuto conto che $L'_{12} = \int_1^2 W'_m dt$

$$\begin{cases} U_2 - U_1 = -L'_{12} + (M_2 - M_1) h_a \\ S_2 - S_1 = (M_2 - M_1) s_a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M_2 u_2 - M_1 u_1 = -L'_{12} + (M_2 - M_1) h_a \\ M_2 s_2 - M_1 s_1 = (M_2 - M_1) s_a \end{cases}$$

possiamo rimaneggiare la prima equazione per far comparire l'entalpia anche a primo membro, sfruttando anche la condizione che $V = M v = \text{costante}$

$$\begin{cases} M_2 (u_2 + p_2 v_2) - M_1 (u_1 + p_1 v_1) - M_2 p_2 v_2 + M_1 p_1 v_1 = -L'_{12} + (M_2 - M_1) h_a \\ M_2 s_2 - M_1 s_1 = (M_2 - M_1) s_a \\ M_2 h_2 - M_1 h_1 + V (p_2 - p_1) = -L'_{12} + (M_2 - M_1) h_a \\ M_2 s_2 - M_1 s_1 = (M_2 - M_1) s_a \end{cases}$$

e infine, raccogliendo la massa M_2 e M_1 e sfruttando il fatto che $p_a = p_l$, $T_a = T_l$ da cui deriva che $h_a = h_l$, $s_a = s_l$

$$\begin{cases} M_2 (h_2 - h_1) + V (p_2 - p_1) = -L'_{12} & (**) \\ s_2 = s_1 \end{cases}$$

Quanto scritto finora vale per qualunque fluido. Nel caso di un gas perfetto con calori specifici costanti si possono usare le relazioni seguenti:

$$M = \frac{pV}{RT}$$

$$h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1)$$

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Assumendo per l'aria $R = 287 \text{ J/kg K}$ e $c_p = 1004 \text{ J/kg K}$, dall'ultima si ricava il valore della temperatura finale

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{R/c_p} \quad \rightarrow \quad T_2 = 580 \text{ K}$$

la massa finale sarà pertanto

$$M_2 = \frac{p_2 V}{R T_2} = 0.23 \text{ kg}$$

ed infine

$$L'_{12} = M_2 c_p (T_1 - T_2) + V (p_1 - p_2) = -83.26 \text{ kJ}$$

Nel caso il fluido non fosse considerabile come un gas ideale, si dovrebbe procedere per tentativi, a partire dalle equazioni (**):

- con una massa M_2 di tentativo, calcolare $v_2 = V/M_2$;
- associando v_2 al valore noto p_2 trovare tramite le tabelle termodinamiche T_2 , h_2 , e s_2 ;
- verificare che sia $s_2 = s_1$ (altrimenti cambiare il valore di M_2);
- trovare infine il lavoro L'_{12} dalla prima delle (**).

Nel caso la trasformazione sia irreversibile, il bilancio di entropia non è più utilizzabile in quanto contiene anche l'incognita del termine di irreversibilità, molto difficile da valutare. Dimosteremo comunque nel cap.6 che (come è anche intuibile) il lavoro reversibile (in valore assoluto) è il minimo possibile per effettuare il riempimento.

□

ESERCIZI

ESERCIZIO 3.1

In un serbatoio cilindrico di area di base $A = 0.0125 \text{ m}^2$, inizialmente vuoto, entra una portata di acqua $G_i = 7 \text{ kg/s}$. Il serbatoio ha sul fondo un foro da cui l'acqua esce con una portata $G_u(t) = K L(t)$, dove L è il livello di acqua nel serbatoio, t è il tempo e $K = 1.4 \text{ kg/m s}$. Valutare l'andamento nel tempo del livello nel serbatoio e determinarne il valore quando si raggiungono condizioni di regime. Assumere la densità dell'acqua pari a 1000 kg/m^3 .

Stabilire un'analogia con il processo di carica di un condensatore elettrico.

[Valore a regime $L_r = 5 \text{ m}$; $L(t) = L_r (1 - \exp(-t/\tau))$, $\tau = 8.93 \text{ s}$]

ESERCIZIO 3.2

La bombola di cui all'esempio 3.2, dopo avere ultimato il riempimento, viene lasciata raffreddare fino alla temperatura di $20 \text{ }^\circ\text{C}$ e successivamente riconnessa alla linea di alimentazione e riempita nuovamente (sempre in condizioni adiabatiche) fino a riportarla alla pressione di 200 bar. Determinare la massa di azoto che è possibile introdurre e la nuova temperatura finale della bombola.

[$T_3 = 45 \text{ }^\circ\text{C}$, $M_3 - M_2 = 0.226 \text{ kg}$]

ESERCIZIO 3.3

Un serbatoio di azoto liquido contiene detto fluido in condizioni di saturazione alla pressione di 6 bar. Il serbatoio ha una superficie $A = 4 \text{ m}^2$ e la sua parete ha un coefficiente globale di scambio $u = 0.03 \text{ W/m}^2 \text{ K}$. L'ambiente esterno si trova ad una temperatura $T_a = 25 \text{ }^\circ\text{C}$. Determinare la portata di azoto che è necessario spillare per mantenere il serbatoio a detta pressione, assumendo che l'azoto spillato abbia l'entalpia del vapore saturo secco. Determinare il consumo di azoto in un giorno.

Per l'azoto alla pressione di 6 bar il programma CATT fornisce: $T_{sat} = -176.8 \text{ }^\circ\text{C}$, $v_f = 0.001408 \text{ m}^3/\text{kg}$, $v_g = 0.04046 \text{ m}^3/\text{kg}$, $h_f = -81.53 \text{ kJ/kg}$, $h_g = 86.85 \text{ kJ/kg}$.

[$G = 0.14 \text{ g/s}$, $M = 12 \text{ kg}$]

ESERCIZIO 3.4

Ripetere il calcolo dell'esempio 3.2 considerando il riempimento di una bombola di volume $V = 5 \text{ L}$, inizialmente a $p_1 = 2 \text{ bar}$, $T_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, fino alla pressione $p_2 = 10 \text{ bar}$ con ammoniaca prelevata da una linea in condizioni di vapore saturo secco alla pressione $p_a = 50 \text{ bar}$. (in questo caso, il modello di gas ideale è inapplicabile).

[$T_2 = 406 \text{ }^\circ\text{C}$, $M_2 = 0.1515 \text{ kg}$; la soluzione si trova per tentativi e mostra la necessità di raffreddare la bombola durante il riempimento]

ESERCIZIO 3.5

Un contenitore, rigido, adiabatico, in cui inizialmente vi è vuoto pneumatico ($p_i = 0$) viene connesso tramite un apertura con l'atmosfera ($T_a = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, $p_a = 1 \text{ bar}$). Determinare la temperatura finale nel contenitore (che è indipendente dal volume dello stesso) assumendo che l'aria si comporti come un gas ideale.

[$T_f = k T_a = 410 \text{ K} = 137 \text{ }^\circ\text{C}$]

Appunti ed Esercizi di *Fisica Tecnica*

Cap. 4. I sistemi aperti a regime

Paolo Di Marco

Versione 2021.02 –06.11.2021.

La presente dispensa è redatta ad esclusivo uso didattico per gli allievi dei corsi di studi universitari dell'Università di Pisa. L'autore se ne riserva tutti i diritti. Essa può essere riprodotta solo totalmente ed al fine summenzionato, non può essere alterata in alcuna maniera o essere rivenduta ad un costo superiore a quello netto della riproduzione. Ogni altra forma di uso e riproduzione deve essere autorizzata per scritto dall'autore.

L'autore sarà grato a chiunque gli segnali errori, inesattezze o possibili miglioramenti.

Introduzione

In questo capitolo vengono trattati i più comuni organi che compongono le macchine termiche. Tali organi sono *generalmente* sistemi aperti, che noi supponiamo di considerare in regime *stazionario* o *periodico* (in altre parole, non ci interessiamo dei transitori dovuti all'avviamento o alla regolazione delle macchine suddette). Il testo è corredato da una serie di esempi significativi, che il lettore è invitato a non tralasciare.

Dal capitolo precedente risulta che in un sistema stazionario le equazioni di bilancio di massa, energia ed entropia possono essere semplificate eliminando le derivate temporali a primo membro; esse assumono pertanto la forma

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_i G_i - \sum_u G_u \\
 0 &= W_t - W_m' + \sum_i G_i (h_i + e_{ci} + e_{pi}) - \sum_u G_u (h_u + e_{cu} + e_{pu}) + W_c \\
 0 &= \frac{W_t}{T_{ms}} + \sum_i G_i s_i - \sum_u G_u s_u + \dot{S}_{irr}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

è significativo ricordare ancora una volta che le equazioni differenziali divengono equazioni algebriche, e sono quindi molto più semplici da risolvere. Nei paragrafi successivi le equazioni di bilancio vengono ulteriormente semplificate tenendo conto delle caratteristiche dei sistemi considerati ottenendo così i modelli che vengono comunemente adottati per rappresentare gli organi suddetti.

TURBINE ED ESPANSORI

Una turbina è un dispositivo in cui si ha produzione di lavoro come conseguenza del passaggio del fluido attraverso una serie di palettature, opportunamente sagomate, connesse ad un albero rotante.

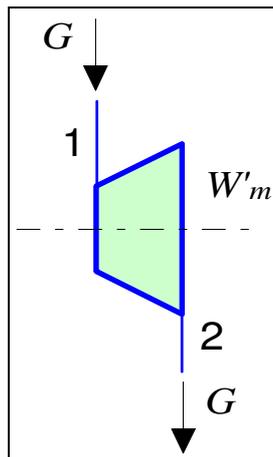


Figura 4.1. Schematizzazione di una turbina.

Le turbine sono usate ad esempio per azionare gli alternatori negli impianti termoelettrici (il fluido è in genere vapore acqueo, ma anche gas di combustione, oppure anidride carbonica

od elio in alcuni tipi di reattori nucleari); a causa del loro vantaggioso rapporto peso-potenza, sono usate anche nei motori aeronautici ed in alcuni motori navali.

Una turbina viene in genere schematizzata come in Figura 1. Il fluido in ingresso è in genere un gas ad elevata temperatura, che subisce nel passaggio una diminuzione di pressione e temperatura. Il fluido può pertanto trovarsi all'uscita nelle condizioni di vapore saturo, sebbene si tenda ad evitare tale situazione (o comunque a fare in modo di avere un titolo in uscita molto vicino a 1) per evitare l'erosione delle palettature dovute agli urti delle goccioline di fluido condensato.

La turbina ha un solo ingresso ed una sola uscita, pertanto in condizioni di regime le due portate sono uguali; le variazioni di energia cinetica e potenziale tra ingresso ed uscita possono essere considerate trascurabili. Inoltre, per massimizzare il lavoro ottenuto, si fa in modo da rendere lo scambio termico con l'ambiente minimo, per cui il sistema si può considerare *adiabatico*. I bilanci di energia ed entropia si semplificano ulteriormente in

$$\begin{cases} G (h_1 - h_2) = W'_m \\ G (s_2 - s_1) = \dot{S}_{irr} \end{cases} \quad (4.2)$$

Rendimento isoentropico della turbina

A causa degli inevitabili attriti, la espansione in turbina presenta sempre le caratteristiche di un fenomeno irreversibile. Se la trasformazione si può considerare adiabatica, questo comporta, come risulta dalla seconda delle Eq.(4.2), che si abbia in uscita una entropia maggiore di quella in ingresso e che quindi in un diagramma $h-s$ (vedi Fig.2) il punto finale della trasformazione cada sulla destra rispetto alla verticale passante per il punto iniziale. Se paragoniamo la espansione reale a quella ideale reversibile (che è isoentropica, vedi Fig.2), vediamo che, a parità di pressione in uscita, si ha una riduzione del salto entalpico in turbina e quindi (a parità di portata massica) una riduzione di potenza.

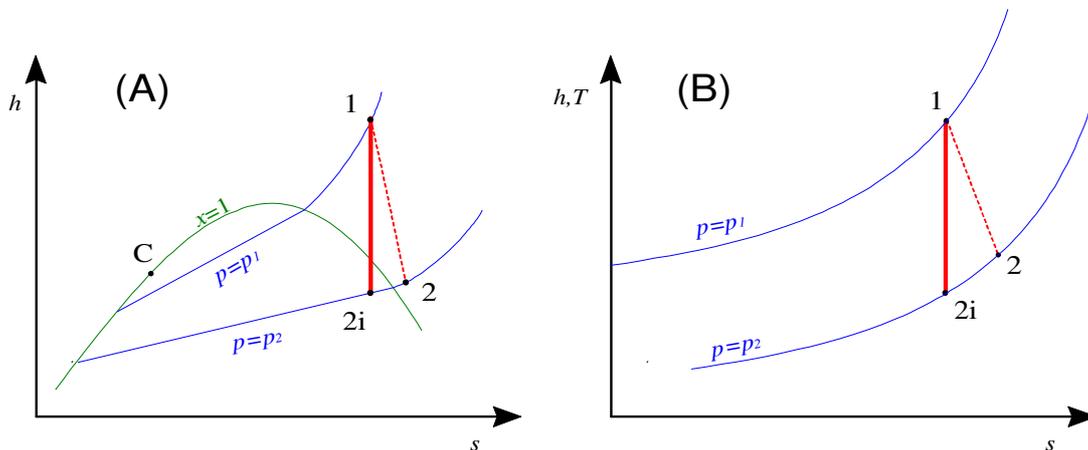


Figura 4.2. Espansione reale ed ideale nel diagramma $h-s$ per: (A) fluido reale, (B) gas ideale.

Si tiene conto di questo definendo il *rendimento isoentropico* della turbina come

$$\eta_T = \frac{W'_m}{W'_{m,id}} = \frac{h_2 - h_1}{h_{2i} - h_1} \quad (4.3)$$

unicamente nel caso di un gas ideale con $c_p = \text{cost}$ si ha anche, ovviamente

$$\eta_T = \frac{T_2 - T_1}{T_{2i} - T_1} \quad (4.4)$$

Il rendimento isoentropico può assumere valori compresi tra 0 ed 1; per una turbina ben costruita oscilla tra 0.8 e 0.9.

ESEMPIO 4.1 - Espansione adiabatica di un gas ideale

In una turbina a regime adiabatica, una portata $G = 0.2$ kg/s di azoto si espande in maniera adiabatica da $p_1 = 20$ bar, $T_1 = 700$ °C a $p_2 = 1$ bar, $T_2 = 200$ °C. Valutare la potenza all'asse della turbina e la variazione di entropia nelle tre ipotesi seguenti:

- a) considerando il fluido un gas ideale con $R = 297$ J/kg K, $c_p = \text{costante} = 1039$ J/kg K;
- b) considerando il fluido un gas ideale con c_p dipendente dalla temperatura secondo la relazione (con le temperature espresse in K):

$$\frac{c_p}{R} = \alpha + \beta T + \gamma T^2 + \delta T^3 + \varepsilon T^4,$$

dove

$$\alpha = 3.675, \beta = 1.208 \cdot 10^{-3}, \gamma = 2.324 \cdot 10^{-6}, \delta = -0.632 \cdot 10^{-9}, \varepsilon = 0.226 \cdot 10^{-12}$$

- c) ricavando i dati dalle tabelle termodinamiche del fluido

La potenza all'asse della turbina (considerata adiabatica) è data comunque dalla relazione

$$W'_m = G (h_1 - h_2)$$

in tutti i casi, bisogna inoltre verificare che la variazione di entropia tra ingresso ed uscita sia positiva o nulla (in caso contrario la trasformazione è impossibile, o la turbina non può essere considerata adiabatica)

Caso a - calore specifico costante

$$\left\{ \begin{aligned} h_1 - h_2 &= c_p (T_1 - T_2) = 1039 (700 - 200) = 520 \text{ kJ/kg} \\ s_2 - s_1 &= c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = 1039 \ln(0.486) + 297 \ln(20) \\ &= 140 \text{ J/kg K} \end{aligned} \right.$$

Si ottiene quindi una potenza all'asse $W'_m = 104$ kW.

Caso b - calore specifico dipendente dalla temperatura

In questo caso le relazioni sono

$$\begin{aligned} h_1 - h_2 &= \int_2^1 c_p(T) dT = \\ &= R \left[\alpha(T_1 - T_2) + \frac{\beta}{2}(T_1^2 - T_2^2) + \frac{\gamma}{3}(T_1^3 - T_2^3) + \frac{\delta}{4}(T_1^4 - T_2^4) + \frac{\varepsilon}{5}(T_1^5 - T_2^5) \right] = 552 \text{ kJ/kg} \end{aligned}$$

Si ottiene quindi una potenza all'asse $W'_m = 110.4$ kW.

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 c_p(T) \frac{dT}{T} - R \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) =$$

$$R \left[\alpha \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + \beta (T_2 - T_1) + \frac{\gamma}{2} (T_2^2 - T_1^2) + \frac{\delta}{3} (T_2^3 - T_1^3) + \frac{\epsilon}{4} (T_2^4 - T_1^4) - \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \right] = 98 \text{ J/kg K}$$

Caso c - tabelle termodinamiche

In questo caso, basta consultare le tabelle che forniscono i seguenti dati

$T, ^\circ\text{C}$	p, bar	$h, \text{kJ/kg}$	$s, \text{kJ/kg K}$
700	20	1045	7.2236
200	1	492	7.3216

Si ottiene quindi una potenza all'asse $W'_m = 111 \text{ kW}$.

La tabella seguente riassume i risultati per i tre casi considerati

caso	$h_1 - h_2,$ kJ/kg	$s_2 - s_1,$ J/kg K	$W'_m,$ kW
a	520	140	104
b	552	98	110
c	553	98	111

Come si vede, la previsione fatta nel caso b è molto vicina a quella delle tabelle, ma anche il modello con calore specifico costante (caso a) fornisce un risultato sufficientemente accurato, almeno per quanto riguarda la potenza erogata, nonostante si sia usato il valore di c_p a temperatura ambiente; detta stima potrebbe essere ulteriormente migliorata usando un valore di c_p mediato tra 700 e 200 °C..

□

ESEMPIO 4.2 - Espansione adiabatica di un vapore surriscaldato

Una turbina a vapore che si può considerare adiabatica opera in regime stazionario nelle seguenti condizioni

- portata di fluido $G = 4.6 \text{ t/h}$;
- condizioni in ingresso: $p_1 = 60 \text{ bar}$, $T_1 = 600 \text{ }^\circ\text{C}$;
- condizioni in uscita: $p_2 = 0.1 \text{ bar}$, $x_2 = 0.9$.

Calcolare la potenza erogata ed il rendimento isoentropico della turbina.

 La soluzione è riportata nel file [C4TURBVAP.XLS](#)

La potenza erogata è data da

$$W'_m = G (h_1 - h_2)$$

la portata deve essere espressa in unità SI

$$G = 4.6 \frac{\text{t}}{\text{h}} = 4.6 \frac{10^3 \text{ kg}}{3600 \text{ s}} = 1.28 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Per valutare il rendimento isoentropico, bisogna valutare le condizioni di uscita nelle condizioni ideali 2i (ovvero quelle corrispondenti ad una espansione adiabatica reversibile), tenendo conto che in tale trasformazione $s_{2i} = s_1$. Tramite le tabelle termodinamiche dell'acqua o un codice di calcolo si ricavano i valori contenuti nella seguente tabella (dove le caselle ombreggiate indicano i valori usati come input)

punto	T, °C	p, bar	h, kJ/kg	s, kJ/kg K	x
1	600	60	3658	7.1676	=
2	45.8	0.1	2345	7.40	0.9
2i	45.8	0.1	2271	7.1676	0.87

da cui si ha

$$W'_m = G (h_1 - h_2) = 1.28 \cdot (3658 - 2345) = 1.68 \text{ MW}$$

$$\eta_T = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2i}} = \frac{3658 - 2345}{3658 - 2271} = 0.95$$

Nel caso si disponga solo di una tabella del vapore saturo, per valutare l'entalpia nel punto 2i si deve procedere come segue:

- ottenere dalle tabelle i valori dell'entalpia e dell'entropia del liquido saturo ($x=0, p = 0.1$ bar, $h_f = 191.8$ kJ/kg, $s_f = 0.649$ kJ/kg K) e del vapore saturo secco ($x=1, p = 0.1$ bar, $h_g = 2584.6$ kJ/kg, $s_g = 8.15$ kJ/kg K);
- calcolare il valore del titolo nel punto 2i tramite il valore noto dell'entropia ($s_{2i} = s_1 = 7.1676$ kJ/kg K)

$$x = \frac{s_{2i} - s_f}{s_g - s_f} = \frac{7.168 - 0.649}{8.150 - 0.649} = 0.87$$

- calcolare l'entalpia del vapore saturo nel punto 2i

$$h_{2i} = h_f + x (h_g - h_f) = 191.8 + 0.87 \cdot (2584 - 191.8) = 2274 \text{ kJ/kg}$$

che come si vede, a meno delle inevitabili imprecisioni di calcolo, coincide con quanto ottenuto con il calcolatore.



ESEMPIO 4.3 - Espansione adiabatica irreversibile di un vapore surriscaldato

In una turbina a regime adiabatica, una portata $G = 0.5$ kg/s di vapore acqueo si espande in maniera adiabatica irreversibile da $p_1 = 40$ bar, $T_1 = 350$ °C a $p_2 = 0.03$ bar. Il rendimento isoentropico di espansione vale $\eta_t = 0.87$. Valutare il titolo in uscita e la potenza all'asse della turbina.

Anche in questo caso, come nell'Esempio 1, la potenza erogata dalla turbina è data da

$$W'_m = G (h_1 - h_2)$$

Il fluido non può essere considerato un gas ideale e bisogna ricorrere alle tabelle termodinamiche. Lo stato finale è caratterizzato dal solo valore della pressione e non è pertanto determinato: tuttavia si dispone dell'espressione del rendimento isoentropico di espansione. In questo caso si determina prima l'entalpia in uscita per una turbina *ideale* (reversibile), per la quale lo stato finale è caratterizzato dal valore di entropia $s_{2i} = s_1$. Si fa

quindi uso dell'espressione del rendimento isoentropico per calcolare il valore dell'entalpia *reale* in uscita, h_2

$$\eta_T = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2i}} \Rightarrow h_2 = h_1 - \eta_T (h_1 - h_{2i}) = 3091.5 - 0.87(3091.5 - 1951.3) = 2099.5 \text{ kJ/kg}$$

Lo stato finale *reale* risulta pertanto determinato dai valori della pressione p_2 e dell'entalpia h_2 ed a partire da essi è possibile calcolare i valori di tutte le altre variabili di stato, compreso il titolo $x_2 = 0.82$. I risultati sono riassunti nella seguente tabella (dove le caselle ombreggiate indicano i valori usati come input).

punto	$T, ^\circ\text{C}$	p, bar	$h, \text{kJ/kg}$	$s, \text{kJ/kg K}$	x
1	350	40	3091.5	6.579	=
2i	24.1	0.03	1951.3	6.579	0.76
2	24.1	0.03	2099.5	7.078	0.82

La potenza erogata dalla turbina vale infine

$$W'_m = G (h_1 - h_2) = 0.5(3091.5 - 2099.5) = 496 \text{ kW}$$

Quest'ultimo risultato, come è ovvio, poteva anche essere ottenuto direttamente moltiplicando il valore della potenza *ideale* per il rendimento isoentropico: $W'_m = \eta_T G (h_1 - h_{2i})$

□

ESEMPIO 4.4 - Espansione adiabatica irreversibile di un gas ideale con calore specifico costante

In una turbina a regime adiabatica, una portata $G = 0.3 \text{ kg/s}$ di azoto (che si può considerare un gas ideale con calore specifico costante) si espande in maniera adiabatica reversibile da $p_1 = 10 \text{ bar}$, $T_1 = 300 ^\circ\text{C}$ a $p_2 = 1 \text{ bar}$. Valutare la potenza all'asse della turbina. Ripetere i calcoli per nel caso che la turbina abbia un rendimento isoentropico di espansione $\eta_t = 0.8$.

Anche in questo caso, come nell'Esempio 1, la potenza erogata dalla turbina è data da

$$W'_m = G (h_1 - h_2)$$

che per le proprietà del fluido (gas ideale con c_p costante) è esprimibile anche come

$$W'_m = G (h_1 - h_2) = G c_p (T_1 - T_2)$$

per completare il calcolo ci manca il valore di T_2 , che però è ricavabile considerando che la trasformazione è adiabatica reversibile e quindi isoentropica:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = 0$$

$$c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = R \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \Rightarrow \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{c_p} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^R$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{R}{c_p}} = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} = 573.15 \left(\frac{1}{10}\right)^{0.286} = 296.7 \text{ K}$$

Notare che è stato necessario convertire le temperature in K, dato che esse compaiono all'interno di rapporti. Si può quindi calcolare facilmente la potenza erogata dalla turbina

$$W'_{m,id} = G c_p (T_1 - T_2) = 0.3 \cdot 1040 \cdot (573.15 - 296.7) = 86.3 \text{ kW}$$

Si ricorda anche che la legge della trasformazione adiabatica reversibile di un gas ideale con calore specifico costante appena ottenuta

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \Rightarrow T p^{\frac{1-k}{k}} = \text{cost}$$

è riconducibile alla più nota $p v^k = \text{cost}$ per mezzo della equazione di stato dei gas, come mostrato nel Cap.2.

Nel caso che la espansione sia irreversibile, la potenza è data semplicemente dalla definizione di rendimento isoentropico

$$W'_{m,r} = W'_{m,id} \eta_t = 86.3 \cdot 0.8 = 69 \text{ kW}$$

e la temperatura di uscita è ricavabile da

$$W'_{m,r} = G c_p (T_1 - T_{2r})$$

$$T_{2r} = T_1 - \frac{W'_{m,r}}{G c_p} = 300 - \frac{69000}{0.3 \cdot 1040} = 78.8^\circ\text{C} = 352 \text{ K}$$

ed è superiore al valore ideale precedentemente calcolato.

□

POMPE E COMPRESSORI

Questi dispositivi assorbono lavoro per innalzare la pressione di un fluido: si parla in genere di *pompe* se il fluido è un liquido e di *compressori* se il fluido è un aeriforme. Per problemi tecnici, connessi al danneggiamento degli organi meccanici, si evita in genere di comprimere un vapore allo stato saturo. Il compressore si indica in generale come in Fig.3.

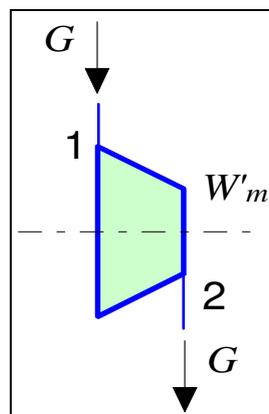


Figura 4.3. Schematizzazione di un compressore.

Anche in questo caso abbiamo due sole aperture e le variazioni di energia cinetica e potenziale sono trascurabili per cui le equazioni di bilancio si riducono a

$$\begin{cases} G(h_2 - h_1) = W_t - W'_m \\ G(s_2 - s_1) = \frac{W_t}{T_{ms}} + \dot{S}_{irr} \end{cases} \quad (4.5)$$

dove T_{ms} è la temperatura media di scambio, già definita nel Cap.3, data da

$$T_{ms} = \frac{\sum_k W_{tk}}{\sum_k \frac{W_{tk}}{T_k}} = \frac{W_t}{\sum_k \frac{W_{tk}}{T_k}} \quad (4.6)$$

In generale, quindi, la potenza meccanica assorbita da un compressore è data da

$$W'_m = G(h_1 - h_2) + W_t = G(h_1 - h_2) - T_{ms} [G(s_1 - s_2) + \dot{S}_{irr}] \quad (4.7)$$

Si vede pertanto che nel caso generale la valutazione della potenza scambiata in caso di compressione non adiabatica è abbastanza complessa. Molto spesso, tuttavia, lo scambio termico con l'esterno è trascurabile, sebbene non si ottenga vantaggio da questo (anzi, il lavoro necessario in genere aumenta) ed il compressore si può considerare adiabatico. In tal caso, le equazioni di bilancio assumono forma identica a quelle date per le turbine, Eqq.(4.2); in questo caso la potenza scambiata risulta negativa, ad indicare che deve essere fornita dall'esterno al sistema.

Esistono numerosissime tipologie tecniche, basate su principi diversi, per pompe e compressori. Per il momento è sufficiente ricordare che esistono macchine di tipo *alternativo* (a pistone) che funzionano a regime periodico, e compressori *assiali* o *centrifughi*, che sono dotati di palette rotanti come le turbine e lavorano a regime stazionario. Non sempre, per motivi di carattere tecnico, è possibile realizzare l'intero processo nello stesso organo: la compressione viene allora frazionata in più macchine collegate in serie, e si parla in tal caso di pompe o compressori *multistadio*.

Rendimento isoentropico ed isoterma del compressore

Come per le turbine, anche nel caso dei compressori l'attrito e gli urti con le parti in movimento fanno sì che la trasformazione sia in genere irreversibile. Anche in questo caso, ipotizzando che la trasformazione sia adiabatica, il punto finale della trasformazione cade quindi alla destra di quello iniziale sul diagramma $h-s$ (Fig.4): quindi, a parità di pressione finale e portata, il salto entalpico, e la potenza richiesta aumentano rispetto al caso ideale. Anche in questo caso si può definire un *rendimento isoentropico di compressione* come

$$\eta_C = \frac{W'_{m,id}}{W'_m} = \frac{h_{2i} - h_1}{h_2 - h_1} \quad (4.8)$$

che, nel caso che il fluido sia gas ideale con $c_p = cost$, può anche essere espresso come:

$$\eta_C = \frac{T_{2i} - T_1}{T_2 - T_1} \quad (4.9)$$

Il rendimento isoentropico di compressione assume valori compresi tra 0 ed 1 ed oscilla indicativamente tra 0.7 e 0.85 per macchine ben realizzate.

Notare che il numeratore ed il denominatore sono invertiti rispetto al rendimento isoentropico di espansione per ottenere anche in questo caso un numero minore di 1.

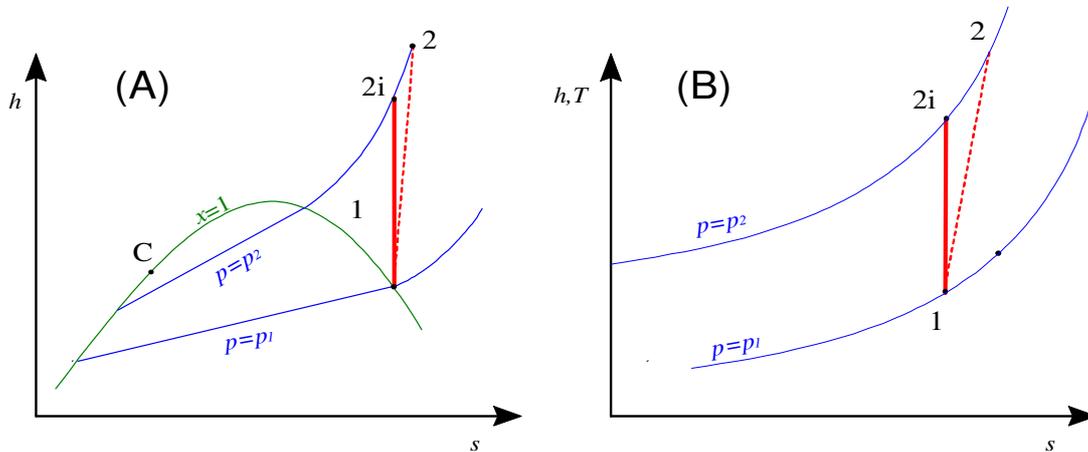


Figura 4.4. Compressione reale ed ideale nel diagramma h - s : (A) fluido reale (vapore saturo secco), (B) gas ideale

ESEMPIO 4.5 - Compressione di un gas ideale

Un compressore operante in regime stazionario, che si può considerare adiabatico, comprime una portata volumetrica in ingresso $G_v = 20 \text{ m}^3/\text{h}$ di aria (gas ideale con $c_p = 1005 \text{ J/kg K} = \text{costante}$ e $R = 287 \text{ J/kg K}$) alle seguenti condizioni:

- Ingresso: $p_1 = 1 \text{ bar}$, $T_1 = 290 \text{ K}$
- Uscita: $p_2 = 7 \text{ bar}$, $T_2 = 560 \text{ K}$

Calcolare la potenza necessaria, verificare che la trasformazione è irreversibile e valutare il rendimento isoentropico del compressore.

Calcolare inoltre la potenza necessaria in una trasformazione adiabatica reversibile ed in una trasformazione isoterma reversibile a partire dalle stesse condizioni di ingresso fino alla stessa pressione di uscita.

[La soluzione è riportata nel file C4COMPID.XLS](#)

Bisogna innanzitutto valutare la portata in massa nel compressore

$$G = \rho_1 G_v$$

$$\rho_1 = \frac{1}{v_1} = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{1 \cdot 10^5}{287 \cdot 290} = 1.2 \text{ kg/m}^3$$

$$G_v = 20 \frac{\text{m}^3}{\text{h}} = 20 \frac{\text{m}^3}{3600 \text{ s}} = 0.556 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$G = 1.2 \cdot 0.556 \cdot 10^{-2} = 0.007 \text{ kg/s}$$

Essendo il compressore adiabatico, le equazioni di bilancio di energia ed entropia si riducono (indipendentemente dal fluido considerato e dal tipo di trasformazione) alla forma

$$\begin{cases} G(h_2-h_1) = -W'_m \\ G(s_2-s_1) = \dot{S}_{irr} \geq 0 \end{cases}$$

Per un gas ideale con calore specifico costante si ha

$$\begin{cases} h_2-h_1 = c_p(T_2-T_1) = 1005(560-290) = 271 \text{ kJ/kg} \\ s_2-s_1 = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = 1005 \ln(1.93) - 287 \ln(7) = 103 \text{ J/kg K} \end{cases}$$

da cui infine

$$\begin{cases} W'_m = -G(h_2-h_1) = -0.007 \cdot 271 = -1.9 \text{ kW} \\ \dot{S}_{irr} = G(s_2-s_1) = 0.72 \text{ W/K} > 0 \end{cases}$$

Il segno negativo nel primo risultato indica che la potenza è assorbita dal sistema. La seconda equazione ci dice che la trasformazione è effettivamente irreversibile. Per calcolare il rendimento isoentropico, valutiamo la temperatura di uscita in una trasformazione ideale (adiabatica reversibile: vedi Esempio 4)

$$T_{2i} = T_1 r_p^{R/c_p} = 290 \cdot 7^{0.286} = 506 \text{ K}$$

da cui si ottiene il rendimento isoentropico del compressore

$$\eta_c = \frac{T_{2i}-T_1}{T_2-T_1} = \frac{506-290}{560-290} = 0.8$$

La potenza necessaria per una compressione adiabatica e reversibile è ricavabile semplicemente da

$$W'_{m,id} = W'_m \eta_c = -1.9 \cdot 0.8 = -1.52 \text{ kW}$$

Mentre per la compressione isoterma reversibile bisogna riscrivere le equazioni di bilancio

$$\begin{cases} G(h_2-h_1) = W_t - W'_m \\ G(s_2-s_1) = \frac{W_t}{T_1} \end{cases}$$

Che nel caso di gas ideale divengono (notare che il salto entalpico è nullo in una trasformazione isoterma di un gas ideale)

$$\begin{cases} G c_p (T_2-T_1) = 0 = W_t - W'_m \\ G \left(c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \right) = -G R \ln \frac{p_2}{p_1} = \frac{W_t}{T_1} \end{cases}$$

dalla seconda equazione si può ricavare la potenza termica scambiata (essendo essa negativa è necessario raffreddare il compressore durante il processo).

$$W_t = -G R T_1 \ln \frac{p_2}{p_1} = -0.007 \cdot 287 \ln(7) = -1.13 \text{ kW}$$

Ed infine dalla prima equazione

$$W'_m = W_t = -1.13 \text{ kW}$$

da cui si vede che una compressione isoterma necessita di meno potenza di una adiabatica



L'esempio precedente dimostra che la compressione più vantaggiosa dal punto di vista energetico è quella isoterma, che tuttavia è difficile da realizzare tecnicamente in quanto comporta una cessione di calore ben precisa all'esterno. Questa comunque è un'ottima ragione per non isolare mai termicamente i compressori, a meno che il fluido al suo interno non si trovi a temperatura inferiore a quella ambiente: in tal modo, pur non arrivando ad una trasformazione isoterma, si riduce comunque il lavoro di compressione. Per valutare le prestazioni del compressore non isolato termicamente, si può quindi far riferimento anche al rendimento isoterma, definito come

$$\eta_{C,T} = \frac{W'_{m, isot}}{W'_m} = \frac{(h_1 - h_{2T}) - T_1(s_1 - s_{2T})}{W'_m} \quad (4.10)$$

che confronta il lavoro di compressione con quello minore possibile per un compressore non adiabatico, ovvero quello dell'isoterma. L'indice $2T$ si riferisce alle condizioni di uscita di una compressione isoterma reversibile che porta il fluido alla stessa pressione. Come abbiamo visto, nel caso generale, la valutazione teorica del termine a denominatore non è semplice, v. Eq.(4.6), quindi questa definizione è utile soprattutto quando viene eseguita una misura in campo delle prestazioni.

La ragione per cui è opportuno definire un rendimento isoterma risiede nel fatto che, se il compressore non è adiabatico, esso può assorbire una potenza inferiore a quella della adiabatica reversibile, per cui il rendimento isoentropico potrebbe risultare per assurdo maggiore di uno.

Si potrebbe anche definire un *rendimento politropico* del compressore, che confronta il lavoro di compressione con quello di una trasformazione *politropica reversibile* che porta il fluido nello *stesso stato finale* a cui effettivamente esce dal compressore stesso: tale rendimento è di facile valutazione solo nel caso di gas ideali e, a giudizio di chi scrive, non è particolarmente significativo; nonostante questo è largamente adottato nell'industria. Il lettore interessato è rimandato al cap.2 del testo di Della Volpe. Ricordando la definizione di lavoro di compressione reversibile in un sistema aperto a regime, il rendimento politropico è definito come

$$\eta_{C,P} = \frac{W'_{m, polit}}{W'_m} = \frac{-G \int_{p_1}^{p_2} v dp}{W'_m} \quad (4.11)$$

E per un gas ideale con calore specifico costante si esprime in modo semplice

$$\eta_{C,P} = \frac{R}{c_p} \frac{\ln(p_2 / p_1)}{\ln(T_2 / T_1)} \quad (4.12)$$

Notare che se $s_2 < s_1$ (compressione con una quota notevole di raffreddamento) il rendimento politropico risulta maggiore di 1.

Compressione multistadio

Abbiamo già accennato che è tecnicamente difficile realizzare compressori monostadio per elevati rapporti di compressione. Si può vedere inoltre facilmente sul diagramma p - v (vedi Fig.5) che è vantaggioso refrigerare il fluido tra uno stadio e l'altro di compressione (la

refrigerazione si può considerare isobara): in questo modo si ottiene infatti una riduzione del volume specifico del fluido stesso e quindi un risparmio nel lavoro specifico dello stadio di compressione successivo. L'insieme della macchina può essere schematizzato come in Fig.6.

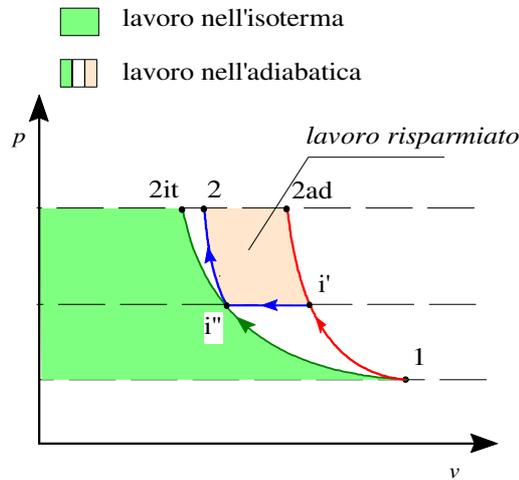


Figura 4.5. Lavoro di compressione reversibile in un compressore a regime: diagramma $p-v$.

Il refrigeratore intermedio è detto in inglese *intercooler*.

Nasce quindi il problema di quale sia la suddivisione ottimale del rapporto di compressione tra i vari stadi della macchina. Limitiamoci a considerare il caso semplice di una compressione isoentropica a due stadi di un gas ideale con c_p costante, in cui l'intercooler riporti il gas alla temperatura iniziale. Il lavoro di compressione è dato semplicemente dalla somma di quelli relativi ai due stadi, ovvero, dato che $T_{i''} = T_1$

$$|l'_{12}| = \frac{|W'_m|}{G} = c_p(T_{i'} - T_1) + c_p(T_2 - T_1) = c_p T_1 (r_{pA}^a - 1) + c_p T_1 (r_{pB}^a - 1) \quad (4.13)$$

dove

$$a = \frac{R}{c_p}; \quad r_{pA} r_{pB} = \frac{p_1 p_2}{p_1 p_i} = \frac{p_2}{p_1} \quad (4.14)$$

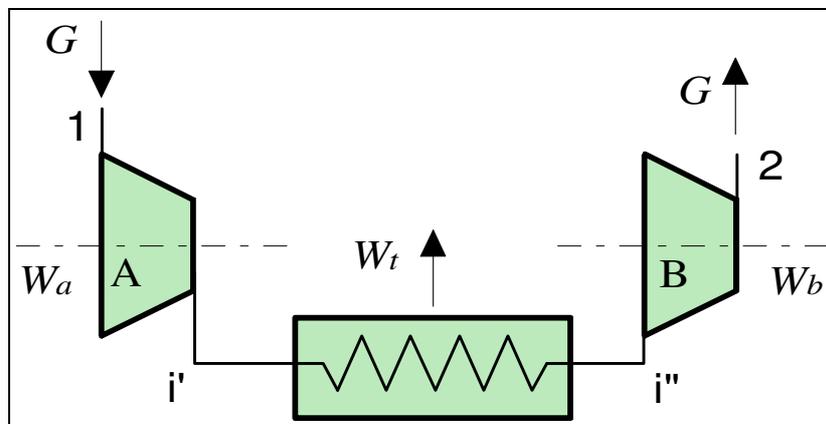


Figura 4.6. Schema di un compressore bistadio con refrigeratore intermedio.

Esprimendo quindi r_{pB} in funzione di r_{pA} e derivando l'espressione del lavoro rispetto a r_{pA} , si può dimostrare che essa ha un minimo per

$$r_{pA} = r_{pB} = \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} \quad (4.15)$$

il che implica

$$p_i = \sqrt{p_2 p_1} \quad (4.16)$$

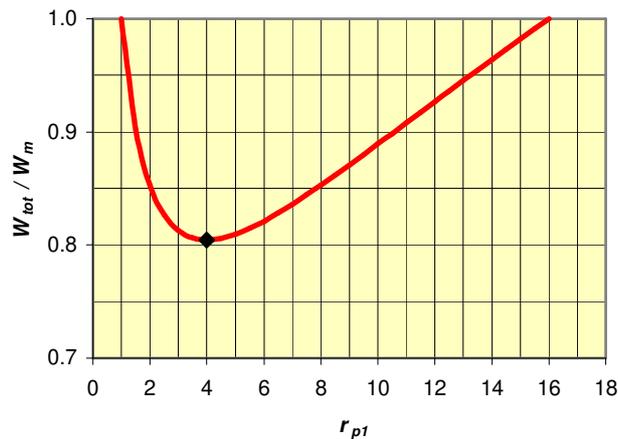


Figura 4.7. Compressione multistadio: rapporto tra la potenza di compressione effettiva e quella del compressore monostadio in funzione del rapporto di compressione del primo stadio (rapporto di compressione totale = 16).

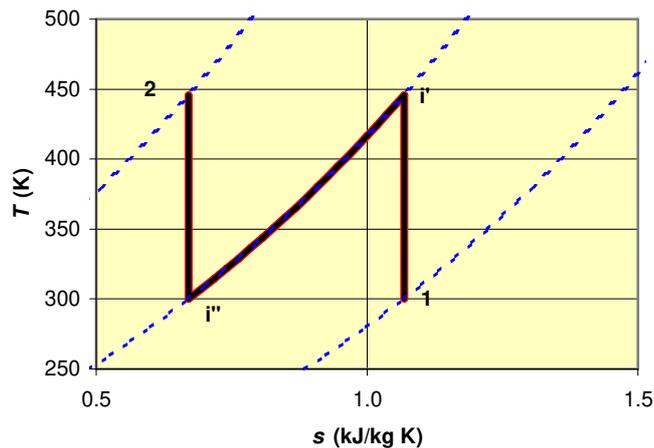


Figura 4.8. Compressione adiabatica reversibile multistadio con refrigerazione intermedia: rappresentazione sul diagramma T - s . Fluido: aria con $c_p = \text{cost}$, rapporto di compressione totale 16:1. Le linee tratteggiate rappresentano le isobare.

Questo risulta evidente anche dal grafico di Fig.7, in cui si riporta il rapporto tra il valore del lavoro necessario rispetto a quello della compressione monostadio in funzione del rapporto di compressione del primo stadio, per un rapporto di compressione totale pari a 16. Si vede che il lavoro ha un minimo per $r_{p1} = \sqrt[4]{16} = 4$.

Il processo è rappresentato sul diagramma $T-s$ in Fig.8. E' facile verificare che, dato che i due stadi hanno lo stesso rapporto di compressione, $T_1' = T_2$.

Generalizzando, si potrebbe vedere che (nelle stesse ipotesi di cui al punto precedente) anche nel caso di una compressione multipla ad N stadi il rapporto di compressione ottimale è uguale per tutti gli stadi e dato da

$$r_{p1} = r_{p2} = \dots = r_{pN} = \sqrt[N]{\frac{p_2}{p_1}} \quad (4.17)$$

il lavoro di compressione assume pertanto la forma

$$l'_{12} = N c_p T_1 \left[1 - \left(r_{pTOT} \right)^{\frac{a}{N}} \right] \quad (4.18)$$

$$a = \frac{R}{c_p} ; r_{pTOT} = \frac{p_2}{p_1}$$

Sul diagramma $T-s$ ci si può facilmente rendere conto che per $N \rightarrow \infty$ il processo tende a diventare *isotermo*.

L'intercooler è un elemento aggiuntivo della macchina costoso, pesante ed ingombrante, per cui in alcuni casi la sua adozione è antieconomica od addirittura impossibile (es. motori aeronautici): quindi, non sempre viene effettivamente adottato, specie nei turbocompressori. Trova maggiori applicazioni nel caso dei compressori alternativi (a pistoni), nei compressori ad alto rapporto di compressione (da cui il fluido uscirebbe a temperature troppo elevate) e soprattutto nei motori a scoppio turbocompressi, per refrigerare il fluido prima della introduzione nei cilindri (aumentandone così la densità e quindi la massa caricata a parità di cilindrata). Tuttavia, si intuisce che comunque, salvo casi molto particolari, non ha senso coibentare i condotti di trasferimento da uno stadio di compressione all'altro, e, più in generale, i compressori stessi: anzi, talvolta si cerca di favorire lo smaltimento di calore alettandone le superfici esterne.

ESEMPIO 4.6 - Compressione multistadio dell'aria

Si deve comprimere una portata $G = 0.1$ kg/s di aria (da considerare come un gas ideale con c_p costante con $R = 287$ J/kg K, $k = 1.4$) da $p_1 = 1$ bar, $T_1 = 293$ K a $p_2 = 100$ bar. Considerare la compressione reversibile e determinare la potenza di compressione necessaria nel caso di trasformazione adiabatica e trasformazione isoterma. Determinare inoltre la potenza necessaria nel caso di compressione multistadio con N stadi ad uguale rapporto di compressione e refrigerazioni intermedie fino alla temperatura iniziale per $N = 2, 4, 8, 16, 32$.

 *La soluzione è riportata nel file C4COMPMULT.XLS*

Compressione adiabatica

Il lavoro per unità di massa è dato da

$$l'_{12AD} = -(h_2 - h_1) = -c_p (T_2 - T_1) = -c_p T_1 (r_p^a - 1)$$

dove

$$c_p = \frac{Rk}{k-1} = \frac{287 \cdot 1.4}{0.4} = 1005 \text{ J/kg K} \quad ; a = \frac{R}{c_p} = 0.286$$

per cui

$$l'_{12AD} = -1005 \cdot 293 \cdot (100^{0.286} - 1) = -805 \text{ kJ/kg}$$

la potenza è quindi data da

$$W'_{AD} = Gl'_{12AD} = -80.5 \text{ kW}$$

Compressione isoterma

In questo caso si ha

$$l'_{12IT} = -RT_1 \ln r_p = -388 \text{ kJ/kg}$$

e conseguentemente

$$W'_{IT} = Gl'_{12IT} = -38.8 \text{ kW}$$

Compressione multistadio

Il lavoro di compressione, detto N il numero degli stadi, è dato da

$$l'_{12MS} = -Nc_p T_1 \left[(r_{pTOT})^{\frac{a}{N}} - 1 \right]$$

la tabella seguente riassume i risultati per le varie compressioni studiate

Compressione	$T_{\max} = T_1 r_p^{a/N}$ [K]	W'_m [kW]
adiabatica revers.	1092	80.5
2 stadi	565	54.9
4 stadi	407	46.0
8 stadi	345	42.2
16 stadi	318	40.4
32 stadi	305	39.6
isoterma	293	38.8

come si vede, al crescere del numero di stadi la potenza di compressione tende al valore di quella isoterma. In pratica, tuttavia, la suddivisione in un numero eccessivo di stadi è antieconomica.

□

Le varie espressioni per il calcolo della potenza di compressione, per fluidi reali e gas ideali con calore specifico costante, sono riassunte nella tabella 4.1 seguente.

Trasformazione	Fluido reale	Gas ideale a $c_p = \text{cost}$
Adiabatica reversibile (isoentropica)	$W'_m = G (h_1 - h_{2i})$ $s_1 = s_{2i}$	$W'_m = G c_p (T_1 - T_{2i})$ $T_{2i} = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{R/c_p}$
Adiabatica irreversibile	$W'_m = G (h_1 - h_2) = \frac{G (h_1 - h_{2i})}{\eta_c}$	$W'_m = G c_p (T_1 - T_2) = \frac{G c_p (T_1 - T_{2i})}{\eta_c}$
Isotherma reversibile	$W'_m = G (h_1 - h_2) - T G (s_1 - s_2)$	$W'_m = G R T \ln \frac{p_1}{p_2}$
Politropica reversibile	$W'_m = G (h_1 - h_2) - T_{ms} G (s_1 - s_2)$	$p v^n = \text{cost} \quad 1 < n \leq k$ $W'_m = G \frac{R n}{n-1} T_1 \left(1 - r_p^{\frac{n-1}{n}} \right)$

Tabella 4.1. Riepilogo delle varie espressioni per il calcolo della potenza di compressione dei gas.

Compressione dei liquidi

Gli organi destinati alla compressione dei liquidi sono in genere denominati pompe. Ricordiamo che per un liquido incomprimibile (che non subisce variazioni di volume) si ha

$$\begin{aligned}
 v &= \text{cost} \\
 du &= c \, dT \\
 dh &= c \, dT + v \, dp \\
 ds &= c \frac{dT}{T}
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Dall'ultima equazione possiamo concludere che una compressione isoentropica in questo caso è anche isoterma (e inoltre anche isovolumica per la natura stessa del fluido).

Le equazioni di bilancio di energia ed entropia sono

$$\begin{cases}
 W'_m = G (h_1 - h_2) = G [c (T_1 - T_2) + v (p_1 - p_2)] \\
 G (s_2 - s_1) = \dot{S}_{irr} \geq 0 \Rightarrow s_2 \geq s_1 \Rightarrow T_2 \geq T_1
 \end{cases} \tag{4.20}$$

E nel caso di compressione adiabatica reversibile si può scrivere

$$\begin{cases}
 W'_m = G v (p_1 - p_2) \\
 T_2 = T_1
 \end{cases} \tag{4.21}$$

Se la compressione è adiabatica irreversibile dal bilancio di entropia si nota che la temperatura del fluido deve aumentare; possiamo anche in questo caso introdurre il rendimento isoentropico della pompa

$$\eta_p = \frac{W'_{m,id}}{W'_m} = \frac{v(p_2 - p_1)}{h_2 - h_1} \quad (4.22)$$

Da cui si ricava

$$W'_m = \frac{W'_{m,id}}{\eta_p} = \frac{Gv(p_2 - p_1)}{\eta_p} \quad (4.23)$$

L'incremento di temperatura dovuto alle irreversibilità è determinabile tramite il bilancio di energia

$$T_2 = T_1 - \frac{\frac{W'_m}{G} - v(p_1 - p_2)}{c} = \quad (4.24)$$

o anche, tenendo conto della (4.23)

$$T_2 = T_1 - \frac{W'_m}{G} \frac{1 - \eta_p}{c} \quad (4.25)$$

SCAMBIATORI DI CALORE

Gli scambiatori di calore sono dispositivi in cui si utilizza un fluido caldo per scaldarne un altro (non necessariamente di diversa natura) più freddo. Gli scambiatori di calore possono distinguersi in:

- scambiatori di calore *a superficie*, (Fig. 9-a) in cui i due fluidi, che possono essere di diversa natura, sono separati da una superficie impermeabile alla massa e non si mescolano;
- scambiatori *a miscelamento*, (Fig. 9-b) in cui i due fluidi hanno in genere la stessa natura e si mescolano tra loro.

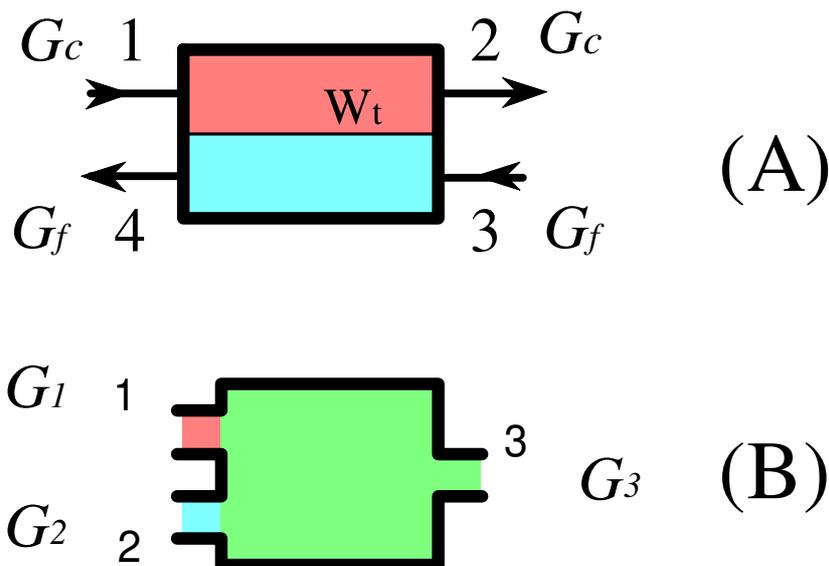


Figura 4.9. Schemi di scambiatori di calore a superficie (A) ed a miscelamento (B).

La superficie esterna degli scambiatori è in generale isolata per cui il sistema si può considerare *adiabatico*; inoltre, dato che la superficie non presenta parti mobili, il lavoro scambiato con l'esterno è comunque nullo. Dato che anche i termini di energia cinetica e potenziale sono trascurabili, i bilanci di massa, energia e di entropia si riducono a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i G_i - \sum_u G_u = 0 \\ \sum_i G_i h_i - \sum_u G_u h_u = 0 \\ \sum_u G_u s_u - \sum_i G_i s_i = \dot{S}_{irr} \end{array} \right. \quad (4.26)$$

A prima vista può sembrare contraddittorio definire adiabatico uno scambiatore di calore. Ma ci si rende subito conto (vedi Fig.9) che lo scambio di calore W_t avviene tra i due fluidi *internamente* al sistema (e non fra sistema ed esterno) e pertanto non deve essere considerato nel bilancio energetico.

Per gli scambiatori a miscelamento con due ingressi ed una uscita, la prima delle Eq.(4.26) diviene

$$G_3 h_3 - G_2 h_2 - G_1 h_1 = 0 \quad (4.27)$$

che va associata al bilancio di massa

$$G_3 = G_2 + G_1 \quad (4.28)$$

ESEMPIO 4.7 - Scambiatore a miscelamento

Un preriscaldatore di acqua di alimento di una centrale termoelettrica lavora a regime nelle seguenti condizioni:

- Ingresso 1: liquido sottoraffreddato a $p_1 = 7$ bar, $T_1 = 40$ °C;.
- Ingresso 2: vapore surriscaldato a $p_2 = 7$ bar, $T_2 = 200$ °C;
- Uscita 3: liquido saturo, $p_3 = 7$ bar, $x_3 = 0$.

Determinare il rapporto tra le due portate in ingresso, G_1/G_2 , per ottenere in uscita le condizioni desiderate. Supporre il sistema adiabatico ed il lavoro meccanico nullo.

Nota: a $p = 7$ bar la temperatura di saturazione dell'acqua vale 165 °C, il che ci conferma che nel punto 2 abbiamo vapore surriscaldato e nel punto 1 liquido sottoraffreddato.

I bilanci di massa e di energia valgono rispettivamente

$$\left\{ \begin{array}{l} G_3 = G_2 + G_1 \\ G_3 h_3 = G_2 h_2 + G_1 h_1 \end{array} \right.$$

da cui con semplici passaggi algebrici

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{h_2 - h_3}{h_3 - h_1}$$

dalle tabelle del vapore si ricava $h_1 = 168.2$ kJ/kg, $h_2 = 2844.8$ kJ/kg, $h_3 = 697.2$ kJ/kg, e sostituendo

$$\frac{G_1}{G_2} = 4.06$$

il bilancio entropico, ricavando i valori delle entropie dalle tabelle del vapore, $s_1 = 0.5722$ kJ/kg K, $s_2 = 6.886$ kJ/kg K, $s_3 = 1.992$ kJ/kg K, diviene

$$G_3 s_3 - G_2 s_2 - G_1 s_1 = G_2 \left[\frac{G_3}{G_2} s_3 - s_2 - \frac{G_1}{G_2} s_1 \right] \geq 0$$

$$\frac{\dot{S}_{irr}}{G_2} = \frac{G_3}{G_2} s_3 - s_2 - \frac{G_1}{G_2} s_1 = 5.06 \cdot 1.992 - 6.886 - 4.06 \cdot 0.5722 = 0.87 \text{ kJ/kg K} \geq 0$$

e conferma che la trasformazione di miscelamento è irreversibile.

□

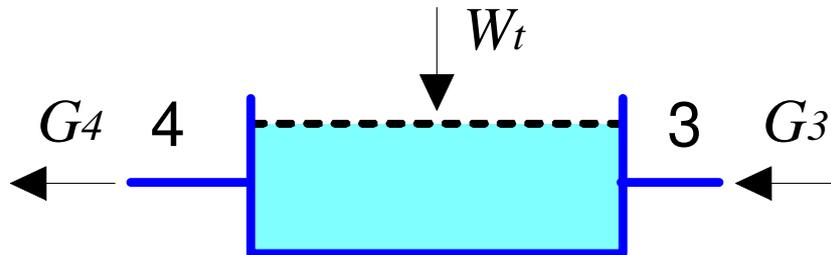


Figura 4.10. Scambiatori a superficie: sistema ausiliario (non adiabatico) costituito da uno soltanto dei due fluidi.

Nel caso di uno scambiatore a superficie per calcolare anche la potenza termica scambiata tra i due fluidi, W_T , si può considerare un sottosistema costituito da uno solo dei due fluidi (vedi Fig.10, in cui si considera solo la parte del fluido freddo)

$$\begin{cases} G_3 = G_4 = G_f \\ G_f (h_4 - h_3) = W_t \end{cases} \quad (4.29)$$

Per lo scambiatore nel suo complesso, come risulta rielaborando la seconda delle Eqq.(4.26), si ha

$$G_c (h_1 - h_2) = G_f (h_4 - h_3) \quad (4.30)$$

che ci dice in definitiva che la potenza perduta dal fluido caldo (primo membro) è uguale a quella acquistata dal fluido freddo (secondo membro).

ESEMPIO 4.8 - Scambiatore di calore a superficie

In uno scambiatore a superficie scorrono i seguenti fluidi:

- Lato caldo: prodotti di combustione (ovvero fumi, approssimabili come un gas ideale con $c_{pc} = 1100$ J/kg K = cost) a $p = 1$ bar, portata $G_c = 0.05$ kg/s, temperatura di ingresso $T_1 = 450$ °C, temperatura di uscita $T_2 = 200$ °C;
- Lato freddo: acqua a $p = 2$ bar, portata $G_f = 0.15$ kg/s, temperatura ingresso $T_3 = 45$ °C;. Determinare la temperatura di uscita dell'acqua (T_4) ed il calore scambiato.

Dal bilancio di energia dello scambiatore a superficie

$$G_c (h_1 - h_2) = G_f (h_4 - h_3)$$

tenuto conto che l'acqua si può considerare un fluido incomprimibile (con $c_{pf} = 4187$ J/kg K, costante) ed il fumo un gas ideale, si ha

$$G_c c_{pc} (T_1 - T_2) = G_f c_{pf} (T_4 - T_3)$$

dove si è tenuto conto che la trasformazione del liquido è isobara, per cui

$$dh = c_{pf} dT + v \cancel{dp} \Rightarrow h_4 - h_3 = c_{pf} (T_4 - T_3)$$

Quindi

$$T_4 = T_3 + \frac{G_c c_{pc} (T_1 - T_2)}{G_f c_{pf}} = \frac{0.05 \cdot 1100 (450 - 200)}{0.15 \cdot 4187} = 67 \text{ } ^\circ\text{C}$$

per trovare il calore scambiato, si può restringere il bilancio al sistema a regime costituito dal lato freddo dello scambiatore, che non è adiabatico (scambia calore con il lato caldo) ma non ha comunque superfici in moto, per cui il lavoro meccanico è nullo

$$W_t = G_f c_{pf} (T_4 - T_3) = 0.15 \cdot 4187 (67 - 45) = 13.8 \text{ kW}$$

Il bilancio entropico dell'intero scambiatore risulta in

$$G_c (s_2 - s_1) + G_f (s_4 - s_3) = \dot{S}_{irr} \Rightarrow G_c c_{pc} \ln \frac{T_2}{T_1} + G_c R \ln \frac{p_2}{p_1} + G_f c_{pf} \ln \frac{T_4}{T_3} = \dot{S}_{irr} \geq 0$$

tenendo conto che la trasformazione del gas è isobara, il termine $R \ln (p_2/p_1)$ scompare, quindi

$$G_c c_{pc} \ln \frac{T_2}{T_1} + G_f c_{pf} \ln \frac{T_4}{T_3} = 0.05 \cdot 1100 \cdot \ln \frac{473}{723} + 0.15 \cdot 4187 \cdot \ln \frac{340}{318} = 18.67 \text{ W/K} \geq 0$$

e conferma che la trasformazione è irreversibile, a causa dello scambio di calore con differenza di temperatura finita. \square

SEPARATORI DI VAPORE

Un separatore di vapore (Fig.11) è un organo in cui il vapore saturo in ingresso viene separato in vapore saturo secco e liquido saturo, che fuoriescono da due uscite diverse. La separazione avviene sfruttando la diversa densità del liquido e del vapore, per effetto della forza di gravità o delle forze inerziali.

Esistono numerose tipologie di separatori. Nel separatore più semplice, detto *a tamburo*, il liquido si deposita semplicemente per gravità nella parte inferiore del contenitore, mentre il vapore saturo secco viene estratto dall'alto; nei *separatori a ciclone* la miscela assume un moto rotatorio e la separazione avviene per forza centrifuga.

La superficie del separatore non presenta parti mobili, per cui il lavoro scambiato con l'esterno è comunque nullo. La superficie esterna può inoltre essere considerata adiabatica. Le cadute di pressione tra ingresso ed uscita sono dovute soltanto all'attrito, e possono quindi molto spesso essere considerate trascurabili: la trasformazione si può pertanto considerare *isobara*.

Con buona approssimazione, il flusso in ingresso può essere considerato omogeneo, per cui il titolo rappresenta anche il rapporto tra le portate in massa¹; dato che il sistema è isolato ed isobaro, all'interno del separatore non si ha né condensazione né evaporazione; considerando quindi che il flusso delle due fasi deve conservarsi, il bilancio di massa si scrive, riferendosi alla portata di entrambe le fasi

$$G_1 = (1 - x_1) G_1 + x_1 G_1 = G_2 + G_3 \quad (4.31)$$

¹ Chi in futuro studierà più approfonditamente gli efflussi bifase vedrà che non sempre è così.

oppure, riferendosi separatamente alla fase liquida e vapore (ipotizzando che dall'uscita 2 esca liquido saturo e dall'uscita 3 vapore saturo secco) rispettivamente

$$\begin{aligned} G_2 &= G_f = (1 - x_1) G_1 \\ G_3 &= G_g = x_1 G_1 \end{aligned} \quad (4.32)$$

e i bilanci di energia ed entropia, in questo approccio semplificato, sono rispettivamente

$$\begin{cases} G_1 h_1 = G_2 h_f + G_3 h_g \\ G_1 s_1 = G_2 s_f + G_3 s_g \end{cases} \quad (4.33)$$

E' da notare che nella presente trattazione lo scambiatore risulta sede di trasformazioni reversibili: infatti può essere trasformato in un miscelatore semplicemente invertendo i flussi. Nella realtà le cadute di pressione tra ingresso ed uscita rendono il sistema irreversibile, e sarebbe necessario introdurre anche un'altra forma di energia per rappresentare correttamente la separazione delle fasi (es. energia potenziale nel caso della separazione per gravità).

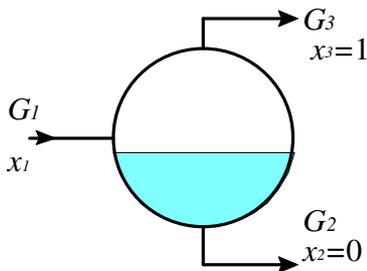


Figura 4.11. Schema di un separatore di vapore.

CALDAIE E GENERATORI DI VAPORE

Un generatore di vapore (o caldaia) è un organo in cui un fluido subisce un innalzamento di temperatura e talvolta anche un cambiamento di stato. Il calore è fornito a spese di un fluido più caldo, che fluisce all'esterno (in tal caso il generatore può essere visto come una delle due parti di uno scambiatore di calore a superficie), oppure può provenire da un riscaldatore elettrico, o da barrette di combustibile nucleare lambite dal fluido. La superficie dei generatori di vapore non presenta parti mobili, per cui il lavoro scambiato con l'esterno è comunque nullo. Le cadute di pressione tra ingresso ed uscita sono dovute soltanto all'attrito, e possono quindi molto spesso essere considerate trascurabili: la trasformazione è pertanto, almeno in prima approssimazione, *isobara*.

I bilanci energetico ed entropico assumono la forma

$$\begin{cases} G (h_2 - h_1) = W_t \\ G (s_2 - s_1) = \sum_k \frac{W_{tk}}{T_k} + \dot{S}_{irr} \end{cases} \quad (4.34)$$

Generatori di vapore “once-through” e a ricircolo

Vi sono molteplici tipologie di generatori di vapore, e una loro trattazione dettagliata richiederebbe molto più spazio di quello che vi viene qui dedicato. Ci interessa solo definire una distinzione fondamentale tra due categorie:

- generatori che vengono attraversati una sola volta dal fluido, che esce direttamente allo stato di vapore saturo secco o surriscaldato, che sono detti “once-through”; il loro funzionamento è illustrato nell'esempio 4.9.
- generatori in cui il fluido esce allo stato di vapore saturo secco o surriscaldato dopo avere attraversato più volte il fascio riscaldatore (*generatori a ricircolo*).

Nei generatori once-through il fluido può uscire allo stato di vapore saturo secco o surriscaldato; dato che il coefficiente di scambio termico del vapore ad alto titolo o surriscaldato è piuttosto basso, sono necessarie grosse superfici di scambio² o alte differenze di temperatura. Una particolare categoria di generatori once-through sono quelli *ipercritici*, in cui il fluido si trova ad una pressione maggiore di quella critica; in questo caso non avviene un vero e proprio passaggio di stato, ma le caratteristiche del fluido passano gradualmente da quelle del liquido (alta densità, bassa comprimibilità) a quelle del gas (bassa densità, alta comprimibilità).

Nei generatori a ricircolo (v. Fig.12) il vapore esce dall'evaporatore (punto 3) con titolo minore di 1; è necessario pertanto mettere in serie un separatore S, che separa il vapore saturo secco dal liquido saturo, che viene riportato all'ingresso dell'evaporatore tramite un condotto discendente (4) detto *downcomer*; prima dell'ingresso nell'evaporatore, il fluido è miscelato nel miscelatore M con una portata di liquido in ingresso (punto 1) che reintegra quella prelevata dall'evaporatore. Tale liquido in genere è già stato portato ad una temperatura vicina a quella di saturazione in un componente disposto a monte di 1 e detto *economizzatore*. Il vapore saturo secco in uscita può essere surriscaldato in un ulteriore componente a valle di 5

² La potenza termica scambiata attraverso una superficie A, come sarà meglio visto nel corso di trasmissione del calore, è esprimibile come $W_t = A u \Delta T$, dove u è il coefficiente di scambio e ΔT la differenza di temperatura tra parete e fluido.

detto *surriscaldatore*. Il funzionamento di questi generatori è illustrato nell'esercizio C.39 dell'Appendice 7.

La portata di ricircolo G_R può essere determinata facilmente una volta noto il titolo x_3 , confrontando il bilancio dell'intero generatore (ingresso in 1 e uscita in 5) con quello del solo fascio tubiero (ingresso in 2 e uscita in 4)

$$G (h_g - h_1) = W_T = (G + G_R)(h_3 - h_2) \quad (4.35)$$

e dal bilancio del separatore S si ha

$$(G + G_R) h_3 = G_R h_f + G h_g \quad (4.36)$$

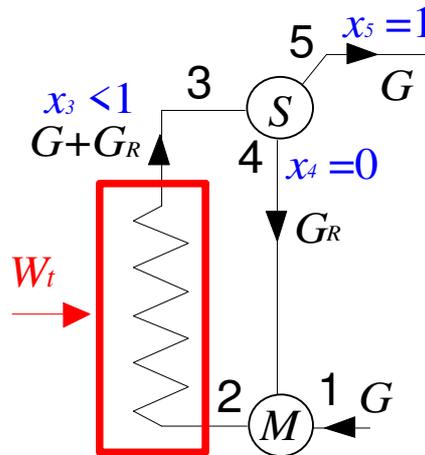


Figura 4.12. Schema di un generatore di vapore a ricircolo.

ESEMPIO 4.9 - Generatore di vapore once-through

Un generatore di vapore lavora a regime nelle seguenti condizioni:

- portata di acqua $G = 1.5 \text{ kg/s}$
- pressione $p = 2 \text{ Mpa}$ (si può considerare costante nel generatore, trascurando gli attriti)
- temperatura in ingresso $T_1 = 30 \text{ °C}$
- temperatura di uscita $T_2 = 400 \text{ °C}$

Determinare la potenza termica totale fornita al vapore W_t , e quella fornita nell'evaporatore (ovvero la potenza termica necessaria a portare il fluido dallo stato di liquido saturo, $x=0$, a quello di vapore saturo, $x=1$).

Il bilancio di energia in questo caso è dato da

$$G (h_2 - h_1) = W_t$$

dalle tabelle del vapore si ricava $h_1 = 127 \text{ kJ/kg}$ (liquido sottoraffreddato), $h_2 = 3247 \text{ kJ/kg}$ (vapore surriscaldato) da cui

$$W_t = 4.68 \text{ MW}$$

Per determinare la potenza scambiata nell'evaporatore consideriamo il sottosistema (incluso nel precedente) in cui il liquido entra in saturazione ($x=0$) e da cui esce vapore saturo secco ($x=1$). Dette h_f e h_g le rispettive entalpie, si ha

$$W_{tE} = G (h_g - h_f) = G h_{fg}$$

le tabelle forniscono, per $p = 2 \text{ MPa}$, $h_{fg} = 1894 \text{ kJ/kg}$, per cui

$$W_{tE} = 2.84 \text{ MW} \quad \square$$

IL PROCESSO DI LAMINAZIONE

Si può ottenere una consistente riduzione di pressione in un fluido semplicemente interponendo una restrizione od un ostacolo nel suo percorso lungo una tubazione. La trasformazione che avviene, in cui il fluido perde pressione per attrito, è, ovviamente, *intrinsecamente irreversibile*. In genere, il sistema può essere considerato adiabatico e, dato che non vi sono superfici mobili, il lavoro scambiato con l'esterno è nullo; inoltre, le variazioni di energia potenziale e cinetica possono essere trascurate. I bilanci di energia ed entropia si riducono pertanto a:

$$\begin{cases} G(h_2 - h_1) = 0 \Rightarrow h_2 = h_1 \\ G(s_2 - s_1) = \dot{S}_{irr} > 0 \Rightarrow s_2 > s_1 \end{cases} \quad (4.37)$$

di conseguenza, la laminazione è un processo *adiabatico, irreversibile, isoentalpico*.

E' facile rendersi conto che per un gas ideale tale processo è anche isoterma. Fu proprio mediante misure molto accurate di questo tipo che Joule e Thompson (si tratta di William Thompson, meglio noto come Lord Kelvin) dimostrarono definitivamente che i fluidi reali, in condizioni sufficientemente lontane dal punto critico, tendono a comportarsi come gas ideali.

ESEMPIO 4.10 - Laminazione del vapore

Del vapore saturo viene laminato in una valvola a partire dalle seguenti condizioni iniziali $p_1 = 20$ bar, $x_1 = 0.98$ fino alla pressione $p_2 = 1$ bar. Determinare la temperatura di uscita.

Dato che $h_2 = h_1$ e $p_2 = 1$ bar, è determinato lo stato finale del vapore. Tramite le tabelle termodinamiche si ottiene $h_1 = 2762$ kJ/kg

In uscita si ha quindi vapore surriscaldato a $T_2 = 142.6$ °C. Si può verificare, come atteso in un processo adiabatico irreversibile, che l'entropia finale è maggiore di quella iniziale. Il processo è rappresentato sul diagramma $h-s$ in Fig.11. La tabella seguente riassume le proprietà termodinamiche, ottenute tramite il programma CATT. I valori di input sono evidenziati in grigio.

punto	$T, ^\circ\text{C}$	p, MPa	$v, \text{m}^3/\text{kg}$	$u, \text{kJ/kg}$	$h, \text{kJ/kg}$	$s, \text{kJ/kg K}$	x
1	212.4	2	0.09766	2566	2762	6.263	0.98
2	142.6	0.1	1.901	2572	2762	7.578	

□

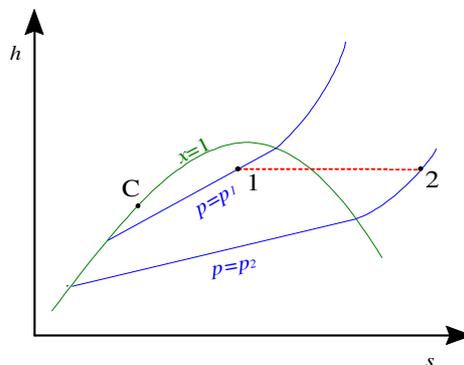


Figura 4.13. Laminazione del vapore saturo nel diagramma $h-s$.

ESEMPIO 4.11 - Laminazione di R134a

Il refrigerante R134a entra in una valvola allo stato di liquido saturo alla pressione $p_1 = 0.7$ Mpa e viene laminato fino alla pressione finale $p_2 = 0.15$ MPa. Determinare le condizioni in uscita.

La tabella seguente, ottenuta tramite il programma CATT, riassume le condizioni termodinamiche in ingresso ed uscita. Le variabili utilizzate come input sono evidenziate in grigio.

Si è tenuto conto del fatto che il processo di laminazione è isoentalpico, ovvero $h_2 = h_1$.

punto	$T, ^\circ\text{C}$	p, MPa	$v, \text{m}^3/\text{kg}$	$u, \text{kJ/kg}$	$h, \text{kJ/kg}$	$s, \text{kJ/kg K}$	x
1	26.71	0.7	0.0008332	236.4	237	1.128	0
2	-17.13	0.15	0.03764	231.3	237	1.148	0.2827

Bisogna anche notare che utilizzando le tabelle nell'Appendice A si ottengono valori diversi delle variabili di stato, che tuttavia differiscono solo per una costante da quelli della tabella, per cui alla fine il risultato è lo stesso. Infatti dalle tabelle dell'R134a saturo a $p_1=0.7$ MPa $x_1=0$ si ha $h_1 = h_{f1} = 71.18$ kJ/kg; a $p_2=0.15$ MPa si ha $h_{f2} = 11.55$, $h_{g2} = 222.5$ per cui il titolo vale $x_2 = (h_2 - h_{f2}) / (h_{g2} - h_{f2}) = 0.2827$ come sopra.



La seconda equazione di Gibbs, $dh = Tds + vdp$, ci garantisce che in una trasformazione di laminazione la pressione non può che diminuire. Ci si potrebbe chiedere invece se durante una laminazione la temperatura del fluido aumenta o diminuisce. Abbiamo già visto che, nel caso di un gas ideale, la temperatura rimane invariata. Nel caso più generale occorre verificare il segno di un particolare coefficiente termodinamico, esprimibile in funzione dei coefficienti termodinamici fondamentali

$$\mu = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_h = \frac{v(T\beta - 1)}{c_p} \tag{4.38}$$

detto *coefficiente di Joule-Thompson*. Tale coefficiente è ovviamente nullo per i gas ideali, e in generale può essere sia maggiore che minore di zero come risulta dal diagramma p-T di fig.4.13, dove vengono riportate le linee isoentalpiche.

Si vede che tale coefficiente è maggiore di zero nella regione colorata, nella quale la laminazione implica una riduzione di temperatura. Al di fuori di tale regione, la temperatura del fluido aumenta durante la laminazione. La temperatura massima per cui $\mu > 0$ (punto A nel diagramma) è detta *temperatura di inversione* ed è una caratteristica del gas, come risulta dalla tabella 4.2.

Da tale tabella si vede che, a partire da temperatura ambiente, azoto e anidride carbonica si raffreddano sicuramente durante una laminazione, mentre per idrogeno ed elio, a partire da determinate pressioni comprese nella regione azzurra del grafico di Fig.4.13, può avvenire il contrario. Per raffreddare l'idrogeno tramite una laminazione bisogna scendere almeno sotto la temperatura di 205 K.

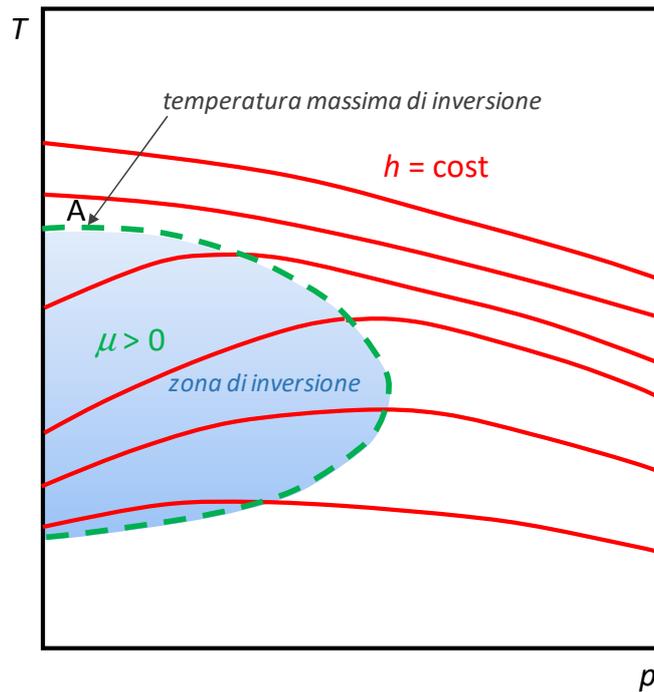


Figura 4.13. Temperatura massima di inversione e zona di inversione.

Gas		Temperatura massima di inversione [K]
Anidride carbonica	CO ₂	1500
Argon	Ar	723
Azoto	N	621
Aria secca		603
Idrogeno	H ₂	205
Elio	He	60

Tabella 4.2. Temperature massime di inversione per alcune sostanze.

Se la laminazione è molto spinta, il fluido può cambiare stato e liquefarsi, o addirittura solidificarsi.

UGELLI E DIFFUSORI

Si dice *ugello* un condotto a pareti rigide di sezione variabile in cui la velocità del fluido aumenta a spese della sua pressione, *diffusore* un condotto a sezione variabile in cui la pressione del fluido cresce a spese della sua velocità. Generalmente, per flussi *subsonici* (ovvero per velocità del fluido inferiori a quella del suono nel fluido stesso) gli ugelli sono condotti *convergenti* ed i diffusori *divergenti*. Nell'Appendice 1 si mostra come le cose siano sostanzialmente diverse in caso di moto *supersonico* del fluido. Questi dispositivi trovano numerose applicazioni, tra cui nei motori a turbogetto, nei razzi e nei veicoli spaziali, e si trovano anche all'interno delle turbine.

Ugelli e diffusori possono essere considerati, almeno in prima approssimazione) adiabatici; essendo la loro superficie rigida, il lavoro utile scambiato è comunque nullo. Anche le variazioni di energia potenziale tra ingresso ed uscita possono essere trascurate (anche nel caso in cui il dispositivo non sia disposto orizzontalmente, le variazioni di quota tra ingresso ed uscita sono comunque basse), mentre le variazioni di energia cinetica *non sono trascurabili*. Il bilancio di massa ci dice che la portata in ingresso uguaglia quella in uscita. Le equazioni di bilancio di massa, energia ed entropia si riducono dunque a

$$\begin{cases} G_1 = G_2 = G \\ G (h_2 + e_{c2} - h_1 - e_{c1}) = 0 \Rightarrow h_2 - h_1 = e_{c1} - e_{c2} = \frac{w_1^2}{2} - \frac{w_2^2}{2} \\ G (s_2 - s_1) = \dot{S}_{irr} \end{cases} \quad (4.39)$$

Dato che tali equazioni sono applicabili tra due sezioni qualunque dell'ugello, aggiungendo l'ipotesi di trasformazione reversibile ($\dot{S}_{irr} = 0$), esse si possono anche riformulare come

$$\begin{cases} G = \rho w A = \text{cost} \\ h + e_c = h + \frac{w^2}{2} = h_0 = \text{cost} \\ s = \text{cost} \end{cases} \quad (4.40)$$

ESEMPIO 4.12 – Diffusore di un motore turbogetto

In un diffusore di un motore turbogetto entra aria (assimilabile ad un gas ideale con calore specifico costante) a $T_1 = 10 \text{ }^\circ\text{C}$ e $p_1 = 80 \text{ kPa}$ con una velocità $w_1 = 200 \text{ m/s}$. La sezione di uscita è molto più grande di quella di ingresso. Determinare la temperatura di uscita dell'aria e, nell'ipotesi che la trasformazione sia reversibile, la pressione di uscita.

Dato che la sezione di uscita è molto più grande di quella d'ingresso, è lecito trascurare la velocità in uscita, ovvero porre $w_2 = 0$. Il bilancio di energia diviene allora

$$h_2 - h_1 = \frac{w_1^2}{2}$$

e nel caso di gas ideale a $c_p = \text{cost} = 1005 \text{ kJ/kg K}$

$$c_p (T_2 - T_1) = \frac{w_1^2}{2}$$

si ha dunque

$$T_2 = T_1 + \frac{w_1^2}{2 c_p} = 10 + \frac{200^2}{2 \cdot 1005} = 29.9 \text{ }^\circ\text{C}$$

La pressione può essere determinata considerando che la trasformazione, essendo adiabatica e reversibile, è isoentropica, pertanto, per un gas ideale a $c_p = \text{cost}$ (vedi anche Esempio 4.4)

$$s_2 - s_1 = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = 0$$

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{c_p} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^R$$

$$p_2 = p_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{c_p}{R}} = 80 \left(\frac{303}{283}\right)^{3.5} = 102 \text{ kPa}$$

L'aria incrementa dunque la sua temperatura e la sua pressione a spese dell'energia cinetica che possiede in ingresso. Il fenomeno viene detto *compressione dinamica* e nei motori a getto viene adottato per eliminare il primo stadio del compressore.

Notare che in un ugello (condotto convergente) sarebbe avvenuto il fenomeno opposto: la velocità sarebbe aumentata a spese di una riduzione di pressione e temperatura. Ci si può rendere conto di questo semplicemente ripetendo l'esercizio invertendo ingresso ed uscita.

□

Nel caso di trasformazione adiabatica e reversibile si può mostrare (v. App. 4.1) che la relazione tra area del condotto e velocità del fluido è data dalla equazione di Hugoniot:

$$\frac{dA}{A} = -\frac{dw}{w} (1 - M^2) \quad (4.41)$$

dove M , detto numero di Mach, è il rapporto tra la velocità del fluido e la velocità del suono nello stesso. Questa relazione implica alcune importanti conseguenze:

- Nel caso di *moto subsonico* ($M < 1$) le variazioni di area e quelle di velocità sono *discordi*: questo implica che un *ugello* (aumento di velocità del fluido) debba essere *convergente* ed un *diffusore* debba essere *divergente*.
- Nel caso di *moto supersonico* ($M > 1$) vale esattamente il contrario: gli *ugelli* debbono essere *divergenti* ed i *diffusori* *convergenti*.
- La *velocità del suono* ($M = 1$) si può raggiungere solo dove l'area del *condotto presenta un massimo od un minimo*.

La relazione di Hugoniot (4.21) per un fluido incomprimibile, per il quale la velocità del suono $c = \infty$, e quindi M è sempre nullo, diviene

$$\frac{dA}{A} = -\frac{dw}{w} \Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = \frac{w_1}{w_2}$$

come risulta anche dal fatto che $G = \rho A w = \text{cost}$, e la densità è costante.

Dalle considerazioni suddette deriva che:

- E' possibile realizzare un condotto che acceleri il fluido a velocità supersoniche (ugello di De Laval), costituito da un convergente seguito da un divergente;

- quando al termine di un convergente si è raggiunta la velocità del suono, la portata nell'ugello non può più aumentare: si dice che l'ugello è *bloccato* (ingl. *choked*) o in *efflusso critico*; questo aspetto è chiarito dagli esempi seguenti.

La ragione di questo ultimo comportamento, apparentemente strano, può essere qualitativamente spiegata come segue. Le "informazioni" sulle variazioni di pressione a valle vengono trasmesse a monte del condotto sotto forma di perturbazioni elastiche, che risalgono il condotto alla velocità del suono. Se in un punto del condotto il fluido si muove alla velocità del suono, le perturbazioni non possono più risalire il condotto (analogamente ad una barca che non può risalire un fiume se non si muove a velocità maggiore di quella della corrente) e quindi il comportamento dell'ugello a monte di tale sezione diviene indipendente da tutto quello che accade a valle, e quindi anche dal valore della pressione all'uscita.

Le condizioni di efflusso critico si verificano nei reattori nucleari in caso di incidente, quando si rompe una tubazione collegata al recipiente in pressione: la portata che fuoriesce dipende solo dalla pressione a monte e dall'area della rottura.

ESEMPIO 4.13 – Ugello di De Laval

In un ugello di sezione $A_1 = 0.0001 \text{ m}^2$ entra vapore saturo secco a $T_1 = 550 \text{ °C}$ e $p_1 = 14 \text{ MPa}$ con una velocità iniziale $w_1 = 3 \text{ m/s}$. La pressione a valle è $p_2 = 1 \text{ MPa}$. Nell'ipotesi che il condotto sia adiabatico e la trasformazione sia reversibile, determinare l'andamento della sezione dell'ugello e l'andamento della velocità e del numero di Mach lungo di esso.

 *La soluzione è riportata nel file C4DELAVAL.XLS*

Le proprietà del vapore devono essere ricavate da tabelle o programmi, in questo caso faremo uso del software TPX per Excel.

La trasformazione è isoentropica, e assumeremo che lo stato del vapore in ogni sezione del condotto sia determinato dal valore dell'entropia (costante) e della pressione, che supponiamo di fare decrescere con passi arbitrari. Possiamo quindi ottenere i valori della densità e dell'entalpia in funzione della pressione in ogni punto del condotto, e quello della velocità dal bilancio di energia:

$$w = \sqrt{2 \left(h_1 + \frac{w_1^2}{2} - h \right)}$$

La sezione del condotto rimane quindi determinata dal bilancio di massa

$$A = \frac{G}{\rho w} = \frac{\rho_1 w_1 A_1}{\rho w}$$

Si vede dalla Fig. 14 che la velocità aumenta monotonicamente, mentre il raggio del condotto ha un minimo nel punto in cui si raggiunge la velocità del suono ($M = 1$) e torna poi a crescere: l'ugello supersonico deve infatti essere divergente.

E' da notare che non otteniamo alcuna informazione sulla lunghezza del condotto. Essa è determinata dalle regole di buona fluidodinamica, che prescrivono di non superare determinati valori della conicità per evitare eccessive irreversibilità: in genere si assume una conicità di $7^\circ - 15^\circ$ nel divergente e si assume la lunghezza del convergente circa $1/3$ di quella del divergente.

□

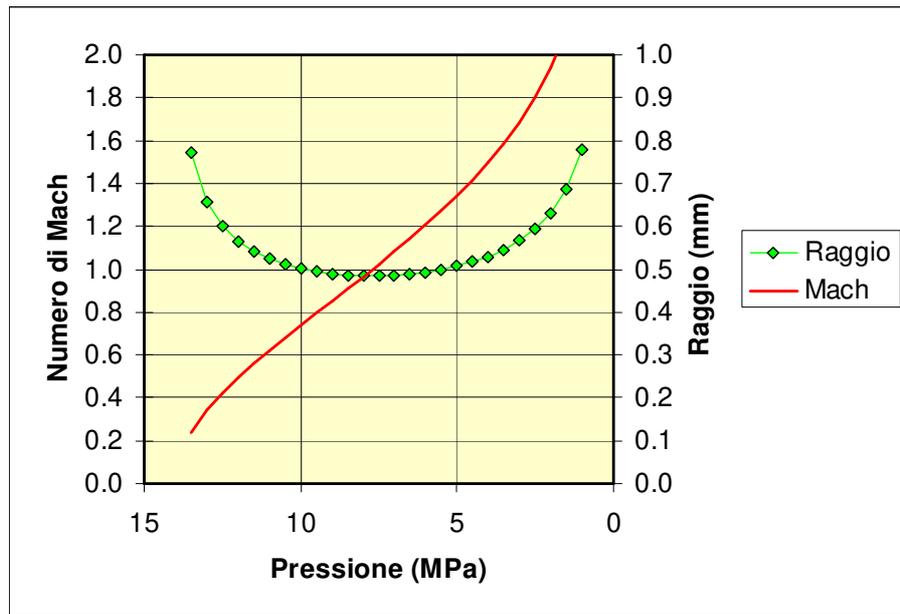


Figura 4.14. Andamento della sezione e del numero di Mach nell'ugello.

Andamento della pressione e della portata negli ugelli

Sulla base dei concetti esposti nei paragrafi precedenti, siamo ora in grado di fare un quadro generale sul comportamento degli ugelli, nel caso che sia imposta una determinata pressione in ingresso p_i e venga variata la pressione in uscita p_e . Supponiamo inoltre che il flusso in ingresso sia subsonico.

Cominciamo con il considerare il caso di un ugello convergente, rappresentato in Fig.15. Essendo il moto subsonico, in accordo con la equazione di Hugoniot (4.41) la velocità aumenta e quindi, in forza della Eq.(4.1-5) (App.4.1) la pressione diminuisce. L'andamento della pressione lungo l'ugello è rappresentato nel diagramma: quando la pressione in uscita raggiunge il valore della pressione critica nella sezione di uscita si raggiunge la velocità del suono e da quel valore in poi l'andamento di pressione lungo l'ugello non può variare, e la portata rimane bloccata al valore detto *portata critica*. Ogni ulteriore diminuzione della pressione di uscita non comporta nessuna variazione nè sull'andamento di pressione all'interno dell'ugello nè sulla portata che rimane fissata al valore critico: queste condizioni sono dette in di *blocco sonico* o in inglese *choked flow*. La pressione si adatta al valore imposto all'esterno dell'ugello con una espansione irreversibile al di fuori dell'ugello stesso.

Passiamo ora a considerare un condotto convergente-divergente nelle stesse condizioni di cui sopra, v. Fig.16. Via via che si riduce la pressione in uscita, il moto subsonico comporta una diminuzione di pressione nel convergente seguita da un aumento nel divergente. La pressione ha quindi un minimo nella gola dell'ugello: questo comportamento interamente subsonico è tipico del cosiddetto *ugello di Venturi*. Tale situazione permane finchè la pressione in uscita non si abbassa fino ad un valore tale che nella gola dell'ugello si raggiunge la pressione critica, a partire dalle quali si passa al comportamento da *ugello di De Laval*, in cui la pressione nel tratto convergente non varia più con il diminuire della pressione imposta in uscita. Nel tratto divergente sono possibili solo due tipi di evoluzione reversibile: una di carattere subsonico, con aumento di pressione, che porta la pressione di uscita al valore p_2 , e uno supersonico, nel

quale la pressione continua a diminuire fino al valore p_3 : il tipo di comportamento effettivamente seguito dipende dal valore della pressione imposta in uscita, e i valori di p_2 e p_3 dipendono dalla sezione di uscita dell'ugello. Ogni valore della pressione di uscita minore di p_2 e diverso da p_3 implica un comportamento irreversibile: per $p_u > p_3$ si creeranno delle onde di urto all'interno del divergente, con possibilità di ritorno ad un comportamento subsonico; per $p_u < p_3$ tali onde d'urto sono localizzate all'esterno dell'ugello. In ogni caso, nel comportamento da ugello di De Laval ($p_u < p_2$) la portata rimane bloccata al valore critico che non può essere superato, e corrisponde al raggiungimento delle condizioni soniche di velocità, pressione, temperatura e densità nella gola dell'ugello.

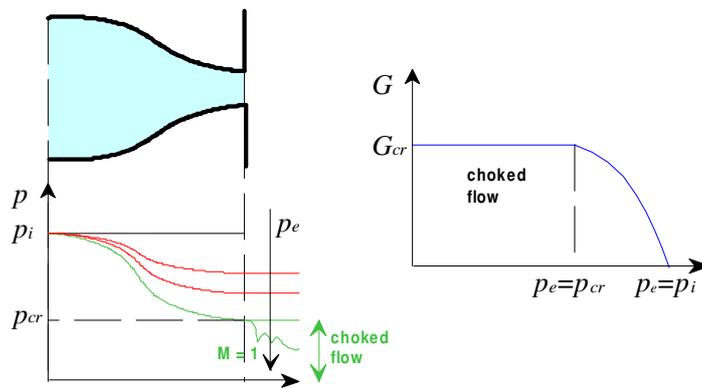


Figura 4.15. Comportamento di un ugello convergente, con pressione di ingresso imposta e moto subsonico all'ingresso.

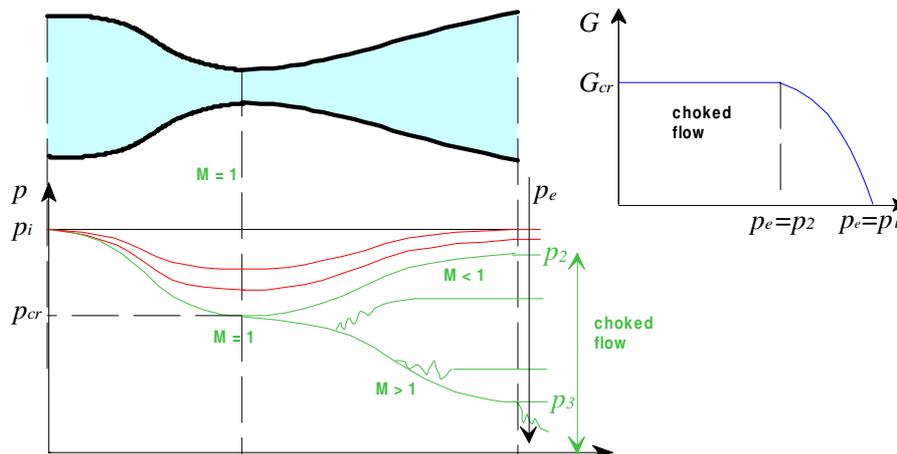


Figura 4.16. Comportamento di un ugello convergente-divergente, con pressione di ingresso imposta e moto subsonico all'ingresso.

Ugello percorso da un gas ideale

Consideriamo ora il caso in cui l'ugello sia percorso da un gas ideale con calore specifico costante. In questo caso le equazioni di bilancio possono essere espresse facilmente in funzione di temperatura e pressione, come riportato in dettaglio in App. 4.2. Riassumendo i risultati principali ivi riportati, indicando con il pedice 0 i valori delle grandezze di ristagno (ovvero quelli assunti in una sezione di ingresso molto grande, in cui si possa ritenere nulla trascurabile la velocità del fluido), si ha, indicando con l'apice * le grandezze critiche (ovvero i valori assunti quando $M = 1$), e col pedice 0 le condizioni di ristagno

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \tag{4.42}$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \tag{4.43}$$

$$G = \rho \bar{w} A = p_0 A M \sqrt{\frac{k}{RT_0} \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k+1}{2(1-k)}}} \tag{4.44}$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{k+1} + \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \tag{4.45}$$

Ed in particolare, per la portata critica, ponendo $M = 1$ nella (4.44)

$$G_{crit} = \frac{p_0 A^*}{\sqrt{RT_0}} \sqrt{k \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}} = C \frac{p_0 A^*}{\sqrt{RT_0}} \tag{4.46}$$

Dove la costante C dipende solo da k (in particolare, $C = 0.725$ per $k = 1.66$, $C = 0.685$ per $k = 1.4$, $C = 0.673$ per $k = 1.33$).

Dalla (4.46) si nota che la portata critica dipende solo dalla natura del gas e dalle condizioni a monte dell'ugello, ed in particolare è proporzionale alla pressione di ristagno.

ESEMPIO 4.14 – Ugello percorso da gas ideale

In un ugello entra aria (assimilabile ad un gas ideale con calore specifico costante) a $T_1 = 280$ K e $p_1 = 130$ kPa con una velocità iniziale trascurabile. La sezione di uscita è $A_2 = 0.0013$ m² e la pressione a valle è $p_2 = 1$ bar. Nell'ipotesi che il condotto sia adiabatico e la trasformazione sia reversibile, determinare la temperatura di uscita dell'aria e la portata nell'ugello. Determinare inoltre come varia la portata al decrescere della pressione a valle.

 La soluzione è riportata nel file **C4UGELLO.XLS**

Si può dimostrare, tramite la Eq. 4.1-7 dell'App.4.1, che in un gas ideale la velocità del suono è data da:

$$c = \sqrt{k R T}$$

Le condizioni di ingresso si possono considerare condizioni di ristagno, essendo la velocità trascurabile. La (4.42) e (4.43) danno il valore della temperatura e della pressione per un gas ideale che fluisce reversibilmente in un ugello, in funzione del numero di Mach, M

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{T_0}{T} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{k-1}{k}} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2$$

Dalle relazioni suddette, per $p = p_2 = 1$ bar, si ricavano i valori del numero di Mach e della temperatura in uscita

$$M_2^2 = \frac{2}{k-1} \left[\left(\frac{p_0}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] = \frac{2}{0.4} \left[\left(\frac{1.3}{1}\right)^{0.286} - 1 \right] = 0.390 \quad M_2 = 0.62$$

$$T_2 = T_0 \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} = 280 \cdot \left(\frac{1}{1.3}\right)^{0.286} = 259.7 \text{ K}$$

La velocità e la densità in uscita sono date rispettivamente dalla definizione di numero di Mach e dall'equazione di stato

$$w_2 = M_2 c = M_2 \sqrt{k R T_2} = 0.624 \cdot 323 = 202 \text{ m/s}$$

$$\rho_2 = \frac{1}{v_2} = \frac{p_2}{R T_2} = \frac{100000}{287 \cdot 259.7} = 1.341 \text{ kg/m}^3$$

da cui si ottiene la portata, che poteva anche essere ottenuta direttamente con la (4.44)

$$G = \rho_2 w_2 A_2 = 1.341 \cdot 201 \cdot 0.0013 = 0.35 \text{ kg/s}$$

Nel caso reale, non isoentropico, la portata sarebbe inferiore a causa delle irreversibilità.

Se si varia la pressione in uscita, le grandezze in gioco variano come riportato nella tabella di pagina successiva (ottenuta con l'applicazione Excel).

Si vede che la portata aumenta fin quando all'uscita dell'ugello non si raggiunge la velocità del suono. Quando questo avviene, la pressione raggiunge un valore p^* detto *pressione critica* (nonostante non abbia nulla a che vedere col valore della pressione della sostanza al punto critico, introdotto nel Cap.3). Il valore di p^* è ottenibile dalla relazione generale (4.43) ponendo $M = 1$:

$$p^* = p_1 \left(1 + \frac{k-1}{2}\right)^{\frac{k}{1-k}} = p_1 \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k}{1-k}}$$

e vale quindi $p^* = 0.53 p_1$ per $k = 1.4$ (esattamente, $p^* = 0.687$ bar nel nostro caso).

Successivamente, all'ulteriore decrescere della pressione in uscita, il numero di Mach nella gola dell'ugello (che coincide con la sezione di uscita 2) rimane fissato ad 1 e la portata rimane costante e *non è influenzata dal valore della pressione a valle*.

In altri termini, quando a valle di un ugello la pressione è inferiore a circa metà del valore della pressione a monte, l'ugello è in condizioni di efflusso sonico e la portata dipende solo dal valore della pressione a monte. In tali condizioni, bisogna assumere che nella sezione di uscita la pressione sia pari al valore della pressione p^* : la rimanente parte dell'espansione fino

ad 1 bar avviene irreversibilmente all'esterno dell'ugello, come specificato nell'analisi generale del paragrafo precedente.

p_{uscita}	p_{crit}	p_2	T_2	c_2	M	w_2	ρ_2	G
bar	bar	bar	K	m/s		m/s	kg/m ³	kg/s
1.3	0.687	1.300	280.00	335.416	0.000	0.000	1.618	0
1.25	0.687	1.250	276.88	333.542	0.237	79.173	1.573	0.161904
1.2	0.687	1.200	273.67	331.603	0.340	112.776	1.528	0.223993
1.15	0.687	1.150	270.36	329.593	0.422	139.153	1.482	0.268106
1.1	0.687	1.100	266.95	327.506	0.494	161.921	1.436	0.302223
1.05	0.687	1.050	263.42	325.337	0.561	182.481	1.389	0.329467
1	0.687	1.000	259.78	323.077	0.624	201.558	1.341	0.351446
0.95	0.687	0.950	256.00	320.719	0.685	219.586	1.293	0.369107
0.9	0.687	0.900	252.07	318.251	0.744	236.859	1.244	0.383057
0.85	0.687	0.850	247.99	315.663	0.803	253.585	1.194	0.393701
0.8	0.687	0.800	243.73	312.941	0.863	269.927	1.144	0.401313
0.75	0.687	0.750	239.28	310.069	0.922	286.019	1.092	0.40608
0.7	0.687	0.700	234.61	307.028	0.984	301.977	1.040	0.40812
0.65	0.687	0.687	233.33	306.192	1.000	306.192	1.026	0.408213
0.6	0.687	0.687	233.33	306.192	1.000	306.192	1.026	0.408213
0.55	0.687	0.687	233.33	306.192	1.000	306.192	1.026	0.408213
0.5	0.687	0.687	233.33	306.192	1.000	306.192	1.026	0.408213
0.45	0.687	0.687	233.33	306.192	1.000	306.192	1.026	0.408213
0.4	0.687	0.687	233.33	306.192	1.000	306.192	1.026	0.408213

□

ESEMPIO 4.15 – Portata critica in un ugello percorso da gas ideale

In un ugello convergente entra vapore surriscaldato a $T_1 = 800$ K e $p_1 = 4$ MPa, con velocità trascurabile. La sezione di uscita è $A_2 = 0.002$ m². Nell'ipotesi che la trasformazione sia adiabatica e reversibile ed il vapore sia assimilabile ad un gas ideale con calore specifico costante ($k = 1.33$, $R = 461.7$ J/kg K) determinare la portata in condizioni di blocco sonico e il valore massimo della pressione a valle per cui tale condizione si instaura.

Nelle ipotesi considerate, la portata critica è data dalla Eq.(4.46)

$$G_{crit} = \frac{p_0 A^*}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{k}{R} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}} = 8.85 \text{ kg/s}$$

e tale condizione si instaura quando la pressione a valle è minore della pressione critica, Eq.(4.43) con $M = 1$

$$p^* = p_0 \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k}{1-k}} = 2.16 \text{ MPa}$$

□

ESEMPIO 4.16 – Comportamento subsonico e supersonico di un ugello percorso da gas ideale

In un ugello convergente-divergente entra vapore surriscaldato a $T_1 = 800$ K e $p_1 = 4$ MPa, con velocità trascurabile. L'area della sezione di gola è $A^* = 0.01$ m² mentre la sezione di uscita ha area $A_2 = 2 A^*$. Nell'ipotesi che la trasformazione sia adiabatica e reversibile ed il vapore sia assimilabile ad un gas ideale con calore specifico costante ($k = 1.33$, $R = 461.7$ J/kg K) determinare la portata in condizioni di blocco sonico e il valore della pressione e temperatura in uscita nel caso di comportamento da ugello di Venturi ($M_2 < 1$) e ugello di De Laval ($M_2 > 1$).

Nelle ipotesi considerate, la portata critica è data dalla Eq.(4.46)

$$G_{crit} = \frac{p_0 A^*}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{k}{R} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}} = 44.25 \text{ kg/s}$$

Tale valore è indipendente dal valore della pressione a valle. La pressione critica nella gola dell'ugello è determinabile tramite la Eq.(4.43) con $M = 1$

$$p^* = p_0 \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k}{1-k}} = 2.16 \text{ MPa}$$

Dall'equazione (4.45) (o dalla Tabella 1 dell'Appendice 4.2) risulta che per $k = 1.33$ e $A/A^* = 2$ le soluzioni possibili per il numero di Mach sono circa 0.31 e 2.15

Nella prima condizione (subsonica, $M_2 = 0.31$) la pressione e temperatura di uscita sono determinabili tramite le Eq. (4.43) e (4.42) e valgono rispettivamente

$$p_2 = p_0 \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k}{1-k}} = 3.75 \text{ MPa}$$

$$T_2 = T_0 \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} = 393 \text{ K}$$

Mentre per $M_2 = 2.15$ (condizione supersonica) si ha

$$p_2 = p_0 \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k}{1-k}} = 0.41 \text{ MPa}$$

$$T_2 = T_0 \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} = 226 \text{ K}$$

In tutte le altre condizioni di pressione di uscita, avverrà una espansione irreversibile all'interno o all'esterno dell'ugello. Non è detto che il fluido segua ancora il comportamento di gas ideale nelle condizioni in uscita.

□

Ugello reale. Rendimento isoentropico dell'ugello

Nel caso reale, la trasformazione nell'ugello non è isoentropica e si potrebbe dimostrare (ma ci accontentiamo della intuizione) che questo comporta una diminuzione della velocità di uscita dall'ugello. Si può pertanto definire il rendimento isoentropico dell'ugello come il

rapporto tra l'energia cinetica effettiva del gas in uscita e quella del corrispondente processo isoentropico

$$\eta_{s,ug} = \frac{w_{eff}^2}{w_{isoentr.}^2} \approx \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2i}} \quad (4.47)$$

dove la seconda espressione (analoga a quella per una turbina) vale solo nel caso che la velocità in ingresso all'ugello sia trascurabile.

BIBLIOGRAFIA

- Mastrullo, Mazzei, Vanoli, Termodinamica per Ingegneri, Liguori, Cap. 1.
- Cesini, Latini, Polonara, Fisica Tecnica, Città Studi, Cap.8.
- Moran, Shapiro, Munson, DeWitt, Elementi di Fisica Tecnica per l'Ingegneria, McGraw-Hill, cap.12 (per ugelli e diffusori).

APPENDICE 4.1 – Il moto isoentropico nei condotti a sezione variabile

In questa appendice ci si propone di studiare genericamente il moto del fluido in un condotto a sezione variabile (ugello o diffusore). Il condotto viene supposto orizzontale, rigido ed adiabatico e la trasformazione del fluido reversibile. I bilanci di massa, energia ed entropia sono dunque

$$\begin{cases} G_1 = G_2 = G \\ G (h_2 + e_{c2} - h_1 - e_{c1}) = 0 \Rightarrow h_2 - h_1 = e_{c1} - e_{c2} = \frac{w_1^2}{2} - \frac{w_2^2}{2} \\ G (s_2 - s_1) = 0 \end{cases} \quad (4.1-1)$$

e possono essere riformulati come

$$\begin{cases} G = \rho w A = cost \\ h + \frac{w^2}{2} = h_0 = cost \\ s = cost \end{cases} \quad (4.1-2)$$

Dove con w , h , s sono i valori di velocità, entalpia ed entropia in una sezione generica del condotto e h_0 è detta *entalpia di ristagno* e rappresenta l'entalpia che il fluido assume se viene portato in condizioni di velocità nulla senza scambi energetici con l'esterno.

Si noti che abbiamo implicitamente assunto che il moto sia *unidimensionale*, ovvero che i valori di w , h , s siano uniformi in ogni sezione del condotto.

Differenziando la seconda delle precedenti equazioni si ha

$$dh = -w dw \quad (4.1-3)$$

Questa equazione indica (come è ovvio) che la velocità aumenta a spese dell'entalpia e viceversa. Dal bilancio entropico, tenendo conto della seconda equazione di Gibbs, si ha

$$T ds = dh - \frac{dp}{\rho} = 0 \Rightarrow dh = \frac{dp}{\rho} \quad (4.1-4)$$

La quale indica che le variazioni di entalpia e di pressione hanno lo stesso segno.

Eliminando l'entalpia dalle due equazioni precedenti, si ottiene

$$-w dw = \frac{dp}{\rho} \quad (4.1-5)$$

E' ancora necessario eliminare la pressione dalla relazione precedente, e questo si può fare esprimendo la medesima in funzione della densità e dell'entropia

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho ds \quad (4.1-6)$$

il secondo termine è ovviamente nullo per una trasformazione isoentropica, mentre si può dimostrare che il primo coefficiente

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = c^2 \quad (4.1-7)$$

rappresenta il quadrato della velocità di propagazione delle perturbazioni elastiche nel mezzo, ovvero la *velocità del suono*.

In definitiva si ottiene

$$-w dw = c^2 \frac{d\rho}{\rho} \quad (4.1-8)$$

che mostra che le variazioni di velocità e di densità lungo l'ugello hanno segno opposto.

Abbiamo infine bisogno di legare le variazioni di sezione dell'ugello a quelle di velocità, ed a tal fine esprimiamo anche il bilancio di massa in termini differenziali

$$\begin{aligned} dG = 0 &\Rightarrow d(\rho w A) = 0 \\ \rho w dA + \rho A dw + w A d\rho &= 0 \end{aligned} \quad (4.1-9)$$

e dividendo quest'ultima per G

$$\frac{dA}{A} + \frac{dw}{w} + \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (4.1-10)$$

Non rimane che eliminare la densità ρ dalle Eq. 4.1-8 e 4.1-10 per ottenere

$$\frac{dA}{A} = -\frac{dw}{w} \left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right) = -\frac{dw}{w} (1 - M^2) \quad (4.1-11)$$

La relazione suddetta è detta *equazione di Hugoniot* (da P. Hugoniot, fisico francese, 1851-1887). Il termine w/c viene detto *numero di Mach*, M , (da E. Mach, fisico austriaco, 1838-1916) e rappresenta il rapporto tra la velocità del fluido e la velocità del suono nel fluido stesso; quest'ultima dipende dalla natura del fluido e dal suo stato termodinamico. Bisogna notare anche che queste equazioni sono valide in generale e nessuna ipotesi particolare è stata fatta sulla natura del fluido che scorre nel condotto.

La velocità del suono è esprimibile in funzione dei coefficienti termodinamici come

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} = \sqrt{\frac{1}{\kappa/v - \beta^2 T/c_p}} \quad (4.1-12)$$

nel caso di gas ideale, la relazione precedente si semplifica in

$$c = \sqrt{k R T} \quad (4.1-13)$$

Notare che dalla 1-12 discende che la velocità del suono è infinita per un fluido incompressibile, per il quale si ha $\kappa = \beta = 0$.

Si faccia attenzione a non confondere $\kappa = -1/v(\partial v/\partial p)_T$ con $k = c_p/c_v$.

APPENDICE 4.2 – Moto isoentropico dei gas ideali. Valori critici di temperatura, pressione e portata

La Eq. 4.1-13 dell'App.4.1, mostra che in un gas ideale la velocità del suono è data da:

$$c = \sqrt{k R T} \quad (4.2-1)$$

Dal bilancio di energia per il moto in un condotto rigido a sezione variabile in cui la velocità di ingresso sia trascurabile abbiamo che la velocità e l'entalpia sono legate da

$$h_1 = h + \frac{w^2}{2} \quad (4.2-2)$$

Conseguentemente, per un gas ideale, sfruttando la relazione $c_p = kR / (k - 1)$, la temperatura in una sezione generica è data da

$$T_0 = T + \frac{w^2}{2c_p} = T + \frac{w^2}{2 \frac{kR}{k-1}} \quad (4.2-3)$$

Sfruttando l'espressione della velocità del suono, Eq.(4.2.1), si ottiene

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \quad (4.2-4)$$

Dove $M = w/c$ è il numero di Mach. La relazione suddetta deriva unicamente da considerazioni energetiche, ed è valida solo per un gas ideale. Per una trasformazione adiabatica e reversibile possiamo considerare il moto isoentropico e si ha in aggiunta

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (4.2-5)$$

E' da notare che anche nel caso in cui la velocità iniziale nel condotto sia non trascurabile, ma pari a w_1 , le suddette equazioni rimangono comunque valide usando in luogo di p_0 e T_0 i valori di ristagno di temperatura e pressione, p_0 e T_0 , che, per un gas ideale, valgono rispettivamente

$$T_0 = T_1 + \frac{w_1^2}{2c_p}, \quad p_0 = p_1 \left(\frac{T_0}{T_1} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

Al decrescere della pressione in uscita al condotto, la velocità e quindi la portata di fluido in esso aumentano, come indicato nell'esempio 4.14. In accordo con la equazione di Hugoniot (Eq.4.1-11), la velocità del suono si può raggiungere solo laddove la sezione del condotto presenta un minimo. In corrispondenza, la pressione assume un valore p^* detto *pressione critica* (nonostante non abbia nulla a che vedere col valore della pressione della sostanza al punto critico, introdotto nel Cap.3). Il valore di p^* è ottenibile dalla relazione generale Eq.(4.2-5) ponendo $M = 1$:

$$p^* = p_0 \left(1 + \frac{k-1}{2}\right)^{\frac{k}{1-k}} = p_0 \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k}{1-k}} \quad (4.2-6)$$

e vale quindi circa $p^* = 0.53 p_0$ per $k = 1.4$.

Corrispondentemente, la *temperatura critica* (che, nuovamente, non ha nulla a che vedere con la temperatura del punto critico) T^* vale, ponendo $M=1$ nella Eq.(4.2-5)

$$T^* = T_0 \frac{2}{k+1} \quad (4.2-7)$$

La portata in una sezione generica del condotto è data da:

$$G = \rho \bar{w} A = \frac{P}{RT} \bar{w} A \quad (4.2-8)$$

E facendovi comparire le condizioni di ristagno, p_0 e T_0 , sfruttando la (4.2-4 e 4.2-5), con un po' di lavoro di algebra si ottiene:

$$\begin{aligned} G &= \rho \bar{w} A = \frac{P}{RT} \bar{w} A \frac{\sqrt{kT_0}}{\sqrt{kT_0}} = p A \frac{\bar{w}}{\sqrt{kRT}} \sqrt{\frac{k}{R}} \sqrt{\frac{1}{T_0}} \sqrt{\frac{T_0}{T}} \\ &= \frac{p_0 A}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k}{k-1}}} M \sqrt{\frac{k}{RT_0}} \sqrt{1 + \frac{k-1}{2} M^2} = \boxed{p_0 A M \sqrt{\frac{k}{RT_0}} \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k+1}{2(1-k)}}} \quad (4.2-9) \end{aligned}$$

Il valore della portata massima, detta anche *portata critica*, è ottenibile facilmente sostituendo $M=1$ nella relazione precedente

$$G_{crit} = p_0 A^* \sqrt{\frac{k}{RT_0}} \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k+1}{2(1-k)}} \quad (4.2-10)$$

dove A^* rappresenta l'area della gola dell'ugello. All'ulteriore decrescere della pressione in uscita, il numero di Mach nella gola del condotto rimane fissato ad 1, e la portata rimane quindi costante. Il moto del fluido evolve quindi in maniera supersonica nella parte posteriore del condotto, o, se questo non è possibile, hanno luogo delle irreversibilità che rendono il presente modello isoentropico non applicabile.

Combinando la 4.2-9 e la 4.2-8 (ponendovi $G = G_{crit}$) è possibile a questo punto ottenere una relazione tra la sezione generica dell'ugello A e la sezione di gola A^* , *per un ugello in condizioni soniche*

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{k+1} + \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right) \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (4.2-11)$$

La 4.2.11 può essere tabulata per ogni valore di k , oppure messa in grafico, come riportato sotto.  [vedi anche il file C4ugello-rapparee.xlsx](#)

kappa = 1.400			kappa = 1.660			kappa = 1.330			
ρ_{crit}/ρ_0	0.528				0.488		ρ_{crit}/ρ_0	0.540	
T_{crit}/T_0	0.833				0.752		T_{crit}/T_0	0.858	
G_{crit}^* $(R^*T_0)^{0.5}/$ (A^*p_0)	0.685				0.725			0.673	
Mach	A/A*	T/T0	p/p0	A/A*	T/T0	p/p0	A/A*	T/T0	p/p0
0.10	5.8218	0.9980	0.9930	5.6664	0.9967	0.9917	5.8665	0.9984	0.9934
0.15	3.9103	0.9955	0.9844	3.8089	0.9926	0.9816	3.9395	0.9963	0.9852
0.20	2.9635	0.9921	0.9725	2.8898	0.9870	0.9676	2.9847	0.9934	0.9738
0.25	2.4027	0.9877	0.9575	2.3461	0.9798	0.9499	2.4190	0.9898	0.9595
0.30	2.0351	0.9823	0.9395	1.9903	0.9712	0.9290	2.0480	0.9854	0.9423
0.50	1.3398	0.9524	0.8430	1.3208	0.9238	0.8192	1.3454	0.9604	0.8497
0.60	1.1882	0.9328	0.7840	1.1763	0.8938	0.7540	1.1917	0.9439	0.7925
0.70	1.0944	0.9107	0.7209	1.0877	0.8608	0.6859	1.0964	0.9252	0.7310
0.80	1.0382	0.8865	0.6560	1.0352	0.8256	0.6176	1.0391	0.9045	0.6672
0.90	1.0089	0.8606	0.5913	1.0081	0.7891	0.5511	1.0091	0.8821	0.6032
1.00	1.0000	0.8333	0.5283	1.0000	0.7519	0.4881	1.0000	0.8584	0.5404
1.10	1.0079	0.8052	0.4684	1.0071	0.7146	0.4295	1.0082	0.8336	0.4802
1.20	1.0304	0.7764	0.4124	1.0268	0.6779	0.3761	1.0316	0.8080	0.4235
1.30	1.0663	0.7474	0.3609	1.0577	0.6420	0.3280	1.0691	0.7820	0.3711
1.40	1.1149	0.7184	0.3142	1.0986	0.6072	0.2852	1.1203	0.7556	0.3233
1.50	1.1762	0.6897	0.2724	1.1490	0.5739	0.2474	1.1853	0.7293	0.2801
1.60	1.2502	0.6614	0.2353	1.2084	0.5421	0.2143	1.2646	0.7030	0.2417
1.70	1.3376	0.6337	0.2026	1.2767	0.5118	0.1855	1.3590	0.6771	0.2077
1.80	1.4390	0.6068	0.1740	1.3537	0.4833	0.1606	1.4696	0.6516	0.1780
1.90	1.5553	0.5807	0.1492	1.4396	0.4564	0.1390	1.5978	0.6267	0.1521
2.00	1.6875	0.5556	0.1278	1.5343	0.4310	0.1204	1.7453	0.6024	0.1297
2.10	1.8369	0.5313	0.1094	1.6380	0.4073	0.1044	1.9139	0.5788	0.1104
2.20	2.0050	0.5081	0.0935	1.7510	0.3850	0.0907	2.1058	0.5560	0.0939
2.30	2.1931	0.4859	0.0800	1.8735	0.3642	0.0788	2.3235	0.5339	0.0797
2.40	2.4031	0.4647	0.0684	2.0056	0.3447	0.0687	2.5696	0.5127	0.0677
2.50	2.6367	0.4444	0.0585	2.1478	0.3265	0.0599	2.8471	0.4923	0.0575
2.60	2.8960	0.4252	0.0501	2.3003	0.3095	0.0524	3.1594	0.4727	0.0488
2.70	3.1830	0.4068	0.0430	2.4634	0.2936	0.0459	3.5102	0.4540	0.0415
2.80	3.5001	0.3894	0.0368	2.6374	0.2788	0.0402	3.9033	0.4360	0.0352
2.90	3.8498	0.3729	0.0317	2.8227	0.2649	0.0354	4.3431	0.4188	0.0300
3.00	4.2346	0.3571	0.0272	3.0196	0.2519	0.0312	4.8345	0.4024	0.0255
3.10	4.6573	0.3422	0.0234	3.2285	0.2397	0.0275	5.3825	0.3867	0.0217

Tabella 4.2-1. Valori di A/A^* , T/T_0 e p/p_0 in funzione del numero di Mach per gas ideale, per alcuni valori di k .

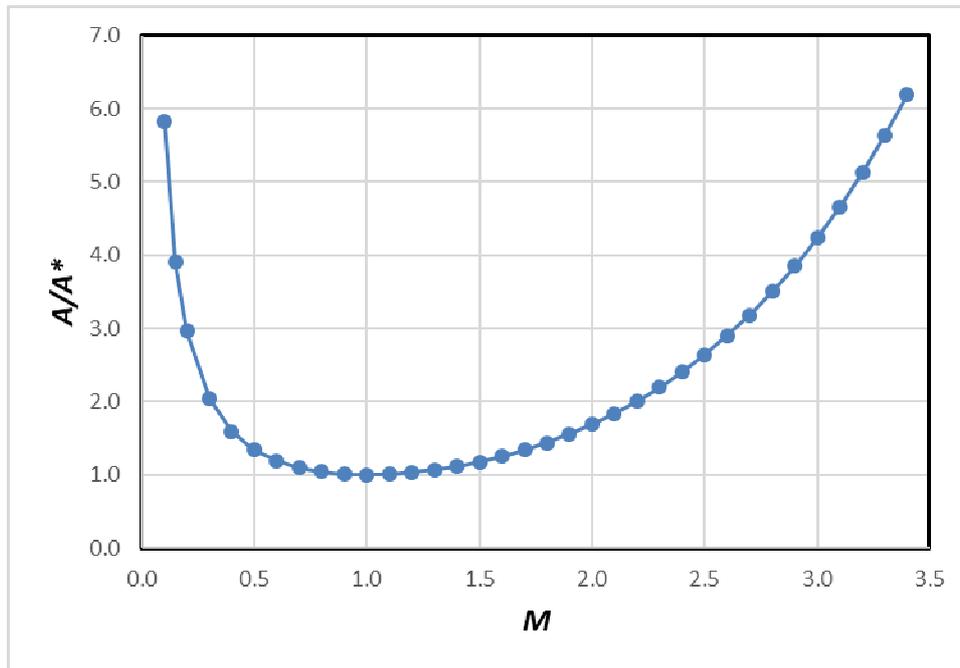


Figura 4.2-1 Valori di A/A^* in funzione del numero di Mach per $k = 1.4$.

Si vede chiaramente che, *in condizioni soniche*, per ogni valore di A/A^* esistono due valori possibili del numero di Mach M , corrispondenti rispettivamente alle condizioni subsoniche e supersoniche; il grafico ha ovviamente un minimo per $M=1$, $A/A^*=1$, corrispondente alla sezione di gola dell'ugello.

Infine, dalla (4.2-10), si ha che per il caso più frequente di un gas biatomico ($k = 1.4$)

$$G_{crit} = 0.685 \frac{p_0 A^*}{\sqrt{RT_0}} \quad (4.2-12)$$

Per concludere, è bene ribadire ancora una volta che le relazioni introdotte in questa appendice sono valide *unicamente per un gas ideale*.

ESERCIZI

ESERCIZIO 4.1

Una tubazione è percorsa da una portata $G = 0.5 \text{ kg/s}$ di azoto che entra alla temperatura di $T_1 = 700 \text{ °C}$ ed esce a $T_2 = 60 \text{ °C}$. Determinare la potenza termica scambiata.

[$W_t = -332.6 \text{ kW}$]

ESERCIZIO 4.2

In una linea ad alta pressione scorre vapor d'acqua saturo a $p_1 = 30 \text{ bar}$. Per misurarne il titolo, si lamina una piccola quantità di vapore attraverso una valvola. Al termine dell'espansione (che può essere considerata isoentalpica) il vapore si trova a $p_2 = 1 \text{ bar}$ e $T = 137 \text{ °C}$. Determinare il titolo del vapore nella linea.

[$x = 0.97$ ($h = 2750.5 \text{ kJ/kg}$)]

ESERCIZIO 4.3

In una linea ad alta pressione scorre vapor d'acqua saturo a $p = 30 \text{ bar}$. Per misurarne il titolo, si spilla una piccola quantità di vapore attraverso una valvola, lo si lamina fino alla pressione di 1 bar e lo si mescola adiabaticamente con una portata $G_a = 3 \text{ kg/s}$ di acqua a 20 °C . All'uscita del recipiente, si misura una portata totale $G_u = 3.05 \text{ kg/s}$ di acqua alla pressione di 1 bar ed alla temperatura di 29.6 °C . Determinare la portata di vapore spillato ed il titolo del vapore nella linea.

Suggerimento: il recipiente in questione è un sistema aperto a regime, adiabatico, rigido, con due ingressi ed una sola uscita.

[$G_v = 0.05 \text{ kg/s}$; $x = 0.855$ ($h_v = 2544 \text{ kJ/kg}$)]

ESERCIZIO 4.4 (adatto alla soluzione tramite calcolatore)

Con riferimento ai due esercizi precedenti, si riporti in un grafico la relazione tra il titolo del vapore e la temperatura del vapore stesso dopo la laminazione e tra il titolo del vapore e la temperatura dell'acqua dopo il mescolamento, nel campo $x = 0.8 - 1$. Si valuti quale dei due metodi di misura è più accurato.

ESERCIZIO 4.5

Una turbina a vapore in regime stazionario ha le seguenti caratteristiche:

Portata di vapore $G = 0.3 \text{ kg/s}$, temperatura all'ingresso $T_1 = 500 \text{ °C}$, pressione all'ingresso $p_1 = 40 \text{ bar}$, pressione all'uscita $p_2 = 0.1 \text{ MPa}$. Nell'ipotesi di poter considerare la turbina adiabatica ed il processo reversibile, calcolare la potenza meccanica erogata e determinare le condizioni (temperatura e/o titolo) del vapore in uscita.

[$W = 261 \text{ kW}$, $T_2 = 99.6 \text{ °C}$, $x_2 = 0.956$]

ESERCIZIO 4.6

Un compressore a regime stazionario (che si può considerare adiabatico) comprime 0.4 kg/s di azoto da pressione e temperatura ambiente ($p_1 = 0.1 \text{ MPa}$, $T_1 = 20 \text{ °C}$) alla pressione $p_2 = 20 \text{ bar}$. Se il processo si può considerare reversibile, calcolare la temperatura di uscita dell'azoto e la potenza di pompaggio. Ripetere il calcolo della potenza nel caso di compressione isoterma.

Dati: considerare l'azoto come un gas ideale con $R = 296.8 \text{ J/kg K}$, $k = 1.41$. [$T_2 = 700 \text{ K}$, $W_{ad} = -165 \text{ kW}$; $W_{isot} = -104 \text{ kW}$]

ESERCIZIO 4.7

Con riferimento all'esercizio precedente, se l'azoto esce dal compressore alla temperatura $T_2 = 550 \text{ }^\circ\text{C}$ e mantenendo l'ipotesi di processo adiabatico, giustificare il fatto che il processo è in questo caso irreversibile e calcolare la potenza di pompaggio ed il rendimento isoentropico di compressione. Tutti gli altri dati sono uguali a quelli dell'esercizio precedente.

[$W = 216 \text{ kW}$, $\eta_c = 0.76$. La trasformazione è irreversibile in quanto adiabatica e con $\Delta s = 166 \text{ J/kg K} > 0$.]

ESERCIZIO 4.8

Un compressore a regime stazionario comprime 0.4 kg/s di azoto da pressione e temperatura ambiente ($p_1 = 0.1 \text{ Mpa}$, $T_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$) alla pressione $p_2 = 20 \text{ bar}$. Si effettua la compressione in due stadi con refrigerazione intermedia fino alla temperatura iniziale. Ipotizzando che le due compressioni siano adiabatiche e reversibili, determinare il rapporto ottimale di compressione in ciascuno dei due stadi, la potenza assorbita, la temperatura di uscita dell'azoto.

Dati: considerare l'azoto come un gas ideale con $R = 296.8 \text{ J/kg K}$, $k = 1.41$.

[$r_{p1} = r_{p2} = 4.472$; $W = -130 \text{ kW}$; $T_2 = 453 \text{ K}$]

ESERCIZIO 4.9 (adatto alla soluzione tramite calcolatore)

Con riferimento all'esercizio precedente, tracciare il grafico della potenza richiesta per la compressione in funzione del rapporto di compressione del primo stadio. Ripetere i calcoli nell'ipotesi (più realistica) che il refrigeratore intermedio abbia un'efficienza del 75% (questo vuol dire che, dette T' e T'' le temperature all'ingresso e all'uscita del refrigeratore intermedio, $T'' - T' = 0.75 (T' - T_1)$).

ESERCIZIO 4.10

Uno scambiatore di calore è costituito da due tubi coassiali. Nel tubo interno scorre una portata $G_1 = 0.2 \text{ kg/s}$ di gas ($c_{p1} = 1100 \text{ J/kg}$) alla temperatura di ingresso di $T_{1i} = 500 \text{ }^\circ\text{C}$, nel tubo esterno (mantello) scorre una portata $G_2 = 0.5 \text{ kg/s}$ di acqua ($c_{p2} = 4180 \text{ J/kg}$) alla temperatura di ingresso $T_{2i} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ e a quella di uscita $T_{2u} = 26 \text{ }^\circ\text{C}$. Determinare la temperatura in uscita del gas.

[$T_{1u} = 440 \text{ }^\circ\text{C}$]

ESERCIZIO 4.11

Una portata $G = 1.5 \text{ kg/s}$ di vapore uscente da una caldaia alla temperatura $T_1 = 570 \text{ }^\circ\text{C}$ e alla pressione $p_1 = 160 \text{ bar}$ si espande adiabaticamente e reversibilmente in una turbina fino alla pressione $p_2 = 1 \text{ bar}$.

- Determinare la potenza meccanica ottenuta ed il titolo in uscita.
- Ripetere il calcolo nel caso di un rendimento isoentropico di espansione pari a 0.75. Determinare inoltre la variazione di entropia nella turbina.

[a) $W_{mI} = 1.68 \text{ MW}$, $x_{2I} = 0.8657$; b) $W_{mR} = 1.26 \text{ MW}$, $x_{2R} = 0.99$, $\Delta s = 0.75 \text{ kJ/kg K}$]

ESERCIZIO 4.12

I gas combust ($c_p = 1.11 \text{ kJ/kg K}$, $k = 1.33$) provenienti dalla camera di combustione vengono immessi in una turbina a gas con una velocità c_3 di 10 m/s alla pressione $p_3 = 8 \text{ bar}$ ed alla temperatura $T_3 = 850 \text{ }^\circ\text{C}$; i gas vengono scaricati dalla turbina alla pressione $p_4 = 1.1 \text{ bar}$ ed alla velocità $c_4 = 50 \text{ m/s}$. Supponendo l'espansione adiabatica reversibile, determinare il lavoro ottenuto per ogni kg di gas.

[$l' = 481.78 \text{ kJ/kg}$]

ESERCIZIO 4.13

In uno scambiatore di calore si deve raffreddare una portata $G = 2 \text{ kg/s}$ di ammoniaca a $p_1 = 14 \text{ bar}$, $x_1 = 0.9$ fino alla pressione $p_2 = 10 \text{ bar}$ ed alla temperatura di $T_2 = 20 \text{ °C}$. Determinare:

- la potenza termica necessaria;
- la portata di acqua lato secondario necessaria, se è richiesto che quest'ultima non subisca un riscaldamento tra ingresso ed uscita superiore a 5 K (assumere per l'acqua $c_p = c_{ost} = 4180 \text{ J/kg K}$).

[a] $W_t = 2.17 \text{ MW}$, $G = 104 \text{ kg/s}$]

ESERCIZIO 4.14

Una tubazione lunga 50 m di acciaio al carbonio e diametro esterno $D_e = 89 \text{ mm}$, spessore $s = 5 \text{ mm}$, non coibentata, trasporta una portata $G = 4 \text{ kg/s}$ di vapore saturo, alla pressione di 10 Mpa , che all'ingresso ha titolo pari $x_i = 1$. Noti il coefficiente di scambio globale $u = 20 \text{ W/m}^2 \text{ K}$, e la temperatura dell'aria esterna $t_a = 20 \text{ °C}$, valutare:

- Le perdite di calore per unità di tempo dalla tubazione;
- Il titolo del vapore all'uscita della tubazione.

Si possono trascurare le variazioni di pressione del vapore dovute alle perdite di carico lungo la tubazione.

[a] $Q = 80 \text{ kW}$, b) $x = 0.985$]

ESERCIZIO 4.15

Del vapore entra in turbina alla pressione $p_3 = 40 \text{ bar}$ e con un valore dell'entropia $s_3 = 6,8876 \text{ kJ/kg K}$ e dopo un'espansione adiabatica esce dalla macchina alla pressione $p_4 = 0.05 \text{ bar}$ e con titolo $x_4 = 0.90$.

Stabilire se in seguito all'espansione, si è ottenuto il massimo lavoro possibile e, in caso contrario, valutare il rendimento adiabatico della turbina.

ESERCIZIO 4.16

Una pompa riceve all'ingresso una portata $G = 0.5 \text{ kg/s}$ di acqua come liquido saturo a 27.0 °C ; all'uscita si misura una pressione di 7 Mpa . Considerando l'acqua un fluido incomprimibile con densità $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ e $c = 4187 \text{ J/kg K}$, si determini:

- la potenza meccanica per unità di portata nell'ipotesi di processo adiabatico reversibile;
- la potenza e l'incremento di temperatura corrispondente ad un rendimento di compressione del 60% .

[a] $W_{m,id} = 3.5 \text{ kW}$, b) $W_{m,R} = 5.83 \text{ kW}$, $\Delta T = 1.1 \text{ K}$]

ESERCIZIO 4.17

Una caldaia deve produrre una portata $G = 50 \text{ t/h}$ di vapore saturo secco alla pressione di 20 bar . L'acqua viene introdotta alla pressione di 20 bar ed alla temperatura di 20 °C . Determinare la potenza termica richiesta.

[$W_t = 37.7 \text{ MW}$]

ESERCIZIO 4.18

Per un compressore si conoscono i seguenti dati:

- fluido: aria (considerato gas ideale con calore specifico costante);
- condizione di ingresso: $T_1 = 16 \text{ °C}$, $p_1 = 1.00 \text{ bar}$;
- condizione di uscita: $p_2 = 4.00 \text{ bar}$
- rendimento isoentropico: 0.650

- variazioni di energia potenziale e cinetica trascurabili;
- sistema adiabatico;
- portata di fluido $G = 0.03 \text{ kg/s}$

Calcolare il lavoro e la potenza di compressione, e la temperatura di uscita.

$$[l' = -218 \text{ J/kg}, W'_m = -6.55 \text{ kW}, T_{2R} = 505 \text{ K}]$$

ESERCIZIO 4.19

In un compressore (sistema aperto a regime) si comprime una portata volumetrica (valutata all'ingresso) $Q = 50 \text{ m}^3/\text{h}$ di azoto ($R = 296.8 \text{ J/kg K}$, $k = c_p / c_v = 1.4$, che si può considerare un gas perfetto con c_p costante) a partire dalle seguenti condizioni iniziali: $p_1 = 100 \text{ kPa}$, $T_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, fino alla pressione finale $p_2 = 620 \text{ kPa}$. Le variazioni di energia cinetica e potenziale sono trascurabili.

Valutare la potenza di compressione, la temperatura finale del gas, la potenza termica scambiata con l'ambiente e la portata volumetrica in uscita nel caso di compressione adiabatica reversibile in due stadi con rapporto ottimale di compressione e refrigerazione intermedia fino alla temperatura iniziale.

Tracciare inoltre le trasformazioni sul diagramma T - s (assumere entropia nulla per $T = 200 \text{ K}$, $p = 1000 \text{ kPa}$).

$$[W'_m = -2.9 \text{ kW}, T_2 = 380 \text{ K}, W'_T = -1.44 \text{ kW}, G_{v2} = 10.3 \text{ m}^3/\text{h}]$$

ESERCIZIO 4.20

Una portata $G = 0.2 \text{ kg/s}$ di vapore d'acqua entra in una turbina alla pressione di 45 bar ed alla temperatura di $750 \text{ }^\circ\text{C}$. Il rapporto tra le pressioni di ingresso e di uscita è pari a 10. Il rendimento isoentropico vale 0.85; determinare:

- il lavoro specifico e la potenza ottenuti
- la temperatura finale
- l'entropia specifica finale.

$$[a) l' = 710 \text{ kJ/kg}, W'_m = 142 \text{ kW}, b) T_2 = 418 \text{ }^\circ\text{C}, c) s_2 = 7,90 \text{ kJ/kg K}]$$

ESERCIZIO 4.21

In uno scambiatore di calore il fluido freddo è acqua che entra a $15 \text{ }^\circ\text{C}$ ed esce a $25 \text{ }^\circ\text{C}$, mentre il fluido caldo è R134a, che entra a 14 bar e $80 \text{ }^\circ\text{C}$ ed esce in condizioni di liquido saturo a $52 \text{ }^\circ\text{C}$. La portata massica dell'R134a è $5,0 \text{ kg/min}$.

Si determini:

- la portata massica dell'acqua;
- la generazione di entropia.

$$[a) 0.363 \text{ kg/s}, b) 5.46 \text{ W/K}]$$

ESERCIZIO 4.22

Una portata $G_R = 10 \text{ kg/min}$ di R134 in fase di vapore saturo secco a 10 bar, entra in uno scambiatore di calore in cui si raffredda e condensa fino alla condizione di liquido saturo a 10 bar. La potenza termica è trasferita ad una portata di aria $G_a = 80 \text{ kg/min}$ ($c_p = 1.01 \text{ kJ/kg K}$), che entra nello scambiatore a $60 \text{ }^\circ\text{C}$ ed alla pressione di 1 bar. Se il deflusso dell'aria è isobaro (ovvero, con perdite di carico trascurabili), si calcoli la temperatura dell'aria in uscita. Si determini inoltre se lo scambiatore può funzionare nelle condizioni suddette.

[$80.3 \text{ }^\circ\text{C}$; no, perchè il termine di irreversibilità risulta minore di zero, e infatti l'R134 si trova a $40 \text{ }^\circ\text{C}$ e non può cedere calore all'aria a $60 \text{ }^\circ\text{C}$]

Appunti ed Esercizi di *Fisica Tecnica*

Cap.5. L'equazione generalizzata di Bernoulli e la sua applicazione al calcolo dei condotti.

Paolo Di Marco

Versione 2022.01 – 04.01.2022

La presente dispensa è redatta ad esclusivo uso didattico per gli allievi dei corsi di studi universitari dell'Università di Pisa. L'autore se ne riserva tutti i diritti. Essa può essere riprodotta solo totalmente ed al fine summenzionato, non può essere alterata in alcuna maniera o essere rivenduta ad un costo superiore a quello netto della riproduzione. Ogni altra forma di uso e riproduzione deve essere autorizzata per scritto dall'autore.

L'autore sarà grato a chiunque gli segnali errori, inesattezze o possibili miglioramenti.

Nota preliminare

Questo capitolo è stato concepito anche per un suo utilizzo in modo svincolato da quelli precedenti e seguenti: per tale ragione, i lettori che fanno uso di tutte le dispense troveranno ripetuti, nei paragrafi marcati con *, alcuni concetti già esposti in precedenza.

Introduzione

Nel presente capitolo viene affrontato lo studio del moto di un fluido all'interno di un condotto (nella maggior parte dei casi una tubazione) allo scopo di derivare i criteri di base per il dimensionamento del condotto stesso e degli organi necessari al moto (ovvero, pompe o ventilatori).

Non è difficile rendersi conto che una tubazione in cui scorre un fluido costituisce quello che in termodinamica è stato definito *sistema aperto*: come tale, il suo studio potrebbe essere affrontato benissimo mediante le equazioni generali di bilancio della termodinamica. Lo scopo di queste note è dunque di riformulare l'equazione di bilancio dell'energia in una forma di uso più pratico e più comune nella tecnica per il calcolo dei condotti stessi. Il tutto anche al fine di potere fare uso delle tabelle contenute nei manuali.

In particolare, restringeremo l'oggetto del nostro studio ai sistemi in *condizioni stazionarie* (ovvero, a regime).

L'esposizione è corredata da numerosi esempi, che i lettori sono invitati a non tralasciare, in quanto essi risultano spesso più istruttivi del testo stesso.

Nozioni preliminari

Proprietà dei fluidi: densità*, peso specifico*, viscosità

Per i nostri scopi, un *fluido* può essere definito come *un materiale che non è in grado di reagire a sforzi di taglio statici*. Questo vuol dire che, in condizioni di quiete, attraverso una qualunque superficie ideale tracciata all'interno del fluido non possono trasmettersi forze *parallele* alla superficie stessa. Come conseguenza, un fluido non può avere una forma propria, ma si adatta a quella del suo contenitore. Al contrario, attraverso la stessa superficie possono trasmettersi forze *perpendicolari* alla superficie stessa: la loro risultante per unità di superficie rappresenta, come è noto, la *pressione*.

La *densità* di un fluido (ρ , pronuncia rho), come è noto, rappresenta la massa della unità di volume e le sue unità SI sono kg/m^3 . Viene spesso usata anche la *densità relativa* (adimensionale) che è il rapporto tra la densità del materiale e quella dell'acqua a pressione atmosferica e 4°C (1000 kg/m^3). Il *peso specifico* (γ , pronuncia gamma) rappresenta invece il peso della unità di volume e si misura in N/m^3 . La relazione tra ρ e γ è ovviamente la stessa che intercorre tra massa e peso

$$\gamma = \rho g \quad (5.1)$$

dove g rappresenta l'accelerazione di gravità (9.8066 m/s^2 al livello del mare). La densità di alcuni liquidi è riportata in Tab.A-1

Si ricorda che la densità di un fluido dipende dalla temperatura e dalla pressione: per un liquido, la dipendenza dalla pressione è molto debole e si può in genere trascurare.

Un fluido la cui densità è costante in ogni condizione si dice *incomprimibile*. Nessun fluido reale è perfettamente incomprimibile, tuttavia tale modello si adatta molto bene ad un liquido (se le variazioni di temperatura non sono molto elevate) ed anche ad un aeriforme (se le variazioni di temperatura e pressione sono molto piccole rispetto al valore medio).

Il modello di fluido incomprimibile non è inoltre soddisfacente quando il fluido si muove a velocità prossime a quelle della propagazione del suono in esso: questo non si verifica in genere nelle applicazioni che considereremo (la velocità del suono è circa 300 m/s in aria e 1500 m/s in acqua).

In condizioni *dinamiche*, un fluido è in grado di trasmettere anche sforzi di taglio: supponiamo di considerare uno strato sottile di fluido (meato) di altezza h , delimitato da due pareti piane, di cui la superiore si muove con velocità w (vedi Fig.1). Il moto relativo tra il fluido e la parete nel punto di contatto è nullo, e di conseguenza nel meato si stabilisce un campo di velocità triangolare come indicato nella Fig.1: i piani di fluido scorrono l'uno sull'altro come farebbero dei fogli di carta. Questo genera una forza resistente sulla superficie superiore in moto. Sperimentalmente, si vede che la forza (per unità di area), F/A , agente sul fluido è data da

$$\frac{F}{A} = \tau = \mu \frac{w}{h} \quad (5.2)$$

dove μ (mi) è una proprietà del fluido detta *viscosità dinamica*. Sulla parete agisce una forza di segno opposto.

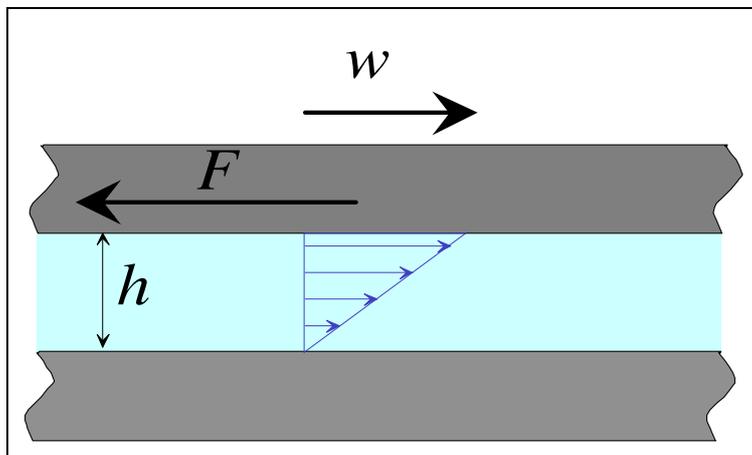


Figura 1: Azioni esercitate da un fluido tra due superfici in moto relativo.

L'Eq. (5.1) può essere riscritta in forma più generale per uno strato di altezza infinitesima:

$$\tau = \mu \frac{dw}{dy} \quad (5.3)$$

dove τ rappresenta lo *sforzo di taglio viscoso* [N/m²], ovvero la forza che agisce per unità di area su una superficie interna al fluido in direzione parallela a tale superficie, e dw/dy è la derivata della velocità del fluido in direzione perpendicolare alla superficie considerata.

L'entità dello sforzo di taglio è tanto maggiore quanto maggiori sono la viscosità e i gradienti di velocità.

La *viscosità* è dunque la proprietà fisica che caratterizza la capacità di un fluido di trasmettere sforzi di taglio *dinamici*. Le sue unità di misura nel sistema SI sono ricavabili invertendo la relazione precedente

$$\mu = \frac{\tau}{\frac{dw}{dy}} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \text{s} = \text{Pa} \cdot \text{s} \right] \quad (5.4)$$

Questa espressione della viscosità è valida solo per una particolare classe di fluidi, detti *fluidi newtoniani*. Il modello di fluido newtoniano (detto così da Isaac Newton, che per primo ipotizzò una relazione del tipo suddetto) si adatta molto bene alla maggior parte dei fluidi sia liquidi che aeriformi, tranne quelli molto viscosi, quali grasso, dentifricio e paste in generale.

La viscosità è sempre positiva: lo sforzo viscoso si oppone sempre al moto della parete superiore e rappresenta pertanto una *forza dissipativa*. Un fluido è quindi tanto più viscoso quanto più si “opponne al moto”: l'olio è più viscoso dell'acqua, che a sua volta è più viscosa della benzina.

I valori della viscosità di alcuni fluidi sono riportati in Tab.A-2: da notare come la viscosità di un fluido vari fortemente con la temperatura.

Per concludere si ricorda che talvolta si fa riferimento alla *viscosità cinematica* del fluido, indicata generalmente con la lettera ν (ni) e definita come il rapporto tra viscosità dinamica e densità:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (5.5)$$

Le sue unità SI sono m^2/s .

Portata e velocità del fluido*

Si definisce *portata massica* di fluido in un condotto la massa di fluido che attraversa una sezione del condotto nell'unità di tempo. Essa si indica in genere con G e si misura in kg/s . Si definisce anche la *portata in volume* di fluido (G_v , misurata in m^3/s) come il volume di fluido che attraversa una determinata sezione nella unità di tempo. Queste due quantità sono ovviamente legate dalla stessa relazione che lega massa e volume, ovvero, se la densità è costante nella sezione

$$G = \rho G_v \quad (5.6)$$

Il semplice termine *portata* si riferisce in genere alla portata massica (e nel seguito verrà usato con tale significato). Tuttavia, a volte viene anche usato con riferimento alla portata in volume. In caso di ambiguità, è bene controllare le unità di misura che sono specificate.

La velocità di una particella fluida può essere definita, in accordo con la meccanica, come la derivata della sua posizione rispetto al tempo e verrà indicata con \bar{w} (il modulo del vettore sarà indicato con w). In genere, la velocità all'interno di un fluido in moto non è costante in ogni punto: ci si può rendere conto di questo semplicemente osservando la superficie di un fiume da un ponte. In particolare, la velocità è in genere massima nella zona centrale del condotto ed è *nulla* nelle zone di contatto con le superfici solide.

In altre parole, un fluido non scorre su una superficie come fa un solido su un altro solido: la velocità relativa nella zona di contatto è sempre nulla. Lo scorrimento si verifica tra gli strati di fluido immediatamente adiacenti alla superficie, dove i gradienti di velocità sono in genere elevati.

Si può definire una *velocità media* (detta più precisamente *velocità media di portata*, indicata con \bar{w}) del fluido come la velocità del fluido, ipotizzata costante nella sezione, che produrrebbe la stessa portata in volume. Il fluido che attraversa una sezione del condotto in 1 s, in tali condizioni, è quello contenuto in un cilindro di altezza \bar{w} e sezione pari a quella del condotto, A . La velocità media \bar{w} è quindi data da:

$$G_v = \bar{w} A \quad (5.7)$$

e di conseguenza la relazione che lega la portata massica alla velocità media è

$$G = \rho \bar{w} A \quad (5.8)$$

Seppure in modo molto indicativo, si può dire che nella pratica ingegneristica la velocità media dei liquidi nei condotti ha valori di 2-5 m/s, mentre per gli aeriformi i valori più comuni sono intorno a 10-30 m/s.

ESEMPIO 5.1 - Calcolo del diametro di una tubazione*

Una tubazione trasporta una portata $G = 80000$ t/h di acqua marina ($\rho = 1030$ kg/m³) per il raffreddamento del condensatore di una centrale termoelettrica. Supponendo una velocità media nel condotto di 4 m/s, calcolare il diametro della tubazione (supposta circolare).

La portata deve essere convertita in unità SI (kg/s)

$$G = 80000 \frac{\text{t}}{\text{h}} = 80000 \frac{1000\text{kg}}{3600\text{s}} = 22200 \text{ kg/s}$$

La sezione del condotto si ricava dall'Eq. (5.7)

$$A = \frac{G}{\rho \bar{w}} = \frac{22200}{1030 \cdot 4} = 5.4 \text{ m}^2$$

e quindi il suo diametro vale

$$D = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 2.6 \text{ m}$$

Da notare che i dati sono realistici. Le opere di presa dell'acqua di raffreddamento delle centrali termoelettriche hanno dimensioni simili.

□

Moto laminare e turbolento - Numero di Reynolds

Se osserviamo il getto che fuoriesce da un rubinetto (di quelli senza dispositivo rompigitto) si nota che, finché la portata è bassa, il getto è liscio e lucido; all'aumentare della portata compaiono sulla superficie delle irregolarità di sempre maggiore entità. Lo stesso fenomeno si ripete in ogni fluido in moto: quando la portata, e quindi la velocità, superano un valore critico, le irregolarità del moto non sono più smorzate dalle forze viscosse. Si dice che il moto ha avuto una transizione dal regime *laminare* a quello *turbolento*. Nel moto turbolento la velocità di ogni particella si può suddividere in una componente media, indipendente dal

tempo, e una componente fluttuante, di ampiezza generalmente minore, che oscilla nel tempo con uno spettro di frequenze relativamente elevate. Questa seconda componente non è presente nel moto laminare, che pertanto viene spesso definito come moto "ordinato".

Si noti che il moto turbolento è *intrinsecamente non stazionario*: esso può essere considerato solo *mediamente stazionario*, trascurando gli effetti della componente fluttuante di velocità. Si faccia inoltre attenzione a non confondere la *velocità media locale* qui definita con la *velocità media di portata* di cui si è scritto in precedenza.

Il moto turbolento dei fluidi rimane uno dei problemi aperti della fisica: per quanto possa sembrare sorprendente, dopo più di un secolo di studio esso sfugge ancora ad una completa caratterizzazione. Anche le cause e le modalità della transizione laminare-turbolenta rimangono ancora da chiarire completamente.

Un criterio per determinare se il moto in un condotto è laminare o turbolento venne formulato sperimentalmente dal fisico inglese Osborne Reynolds (1842-1912). Secondo tale criterio, il moto *in un condotto* è laminare quando il seguente gruppo adimensionale, detto *numero di Reynolds*

$$Re = \frac{\rho \bar{w} D_H}{\mu} \quad (5.9)$$

è inferiore al valore di 2000. Per $Re > 10000$ il moto è completamente turbolento; per i valori intermedi ($2000 < Re < 10000$) si ha una regione di transizione. In Re compare la grandezza D_H , detta *diametro idraulico* del condotto, definito come

$$D_H = \frac{4 A}{P} \quad (5.10)$$

dove A è la sezione del condotto e P rappresenta il perimetro bagnato dal fluido. Si può verificare facilmente che, se la sezione è circolare, D_H è pari al diametro del condotto stesso.

Il valore critico del numero di Reynolds, qui fissato al suo valore "storico" di 2000 può in realtà variare notevolmente con la configurazione geometrica e perfino con le azioni esterne (es. vibrazioni del sistema). Al lettore interessato si consiglia la lettura dell'Appendice F di *Heat Transfer*, di A. Bejan, Wiley 1992

Nella tecnica, il moto di un fluido è quasi sempre turbolento: raramente si ha a che fare con moti di tipo laminare, tranne che in oleodinamica.

ESEMPIO 5.2 - Moto in un condotto rettangolare

In un condotto rettangolare di sezione 20 X 40 mm scorre acqua a 20 °C alla velocità media di 0.5 m/s. Determinare se il moto è laminare o turbolento. Ripetere il calcolo, a parità di ogni altra condizione, nel caso che il fluido sia aria a pressione atmosferica ($\rho = 1.26 \text{ kg/m}^3$).

Il diametro idraulico del condotto è dato da

$$D_H = \frac{4 A}{P} = \frac{4 \cdot 20 \cdot 40}{2 \cdot (20 + 40)} = 26.67 \text{ mm}$$

e per l'acqua, adottando i valori dati nelle tabelle allegate, Re vale

$$Re = \frac{\rho \bar{w} D_H}{\mu} = \frac{1000 \cdot 0.5 \cdot 26.67 \cdot 10^{-3}}{0.001} = 13300$$

quindi il moto è decisamente turbolento, essendo $Re > 10000$.

Per l'aria si ha

$$Re = \frac{\rho \bar{w} D_H}{\mu} = \frac{1.26 \cdot 0.5 \cdot 26.67 \cdot 10^{-3}}{1.82 \cdot 10^{-5}} = 923$$

e quindi il moto è laminare.



ESEMPIO 5.3 – Resistenza viscosa tra due cilindri coassiali rotanti.

Due cilindri coassiali di lunghezza 0.3 m hanno diametri rispettivamente di 50 e 52 mm. Il cilindro interno ruota ad una velocità di 40 giri al minuto (rpm). Il meato (intercapedine) tra i due cilindri è riempito di un olio di viscosità dinamica pari a 900 mPa s. Assumendo che il profilo di velocità nel meato tra i due cilindri sia lineare e trascurando le forze agenti sulle basi dei cilindri, calcolare la coppia necessaria a mantenere il cilindro interno in rotazione.

La velocità del fluido in corrispondenza del cilindro esterno è nulla. In corrispondenza del cilindro interno, essa è pari alla velocità periferica del cilindro stesso, ovvero

$$w = \omega r = \frac{2 \pi n}{60} r = \frac{2 \pi \cdot 40}{60} \cdot 0.025 = 0.11 \text{ m/s}$$

la derivata della velocità rispetto al raggio è costante (dato che il profilo di velocità è lineare) e vale

$$\frac{dw}{dr} = \frac{w}{t}$$

dove $t=1 \text{ mm}$ è lo spessore del meato. Di conseguenza la tensione di taglio alla parete interna vale

$$|\tau| = \mu \frac{dw}{dr} = \mu \frac{w}{t}$$

La risultante di tale tensione su un elementino di superficie dS vale τdS , e il suo momento rispetto all'asse del cilindro vale $M = \tau R dS$. Il momento risultante si otterrà integrando l'espressione precedente su tutta la superficie laterale S del cilindro

$$M = \iint_S \tau R dS$$

Ma niente paura! Considerato che τ ed R sono costanti, si ha

$$M = \tau R \iint_S dS$$

dove l'integrale rappresenta semplicemente la superficie laterale del cilindro ($2\pi R L$). Quindi

$$M = \tau R 2\pi R L = 2\pi \mu \frac{w}{t} R^2 L = 2\pi \cdot 10^{-3} \frac{0.11}{0.001} \cdot 0.025^2 \cdot 0.3 = 1.3 \cdot 10^{-4} \text{ Nm}$$

Un dispositivo simile viene usato per misurare la viscosità dei fluidi. La stessa formula ci dà la coppia di attrito che si sviluppa nel perno di un cuscinetto a sostentamento oleodinamico.



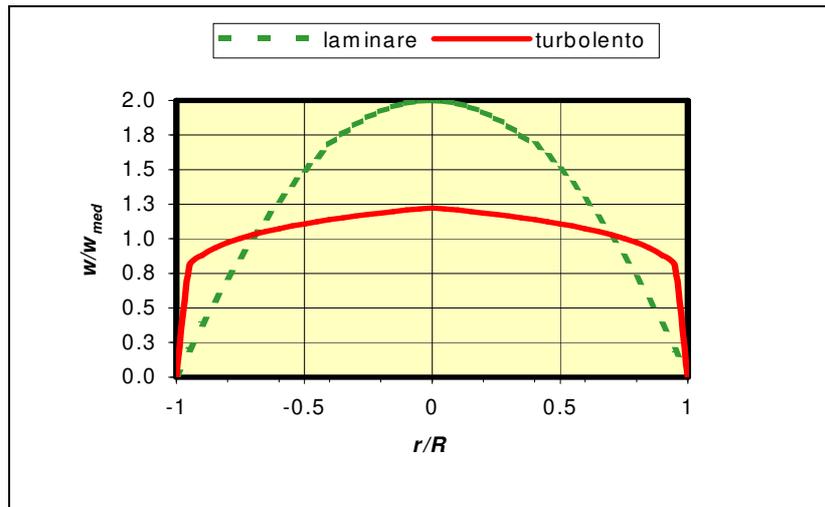


Figura 2: Profili di velocità (normalizzati al valore medio) per moto laminare e turbolento.

Il profilo di velocità all'interno di un condotto circolare differisce notevolmente nel caso di moto laminare e turbolento (ci si riferisce qui al valor medio locale, non prendendo in considerazione le fluttuazioni turbolente). Come risulta dalla Fig.2, nel caso di moto laminare il profilo di velocità è parabolico, mentre nel caso turbolento è notevolmente appiattito nella parte centrale del condotto e i gradienti di velocità si localizzano in prossimità della parete. Da notare che entrambi i diagrammi rappresentano i valori di velocità normalizzati rispetto alla velocità media \bar{w} e la velocità assoluta in caso di moto turbolento è notevolmente superiore a quella in moto laminare. Nel caso di moto laminare, il valore medio di velocità è la metà del valore massimo al centro del condotto, mentre nel caso di moto turbolento tale rapporto varia tra 0.8 e 0.9 (cresce al crescere di Re) per cui la velocità media e quella massima sono grossomodo coincidenti.

ESEMPIO 5.4 - Calcolo della portata da una misura di velocità

Un misuratore di velocità posto al centro di un camino di sezione circolare di 15 cm di diametro indica un valore di 0.05 m/s. Ipotizzando che il moto sia laminare, calcolare la portata volumetrica dei fumi nel camino.

La velocità misurata al centro del condotto rappresenta il valore massimo della stessa. Se il moto è laminare, si ha che

$$\bar{w} = 0.5w_{\max}$$

per cui la portata volumetrica vale

$$G_v = \bar{w}A = 0.5 w_{\max} \frac{\pi D^2}{4} = 4.42 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$$

ovviamente, tale risultato è valido solo se il moto è veramente laminare. Il lettore interessato può verificare che questo è vero se i fumi hanno una viscosità cinematica di $3 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

□

Bilancio di massa - Equazione di continuità

Dato che i condotti che consideriamo sono dei sistemi aperti a regime, l'equazione di bilancio di massa si formula come

$$G = \rho \bar{w} A = \text{costante} \quad (5.11)$$

e applicandola tra le sezioni a e b del condotto, si ha

$$\rho_a \bar{w}_a A_a = \rho_b \bar{w}_b A_b \quad (5.12)$$

dato che considereremo solo fluidi incomprimibili, per cui $\rho = \text{cost}$, si ha infine

$$\bar{w}_a A_a = \bar{w}_b A_b \quad (5.13)$$

E' importante notare una conseguenza della equazione precedente: da essa si vede che un fluido si muove più velocemente in corrispondenza di un restringimento di sezione.

Purtroppo la stessa cosa non vale per il traffico automobilistico!

Ci si può chiedere che relazione ci sia tra la (5.13) e la equazione di Hugoniot, introdotta nel cap.5. Dato che per un fluido incomprimibile la velocità del suono vale infinito, per esso il numero di Mach vale costantemente zero e la relazione di Hugoniot, con alcuni semplici passaggi matematici, si riduce alla forma della (5.13).

L'equazione generalizzata di Bernoulli

L'equazione di bilancio per unità di massa di un sistema aperto si può scrivere in forma differenziale

$$dh + de_c + de_p = dq - dl' \quad (5.14)$$

ricordando che

$$\begin{cases} dh = Tds + vdp \\ dq = Tds - Tds_s \end{cases} \quad (5.15)$$

e sostituendo nella precedente, si ha, con semplici passaggi

$$v dp + de_c + de_p = - T ds_s - dl' \quad (5.16)$$

I termini di energia potenziale e cinetica valgono rispettivamente

$$\begin{cases} de_p = g dz \\ de_c = \alpha d \frac{\bar{w}^2}{2} \end{cases} \quad (5.17)$$

dove z rappresenta la quota del fluido (più precisamente, del suo baricentro) rispetto ad un riferimento arbitrario e il termine α indica che, a causa della distribuzione (profilo) di velocità nel condotto, l'energia cinetica non è esprimibile semplicemente in funzione della velocità media del fluido. In moto laminare (per un condotto a sezione circolare) si ha $\alpha = 2$ e in moto turbolento $\alpha \approx 1.06$ (in quest'ultimo caso, si può assumere $\alpha=1$).

Più dettagliatamente, l'energia cinetica è una proprietà estensiva del fluido: essa andrebbe valutata come somma (integrale) delle energie cinetiche di tutte le particelle fluide che attraversano una determinata sezione, una volta nota la distribuzione di velocità nella sezione stessa. Il risultato di tale calcolo è una valutazione accurata del coefficiente α in ogni condizione. Tuttavia tale approccio va oltre gli scopi delle presenti note. Da notare comunque che l'energia cinetica effettiva è sempre maggiore di quella calcolata in base alla velocità media.

Tenuto infine conto che $\nu = 1/\rho$, si ha

$$\frac{dp}{\rho} + \alpha d \frac{\bar{w}^2}{2} + g dz = - dl' - Tds_s \quad (5.18)$$

a causa della tradizione invalsa nella tecnica, in questo contesto si formula l'equazione di bilancio riferendosi all'unità di peso anziché a quella di massa. Le unità di misura dei singoli termini divengono allora $J/N = Nm/N = m$, ovvero tutti i termini hanno le dimensioni di un'altezza. Per riferirsi all'unità di peso, è sufficiente dividere tutti i termini dell'equazione precedente per l'accelerazione di gravità g . Inoltre il termine dissipativo, Tds_s/g che rappresenta le perdite dovute alle irreversibilità, si indica con dh_A ; il termine dl'/g che rappresenta il lavoro meccanico utile scambiato dal sistema, si indica con $-dh'$ (il cambiamento di segno riflette il fatto che in questo contesto si ha in genere a che fare con macchine operatrici, ed è quindi più conveniente considerare positivo il lavoro ceduto al sistema). Si ottiene infine

$$\frac{dp}{\gamma} + \frac{\alpha}{2g} d\bar{w}^2 + dz = dh' - dh_A \quad (5.19)$$

L'equazione suddetta prende il nome di *equazione generalizzata di Bernoulli*¹

Nel caso di *fluidi incomprimibili*, la equazione precedente può essere facilmente integrata fra due sezioni a e b del condotto, fornendo

$$\boxed{\frac{p_b - p_a}{\gamma} + \frac{\alpha}{2g} (\bar{w}_b^2 - \bar{w}_a^2) + (z_b - z_a) = h' - h_A} \quad (5.20)$$

Da notare che la Eq.19 discende direttamente dal primo principio della termodinamica, e vale quindi per *qualunque fluido*; la Eq.20, essendo invece stata integrata supponendo $\rho = \text{costante}$, vale solo per *fluidi incomprimibili*.

Determinazione delle perdite di carico

Le perdite per attrito vengono convenzionalmente divise in due aliquote

$$h_A = h_{A,d} + h_{A,c} \quad (5.21)$$

dove $h_{A,d}$ rappresenta le *perdite di carico distribuite*, ossia quelle causate dalla dissipazione dovuta agli effetti viscosi lungo le pareti dei condotti, mentre $h_{A,c}$ rappresenta le *perdite di*

¹Il fisico svizzero Daniel Bernoulli (1700-1782) formulò per primo l'equazione suddetta, senza tenere conto dei termini dissipativi e di apporto energetico, h_a e h' . Per tale motivo, la presente formulazione viene detta *generalizzata*.

carico concentrate, dovute alla dissipazione nelle discontinuità localizzate del condotto, quali curve, restringimenti, allargamenti, valvole, etc.

Perdite di carico distribuite

Le perdite di carico distribuite sono espresse da

$$h_{A,d} = \lambda(Re, \epsilon / D_H) \frac{L}{D_H} \frac{\bar{w}^2}{2g} \quad (5.22)$$

dove L è la lunghezza del condotto e λ è un coefficiente detto *coefficiente di Darcy*. Come indicato, quest'ultimo dipende dal numero di Reynolds e dalla rugosità relativa del condotto (ϵ/D_H , adimensionale) che rappresenta la rugosità media della superficie del condotto (ϵ , pronuncia epsilon, definita come in meccanica) normalizzata rispetto al diametro idraulico del condotto stesso. La dipendenza di λ da Re ed ϵ/D_H è espressa graficamente nel diagramma riportato in Fig.3, detto *diagramma di Moody*. Si noti come, per moto turbolento in tubi rugosi, λ diviene costante al di sopra di un determinato valore di Re .

Da notare che il diagramma di Moody rappresenta in pratica una situazione abbastanza favorevole: per variazioni di Re di cinque ordini di grandezza, λ varia poco meno di una decade. Nel caso che manchino informazioni precise sulla rugosità del condotto o su Re , o semplicemente per fare presto, conviene assumere per λ i "valori magici" 0.02 o 0.03.

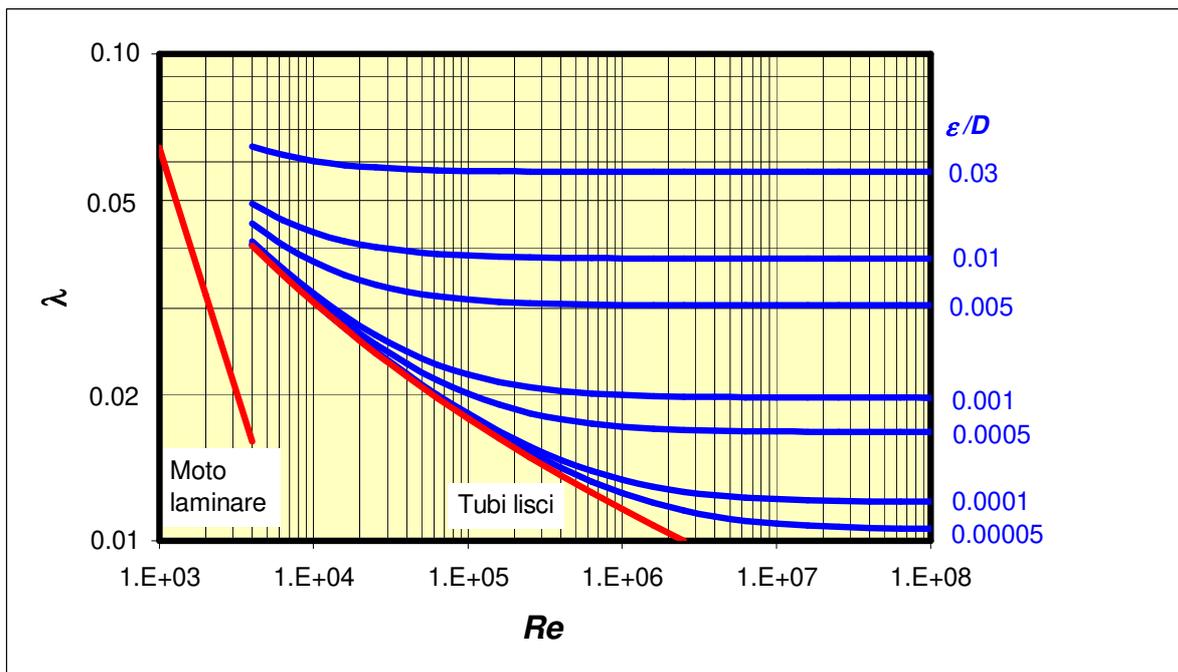


Figura3: Diagramma di Moody

ESEMPIO 5.5 - Calcolo delle perdite di carico distribuite

In una tubazione di ghisa avente rugosità media di 260 μm , diametro $D = 80$ mm e lunghezza $L = 50$ m, scorre una portata $G = 20$ kg/s di acqua a 40 °C. Calcolare le perdite di carico distribuite e la caduta di pressione lungo la tubazione.

La soluzione è ottenibile anche con il foglio di calcolo **DARCY.XLS**

La velocità nel condotto vale

$$\bar{w} = \frac{G}{\rho A} = \frac{20}{1000 \frac{\pi 0.08^2}{4}} = 4 \text{ m/s}$$

Dalla Tab.A-2 si ricava che la viscosità dell'acqua a 40 °C è $\mu = 680 \text{ } \mu\text{Pa s}$, quindi il numero di Reynolds e la rugosità relativa valgono rispettivamente

$$Re = \frac{\rho \bar{w} D_H}{\mu} = \frac{1000 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 10^{-2}}{68 \cdot 10^{-5}} = 470000$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.260}{80} = 0.0033$$

dal diagramma di Moody (oppure dalla correlazione di Haaland, esposta nel seguito) si ricava $\lambda = 0.027$, per cui

$$h_{A,d} = \lambda \frac{L \bar{w}^2}{D_H 2g} = 0.027 \frac{50 \cdot 4^2}{2 \cdot 0.08 \cdot 9.81} = 13.7 \text{ m}$$

□

ESEMPIO 5.6 - Dipendenza delle perdite di carico distribuite dalla velocità per moto laminare e turbolento

Ricavare il legame che intercorre tra le perdite di carico distribuite e la velocità media del fluido in moto laminare ($\lambda = 64/Re$) e in moto pienamente turbolento ($\lambda = \text{cost}$).

In moto laminare si ha

$$h_{A,d} = \lambda \frac{L \bar{w}^2}{D_H 2g} = \frac{64}{Re} \frac{L \bar{w}^2}{D_H 2g} = \frac{64\mu}{\rho \bar{w} D_H} \frac{L \bar{w}^2}{D_H 2g} = \frac{32 \mu L}{g \rho D_H^2} \bar{w}$$

mentre nel moto turbolento, più semplicemente

$$h_{A,d} = \lambda \frac{L \bar{w}^2}{D_H 2g} = \frac{\lambda L}{2 g D_H} \bar{w}^2$$

Le perdite di carico distribuite sono dunque proporzionali alla velocità media del fluido se il moto è laminare, ed al suo quadrato se il moto è turbolento con $\lambda = \text{cost}$ (quest'ultima è la situazione che si presenta più frequentemente nella pratica). Nelle situazioni intermedie, in cui λ dipende da \bar{w} , si avrà una dipendenza da \bar{w} più complessa. Notare anche che nel moto pienamente turbolento le perdite di carico sono indipendenti dalla viscosità (il valore di λ dipende solo dalla rugosità del condotto).

□

ESEMPIO 5.7 - Dipendenza delle perdite di carico distribuite dal diametro del condotto

Calcolare le perdite di carico distribuite in una tubazione da 3/4 pollice (diametro interno $D = 20.9 \text{ mm}$) di lunghezza $L = 10 \text{ m}$, in cui scorre una portata $G = 36 \text{ kg/min}$ di acqua. Si supponga per semplicità $\lambda = 0.02$. Ripetere il calcolo per la stessa portata in un tubo da 1/2 pollice ($D = 15.7 \text{ mm}$).

La portata deve essere convertita in unità SI (kg/s)

$$G = 36 \frac{\text{kg}}{\text{min}} = 36 \frac{\text{kg}}{60 \text{ s}} = 0.6 \text{ kg/s}$$

Esprimiamo le perdite di carico distribuite in funzione della portata

$$h_{A,d} = \lambda \frac{L}{D} \frac{\bar{w}^2}{2g} = \lambda \frac{L}{D} \frac{1}{2g} \left(\frac{G}{\rho A} \right)^2 = \lambda \frac{L}{D} \frac{1}{2g} \left(\frac{G}{\rho} \frac{4}{\pi D^2} \right)^2 = \lambda \frac{8 L G^2}{\pi^2 g \rho^2 D^5}$$

Per il tubo da 3/4 pollice si ha quindi

$$h_{A,d} = 0.02 \frac{8 \cdot 10 \cdot 0.6^2}{\pi^2 \cdot 9.81 \cdot 1000^2 \cdot 0.0209^5} = 1.5 \text{ m}$$

mentre per la tubazione da 1/2 pollice

$$h_{A,d} = 0.02 \frac{8 \cdot 10 \cdot 0.6^2}{\pi^2 \cdot 9.81 \cdot 1000^2 \cdot 0.0157^5} = 6.2 \text{ m}$$

Quindi una piccola riduzione di diametro ha una grandissima influenza sulle perdite di carico. Del resto, la formula indica chiaramente che a parità di portata le perdite di carico sono inversamente proporzionali a D^5 (il che vuol dire che, a parità di portata, dimezzando il diametro del condotto le perdite di carico aumentano di un fattore 32!). Nella realtà, bisogna considerare che anche λ varia leggermente, ma questo non altera sostanzialmente il risultato.

□

Espressioni per la valutazione del coefficiente di Darcy

Le espressioni riportate nel seguito sono utili per calcolare λ con l'ausilio di un calcolatore.

Moto laminare

$$\lambda = \frac{c}{Re} \quad (5.23)$$

per tubi circolari si ha $c = 64$. Per altre sezioni, il valore di c oscilla indicativamente tra 50 e 100.

Moto turbolento, tubo liscio ($4000 < Re < 10^5$): legge di Blasius

$$\lambda = \frac{0.316}{Re^{0.25}} \quad (5.24)$$

Moto turbolento, tubo rugoso, $4000 < Re < 10^8$, formulazione semplificata

La seguente espressione di λ , dovuta ad Haaland, sebbene non rigorosa, approssima il valore di λ ottenibile con correlazioni più accurate con un errore massimo del 1.5% nel campo di Re indicato per $0 < \varepsilon/D < 0.05$, e consente un calcolo esplicito (ovvero, senza fare uso di metodi iterativi)

$$\lambda = \left\{ -0.782 \ln \left[\frac{6.9}{Re} + \left(\frac{\varepsilon}{3.7D} \right)^{1.11} \right] \right\}^{-2} \quad (5.25)$$

Da notare che la formula precedente, per $\varepsilon=0$, non fornisce valori esattamente uguali alla legge di Blasius. Gli scarti sono comunque piccoli.

La accuratezza di queste relazioni è intorno al 10% per tubi circolari, e di circa il 15% per condotti di differente sezione. In ogni caso, il numero di Reynolds è riferito alla velocità media di portata ed al diametro idraulico.

Una relazione approssimata, valida solo per acqua e consigliata da talune norme per il calcolo delle perdite di carico distribuite in un condotto, è quella di Hazen-Williams, che fornisce direttamente il valore di $h_{A,d}$ per unità di lunghezza della tubazione in funzione della portata volumetrica e del diametro idraulico

$$\frac{h_{A,d}}{L} = 10.65 \frac{(G_v / C)^{1.85}}{D^{4.87}} \quad (5.26)$$

dove la costante moltiplicativa numerica 10.65 non è adimensionale (ha le dimensioni di $s^{1.85}/m^{0.68}$ se si esprimono portata e diametro in unità SI) mentre la costante adimensionale C è ricavabile dalla Tab.1

Tubi estremamente lisci	140
Tubi nuovi, acciaio o ghisa	130
Tubi in legno o calcestruzzo	120
Tubi in acciaio rivettato, nuovi	110
Tubi vecchi in ghisa, mattoni	100
Tubi in acciaio rivettato, vecchi	95
Tubi in acciaio corrosivo	80
Tubi in acciaio fortemente corrosivo	60

Tabella 1: Coefficienti C (adimensionali) per la formula di Hazen-Williams.

Anche in questa formula, come nell'Esempio 5.7, si rileva che, a parità di portata, le perdite di carico sono inversamente proporzionali al diametro della tubazione elevato ad un esponente vicino a 5.

ESEMPIO 5.8 - Calcolo delle perdite di carico distribuite con la formula di Hazen-Williams

Ripetere il calcolo dell'Esempio 5.5 utilizzando la formula di Hazen-Williams.

La portata volumetrica vale

$$G_v = \frac{G}{\rho} = \frac{20}{1000} = 0.02 \text{ m}^3/\text{s}$$

Dalla Tab.1 (supponendo una tubazione in ghisa nuova) si ricava un valore di $C = 130$, quindi

$$h_{ad} = 10.65 \frac{(G_v / C)^{1.85}}{D_h^{4.87}} L = 10.65 \frac{(0.02 / 130)^{1.85}}{0.08^{4.87}} 50 = 10.2 \text{ m}$$

Mentre per $C = 100$ (ghisa vecchia) si ha

$$h_{ad} = 10.65 \frac{(G_v / C)^{1.85}}{D_h^{4.87}} L = 10.65 \frac{(0.02 / 100)^{1.85}}{0.08^{4.87}} 50 = 16.8 \text{ m}$$

Quindi la formula approssima sufficientemente bene il valore delle perdite di carico (13.7 m) calcolate con la formula di Darcy nell'Esempio 5.5.

□

Perdite di carico concentrate

Le perdite di carico concentrate sono espresse da

$$h_{A,c} = \sum_i K_i \frac{\bar{w}_i^2}{2g} \quad (5.27)$$

Dove \bar{w}_i rappresenta la velocità con cui il fluido attraversa la discontinuità e K_i un coefficiente di perdita di carico concentrata, che è tabulato nei manuali. Alcuni valori notevoli di K_i sono riportati in Tab.4. Una raccolta vastissima di valori di K_i è riportata nel testo: *Memento des pertes de charge: coefficients de pertes de charge singulieres et de pertes de charge par frottement*, di Idelcik I. E., Eyrolles, Paris, 1960. La sommatoria indica che si devono sommare i contributi di tutte le accidentalità presenti nel circuito.

In alcuni casi, ad esempio un restringimento di sezione, essendo la velocità del fluido diversa a monte ed a valle, l'equazione precedente è ambigua: in genere le tabelle precisano se si deve assumere il valore di velocità prima o dopo la discontinuità stessa.

ESEMPIO 5.9 - Calcolo delle perdite di carico distribuite e concentrate

Da un serbatoio *in pressione* fuoriesce una tubazione di scarico di diametro interno 25 mm e lunghezza di 5 m, con quattro gomiti a 90°, in cui scorre una portata $G = 1.96$ kg/s di acqua a 20 °C. Assumendo un valore di $\lambda = 0.02$, determinare la pressione nel serbatoio, se lo sbocco della tubazione si trova a pressione atmosferica ed alla stessa quota della superficie libera del serbatoio.

Detti a e b rispettivamente la superficie libera del serbatoio e lo sbocco della tubazione, l'equazione di Bernoulli diviene

$$\frac{p_b - p_a}{\gamma} + \frac{1}{2g} \bar{w}_b^2 = -h_A$$

da cui si ha che la pressione *relativa* nel serbatoio deve valere

$$p_a - p_b = \frac{\rho}{2} \bar{w}_b^2 + \gamma (h_{AC} + h_{AD})$$

la velocità del fluido nella tubazione è data da

$$\bar{w} = \frac{G}{\rho A} = \frac{1.96}{1000 \frac{\pi 0.025^2}{4}} = 4 \text{ m/s}$$

le perdite distribuite sono date da

$$h_{A,d} = \lambda \frac{L}{D_H} \frac{\bar{w}^2}{2g} = 0.02 \frac{5 \cdot 4^2}{2 \cdot 0.025 \cdot 9.81} = 3.26 \text{ m}$$

le perdite concentrate sono dovute all'imbocco dal serbatoio ($K_1=1$) e ai gomiti ($K_2=K_3=K_4=K_5=0.5$) per cui

$$h_{A,c} = \sum_{i=1}^5 K_i \frac{\bar{w}_i^2}{2g} = \frac{\bar{w}^2}{2g} \sum_{i=1}^5 K_i = \frac{16}{2 \cdot 9.81} 3 = 2.45 \text{ m}$$

da cui si ha infine

$$p_a - p_b = \frac{1000}{2} 16 + 9.81 \cdot 1000 \cdot (2.45 + 3.26) = 0.64 \text{ bar}$$

□

Metodo delle lunghezze equivalenti

Questo metodo si basa sull'osservazione che ogni perdita concentrata può essere rimpiazzata da un tubo di appropriata lunghezza, che dia le stesse perdite di carico. Tale *lunghezza equivalente* è facilmente calcolabile

$$\lambda \frac{L_E}{D_H} \frac{\bar{w}^2}{2g} = K_i \frac{\bar{w}^2}{2g} \quad (5.28)$$

$$L_E = \frac{K_i D_H}{\lambda}$$

Una difficoltà consiste nel fatto che il valore del coefficiente λ può essere inizialmente incognito: tuttavia si può spesso darne una stima ragionevole, e a meno che le perdite concentrate non costituiscano un'aliquota significativa delle perdite totali, tale stima non necessita di ulteriori correzioni.

Ovviamente, questo metodo non presenta nessun vantaggio nel caso si debbano determinare le perdite di carico. Al contrario, vi sono vantaggi nel caso si debba calcolare la portata o determinare il diametro del condotto.

La prevalenza della pompa. Potenza resa e potenza assorbita

Il termine h' , che compare nella equazione di Bernoulli, è comunemente detto *prevalenza della pompa*. La prevalenza di una pompa (che si esprime in metri) può dunque essere definita rigorosamente come la *quantità di energia che la pompa aggiunge all'unità di peso del fluido*. Come vedremo nei successivi esempi, la prevalenza si presta anche ad altre interpretazioni meno generali.

ESEMPIO 5.10 - Determinazione della prevalenza di una pompa

Una pompa opera con un fluido di densità $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$ e si misura una differenza di pressione tra ingresso ed uscita di 0.94 bar. Le tubazioni di aspirazione e di mandata hanno lo stesso diametro e sono situate alla stessa quota. Determinare la prevalenza della pompa.

Applicando l'equazione di Bernoulli tra l'ingresso e l'uscita della pompa si ha

$$\frac{P_b - P_a}{\gamma} = h'$$

da cui

$$h' = \frac{P_b - P_a}{\rho g} = \frac{94000}{800 \cdot 9.8066} = 12 \text{ m}$$

Notare che non si devono considerare perdite all'interno della pompa, dato che esse sono già conglobate nel termine h' .

Con questo metodo, misurando le pressioni in ingresso ed uscita per varie portate, si determina la curva caratteristica della pompa. Se necessario, si può anche correggere il risultato per tenere conto delle differenti velocità del fluido in ingresso ed in uscita, se le relative tubazioni hanno differente diametro.

□

La prevalenza di una pompa varia al variare della portata, principalmente perché variano le perdite al suo interno. La curva che rappresenta tale variazione viene detta curva caratteristica della pompa e viene spesso fornita dal costruttore insieme alla pompa stessa. Essa è anche

generalmente riportata per punti sulla targhetta applicata alla pompa, che riassume tutti i dati della pompa stessa.

Alcuni andamenti tipici della curva caratteristica sono riportati in Fig.4. E' evidente che una pompa dalla caratteristica piatta (curva A) sarà più adatta per circuiti in cui si vuol mantenere costante la pressione in presenza di forti variazioni di portata. Una caratteristica del tipo C (molto ripida, al limite verticale) rappresenta invece una pompa che eroga una portata costante anche in presenza di notevoli variazioni delle perdite di carico, che sarà quindi adatta, ad esempio, come pompa dosatrice negli impianti chimici.

Una trattazione completa del funzionamento e delle tipologie di pompe esula dagli scopi di questo capitolo e verrà ripresa in seguito. Per ora basta accennare che l'andamento della caratteristica dipende dalle modalità costruttive della pompa: le pompe *centrifughe* (in cui una o più giranti che portano delle palette opportunamente sagomate mettono in movimento il fluido, dal centro verso la periferia) hanno in genere una caratteristica di tipo A o B, la cui pendenza può variare in funzione del numero delle giranti o della inclinazione delle palette. Una caratteristica di tipo C è invece tipica delle pompe *volumetriche* (pompe a pistoni, ad ingranaggi, etc.), che vengono dette così proprio perché trattano portate volumetriche di fluido praticamente indipendenti dal salto di pressione ai loro capi.

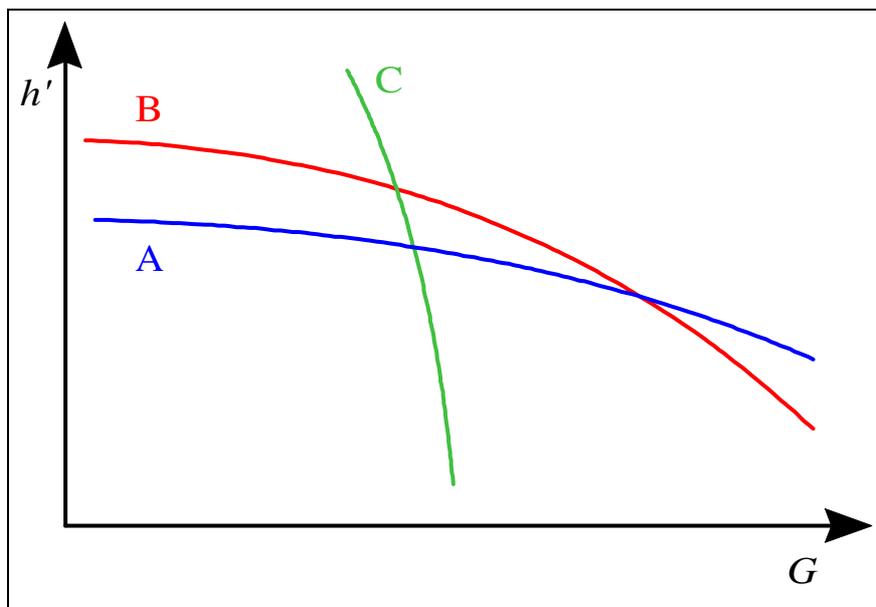


Figura 4: Tipiche curve caratteristiche di una pompa.

La potenza resa della pompa è definita come il lavoro per unità di tempo che essa fornisce al fluido. Per ottenerla, basterà quindi moltiplicare la prevalenza h' per la portata in peso di fluido (gG), ovvero

$$W_R = g G h' = G \frac{\Delta p}{\rho} \quad (5.29)$$

La potenza assorbita dalla pompa è quella che essa preleva dalla sua sorgente di energia (es. la rete elettrica) e sarà maggiore della precedente a causa delle irreversibilità presenti nel corpo della pompa, dei trafiletti di fluido, dell'attrito dei cuscinetti etc. Essa è legata alla potenza resa dal rendimento (η , pronuncia eta) della pompa:

$$W_R = \eta W_A \quad (5.30)$$

Il rendimento di una pompa oscilla tra valori di 0.8-0.9 per pompe ben costruite fino a meno di 0.5 per pompe commerciali di bassa potenza.

ESEMPIO 5.11 - Rendimento di una pompa

La pompa di scarico di una lavatrice domestica tratta una portata di acqua di 0.25 kg/s con una prevalenza di 1.5 m, ed assorbe dalla rete una potenza $W_A = 40$ W. Determinare il rendimento.

La potenza resa è data da

$$W_R = G g h' = 0.25 \cdot 9.81 \cdot 1.5 = 3.7 \text{ W}$$

ed il rendimento vale quindi

$$\eta = \frac{W_R}{W_A} = \frac{3.7}{40} = 0.09$$

Chiaramente, anche se i dati sono abbastanza realistici, si tratta di una situazione estrema. La necessità di mettere in commercio un oggetto robusto e di basso costo probabilmente non giustifica, dato il basso valore della potenza assorbita, ulteriori miglioramenti.



Alcune applicazioni pratiche

Dopo avere caratterizzato i termini h' e h_A , siamo in grado di applicare la equazione di Bernoulli al calcolo dei condotti. Nella pratica, si presentano diversi tipi di problemi:

1. Determinazione della caduta di pressione in una tubazione o della prevalenza necessaria per la pompa: questi problemi si possono risolvere applicando direttamente la equazione di Bernoulli, valutando le perdite di carico come precedentemente esposto.
2. Determinazione della portata in un circuito: data la dipendenza di alcuni fattori dalla velocità (che è inizialmente incognita) questi problemi richiedono una soluzione per tentativi.
3. Determinazione del diametro della tubazione, assegnate le massime perdite di carico ammissibili: anche questi problemi richiedono una soluzione iterativa.

ESEMPIO 5.12 - Impianto di sollevamento

Un impianto che solleva acqua da un serbatoio più basso ad uno più alto è rappresentato in Fig.5. La tubazione, in acciaio galvanizzato, ha un diametro di 50 mm e la portata di acqua (a 20 °C) è $G = 3$ kg/s. Determinare la prevalenza necessaria per la pompa e la potenza resa al fluido.

Assumendo come sezioni a e b i peli liberi del fluido nei due serbatoi aperti, in cui la pressione è pari a quella atmosferica e la velocità si può considerare trascurabile, si ha

$$(z_b - z_a) = h' - h_A$$

ossia

$$h' = (z_b - z_a) + h_A$$

La equazione suddetta mostra chiaramente come la prevalenza della pompa serva in parte a sollevare il fluido all'altezza prescritta, in parte a vincere le perdite di carico. In assenza di perdite di carico, il fluido verrebbe sollevato ad una quota pari alla prevalenza della pompa.

la velocità del fluido nella tubazione è data da

$$\bar{w} = \frac{G}{\rho A} = \frac{3}{1000 \frac{\pi 0.05^2}{4}} = 1.53 \text{ m/s}$$

Le perdite concentrate sono dovute all'imbocco dal serbatoio ($K_1=1$), ai due gomiti ($K_2= K_3= 0.5$) e allo sbocco nel secondo serbatoio ($K_4=1$) per cui

$$h_{A,c} = \sum_{i=1}^4 K_i \frac{\bar{w}_i^2}{2g} = \frac{\bar{w}^2}{2g} \sum_{i=1}^4 K_i = \frac{1.53^2}{2 \cdot 9.81} 3 = 0.36 \text{ m}$$

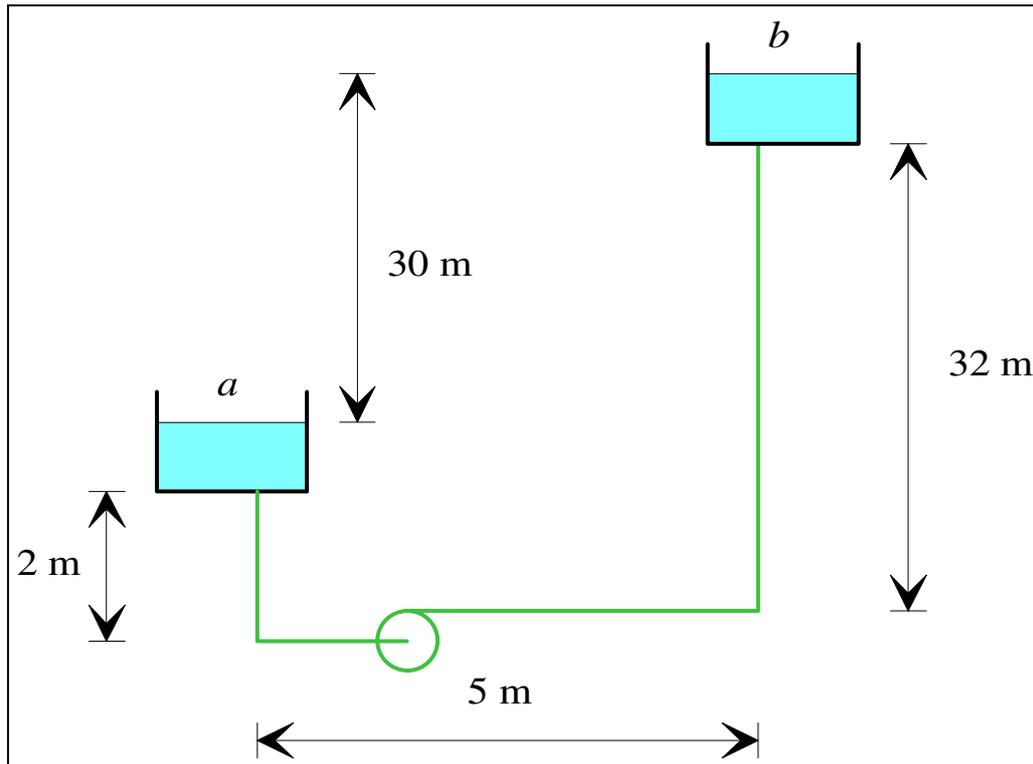


Figura 5: Schema di un impianto di sollevamento.

Per determinare le perdite distribuite si ricavano i seguenti dati: rugosità dell'acciaio galvanizzato $\epsilon = 150 \mu\text{m}$ ($\epsilon/D = 0.003$), viscosità dell'acqua $\mu = 1 \text{ mPa s}$, densità dell'acqua $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, da cui $Re = 76500$, $\lambda = 0.028$, per cui le perdite distribuite sono date da (essendo la lunghezza totale della tubazione $L = 39 \text{ m}$)

$$h_{A,d} = \lambda \frac{L}{D_H} \frac{\bar{w}^2}{2g} = 0.028 \frac{39 \cdot 1.53^2}{2 \cdot 0.05 \cdot 9.81} = 2.57 \text{ m}$$

da cui si ha infine (essendo la differenza di quota 30 m)

$$h' = 30 + (2.57 + 0.35) = 33 \text{ m}$$

la potenza resa è data da

$$W_R = G g h' = 3 \cdot 9.81 \cdot 33 = 970 \text{ W}$$

□

ESEMPIO 5.13 - Circuito di circolazione per riscaldamento

Un impianto di circolazione di acqua per riscaldamento è rappresentato in Fig.6. In questi casi, per evitare una eccessiva rumorosità, si adotta per la velocità dell'acqua un valore massimo di 0.75 m/s. La tubazione ha una rugosità di 10 μm. Se la portata di acqua è $G = 0.06$ kg/s e la sua temperatura 66 °C, determinare il diametro della tubazione, la prevalenza della pompa e la potenza resa al fluido. Si assuma i valori del coefficiente di perdita concentrata $K = 2$ per la valvola e $K = 3$ per il termosifone.

Il diametro della tubazione si ottiene da

$$G = \rho \bar{w} A$$

$$A = \frac{G}{\rho \bar{w}} = \frac{0.06}{979 \cdot 0.75} = 8.2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$$

$$D = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 10 \text{ mm}$$

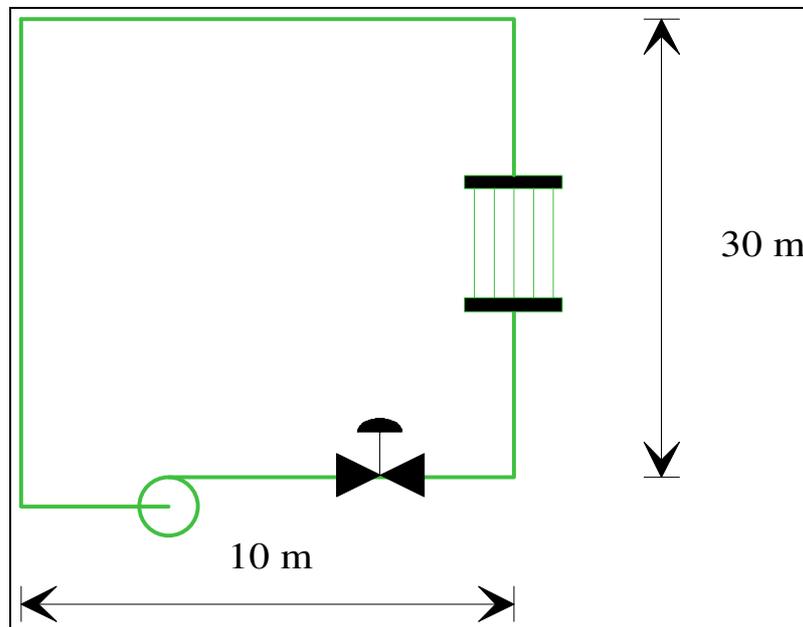


Figura 6: Schema semplificato di un impianto di circolazione per riscaldamento domestico.

In questo caso le sezioni di ingresso ed uscita possono essere assunte coincidenti in un punto qualunque del circuito. Conseguentemente tutti i termini a primo membro della equazione di Bernoulli sono nulli ed essa diviene semplicemente

$$h' = h_A = h_{AC} + h_{AD}$$

il che esprime matematicamente il fatto che in questo caso la prevalenza della pompa serve solo a vincere le perdite di carico. Notare che, contrariamente all'esempio precedente, in questo caso la elevazione del circuito non influisce affatto sulla prevalenza della pompa.

Le perdite concentrate sono dovute alla valvola ($K_1=2$), ai quattro gomiti ($K_2= K_3= K_4= K_5= 0.5$) e al termosifone ($K_6=3$) per cui

$$h_{A,c} = \sum_{i=1}^4 K_i \frac{\bar{w}_i^2}{2g} = \frac{\bar{w}^2}{2g} \sum_{i=1}^4 K_i = \frac{0.75^2}{2 \cdot 9.81} 7 = 0.2 \text{ m}$$

per determinare le perdite distribuite si ricavano i seguenti dati:

rugosità $\varepsilon = 10 \mu\text{m}$ ($\varepsilon/D = 0.001$), viscosità dell'acqua $\mu = 0.434 \text{ mPa s}$, densità dell'acqua $\rho = 979 \text{ kg/m}^3$, da cui $Re = 16900$, $\lambda = 0.029$, per cui le perdite distribuite sono date da (essendo la lunghezza totale della tubazione $L = 80 \text{ m}$)

$$h_{A,d} = \lambda \frac{L}{D_H} \frac{\bar{w}^2}{2g} = 0.029 \frac{80 \cdot 0.75^2}{2 \cdot 0.01 \cdot 9.81} = 6.51 \text{ m}$$

da cui si ha infine

$$h' = 6.51 + 0.2 = 6.7 \text{ m}$$

la potenza resa è data da

$$W_R = G g h' = 0.06 \cdot 9.81 \cdot 6.7 = 4 \text{ W}$$

□

L'esempio precedente ci aiuta anche a chiarire qualitativamente come agisce una valvola nel regolare la portata in un circuito. Se si riduce la sezione di passaggio della valvola, il suo coefficiente di perdita di carico K aumenta e conseguentemente le perdite di carico in funzione della portata passano dalla curva B alla curva C nella Fig.7. La caratteristica della pompa rimane invece immutata, curva A. Il punto di funzionamento del circuito (punto in cui la prevalenza della pompa uguaglia le perdite di carico) si sposta da P a P' e la portata nel circuito diminuisce, mentre la prevalenza della pompa aumenta. L'opposto accade se si aumenta l'apertura della valvola (punto P'').

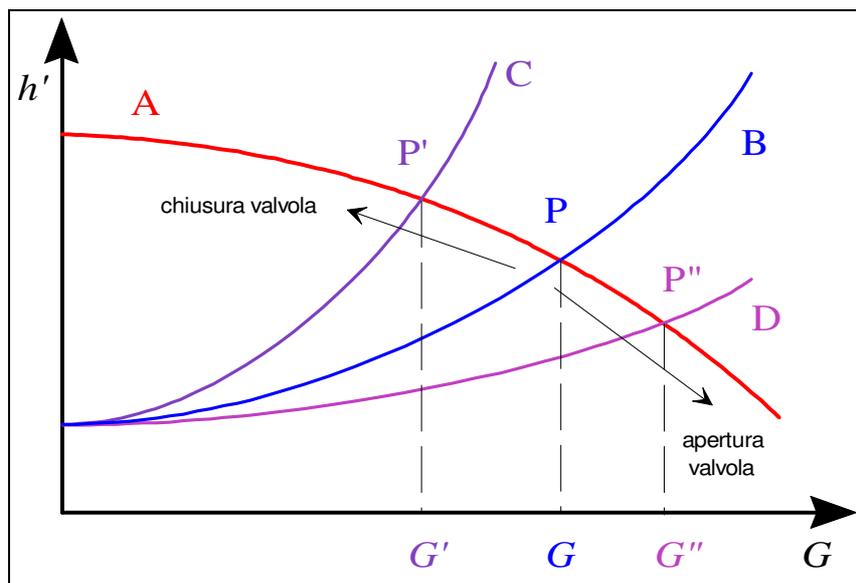


Figura 7: Meccanismo di azione di una valvola di regolazione.

Un secondo sistema per variare la portata in un circuito consiste nell'aumentare o diminuire la velocità di rotazione della pompa: in questo caso è la curva caratteristica della pompa che si alza od abbassa.

ESEMPIO 5.14 – Massima altezza di aspirazione

Una pompa aspira acqua da un pozzo avente il pelo libero 7 m sotto la quota della pompa stessa, tramite una tubazione rettilinea di diametro $D = 25 \text{ mm}$, al cui interno l'acqua scorre alla velocità $w = 2 \text{ m/s}$, che termina con una curva a 90° prima della bocca di aspirazione della pompa stessa. Assumendo per il coefficiente di Darcy il valore $\lambda = 0.03$, determinare il

valore della pressione assoluta alla bocca di aspirazione della pompa ed il battente in aspirazione.

Si assumono come sezioni a e b per il calcolo rispettivamente il pelo libero nel pozzo e la sezione di aspirazione della pompa. Applicando la equazione di Bernoulli tra gli estremi del circuito considerato si ottiene

$$\frac{p_b - p_a}{\gamma} + \frac{w_b^2 - w_a^2}{2g} + z_b - z_a = -h_A$$

Notare che, essendo la pompa *esterna* al sistema considerato, la sua prevalenza non compare nei calcoli. La pressione in ingresso (sezione a) è quella atmosferica e la velocità in ingresso si può ritenere trascurabile. Si ha dunque

$$\frac{p_b - p_a}{\gamma} = -h_A - (z_b - z_a) - \frac{w^2}{2g}$$

Si hanno perdite concentrate in corrispondenza dell'imbocco pozzo-tubo ($K_1 = 1$) e della curva a monte della pompa ($K_2 = 0.5$). Pertanto

$$h_A = h_{Ad} + h_{Ac} = \frac{w^2}{2g} \left(\lambda \frac{L}{D} + K_1 + K_2 \right) = \frac{4}{2 \cdot 9.81} \left(0.03 \frac{7}{0.025} + 0.5 + 1 \right) = 1.98 \text{ m}$$

da cui si ottiene infine

$$p_b = p_a - \gamma \left(z_b - z_a + \frac{w^2}{2g} + h_A \right) = 10^5 - 9800 \cdot (7 + 0.2 + 1.98) = 0.1 \text{ bar}$$

Il battente in aspirazione è ricavabile da $p_b = \gamma H_b$

$$H_b = \frac{p_b}{\gamma} = \frac{10^4}{9800} = 1.02 \text{ m}$$

La pressione immediatamente a monte della pompa è quindi inferiore a quella atmosferica e tende a diminuire fino ad annullarsi all'aumentare dell'altezza di aspirazione, $z_b - z_a$, o delle perdite di carico nel lato aspirazione, h_A . Questo porta il fluido in condizioni prossime alla saturazione e può provocare il fenomeno della *cavitazione*: all'interno del fluido, in corrispondenza delle palette della girante pompa, dove la pressione scende ancora, si formano bollicine di gas che successivamente collassano producendo un caratteristico rumore e vibrazioni che danneggiano le palette stesse. Per evitare tale inconveniente, è buona norma installare le pompe nel punto più basso del circuito (in questo caso in fondo al pozzo). Vedremo in seguito che si può effettuare anche una verifica del *battente minimo di aspirazione* (ingl. *NPSH, net positive suction head*) precisato dal fabbricante delle stesse.

□

ESEMPIO 5.15 - Autoclave

Si deve alimentare un'autoclave alla pressione relativa $p_2 = 4$ bar con acqua a 20 °C, prelevando il fluido da un serbatoio aperto all'atmosfera situato alla stessa quota dell'autoclave, tramite una tubazione di acciaio galvanizzato di diametro $D = 25$ mm e lunghezza $L = 5$ m con due curve a gomito di 90°. La portata è $G = 1.47$ kg/s. Determinare la prevalenza necessaria per la pompa e la potenza resa al fluido.

Considerando come sezioni estreme i peli liberi del fluido nel serbatoio e nell'autoclave (in cui le velocità sono trascurabili) l'equazione di Bernoulli diviene

$$\frac{p_b - p_a}{\gamma} = h' - h_A$$

la velocità del fluido è data da

$$\bar{w} = \frac{G}{\rho A} = \frac{1.47}{1000 \frac{\pi 0.025^2}{4}} = 3 \text{ m/s}$$

per determinare le perdite distribuite si ricavano i seguenti dati: rugosità dell'acciaio galvanizzato $\epsilon = 150 \mu\text{m}$ ($\epsilon/D = 0.006$), viscosità dell'acqua $\mu = 1 \text{ mPa s}$, densità dell'acqua $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, da cui $Re = 75000$, $\lambda = 0.033$, per cui le perdite distribuite sono date da

$$h_{A,d} = \lambda \frac{L}{D_H} \frac{\bar{w}^2}{2g} = 0.033 \frac{5 \cdot 3^2}{2 \cdot 0.025 \cdot 9.81} = 3.0 \text{ m}$$

le perdite concentrate sono dovute ai due gomiti ($K_1=K_2=0.5$) per cui

$$h_{A,c} = \sum_{i=1}^2 K_i \frac{\bar{w}_i^2}{2g} = \frac{\bar{w}^2}{2g} \sum_{i=1}^2 K_i = \frac{3^2}{2 \cdot 9.81} 1 = 0.46 \text{ m}$$

in definitiva la prevalenza è data da

$$h' = \frac{p_b - p_a}{\gamma} + h_A = \frac{400000}{9810} + 3.46 = 44 \text{ m}$$

e la potenza assorbita

$$W_R = G g h' = 1.47 \cdot 9.81 \cdot 44 = 635 \text{ W}$$

In questo caso, gran parte della prevalenza della pompa è impiegata per vincere il salto di pressione tra i due serbatoi.

□

ESEMPIO 5.16 – Lancia antincendio

L'ugello terminale di una lancia antincendio ha un diametro in ingresso $D = 21 \text{ mm}$ ed un diametro in uscita $d = 5 \text{ mm}$. In esso scorre acqua a 20 °C . Trascurando le perdite di carico nell'ugello stesso, determinare la pressione all'ingresso quando in uscita si ha una velocità dell'acqua $w_b = 18 \text{ m/s}$.

La pressione in uscita è quella atmosferica (il getto è in contatto con l'atmosfera senza pareti di contenimento). Applicando la equazione di Bernoulli tra gli estremi dell'ugello (supponendolo orizzontale) si ha

$$\frac{p_b - p_a}{\gamma} + \frac{w_b^2 - w_a^2}{2g} = 0$$

dall'equazione di continuità si ha

$$\frac{w_a}{w_b} = \left(\frac{d}{D} \right)^2$$

e sostituendo nella precedente si ottiene

$$p_a - p_b = \frac{\rho w_b^2}{2} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right] = \frac{1000 \cdot 324}{2} \left[1 - \left(\frac{5}{21} \right)^4 \right] = 1.61 \text{ bar}$$

Notare che, dato che in b vige la pressione atmosferica, il risultato rappresenta la pressione *relativa* a monte dell'ugello.



ESEMPIO 5.17 - Problema inverso: determinazione del diametro della tubazione

Si deve trasportare una portata $Q = 0.09 \text{ m}^3/\text{s}$ di acqua ($\mu = 1 \text{ mPa s}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$) per una distanza di 100 m in un tubo commerciale di acciaio ($\varepsilon = 45 \text{ }\mu\text{m}$) con una caduta di pressione inferiore a 900 kPa. Determinare il diametro minimo della tubazione.

La caduta di pressione può essere espressa in metri, applicando la equazione di Bernoulli tra gli estremi della tubazione

$$h_A = \frac{P_a - P_b}{\gamma} = \frac{900000}{9810} = 91.74 \text{ m}$$

Questo problema è complicato dal fatto che il valore di λ dipende dalla velocità del fluido, che non è nota a priori. Sono disponibili due metodi.

Metodo I.

Si procede per tentativi, determinando per primo un valore di D adottando $\lambda = 0.02$.

$$h_{A,d} = \lambda \frac{8LG^2}{\pi^2 g \rho^2 D^5} = \lambda \frac{8 L G_v^2}{\pi^2 g D^5}$$

$$D = \sqrt[5]{\lambda \frac{8LG_v^2}{\pi^2 g h_{A,d}}} = \sqrt[5]{0.02 \frac{8 \cdot 100 \cdot 0.09^2}{\pi^2 \cdot 9.81 \cdot 91.74}} = 0.11 \text{ m}$$

Con questo valore di D , siamo in grado di determinare il valore effettivo di λ e calcolare le perdite di carico reali. Dal diagramma di Moody si ha $\lambda = 0.016$, quindi

$$h_{A,d} = \lambda \frac{8 L G_v^2}{\pi^2 g D^5} = 68.5 \text{ m}$$

Dato che le perdite sono inferiori al previsto, si ricalcola il diametro adottando per λ l'ultimo valore trovato, e così via finché il calcolo non converge, il che in questo caso avviene dopo due iterazioni

$$D = 0.103 \text{ m}, \lambda = 0.017, h_{A,d} = 96.38 \text{ m}$$

$$D = 0.104 \text{ m}, \lambda = 0.017, h_{A,d} = 92 \text{ m}$$

Da notare che il diametro deve essere comunque arrotondato al valore superiore disponibile in commercio, quindi è inutile ricercare una precisione eccessiva.

Metodo II. Si fa uso della seguente formula empirica, dovuta a Swamee e Jain (le grandezze vanno espresse in unità SI):

$$D = 0.66 \left[\varepsilon^{1.25} \left(\frac{LG_v^2}{gh_A} \right)^{4.75} + \frac{\mu}{\rho G_v} \left(\frac{LG_v^2}{gh_A} \right)^{5.2} \right]^{0.04}$$

che dà come risultato

$$D = 112 \text{ mm}$$



ESEMPIO 5.18 – Coefficiente C_v delle valvole.

In alcuni cataloghi, secondo l'uso anglosassone, le cadute di pressione nelle valvole vengono caratterizzate tramite il coefficiente di efflusso C_v

$$C_v = G_v \sqrt{\frac{\rho_R}{\Delta p}}$$

che rappresenta la portata volumetrica di acqua G_v a temperatura ambiente (densità relativa $\rho_R = 1$), in galloni per minuto (1 gal = 3.785 L), che fluisce nella valvola per effetto della caduta di pressione di $\Delta p = 1$ psi (1 bar = 14.5 psi) ai suoi capi. C_v non è quindi una quantità adimensionale.

Data una valvola che ha un $C_v = 1.2$, trovare la portata di gasolio (densità relativa 0.75) che vi passa se ai capi della valvola sono applicate le pressioni $p_1 = 20$ bar e $p_2 = 8$ bar.

Dalla definizione di C_v si ottiene

$$G_v = C_v \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho_R}}$$

Da cui sostituendo $\Delta p = 12$ bar = 174 psi si ottiene

$$G_v = 1.2 \sqrt{\frac{174}{0.75}} = 18.27 \text{ gpm} = 1.15 \text{ L/s}$$

Notare che per passare dal valore di C_v ad un valore del coefficiente di perdita concentrata per la valvola, K , è necessario definire una sezione di passaggio nominale A della valvola stessa e sfruttare la eguaglianza, con le opportune conversioni di unità di misura per esprimere il tutto (tranne C_v) in unità SI

$$\Delta p = 1.733 \cdot 10^{12} \frac{G_v^2 \rho_R}{C_v^2} = \frac{A^2 w^2 \rho_R}{C_v^2} = K \frac{\rho w^2}{2}$$

$$K = 3.466 \cdot 10^{12} \frac{A^2}{C_v^2}$$

Notare anche che più alto è C_v , minore è la resistenza idraulica della valvola.



Appendice 5.1 - TABELLE

Fluido	ρ (kg/m ³)
Acqua	998.2
Acqua marina	1025
Alcool etilico	806
Benzina auto	660-690
Glicerina	1270
Kerosene	800-840
Mercurio	13546
Petrolio greggio	800-920
Tetracloruro di carbonio	1594

Tabella A-1: Densità di alcuni liquidi a 20 °C.

FLUIDO							
Acqua, T (°C)	4	21	66	93	149	232	288
ρ (kg/m ³)	1000	997	979	962	917	826	735
μ (mPa s)	1.55	0.978	0.434	0.305	0.187	0.118	.0095
Olio leggero T (°C)	16	27	38	66	93	121	149
ρ (kg/m ³)	913	910	895	870	865	848	830
μ (mPa s)	86.6	41.4	22.8	7.88	3.72	2.07	1.24
Aria, T (°C)	0	38	93	204	427	816	1650
(p=1bar) ρ (kg/m ³)	1.296	1.136	0.96	0.735	0.503	0.323	0.183
μ (μPa s)	17.32	19.1	21.4	26.02	33.4	44.6	57.4

Tabella A-2: Viscosità e densità di alcuni fluidi in funzione della temperatura.

MATERIALE	
acciaio rivettato	900-9000
calcestruzzo	300-3000
ghisa	260
acciaio galvanizzato	150
acciaio commerciale, ferro fucinato	45
tubo trafilato	1.5
plastica, vetro	0 (liscio)

Tabella A-3: Rugosità media dei condotti in μm (valori indicativi).

Curva a 90°, brusca	1 - 1.35
Curva a 90°, raccordata	0.3 - 1
Curva a U	1.5
Restringimento di sezione (velocità valutata a monte)	0.5-1
Allargamento di sezione (velocità valutata a monte)	1
Ingresso in serbatoio	1
Uscita da serbatoio	1
Valvole completamente aperte	0 - 4
Valvole parzialmente aperte	2 - 20
Raccordo a T, passaggio dritto	1.0
Raccordo a T, diramazione	1.5
Raccordo a T, riunione	3.0

Tabella A-4: Coefficienti di perdita di carico concentrata (valori indicativi). In generale, le perdite per raccordi flangiati sono minori di quelle per raccordi filettati.

Diametro nominale (pollici)	Diametro esterno (mm)	Spessore (mm)	
		Standard	Extra Strong
½"	21.3	2.77	3.73
¾"	26.7	2.87	3.91
1"	33.4	3.38	4.55
1 ¼"	42.2	3.56	4.85
1 ½"	48.3	3.68	5.08
2"	60.3	3.91	5.54
2 ½"	73	5.16	7.01
3"	88.9	5.49	7.62
3 ½"	101.6	5.74	8.08
4"	114.3	6.02	8.56
5"	141.3	6.55	9.52
6"	168.3	7.11	10.97
8"	219.1	8.18	12.7
10"	273	9.27	12.7

Tabella A-5: Diametri dei tubi commerciali secondo ANSI B36.10-B36.19

Appendice 5.2 - (°) Misure di portata tramite dispositivi a strozzamento

I dispositivi a strozzamento consentono di realizzare una misura della portata in un condotto tramite una misura di differenza di pressione tra due sezioni contigue, di differente area, del condotto. Il principio di funzionamento si basa sulla equazione di Bernoulli, e viene descritto nel seguito. Tali dispositivi si distinguono in: orifizi, boccagli e tubi di Venturi, vedi Fig.5-2.1.

Clemens Herschel (1842-1930), basandosi sugli studi di Giovanni Venturi (1746-1822), propose per primo l'omonimo dispositivo per la misura di portata.

La differenza principale tra le tre categorie, oltre alle ovvie distinzioni costruttive, consiste nel differente recupero di pressione che si verifica a valle dello strozzamento, che è pressoché totale nel tubo di Venturi e minimo negli orifizi. Le dimensioni ed i metodi di calcolo della portata sono prescritti da una serie di normative ANSI, ASME ed UNI/ISO. In particolare, la normativa italiana è riportata nella CNR-UNI 10023, 1979, *Misure di portata di correnti fluide per mezzo di diaframmi, boccagli o venturimetri inseriti su condotte in pressione a sezione circolare*.

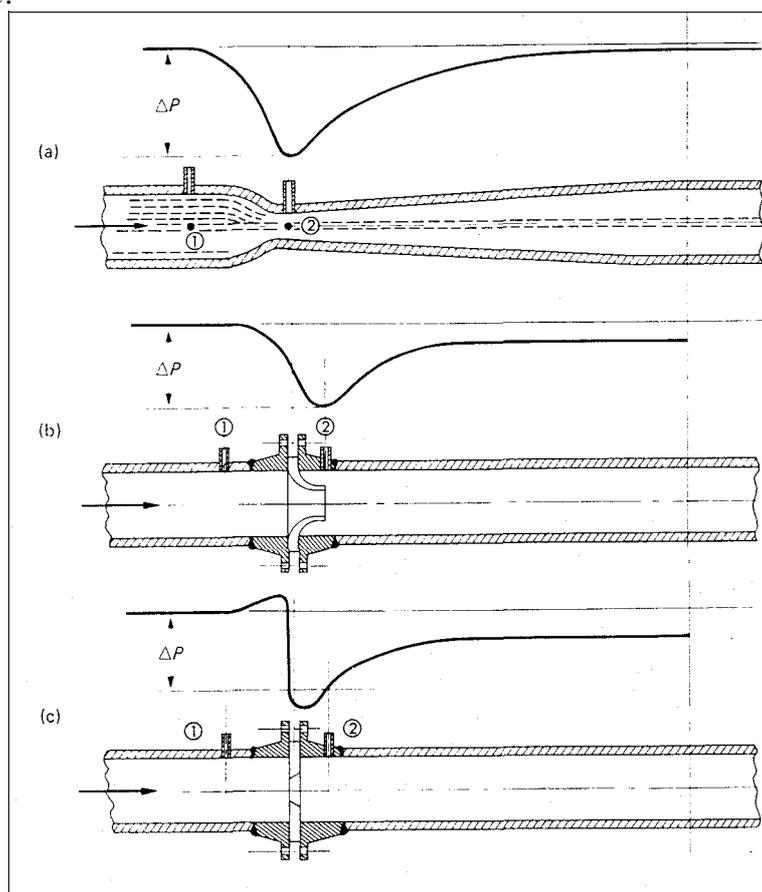


Figura 5-2.1: Tipologie di dispositivi di misura di portata a strozzamento e relativo andamento della pressione: a) venturimetri, b) boccagli, c) diaframmi o orifizi

Funzionamento ideale dei dispositivi a strozzamento

Il funzionamento ideale dei dispositivi a strozzamento è basato sulla equazione di continuità e sulla equazione di Bernoulli, applicate alla sezione del condotto, 1, supposta circolare di diametro D , ed alla sezione ristretta dello strozzamento, 2, anch'essa circolare di diametro d . Dall'equazione di continuità si ha

$$\rho_1 w_1 A_1 = \rho_2 w_2 A_2 \quad (5.31)$$

da cui, per un fluido incomprimibile

$$\frac{w_1}{w_2} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \quad (5.32)$$

Dalla equazione di Bernoulli, considerando il fluido incomprimibile, il condotto orizzontale, le perdite di carico nulle ed assenza di dispositivi di introduzione o di estrazione di energia, risulta:

$$\frac{p_1}{\rho_1 g} + \frac{w_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho_2 g} + \frac{w_2^2}{2g} \quad (5.33)$$

Combinando le due equazioni suddette, si ottiene che la portata ideale in un condotto percorso da un fluido incomprimibile è ottenibile dalla differenza di pressione misurata nella forma:

$$G = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2 \Delta p \rho_1}{1 - \beta^4}} \quad (5.34)$$

dove $\Delta p = p_1 - p_2$ e β viene detto rapporto tra i diametri o rapporto di strozzamento ed è dato da

$$\beta = \frac{d}{D} \quad (5.35)$$

Funzionamento reale e relazione generale per il calcolo della portata

Una serie di fattori rendono la teoria ideale inapplicabile. Tra di essi, la presenza di perdite di carico tra le due sezioni considerate, la contrazione della vena fluida, la localizzazione delle prese di pressione in zone di flusso disturbato. Del complesso di tali fattori si tiene conto tramite un coefficiente di scarico (*discharge coefficient*), C , definito come:

$$C = \frac{G_{ideale}}{G_{reale}} \quad (5.36)$$

tale coefficiente viene in genere determinato empiricamente, e le normative forniscono le relazioni per il suo calcolo per i diversi dispositivi e le diverse localizzazioni delle prese di pressione. Da notare che il coefficiente C è indipendente dal tipo di fluido considerato.

Nel caso che il fluido sia comprimibile, esso subisce una espansione (che in genere viene considerata adiabatica) tra la sezione a monte e lo strozzamento. Per tenere conto della variazione di densità del fluido, si introduce un ulteriore coefficiente, ϵ , detto coefficiente di comprimibilità, riportato anch'esso nelle normative, in cui compare il coefficiente di espansione isoentropica, k .

La relazione generale per il calcolo della portata tramite dispositivi di strozzamento risulta quindi

$$G = C \varepsilon \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2 \Delta p \rho_1}{1 - \beta^4}} \quad (5.37)$$

ESEMPIO 5.19 – Misura della portata tramite un tubo di Venturi

Tra ingresso e gola di un venturimetro, avente diametro nominale $D = 203.2$ mm e diametro della sezione ristretta $d = 101.6$ mm, in cui fluisce acqua a 20 °C, viene letta una differenza di pressione $\Delta p = 7563$ Pa. Determinare la portata nel condotto.

La portata è espressa da

$$G = C \varepsilon \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2 \Delta p \rho_1}{1 - \beta^4}}$$

dove $\varepsilon = 1$ perché il fluido è incomprimibile, e dalla tabella CNR-UNI 10023 per i venturimetri si ha $C = 0.97$.

Il rapporto di strozzamento β vale 0.5. Quindi

$$G = C \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2 \Delta p \rho_1}{1 - \beta^4}} = 0.97 \frac{\pi 0.102^2}{4} \sqrt{\frac{2 \cdot 7563 \cdot 1000}{1 - 0.5^4}} = 31.8 \text{ kg/s}$$

□

ESERCIZI

ESERCIZIO 5.1

Con riferimento all'Esempio 5.1, calcolare il numero di Reynolds, supponendo una viscosità di 1.1 mPa s.

$$[Re = 9.74 \times 10^6]$$

ESERCIZIO 5.2

Uno scambiatore di calore è costituito da due tubi coassiali, di diametro esterno rispettivamente 50 e 100 mm e di spessore 2 mm; nell'intercapedine tra i tubi scorre acqua alla velocità media di 2.4 m/s ed alla temperatura media di 21 °C. Calcolare il diametro idraulico ed il numero di Reynolds.

$$[D_H = 46 \text{ mm}, Re = 112.5 \times 10^3]$$

ESERCIZIO 5.3

Il camino di una centrale termoelettrica deve trasportare una portata volumetrica $Q = 300 \text{ m}^3/\text{s}$ di fumi. Supponendo che il camino sia circolare e di adottare un valore della velocità media del fluido di 10 m/s, calcolare il diametro del camino. Assumendo una viscosità dei fumi di 25 $\mu\text{Pa s}$, una densità degli stessi di 0.83 kg/m^3 , una lunghezza del camino di 120 m ed una rugosità relativa del condotto di 2×10^{-6} , calcolare le perdite di carico distribuite nel camino.

$$[D = 6.18 \text{ m}, Re = 2.05 \times 10^6, \lambda = 0.010, h_a = 1.03 \text{ m}]$$

ESERCIZIO 5.4

Un olio di viscosità 2 Pa s e densità 900 kg/m^3 scorre in un tubo orizzontale di diametro 20 mm e lunghezza $L = 4 \text{ m}$ alla velocità di 0.5 m/s, per effetto di una differenza di pressione Δp . Determinare Δp . Per quale valore della velocità il moto cessa di essere laminare?

$$[\Delta p = 320 \text{ kPa}, w = 222 \text{ m/s}]$$

ESERCIZIO 5.5

Si determini il legame tra perdite di carico e diametro idraulico per moto turbolento in un tubo liscio, assumendo valida la legge di Blasius.

$$[h_a = K / D^{4.75}]$$

ESERCIZIO 5.6

Con riferimento all'impianto di Fig.5 (impianto di sollevamento), determinare la portata di fluido che fuoriesce da una tubazione diritta di 20 mm di diametro che si estende dal serbatoio superiore fino a terra. Si assuma $\lambda = 0.02$ e un livello di liquido di 2 m nel serbatoio superiore.

$$[w = 4.4 \text{ m/s}, G = 1.36 \text{ kg/s}]$$

ESERCIZIO 5.7

Si devono pompare 10 L/s di olio di oliva ($\mu = 82 \text{ mPa s}$, $\rho = 918 \text{ kg/m}^3$) in una tubazione orizzontale lunga 30 m con una caduta di pressione massima di 30 kPa. Determinare il diametro minimo del tubo. (Suggerimento: supporre il moto laminare e verificare a posteriori).

$$[D = 75 \text{ mm}, Re = 1880]$$

ESERCIZIO 5.8

Si deve pompare una portata $G = 185 \text{ m}^3/\text{h}$ di kerosene ($\mu = 80 \text{ mPa s}$, $\rho = 820 \text{ kg/m}^3$) attraverso una tubazione di acciaio trafilato lunga 300 m con 3 gomiti a 90° in un serbatoio situato 20 m al di sopra di una pompa, che ha una pressione in uscita di 9 bar. Determinare il diametro minimo necessario per la tubazione. Si assuma $\lambda = 0.04$, verificando a posteriori che questo sia accettabile.

[0.13 m; il valore di λ calcolato a posteriori è approssimativamente 0.042 per $\epsilon/D = 0.005$]

ESERCIZIO 5.9

Due serbatoi A e B sono connessi da una tubazione di acciaio di diametro 60 cm lunghezza 9000 m, che si suppone abbia $\lambda = 0.02$. A si trova ad una quota 45 m superiore a B. Le perdite di carico concentrate sono trascurabili.

- quale portata volumetrica fluisce da A a B in assenza di pompe?
- che potenza di pompaggio è necessaria per pompare $0.625 \text{ m}^3/\text{s}$ da A a B?
- che potenza di pompaggio è necessaria per pompare $0.625 \text{ m}^3/\text{s}$ da B ad A?
- Determinare il valore effettivo di λ nel caso precedente se la tubazione ha una rugosità $\epsilon = 900 \mu\text{m}$ (assumere $\mu = 0.9 \text{ mPa s}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$).

[a) $0.49 \text{ m}^3/\text{s}$; b) 29.7 m; c) 119.7 m; d) 0.022]

ESERCIZIO 5.10

Viene proposto un acquedotto trans-Mediterraneo che trasporti orizzontalmente $20 \text{ m}^3/\text{s}$ di acqua dolce in un condotto di 5 m di diametro lungo 800 km. Considerando solo le perdite di carico distribuite, stimare la caduta di pressione e la potenza di pompaggio necessaria. Il condotto, dato il diametro elevato, può essere considerato idraulicamente liscio.

[$h_a = 75 \text{ m}$, $W_p = 15 \text{ MW}$]

ESERCIZIO 5.11

Si pompano $90 \text{ m}^3/\text{h}$ di olio ($\mu = 400 \text{ mPa s}$, $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$) attraverso una tubazione orizzontale in acciaio di 100 mm di diametro ($\epsilon = 0.05$) lunga 100 m. Quale è la caduta di pressione? Quale diametro di tubazione bisognerebbe adottare per ridurre le perdite di carico ad 1/3 del valore precedente, mantenendo costante la portata?

[$\Delta p = 408 \text{ kPa}$, 0.1319 m]

ESERCIZIO 5.12

La condotta forzata di una centrale idroelettrica trasporta acqua da un bacino per un dislivello di 900 m. Il tubo ha un diametro di 400 mm, una lunghezza di 1500 m e si contrae in fondo in un ugello ben rastremato di diametro 100 mm. Calcolare: a) la velocità di efflusso dall'ugello; b) la portata di acqua; c) la pressione prima della restrizione dell'ugello; d) la potenza meccanica teoricamente ottenibile dal getto di acqua (portata x energia cinetica specifica all'ugello) e) la potenza meccanica teoricamente disponibile (portata x variazione di energia potenziale specifica). Proporre un'azione correttiva per migliorare lo sfruttamento dell'energia disponibile.

Si assuma $\lambda = 0.02$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ e si trascurino le perdite concentrate.

[a) 118 m/s; b) 926 kg/s; c) 6.53 MPa rel.; d) 6.45 MW e) 8.17 MW]

Appunti ed Esercizi di *Fisica Tecnica*

Cap.6. Le macchine termiche semplici e l'analisi di disponibilità

Paolo Di Marco

Versione 2021.01 – 26.11.2021.

La presente dispensa è redatta ad esclusivo uso didattico per gli allievi dei corsi di studi universitari dell'Università di Pisa. L'autore se ne riserva tutti i diritti. Essa può essere riprodotta solo totalmente ed al fine summenzionato, non può essere alterata in alcuna maniera o essere rivenduta ad un costo superiore a quello netto della riproduzione. Ogni altra forma di uso e riproduzione deve essere autorizzata per scritto dall'autore.

L'autore sarà grato a chiunque gli segnali errori, inesattezze o possibili miglioramenti.

Introduzione e definizioni preliminari

Nel presente capitolo viene affrontato lo studio delle macchine termiche. Una *macchina termica motrice* può essere definita come un sistema termodinamico che, interagendo con l'ambiente, converte con continuità energia termica in energia meccanica. Per operare con continuità, la macchina deve generalmente essere *ciclica*, ossia ritornare periodicamente nello stato di partenza. Talune macchine termiche non sono effettivamente cicliche: ad esempio un motore a scoppio ritorna periodicamente nella configurazione di partenza, ma il suo fluido di lavoro, una volta subita la reazione di combustione, non ritorna più allo stato iniziale. Tuttavia, anche in questi casi, è possibile, con particolari accorgimenti, ricondursi allo studio di una macchina ciclica.

Si faccia attenzione a non confondere una macchina *ciclica* con una macchina *reversibile*: il fatto che il fluido di lavoro ritorni allo stato iniziale non implica che le trasformazioni siano reversibili (a tale scopo è richiesto che *anche l'ambiente* torni allo stato iniziale).

Per affrontare lo studio delle macchine termiche, è utile definire due sistemi ideali: il *serbatoio di energia termica* (SET) ed il *serbatoio di energia meccanica* (SEM).

Si definisce *serbatoio di energia termica* o *sorgente termica* un sistema di volume costante e di capacità termica infinita che scambia energia unicamente sotto forma di calore; detto trasferimento avviene a temperatura costante e con generazione entropica irreversibile nulla, ovvero:

$$T_{SET} = \text{cost}, V_{SET} = \text{cost}, \Delta S_{irr,SET} = 0 \quad (6.1)$$

un sistema di capacità termica molto grande (un lago, l'atmosfera) può essere assimilato a un SET. Anche una caldaia, e più in generale ogni sistema termostato, possono essere rappresentati come SET, in quanto l'energia termica che viene prelevata dal fluido è reintegrata continuamente dalla combustione (o da un'altra fonte di apporto di energia) e la temperatura non varia.

Notare come i termini *sorgente* e *serbatoio* riportino alla concezione, oggi superata, del calore come un fluido

Si definisce *serbatoio di energia meccanica* un sistema ideale atto a scambiare energia unicamente sotto forma di lavoro, con generazione entropica nulla, ovvero:

$$\Delta S_{irr,SEM} = 0 \quad (6.2)$$

Formulazioni del secondo principio della termodinamica per le macchine cicliche.

Abbiamo già visto come il secondo principio della termodinamica, predicendo la "direzione" delle trasformazioni, ci indichi quali trasformazioni, tra tutte quelle consentite dal primo principio della termodinamica, possono realmente avvenire. E' ovvio dunque che tale principio ponga delle limitazioni anche alle trasformazioni che possono avvenire nelle macchine cicliche e detti alcune regole per il loro funzionamento. Di tutti gli enunciati del secondo principio, i due seguenti riguardano in particolare le macchine cicliche.

Enunciato di Kelvin-Planck

E' impossibile costruire una macchina termica (od un sistema di macchine termiche) *ciclica* il cui *unico* effetto sia la produzione di energia meccanica mediante assorbimento di calore da una sola sorgente.

Enunciato di Clausius

E' impossibile costruire una macchina termica (od un sistema di macchine termiche) *ciclica* il cui *unico* effetto sia il trasferimento di calore da una sorgente più fredda ad una più calda.

Entrambi gli enunciati contengono le parole chiave “ciclico” e “unico”, che sono fondamentali: è infatti possibile costruire macchine termiche *non cicliche* che violino entrambi gli enunciati, o macchine cicliche per cui la violazione degli enunciati non è *l'unico* effetto.

Si potrebbe facilmente dimostrare che una volta costruita una macchina che viola l'enunciato di Kelvin-Planck (“macchina anti-Planck”), si potrebbe costruire anche una “macchina anti-Clausius” e viceversa.

E' da notare a questo punto che esistono anche *macchine cicliche inverse od operatrici*, che *assorbendo* energia meccanica, realizzano il trasferimento di energia termica da una sorgente termica più fredda ad una più calda, ovvero ciò che l'enunciato di Clausius proibisce che avvenga *spontaneamente*. Nel caso di tali macchine, il trasferimento di calore non è l'unico risultato, essendo accompagnato dall'assorbimento di energia meccanica.

Tutti gli enunciati del secondo principio della termodinamica sono formulati in maniera negativa: è impossibile che ... Teoricamente, quindi, basterebbe una sola controprova per confutarli.

Nel corso di questo capitolo, delineeremo anche come il secondo principio ci sia di aiuto nel:

1. determinare le migliori prestazioni teoriche delle macchine termiche cicliche;
2. nella valutazione quantitativa dei fattori che precludono l'ottenimento delle migliori prestazioni.

Tali considerazioni costituiscono la base della cosiddetta *analisi di disponibilità (o analisi exergetica)* che verrà accennata nell'ultima parte di questo capitolo.

Nel seguito, per maggiore chiarezza, stabiliremo di volta in volta tramite uno schema la direzione positiva del calore e del lavoro scambiato, ed indicheremo gli stessi come valori assoluti. In particolare, indicheremo con $|W_{TC}|$ la potenza termica assorbita dalle sorgenti “calde” e con $|W_{TF}|$ quella ceduta alle sorgenti “fredde”.

Macchine termiche che scambiano calore con una sola sorgente

Una macchina di questo tipo interagisce con un solo SET ed un solo SEM. Tuttavia, l'enunciato di Kelvin-Planck nega l'esistenza di una macchina che produca lavoro scambiando calore con una sola sorgente. Verifichiamo questo alla luce dei bilanci di energia e di entropia.

Per tale macchina (vedi Fig.1) il bilancio di energia si riduce a

$$0 = |W_{TC}| - |W_M| \quad (6.3)$$

mentre quello entropico diviene:

$$0 = \frac{|W_{TC}|}{T_C} + \dot{S}_{irr} \quad (6.4)$$

il che, essendo entrambi i termini a secondo membro positivi, è manifestamente impossibile. Tuttavia non è impossibile il contrario, ossia costruire una macchina che assorba lavoro cedendo calore ad una sola sorgente. Basta riconsiderare il caso precedente cambiando segno ad entrambi gli scambi. Una macchina di tale tipo viene detta *totalmente dissipativa* ed un freno ne costituisce un esempio pratico.

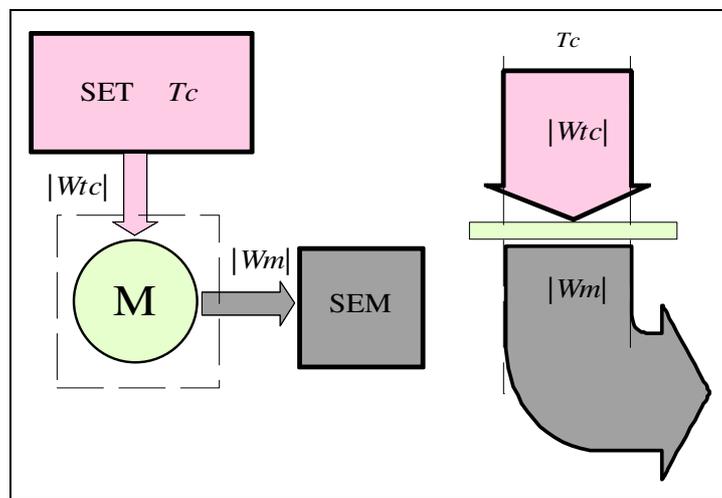


Figura 6.1: Schema di funzionamento e flusso di energia in una macchina semplice motrice che interagisce con una sola sorgente (il funzionamento è impossibile).

Macchina termica semplice motrice

In forza di quanto detto, per potere funzionare una macchina termica deve scambiare calore con almeno due SET, cedendo energia meccanica ad un SEM. Una macchina che scambia calore con due sole sorgenti termiche viene quindi detta *macchina semplice*. Il suo ciclo termodinamico è costituito quindi da due isoterme a temperatura diversa, in cui avvengono gli scambi termici, raccordate da altre due trasformazioni che non possono essere altro che adiabatiche.

Se così non fosse, la macchina scambierebbe calore anche con altre sorgenti a temperatura diversa dai due SET e quindi non sarebbe più una macchina semplice.

Per tale macchina (v. Fig.2) i bilanci di energia e di entropia assumono la forma:

$$0 = |W_{TC}| - |W_{TF}| - |W_M|$$

$$0 = \frac{|W_{TC}|}{T_C} - \frac{|W_{TF}|}{T_F} + \dot{S}_{irr} \quad (6.5)$$

Notare che il senso degli scambi di calore non può essere invertito: se la macchina assorbisse calore dalla sorgente fredda e lo cedesse alla sorgente calda, cedendo nel contempo energia meccanica all'esterno, il secondo principio della termodinamica sarebbe violato. La dimostrazione è riportata in App.1.

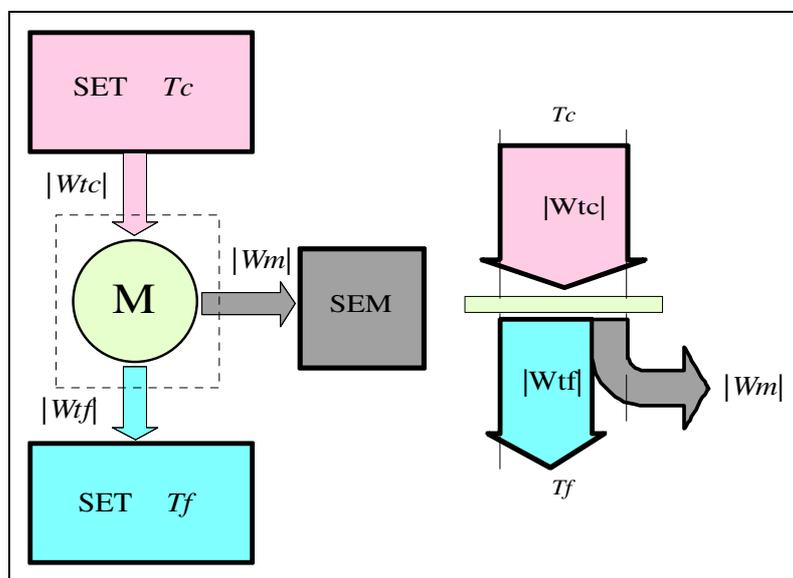


Figura 6.2: Schema di funzionamento e flusso di energia nella macchina semplice motrice.

Si definisce inoltre *rendimento* η di una macchina termica il rapporto tra l'effetto utile (il lavoro o la potenza meccanica ottenuta) e la spesa per produrlo (ovvero il calore o la potenza termica *fornita* alla macchina). Esso si può facilmente calcolare dalle equazioni precedenti:

$$\begin{aligned} |W_M| &= |W_{TC}| - |W_{TF}| \\ \frac{|W_{TF}|}{|W_{TC}|} &= \frac{T_F}{T_C} + \frac{T_F \dot{S}_{irr}}{|W_{TC}|} \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\eta = \frac{|W_M|}{|W_{TC}|} = \frac{|W_{TC}| - |W_{TF}|}{|W_{TC}|} = 1 - \frac{|W_{TF}|}{|W_{TC}|} = 1 - \frac{T_F}{T_C} - \frac{T_F \dot{S}_{irr}}{|W_{TC}|} \quad (6.7)$$

Da cui si vede che il rendimento è compreso tra 0 ed 1. In particolare, se la macchina semplice è anche reversibile, il rendimento assume la forma:

$$\eta_{REV} = 1 - \frac{T_F}{T_C} \quad (6.8)$$

La macchina semplice reversibile viene detta anche *macchina di Carnot*. Il suo ciclo termodinamico è rappresentato sul diagramma $T-s$ in Fig.3. In questo caso, le due trasformazioni adiabatiche, essendo anche reversibili, divengono isoentropiche ed il ciclo ha la forma di un rettangolo. Affinché gli scambi di calore possano effettivamente avvenire nel senso prescritto, la trasformazione isoterma a temperatura T_C deve avvenire ad una

temperatura inferiore di almeno una quantità infinitesima dT a quella del SET (nel computo del rendimento, questa differenza infinitesima viene fatta idealmente tendere a zero). L'opposto deve naturalmente avvenire per la trasformazione alla temperatura T_F : in tal modo, il calore può effettivamente essere trasferito dal fluido alla sorgente fredda.

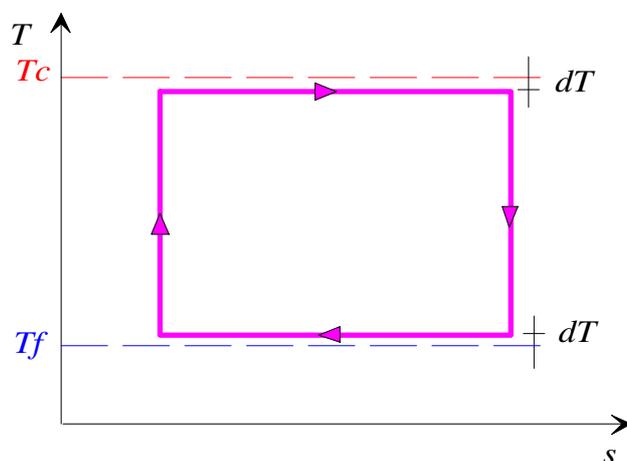


Figura 6.3: Ciclo termodinamico della macchina semplice motrice reversibile (macchina di Carnot).

Il francese Sadi Carnot (1796-1832) teorizzò il funzionamento di tale macchina nel 1824 nel suo famoso saggio *“Sulla Potenza Motrice del Fuoco”*, sorprendentemente avanzato rispetto ai tempi in cui fu scritto: i principi della termodinamica ricevettero infatti un assetto definitivo soltanto verso la fine dell’800. Carnot morì di colera a 36 anni, ed in ottemperanza alle norme igieniche vigenti, tutti i suoi beni personali, compresi i suoi ultimi appunti scientifici, vennero bruciati.

E’ utile notare alcune proprietà della macchina di Carnot:

- Il suo rendimento è indipendente dal fluido di lavoro;
- A *parità di temperature estreme di lavoro*, nessuna macchina può avere un rendimento superiore alla macchina di Carnot (la dimostrazione verrà data in seguito).

In pratica, qualunque macchina reale ha un rendimento minore della macchina di Carnot che opera tra le medesime temperature estreme, per due motivi:

- il suo ciclo ideale (detto ciclo di riferimento) non è quello di Carnot;
- le trasformazioni presentano nella realtà un certo grado di irreversibilità che riduce ulteriormente il rendimento.

A causa delle difficoltà tecniche che si frappongono, la macchina semplice (e tantomeno la macchina di Carnot) non è mai stata realizzata in pratica. Peraltro, lo stesso Carnot, con grande spirito ingegneristico, scriveva riguardo a tale macchina nel suo libro: *“I tentativi per raggiungere queste prestazioni potrebbero essere più dannosi che utili, se si trascurano altre importanti considerazioni”*. Nel seguito, egli identificava i principali meriti di una macchina termica: sicurezza, solidità, minimi ingombri e costo.

E’ utile rimarcare che la parola rendimento, applicata in questo contesto, non deve trarre in inganno: di solito il concetto di rendimento viene associato ad un limite *tecnologico*, ovvero al

fatto che le imperfezioni costruttive precludono il raggiungimento della massima efficienza (è questo il caso, ad esempio, del rendimento isoentropico di una turbina, definito nel Cap.5). In questo caso tuttavia il rendimento di una macchina termica rappresenta un limite *fisico*: nessuna macchina, per quanto perfetta dal punto di vista tecnologico, può superarlo senza infrangere il secondo principio della termodinamica.

In questo contesto, è utile definire anche un *rendimento di secondo principio*, ovvero il rapporto tra il rendimento della macchina e quello della macchina di Carnot che opera tra le stesse temperature estreme

$$\varepsilon = \frac{\eta}{\eta_{REV}} \quad (6.9)$$

Il rendimento di secondo principio può (anche se solo idealmente) raggiungere il valore 1.

ESEMPIO 6.1 - Rendimento di un ciclo a vapore.

Una centrale termoelettrica operante con un ciclo a vapore produce una potenza elettrica di 1200 MW e riversa nell'ambiente esterno a 35 °C una potenza termica di 1530 MW. La temperatura massima del vapore è di 550 °C. Valutare i rendimenti di primo e secondo principio.

Il rendimento del ciclo è dato da

$$\eta = \frac{|W_M|}{|W_{TC}|} = \frac{|W_M|}{|W_M| + |W_{TF}|} = \frac{1200}{1200 + 1530} = 0.44$$

per valutare il rendimento di secondo principio, bisogna calcolare il rendimento della macchina di Carnot che opera tra le stesse temperature estreme (ossia 35 °C e 550 °C)

$$\eta_{REV} = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 1 - \frac{308.15}{823.15} = 0.626$$

(notare che è indispensabile convertire le temperature in K). Si ha quindi

$$\varepsilon = \frac{0.44}{0.626} = 0.70$$

□

Metodi e motivazioni per aumentare il rendimento delle macchine termiche.

Alla luce di quanto visto, è utile passare in rassegna le possibilità di aumentare il rendimento di una macchina e le motivazioni che ci spingono a farlo. Tali considerazioni, sebbene riferite per ora alla sola macchina semplice, valgono qualitativamente per qualunque macchina ciclica. Bisogna tenere presente che, allo stato attuale, nella maggioranza dei casi l'energia termica necessaria al funzionamento della macchina viene prodotta tramite la *combustione* di un combustibile, e questo apre una serie molto articolata di problematiche, che possono qui essere discusse solo per sommi capi.

- Innanzitutto ogni combustibile ha un *costo*, che si ripercuote su quello dell'energia prodotta;
- inoltre la reazione combustione produce una serie di *inquinanti atmosferici* (attualmente, quelli che ci preoccupano di più sono l'anidride carbonica, principale responsabile dell'effetto serra, e l'ossido di azoto);

- infine, i combustibili più usati attualmente, i cosiddetti *combustibili fossili* (carbone, petrolio, metano) vengono estratti dalle riserve accumulate sulla terra nel corso di milioni di anni e sono pertanto *soggetti ad esaurimento*.

Aumentare il rendimento di una macchina vuol dire ridurre i suoi consumi di combustibile *a parità di energia utile prodotta*, e quindi mitigare le problematiche accennate in precedenza.

I metodi per aumentare il rendimento di primo principio sono in sintesi i seguenti.

- Riduzione delle irreversibilità. Bisogna tenere conto tuttavia che la riduzione delle irreversibilità implica generalmente un miglioramento tecnologico della macchina, i cui costi possono superare i benefici in termini di risparmio di combustibile.
- Aumento della temperatura superiore del ciclo: questo implica un miglioramento dei materiali di cui sono costituite le pareti della macchina, o l'introduzione di sistemi di raffreddamento, ed anche in questo caso i costi possono superare i benefici: si parla pertanto di limite *tecnico-economico*. Attualmente, con particolari accorgimenti tecnici, si possono raggiungere temperature stazionarie superiori del ciclo di circa 1350 °C, che crescono ulteriormente nel caso di motori a regime periodico, come il motore a scoppio. La Fig.4 riporta la variazione del rendimento della macchina di Carnot con la temperatura superiore del ciclo, per una temperatura inferiore fissata di 300 K.

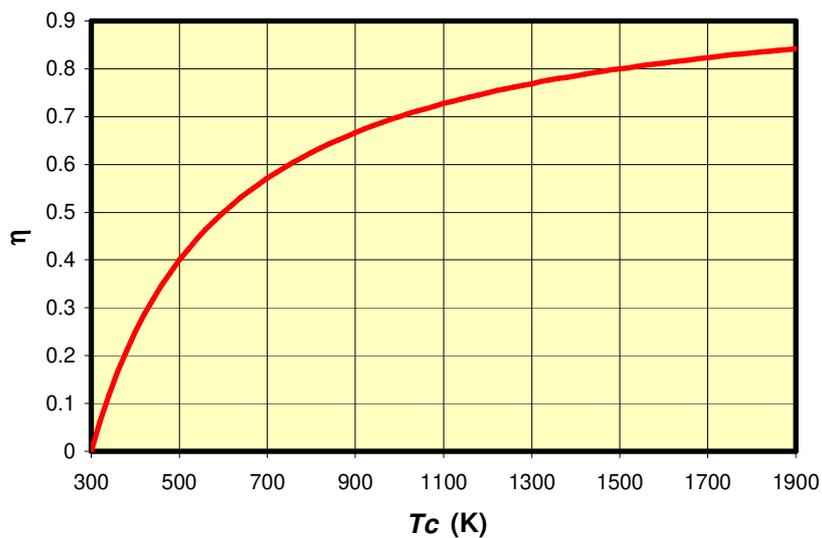


Figura 6.4: Rendimento della macchina di Carnot; la temperatura della sorgente fredda, ovvero dell'ambiente, è fissata a 300 K.

- Diminuzione della temperatura inferiore del ciclo: in genere, le macchine termiche cedono calore all'ambiente esterno, la cui temperatura non è regolabile. Sebbene, in linea teorica, sarebbe possibile refrigerare l'ambiente con una macchina frigorifera, è facile convincersi che il lavoro assorbito da quest'ultima macchina sarebbe superiore all'incremento di lavoro della macchina motrice. Questa soluzione non è quindi praticabile; non di meno, il rendimento delle macchine termiche aumenta di fatto in inverno od in ambienti molto freddi.

Parametri principali per la valutazione di una macchina termica

A conclusione del paragrafo, indichiamo brevemente quali sono i principali parametri che bisogna tenere in considerazione nel valutare le prestazioni di una macchina termica motrice:

- **Rendimento di primo principio:** caratterizza la macchina dal punto di vista economico, dando una indicazione sul costo (sia in termini economici che ambientali) del combustibile per il suo funzionamento. Tuttavia, macchine a rendimento superiore possono richiedere soluzioni tecnologiche più sofisticate ed avere quindi costi di investimento e manutenzione superiori, e non rivelarsi quindi vantaggiose.
- **Rendimento di secondo principio:** indica se la macchina sfrutta razionalmente l'energia, ossia se il suo rendimento è vicino al massimo teoricamente raggiungibile o meno.
- **Temperatura massima del ciclo:** pone dei requisiti sui materiali o sugli eventuali sistemi di raffreddamento dei componenti della macchina; in altri termini ci dice se la macchina è realizzabile o meno e se i relativi costi sono accettabili.
- **Consumo specifico di fluido o portata massica unitaria (PMU):** portata di fluido necessaria per ottenere la potenza unitaria (espressa in kg/s/W, oppure kg/J): caratterizza le dimensioni della macchina dando quindi un'idea del peso e del costo. Macchine della stessa tipologia con minori portate massiche unitarie richiedono, a parità di potenza, portate minori e quindi sono in linea di massima più leggere e meno ingombranti.

Macchina semplice operatrice

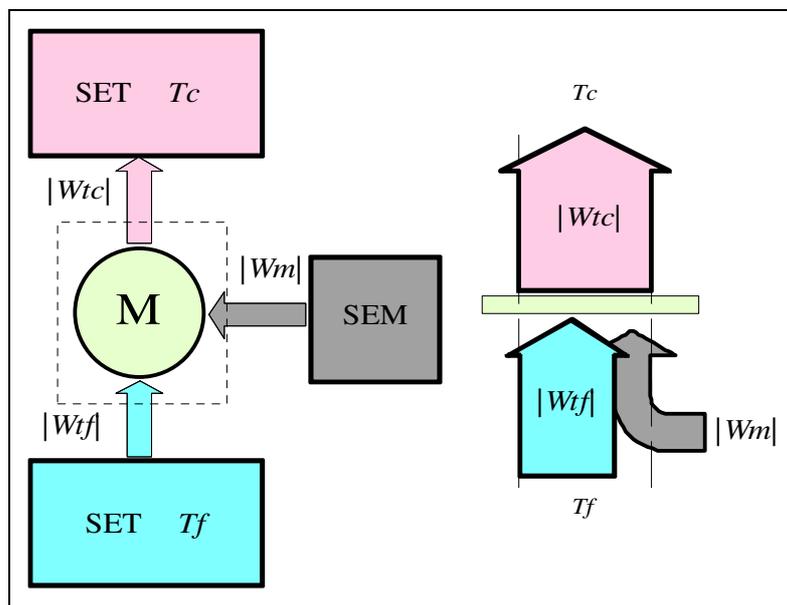


Figura 6.5: Schema di funzionamento e flusso di energia nella macchina semplice operatrice.

Come già accennato, la macchina termica operatrice (od inversa) trasferisce calore dalla sorgente fredda a quella calda assorbendo potenza meccanica: il relativo schema è riportato in Fig.5.

Il ciclo di lavoro è anche in questo caso costituito da due isoterme e due adiabatiche; nel caso di irreversibilità nulle, esso è riportato sul piano $T-s$ in Fig.6. Si noti che in questo caso il ciclo

viene percorso in senso antiorario, dato che la macchina assorbe energia meccanica; l'isoterma superiore deve trovarsi ad una temperatura superiore di almeno un infinitesimo dT a T_C per consentire che lo scambio termico avvenga nel verso ipotizzato (cessione di calore alla sorgente calda), mentre l'opposto deve avvenire per l'isoterma inferiore.

Convenzionalmente, si parla di *macchina frigorifera* se la temperatura ambiente corrisponde a quella *superiore* del ciclo, e di *pompa di calore* se la temperatura ambiente corrisponde a quella *inferiore* del ciclo.

Il funzionamento e gli schemi delle due macchine sono identici, cambia solo la definizione del coefficiente di prestazione, che verrà data in seguito.

Macchina frigorifera

Le macchine frigorifere vengono usate per mantenere un locale a temperatura inferiore a quella dell'ambiente circostante, "pompendo fuori" l'energia termica che "filtra" comunque attraverso le pareti (nonostante queste ultime siano in genere costituite di materiali termicamente isolanti). Nella pratica, esse trovano impiego nella refrigerazione domestica ed industriale e nel condizionamento estivo dei locali.

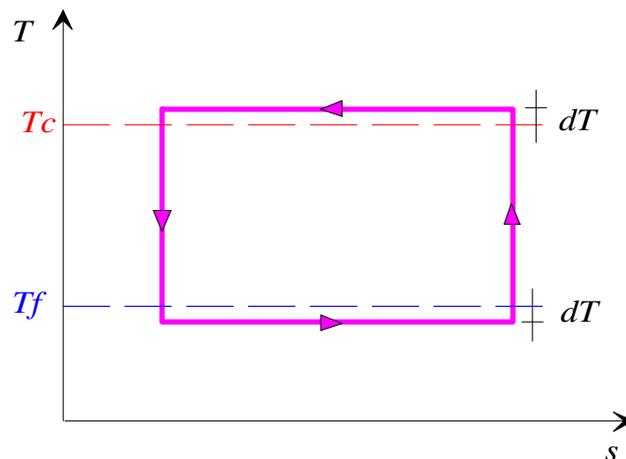


Figura 6.6: Ciclo termodinamico della macchina semplice operatrice reversibile.

Come già accennato, la macchina semplice frigorifera lavora secondo lo schema di Fig.5, in cui $T_C=T_{amb}$. Il primo e secondo principio si scrivono dunque nella forma:

$$\begin{aligned} 0 &= -|W_{TC}| + |W_{TF}| + |W_M| \\ 0 &= -\frac{|W_{TC}|}{T_C} + \frac{|W_{TF}|}{T_F} + \dot{S}_{irr} \end{aligned} \quad (6.10)$$

per valutare le prestazioni della macchina si introduce il coefficiente di prestazione (*COP*, acronimo dell'inglese *coefficient of performance*). In questo caso, l'effetto utile che si vuole ottenere è l'asportazione di calore dalla sorgente fredda, mentre la spesa è rappresentata dalla potenza meccanica assorbita, per cui

$$COP_f = \frac{|W_{TF}|}{|W_M|} = \frac{|W_{TF}|}{|W_{TC}| - |W_{TF}|} \quad (6.11)$$

E' ovvio che le prestazioni della macchina sono tanto migliori quanto maggiore è il COP_f . Con una procedura analoga a quella seguita per la macchina motrice, l'espressione del COP_f può essere ottenuta ricavando W_{TC} dalla seconda delle equazioni di bilancio e sostituendola nella prima

$$COP_f = \frac{1}{\frac{T_C}{T_F} - 1 + \frac{T_C \dot{S}_{irr}}{|W_{TF}|}} \quad (6.12)$$

da cui si vede che il COP_f diminuisce all'aumentare della irreversibilità del ciclo. Nel caso di macchina reversibile la relazione diviene

$$COP_{f,REV} = \frac{T_F}{T_C - T_F} \quad (6.13)$$

Per una macchina frigorifera reversibile, la variazione del $COP_{f,REV}$ con la temperatura inferiore del ciclo (la superiore è quella ambiente, fissata a 300 K) è riportata in Fig.7. Da essa si ricava che il $COP_{f,REV}$ può variare da 0 ad infinito e diminuisce al crescere della differenza di temperatura, presentando un asintoto verticale quando le temperatura della sorgente fredda va a coincidere con quella della sorgente calda, condizione nella quale la potenza meccanica tende a zero.

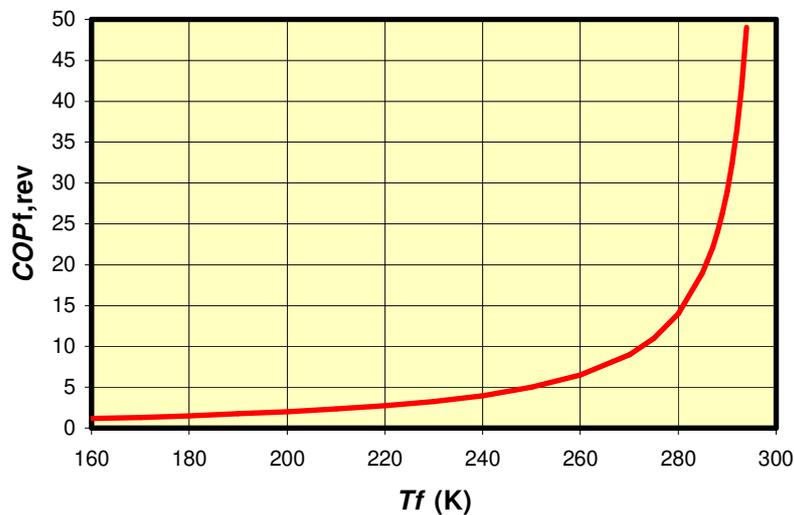


Figura 6.7: Coefficiente di prestazione della macchina frigorifera reversibile; la temperatura della sorgente calda, ovvero dell'ambiente, è fissata a 300 K.

ESEMPIO 6.2 - Macchina frigorifera.

Una macchina frigorifera sottrae 220 kW da una cella frigorifera mantenuta a -5 °C, cedendo calore all'ambiente esterno a 22 °C. La potenza meccanica richiesta è di 88 kW. Determinare il COP della macchina e confrontarlo con quello della macchina ideale che opera tra le stesse temperature.

Il COP del ciclo frigorifero è dato da

$$COP_f = \frac{|W_{TF}|}{|W_M|} = \frac{220}{88} = 2.5$$

il COP della macchina semplice ideale che opera tra le stesse temperature estreme è

$$COP_{f,rev} = \frac{T_F}{T_C - T_F} = \frac{268}{295 - 268} = 9.9$$

(notare che è indispensabile convertire le temperature in K). Si ha quindi

$$\psi = \frac{COP_f}{COP_{f,rev}} = \frac{2.5}{9.9} = 0.25$$



Pompa di calore

Una pompa di calore può essere usata come dispositivo di riscaldamento, prelevando calore dall'ambiente esterno freddo e "pomandolo" in un locale a temperatura maggiore. La macchina semplice lavora secondo lo schema di Fig.5, in cui $T_F = T_{amb}$. Da tale figura risulta evidente il vantaggio di tale macchina rispetto ad un impianto di riscaldamento convenzionale: una parte dell'energia termica che viene riversata nel locale viene infatti prelevata dall'ambiente esterno ed è, per così dire, "gratuita".

Taluni impianti di condizionamento sono reversibili e di inverno operano come pompe di calore riscaldando i locali in cui sono installati. Nella pratica, il vantaggio energetico di tali impianti è bilanciato da un elevato costo di investimento rispetto ai convenzionali impianti di riscaldamento, e questo rende ragione della loro limitata diffusione.

Il primo e secondo principio si scrivono nella stessa forma della macchina frigorifera:

$$\begin{aligned} 0 &= -|W_{TC}| + |W_{TF}| + |W_M| \\ 0 &= -\frac{|W_{TC}|}{T_C} + \frac{|W_{TF}|}{T_F} + \dot{S}_{irr} \end{aligned} \quad (6.14)$$

In questo caso, l'effetto utile che si vuole ottenere è la cessione di calore alla sorgente calda, mentre la spesa è rappresentata sempre dalla potenza meccanica assorbita, per cui il COP_p è definito come

$$COP_p = \frac{|W_{TC}|}{|W_M|} = \frac{|W_{TC}|}{|W_{TC}| - |W_{TF}|} \quad (6.15)$$

L'espressione del COP_p può essere ottenuta con una procedura analoga alle precedenti

$$COP_p = \frac{1}{1 - \frac{T_F}{T_C} + \frac{T_F \dot{S}_{irr}}{|W_{TC}|}} \quad (6.16)$$

da cui si vede che il COP_p diminuisce all'aumentare della irreversibilità del ciclo. Per una pompa di calore reversibile si ha

$$COP_{p,REV} = \frac{T_C}{T_C - T_F} \quad (6.17)$$

la variazione del $COP_{p,REV}$ con la temperatura superiore del ciclo (la inferiore è quella ambiente, fissata a 300 K) è riportata in Fig.8. Da essa si ricava che il $COP_{p,REV}$ può variare da infinito ad 1 (ha un asintoto orizzontale quando la temperatura calda tende ad infinito) e diminuisce al crescere della differenza di temperatura; presentando un asintoto verticale quando le temperatura della sorgente calda va a coincidere con quella della sorgente fredda (condizione in cui la potenza meccanica assorbita tende a zero).

In maniera analoga a quanto fatto per le macchine motrici, anche per quelle inverse (siano esse frigorifere o pompe di calore) si può definire *un coefficiente di prestazione di secondo principio*, ovvero il rapporto tra il COP effettivo e quello della macchina semplice reversibile che opera tra le medesime temperature estreme:

$$\psi = \frac{COP}{COP_{REV}} \quad (6.18)$$

che caratterizza la “bontà” della macchina reale rispetto alla migliore teoricamente realizzabile.

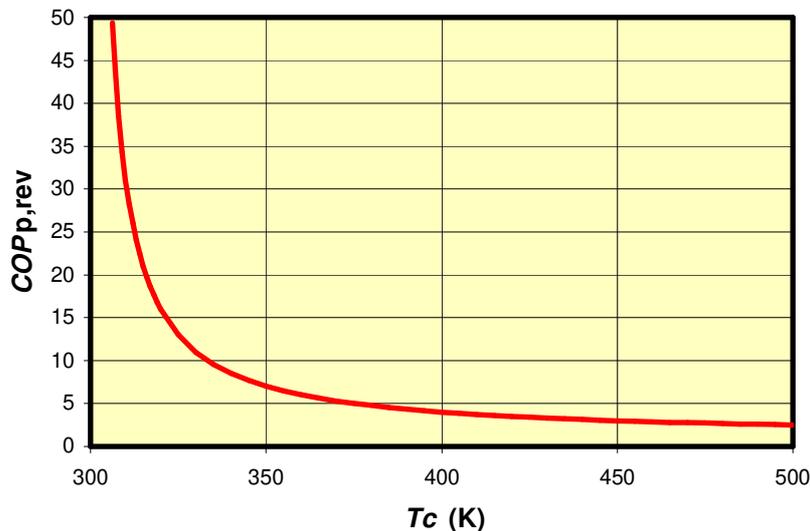


Figura 6.8: Coefficiente di prestazione della pompa di calore reversibile; la temperatura della sorgente fredda, ovvero dell'ambiente, è fissata a 300 K.

ESEMPIO 6.3 - Pompa di calore.

Un edificio richiede 1250 MJ al giorno per mantenersi a 21 °C con una temperatura esterna di 10 °C. Determinare la minima potenza meccanica teorica per una pompa di calore destinata a questo compito.

La potenza termica da fornire all'edificio è

$$|W_{TC}| = \frac{1250 \cdot 10^6}{86400} = 14.47 \text{ kW}$$

Il $COP_{p,rev}$ della pompa di calore semplice reversibile è dato da

$$COP_{p,rev} = \frac{T_C}{T_C - T_F} = \frac{294}{294 - 283} = 26.7$$

(notare che è indispensabile convertire le temperature in K). Si ha quindi

$$COP_{p,rev} = \frac{|W_{TC}|}{|W_M|} \Rightarrow |W_M| = \frac{|W_{TC}|}{COP_{p,rev}} = \frac{14470}{26.7} = 542 \text{ W}$$

la rimanente potenza termica (13.9 kW) viene “pompatà” dalla sorgente fredda. Le pompe di calore tecnicamente realizzabili hanno COP effettivi assai inferiori (3-5).

□

Cenni all'analisi di disponibilità

Introduzione

Nella prima parte di questo capitolo abbiamo sfruttato il secondo principio della termodinamica per determinare la massima quantità di lavoro meccanico ottenibile da un processo *ciclico*; intendiamo ora generalizzare queste considerazioni ad un processo *qualunque*. Questo tipo di studio prende il nome di *analisi di disponibilità* (*availability analysis*) o *anche analisi exergetica*, anche se per alcuni questo secondo termine dovrebbe essere limitato ai sistemi aperti a regime.

Per chiarire il concetto di *disponibilità* dell'energia facciamo il seguente esempio: consideriamo un sistema *isolato* costituito da due porzioni distinte: una bombola chiusa contenente aria ad alta pressione e temperatura, e da aria a pressione e temperatura ambiente che circonda la bombola (notare che anche questa seconda porzione fa parte del sistema). Se apriamo il volantino della bombola, il sistema si porterà alla fine in una condizione di equilibrio in cui pressione e temperatura sono uniformi nella bombola e nello spazio circostante. I due principi della termodinamica, enunciati nella forma di Clausius nel primo capitolo, ci dicono che *l'entropia* del nostro sistema isolato tende ad un *massimo*, raggiunto il quale ogni trasformazione si arresta, mentre *l'energia* rimane *costante*. Eppure una volta che la nostra trasformazione si è compiuta ed il sistema ha raggiunto l'equilibrio, intuiamo di avere perduto irrimediabilmente qualcosa: avremmo potuto utilizzare l'energia del gas contenuto nella bombola per ottenere lavoro da una turbina, e adesso non possiamo più. In altre parole, l'energia contenuta nella bombola non è *scomparsa*, ma non è più *disponibile* per produrre lavoro.

Questo risponde ad una delle domande più giustificate ed ingenua, e quindi terribili, che gli studenti prima o poi si pongono: se l'energia si conserva, come è che noi la consumiamo? In realtà ciò che consumiamo è la *disponibilità*, non *l'energia*. Per la stessa ragione non possiamo utilizzare le grandi quantità di energia termica contenute nel mare o nell'atmosfera per produrre lavoro: tale energia, come vedremo in seguito, è infatti *indisponibile*.

L'analisi di disponibilità riveste grande importanza nello sviluppare sistemi che utilizzino efficientemente e razionalmente le risorse energetiche. Via via che tali risorse vengono utilizzate, la loro energia non va perduta (essa si ritrova in ultima analisi nel riscaldamento dell'ambiente), ma la loro disponibilità viene distrutta. L'analisi di disponibilità dà risposta principalmente alle domande seguenti

- Quale è la massima quantità di lavoro utile che posso ottenere da una risorsa energetica?
- Dato che a causa delle irreversibilità otterrò sicuramente meno lavoro del massimo teorico, dove e in quale misura sono localizzati gli sprechi nell'utilizzo di tale risorsa?

E' evidente che la risposta alla seconda domanda fornisce i criteri per migliorare il progetto dei sistemi termodinamici e guida le azioni volte al loro miglioramento.

La disponibilità della energia dipende dalla esistenza di differenze di temperatura, pressione, energia cinetica e potenziale, che possono essere sfruttati per produrre lavoro mentre il sistema si porta in equilibrio con la parte di ambiente che lo circonda: è pertanto evidente che essa va valutata rispetto una condizione di riferimento circostante. Generalmente si assume per tale stato quello della pressione e della temperatura ambiente: Dato che temperatura e pressione ambiente hanno una certa variabilità, convenzionalmente si assume $p_0 = 1 \text{ atm} =$

1.013 bar e $T_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$. E' chiaro che un sistema (o una porzione di sistema) in tali condizioni, avendo annullato ogni forma di gradiente e di energia cinetica o potenziale, non è più in grado di produrre lavoro e pertanto tale stato si definisce *stato morto* (*dead state*). Nel seguito faremo anche uso del concetto di *intorno* (*surroundings*) di un sistema: questo è inteso come la parte di ambiente immediatamente circostante al sistema, in cui si risentono gli effetti delle trasformazioni subite dal sistema stesso. Si assume che *unicamente lavoro meccanico tecnicamente utilizzabile* possa fluire dall'*intorno* all'*ambiente* e che le irreversibilità siano localizzate unicamente all'interno del sistema e del suo intorno. Inoltre si assume che il volume totale del sistema più il suo intorno si mantenga costante e che l'intorno si mantenga a pressione e temperatura costanti (p_0, T_0) (v. Fig.9).

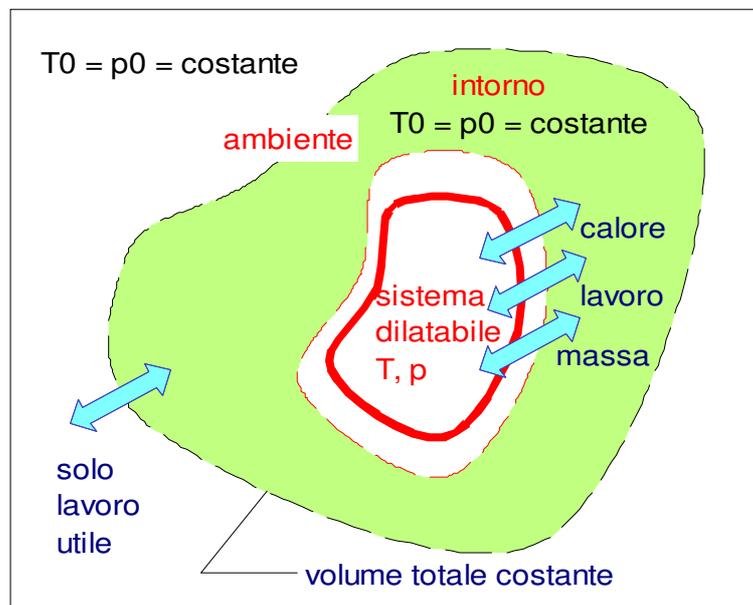


Figura 6.9: Intorno di un sistema: da esso fuoriesce solo il lavoro meccanico utile.

In pratica, con il concetto di *intorno* dividiamo ulteriormente l'ambiente (o esterno) in due parti, riconoscendo che siamo interessati a trasportare al di fuori dell'intorno solo gli effetti meccanici utili. Gli altri effetti delle trasformazioni del sistema (scambio termico e irreversibilità) rimangono confinati nell'intorno: la superficie che divide l'intorno dall'ambiente esterno è pertanto adiabatica. La parte di ambiente al di fuori dell'intorno è quindi un serbatoio di energia meccanica.

Definizione di disponibilità e sua espressione.

Si definisce *disponibilità* la massima quantità di lavoro meccanico tecnicamente utilizzabile che può essere prodotta da un sistema mentre esso si porta in equilibrio termico e meccanico con il suo intorno, ovvero raggiunge lo stato morto. Per determinare la sua espressione, facciamo uso combinato delle equazioni di bilancio per un sistema chiuso scritte nella forma di energia totale [J], applicandole al *sistema combinato* (*chiuso*) costituito dal sistema oggetto di studio e dal suo intorno.

Tale sistema è per definizione adiabatico per cui

$$\begin{aligned}\Delta E_{tot} &= (U_0 - U - E_c - E_p) + \Delta U_{int} = -L \\ \Delta S_{tot} &= (S_0 - S) + \Delta S_{int} = \Delta S_s\end{aligned}\quad (6.19)$$

dove il suffisso *tot* si riferisce al sistema combinato, *int* all'intorno, *0* allo stato morto e abbiamo sfruttato il fatto che l'intorno non subisce variazioni di energia cinetica e potenziale e che le variazioni di energia interna e di entropia sono additive.

Per la prima equazione di Gibbs applicata all'intorno abbiamo

$$T_0 \Delta S_{int} = \Delta U_{int} + p_0 \Delta V_{int} \quad (6.20)$$

da cui, sfruttando la seconda delle (19) si ha

$$\Delta U_{int} = T_0 \Delta S_{int} - p_0 \Delta V_{int} = T_0 \Delta S_s - T_0 (S_0 - S) - p_0 \Delta V_{int} \quad (6.21)$$

e sostituendo nella prima delle (19) cambiata di segno si ottiene infine

$$L = (U + E_c + E_p - U_0) + p_0 \Delta V_{int} - T_0 (S - S_0) - T_0 \Delta S_s \quad (6.22)$$

rimane da eliminare la variazione di volume dell'intorno, il che si ottiene facilmente ricordando che il volume totale del sistema combinato è per definizione costante, per cui

$$(V_0 - V) + \Delta V_{int} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta V_{int} = (V - V_0) \quad (6.23)$$

Dove è opportuno notare che V_0 rappresenta il volume del sistema una volta che ha raggiunto l'equilibrio con lo stato morto.

Da cui si ottiene infine

$$L = (U + E_c + E_p - U_0) - T_0 (S - S_0) - p_0 (V_0 - V) - T_0 \Delta S_s \quad (6.24)$$

E' evidente che, essendo l'ultimo termine (il termine di irreversibilità) positivo o nullo, il massimo lavoro si avrà in assenza di irreversibilità e questo definisce la disponibilità, che indichiamo con A

$$A = L_{max} = (U + E_c + E_p - U_0) - T_0 (S - S_0) - p_0 (V_0 - V) \quad (6.25)$$

La equazione suddetta afferma una cosa abbastanza ovvia: il lavoro massimo ottenibile da una trasformazione che porta un sistema allo stato morto si verifica in condizioni reversibili ed è dato da tre termini: la variazione di energia totale (iniziale-finale), meno il calore ceduto reversibilmente all'intorno per raggiungere l'equilibrio con esso, meno il lavoro connesso alla dilatazione del sistema (positivo se $V_0 > V$, ovvero quando il sistema si dilata per raggiungere l'equilibrio), che essendo fatto sull'intorno, non è tecnicamente utilizzabile all'esterno di esso. La disponibilità, fin quando T_0 e p_0 rimangono costanti, è una funzione di stato estensiva e può quindi anche essere espressa per unità di massa come

$$a = \frac{A}{M} = (u + e_c + e_p - u_0) - T_0 (s - s_0) - p_0 (v_0 - v) \quad (6.26)$$

possiamo quindi scrivere che per unità di massa il lavoro ottenuto in una trasformazione reversibile o meno che porta allo stato morto è dato da

$$l = a - T_0 \Delta s_s \quad (6.27)$$

Da questa relazione risulta chiaro il ruolo delle irreversibilità nel ridurre il lavoro ottenuto da una trasformazione ed in ultima analisi nel *distuggere la disponibilità*. Si può anche vedere che il lavoro perduto è legato al termine di irreversibilità da

$$l_{perd} = T_0 \Delta s_s \quad (6.28)$$

che viene detta anche *equazione di Gouy-Stodola*.

ESEMPIO 6.4 – Valutazione della disponibilità di un sistema.

Supponiamo che la bombola di cui abbiamo parlato nell'introduzione abbia un volume di 100 L e contenga aria (gas ideale con c_p costante, $R = 287$, $k = 1.4$) alla temperatura di 700 °C e alla pressione di 7 bar. Valutare la disponibilità del sistema assumendo $T_0 = 25$ °C e $p_0 = 101.3$ kPa.

La disponibilità specifica è data da

$$a = (u + e_c + e_p - u_0) - T_0 (s - s_0) - p_0 (v_0 - v)$$

I termini di energia cinetica e potenziale sono nulli, e inoltre si ha

$$c_v = \frac{R}{k-1} = 717.5 \text{ J/kg K}; \quad c_p = k c_v = 1005 \text{ J/kg K}; \quad p_0 (v_0 - v) = R \left(T_0 - T \frac{p_0}{p} \right)$$

per cui, sfruttando le espressioni di du e ds per il gas ideale si ha

$$\begin{aligned} a &= (u - u_0) - T_0 (s - s_0) - p_0 (v_0 - v) = c_v (T - T_0) - T_0 \left(c_p \ln \frac{T}{T_0} - R \ln \frac{p}{p_0} \right) - R \left(T_0 - T \frac{p_0}{p} \right) = \\ &= 717.5 (973.15 - 298.15) - 298.15 \left(1005 \ln \frac{973.15}{298.15} - 287 \ln \frac{7}{1.013} \right) - 287 \left(298.15 - 973.15 \frac{1.013}{7} \right) = \\ &= 250.1 \text{ kJ/kg} \end{aligned}$$

La bombola contiene una massa $M = pV/RT = 0.25$ kg di aria, per cui

$$A = M a = 0.25 \cdot 250.1 = 62.5 \text{ kJ}$$

In questo caso, la disponibilità del gas contenuto nella bombola avrebbe consentito di produrre, utilizzando dispositivi opportuni, un lavoro meccanico *fino a 62.5 kJ* (in assenza di irreversibilità); aprendo il volantino della bombola tale potenzialità viene completamente distrutta dalle irreversibilità senza che si ottenga alcuna forma di lavoro utile.

□

Bisogna notare che in questa valutazione della disponibilità si è trascurato *il contributo chimico*, ovvero la possibilità di produrre lavoro addizionale sfruttando le reazioni chimiche che possono avvenire all'interno del sistema. Questo aspetto riveste particolare importanza ad es. nello studio dei processi di combustione, ma viene per ora tralasciato.

Concludiamo questa sezione notando che *un valore negativo di disponibilità non ha significato fisico*. Se il sistema non si trova in equilibrio con lo stato morto, può comunque raggiungerlo *spontaneamente* con una trasformazione che implica *lavoro nullo*. Conseguentemente il *massimo* lavoro ricavabile non può essere inferiore a zero, e quindi la disponibilità può essere solo positiva o nulla.

Bilancio di disponibilità ed exergia

La funzione disponibilità è una proprietà estensiva del sistema e quindi anche per essa è possibile scrivere una equazione di bilancio. Nel far ciò bisogna tenere conto che la disponibilità non è una grandezza conservativa, ma viene distrutta dalle irreversibilità. Pertanto, sulla falsariga di quanto fatto nel capitolo 4 per massa, energia ed entropia si potrà scrivere

$$\frac{dA}{dt} = \dot{A}_{calore} + \dot{A}_{l.mecc.} + \dot{A}_{trasp.massa} - \dot{A}_{distrutta} \quad (6.29)$$

Ovvero che la variazione di disponibilità di un sistema è data dalla somma del flusso di disponibilità associato al lavoro meccanico ($\dot{A}_{l.mecc.}$) più il flusso di disponibilità associato allo scambio termico ($\dot{A}_{calore.}$) più il flusso di disponibilità associato al trasporto di massa ($\dot{A}_{trasp.massa}$), meno la disponibilità distrutta per unità di tempo dalle irreversibilità ($\dot{A}_{distrutta}$).

La disponibilità, come il calore, è considerata positiva quando entra nel sistema.

Il resto di questa sezione è dedicato ad ottenere le espressioni dei quattro termini suddetti. Per non appesantire eccessivamente la trattazione, perdendo così di vista il significato fisico di quanto viene derivato, si riportano nel seguito solo gli aspetti qualitativi confinando le dimostrazioni nell'App.2. Nelle sezioni successive, il bilancio di disponibilità verrà come di consueto specializzato per i sistemi chiusi e per quelli aperti a regime.

Il flusso di disponibilità dovuto allo scambio di lavoro meccanico è dato da

$$\dot{A}_{l.mecc.} = -W'_{m,a} = -\left(W'_m - p_0 \frac{dV}{dt}\right) \quad (6.30)$$

questa espressione tiene conto che la potenza tecnicamente utilizzabile rilasciata dal sistema va a decrescere la disponibilità ed è data dalla potenza meccanica erogata meno la potenza impegnata nella dilatazione del sistema contro il suo intorno (notare che vi compare p_0 e non $p!$), che non è utilizzabile a fini pratici.

Il contributo dovuto allo scambio termico è dato da

$$\dot{A}_{calore} = \sum_k \left(1 - \frac{T_0}{T_k}\right) W_{t,k} \quad (6.31)$$

questo termine tiene conto che la potenza termica rilasciata dal sistema attraverso una superficie a temperatura T_k potrebbe essere utilizzata in un ciclo di Carnot (che a sua volta la rilascia a temperatura T_0) per produrre una potenza meccanica $W_m = \eta_C W_t$ dove η_C è appunto il rendimento della macchina di Carnot. Ovviamente, se il calore viene rilasciato dal sistema alla temperatura dello stato morto (T_0) nessuna ulteriore produzione di lavoro è possibile.

Bisogna anche notare che il fattore tra parentesi nella Eq.(31) (detto anche fattore di Carnot) diviene negativo quando $T_k < T_0$, vale a dire per temperature di scambio inferiori a quelle dello stato morto: in questo caso la disponibilità del sistema diminuisce quando W_{tk} è positivo, ovvero il sistema acquista calore da sorgenti a bassa temperatura: in altri termini, il sistema deve *consumare* disponibilità perché questo possa avvenire, come accade infatti nelle macchine frigorifere.

Il termine dovuto allo scambio di massa è dato da

$$\dot{A}_{trasp.massa} = \sum_i G_i (a_{f,i} + e_{p,i} + e_{c,i}) - \sum_u G_u (a_{f,u} + e_{p,u} + e_{c,u}) \quad (6.32)$$

dove a_f è detta *disponibilità di efflusso* o più comunemente *exergia* ed è data da

$$a_f = h - h_0 - T_0 (s - s_0) \quad (6.33)$$

tale quantità tiene conto non solo del flusso di disponibilità specifica ma anche del contributo del lavoro di efflusso attraverso l'ingresso o l'uscita del sistema.

In altri termini, con la terminologia che abbiamo adottato, tra exergia e disponibilità c'è la stessa relazione che sussiste tra entalpia ed energia: l'exergia è la variazione di disponibilità da associare al trasporto di massa al di fuori del sistema, che tiene conto al suo interno del lavoro di efflusso. Tuttavia, come verrà accennato nelle conclusioni, questa terminologia non è universalmente condivisa.

Infine il termine di distruzione della disponibilità, ricavabile anche dall'equazione di Gouy-Stodola (eq.28) è esprimibile come

$$\dot{A}_{distrutta} = T_0 \dot{S}_{irr} \quad (6.34)$$

Combinando le precedenti espressioni si ottiene infine il bilancio di disponibilità del sistema nella forma

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} = & \sum_k \left(1 - \frac{T_0}{T_k}\right) W_{t,k} - W'_{m,a} \\ & + \sum_i G_i (a_{f,i} + e_{p,i} + e_{c,i}) - \sum_u G_u (a_{f,u} + e_{p,u} + e_{c,u}) - T_0 \dot{S}_{irr} \end{aligned} \quad (6.35)$$

Bisogna notare che tale equazione, essendo stata ricavata combinando i bilanci di energia e di entropia (v. App.2), *non rappresenta una nuova equazione indipendente*, ma può essere utilizzata in sostituzione di una delle due precedenti.

Bilancio di disponibilità per un sistema chiuso

Come di consueto, per un sistema chiuso i termini convettivi nel bilancio si annullano, per cui

$$\frac{dA}{dt} = \sum_k \left(1 - \frac{T_0}{T_k}\right) W_{t,k} - W'_{m,a} - T_0 \dot{S}_{irr} \quad (6.36)$$

Da cui si ricava

$$W'_{m,a} = - \frac{dA}{dt} + \sum_k \left(1 - \frac{T_0}{T_k}\right) W_{t,k} - T_0 \dot{S}_{irr} \quad (6.37)$$

Per un sistema chiuso si ha dunque che il lavoro fatto per unità di tempo è dato dalla diminuzione di disponibilità, più il lavoro che potrebbe ancora essere ottenuto dal calore rilasciato a temperatura maggiore di quella ambiente, meno la distruzione della disponibilità dovuta alle irreversibilità.

ESEMPIO 6.5 – Un'automobile ad aria compressa?

Un'automobile ad aria compressa funziona prelevando energia da un serbatoio di aria compressa, a temperatura ambiente, del volume di 350 L. Si supponga che tale auto debba avere un'autonomia di 200 km, per percorrere i quali occorre un'energia meccanica di 50 MJ, equivalente grossomodo ad un consumo di 50 km per litro di benzina. Determinare la minima pressione che si dovrebbe avere nella bombola, ipotizzando che l'aria sia un gas ideale con c_p costante.

In questo caso, ipotizzando un processo completamente reversibile, dall'equazione di bilancio si ha

$$W'_{m,a,REV} = - \frac{dA}{dt} - G_u a_{f,u}$$

Il termine relativo al calore nell'equazione precedente si annulla perché $T_k = T_0$ senza necessità di dover dichiarare il processo adiabatico. Inoltre possiamo ipotizzare di scaricare l'aria allo stato morto, per cui anche $a_{f,u} = 0$ (ogni altra opzione sottrarrebbe disponibilità utile). Integrando, si trova il lavoro massimo ottenibile

$$L_{max,REV} = A - A_0 = A - 0$$

la disponibilità iniziale nella bombola dovrebbe quindi essere data da 50 MJ. Si ipotizza, come di consueto, che la temperatura dello stato morto coincida con quella ambiente. Si ha quindi

$$A = M a = \frac{pV}{RT_0} \left[(u + e_c + e_p - u_0) - T_0 (s - s_0) - p_0 (v_0 - v) \right]$$

Il primo termine tra parentesi quadra è nullo, dato che non vi sono variazioni di temperatura, energia cinetica e energia potenziale. Il significato fisico del terzo termine tra parentesi quadra indica che una parte del lavoro meccanico scambiato deve essere utilizzato per effettuare la dilatazione del gas compresso nell'atmosfera circostante e non può quindi essere utilizzato a fini pratici. Si ha quindi

$$A = M a = \frac{pV}{RT_0} \left[-T_0 (s - s_0) - p_0 (v_0 - v) \right]$$

Utilizzando l'espressione del ds per un gas ideale a c_p costante e l'equazione di stato per il calcolo del volume specifico si ha

$$A = \frac{pV}{RT_0} \left[T_0 R \ln \frac{p}{p_0} - p_0 \left(\frac{RT_0}{p_0} - \frac{RT_0}{p} \right) \right] = pV \left(\ln \frac{p}{p_0} - 1 + \frac{p_0}{p} \right) = 50 \text{ MJ}$$

Che può anche essere scritta come

$$\frac{A}{p_0 V} = p' \left(\ln p' - 1 + \frac{1}{p'} \right) \quad \text{dove} \quad p' = \frac{p}{p_0} \quad (*)$$

Questa costituisce una equazione implicita in p' che risolta numericamente (assumendo come di consueto $p_0 = 101.3 \text{ kPa}$) fornisce $p = 30.1 \text{ MPa}$ (301 bar).

Nella realtà, dato che tale valore rappresenta la pressione *minima*, occorrerà una pressione più alta o una bombola di volume maggiore. Rimane poi da progettare il motore (ed il relativo ciclo termodinamico) in grado di realizzare in pratica tale lavoro (e da alloggiare nell'auto un serbatoio a pressione di 350 litri ...).

E' interessante notare che la funzione (*) riportata sopra *non è mai negativa*, anche per $p' < 1$ (ovvero $p < p_0$), vedi figura 6.9b : in questo caso infatti il lavoro meccanico si può ottenere *riempiendo* il serbatoio con aria a esterna pressione atmosferica! \square

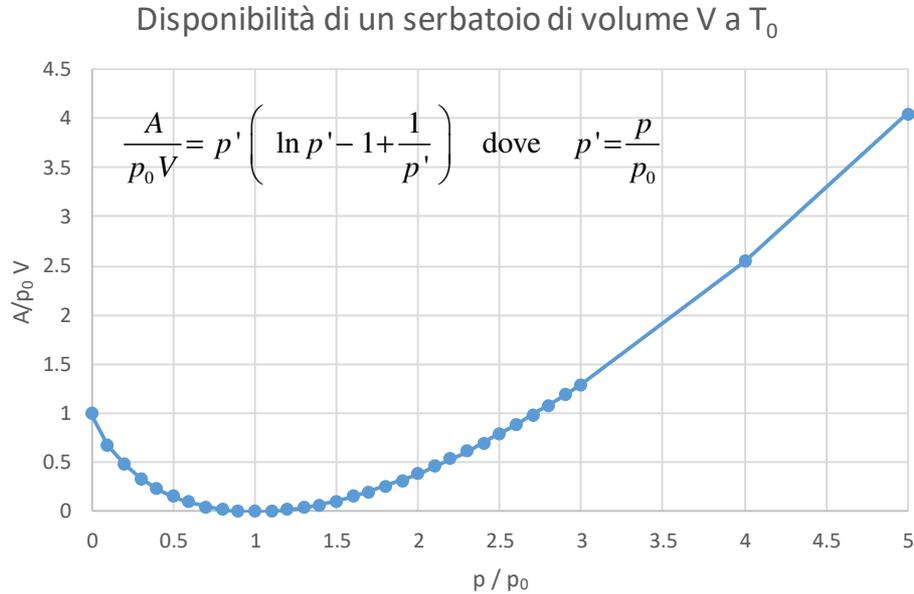


Figura 6.9b: Disponibilità di un serbatoio di azoto alla temperatura dello stato morto in funzione della pressione.

Bilancio di disponibilità per una macchina termica ciclica – temperature medie di scambio

E' interessante riportare le conclusioni che si ricavano dal bilancio di disponibilità per una macchina termica semplice reversibile, ovvero un sistema ciclico che scambia calore con due sole sorgenti a temperatura T_C e T_F . Per tale sistema a regime si ha $dA/dt = 0$, e indicando gli scambi termici in valore assoluto, si ha

$$W'_{m,a} = \left(1 - \frac{T_0}{T_C} \right) |W_{TC}| - \left(1 - \frac{T_0}{T_F} \right) |W_{TF}| \tag{6.38}$$

e quindi

$$\eta = \frac{W'_{m,a}}{W_{TC}} = \left(1 - \frac{T_0}{T_C} \right) - \left(1 - \frac{T_0}{T_F} \right) \frac{|W_{TF}|}{|W_{TC}|} \tag{6.39}$$

D'altra parte, dal bilancio di entropia per un sistema reversibile si ha (vedi Eq.6)

$$\frac{|W_{TF}|}{|W_{TC}|} = \frac{T_F}{T_C} \tag{6.40}$$

Sostituendo nella precedente, con facili passaggi

$$\eta = \frac{W'_{m,a}}{W_{TC}} = \left(1 - \frac{T_0}{T_C} \right) - \left(1 - \frac{T_0}{T_F} \right) \frac{T_F}{T_C} = 1 - \frac{T_F}{T_C} \tag{6.41}$$

Si vede quindi che dalla più generale Eq.(38) si ritrovano le conclusioni enunciate da Carnot nel 1824. E' tuttavia adesso immediata la generalizzazione della Eq.(38) ad una macchina ciclica che scambia calore un numero k arbitrario di sorgenti:

$$W'_{m,a} = \sum_k \left(1 - \frac{T_0}{T_k}\right) W_{t,k} \quad (6.42)$$

E' possibile, con un po' di pazienza, esprimere il rendimento di tale macchina in modo semplice e significativo. Limitandosi per semplicità al caso in cui tutte le temperature T_k sono superiori a quella dello stato morto, gli addendi della sommatoria a secondo membro della Eq.(39) possono essere positivi o negativi a seconda del segno di $W_{t,k}$. Dividendo quindi gli scambi di calore positivi e quelli negativi, e passando ai valori assoluti per maggiore chiarezza, si ha

$$W'_{m,a} = \sum_i \left(1 - \frac{T_0}{T_i}\right) |W_{TC,i}| - \sum_j \left(1 - \frac{T_0}{T_j}\right) |W_{TF,j}| \quad (6.43)$$

che può essere riarrangiata come

$$W'_{m,a} = \sum_i |W_{TC,i}| - \sum_j |W_{TF,j}| - T_0 \left(\sum_i \frac{|W_{TC,i}|}{T_i} - \sum_j \frac{|W_{TF,j}|}{T_j} \right) \quad (6.44)$$

Si definiscono ora le *temperature medie di scambio* superiore ed inferiore come

$$T_{mC} = \frac{\sum_i |W_{TC,i}|}{\sum_i \frac{|W_{TC,i}|}{T_i}}, \quad T_{mF} = \frac{\sum_j |W_{TF,j}|}{\sum_j \frac{|W_{TF,j}|}{T_j}} \quad (6.45)$$

In pratica, le temperature medie di scambio sono medie opportune, pesate sulla potenza termica scambiata, che conservano il flusso entropico nel sistema. Sostituendo le temperature medie di scambio nella precedente Eq.(44) si ottiene

$$W'_{m,a} = \left(1 - \frac{T_0}{T_{mC}}\right) \sum_i |W_{TC,i}| - \left(1 - \frac{T_0}{T_{mF}}\right) \sum_j |W_{TF,j}| \quad (6.46)$$

che, pur contenendo le temperature medie di scambio e le sommatorie delle potenze "calde" e "fredde", è del tutto analoga alla Eq.(38). Seguendo allora la stessa procedura, si può esprimere il rendimento di una macchina *reversibile* che scambia calore con una molteplicità di sorgenti come

$$\eta = \frac{W'_{m,a}}{\sum_i |W_{TC,i}|} = 1 - \frac{T_{mF}}{T_{mC}} \quad (6.47)$$

ovvero in una forma *analoga* al rendimento della macchina di Carnot, dove però in luogo delle temperature superiore ed inferiore del ciclo compaiono le temperature medie di scambio, definite nella Eq.(45).

A questo punto, è semplice dimostrare che, a parità di temperature estreme ($T_{C,max}$, $T_{F,max}$) nessuna macchina può avere un rendimento superiore alla macchina di Carnot: infatti è intuitivo (ma potrebbe anche essere dimostrato rigorosamente) che comunque

$$T_{mF} > T_{F,max} \quad , \quad T_{mC} < T_{C,max} \quad (6.48)$$

per cui il rendimento espresso dalla Eq.(47) non può essere superiore a quello della Eq.(39).

Flussi di energia e di disponibilità per una macchina termica ciclica

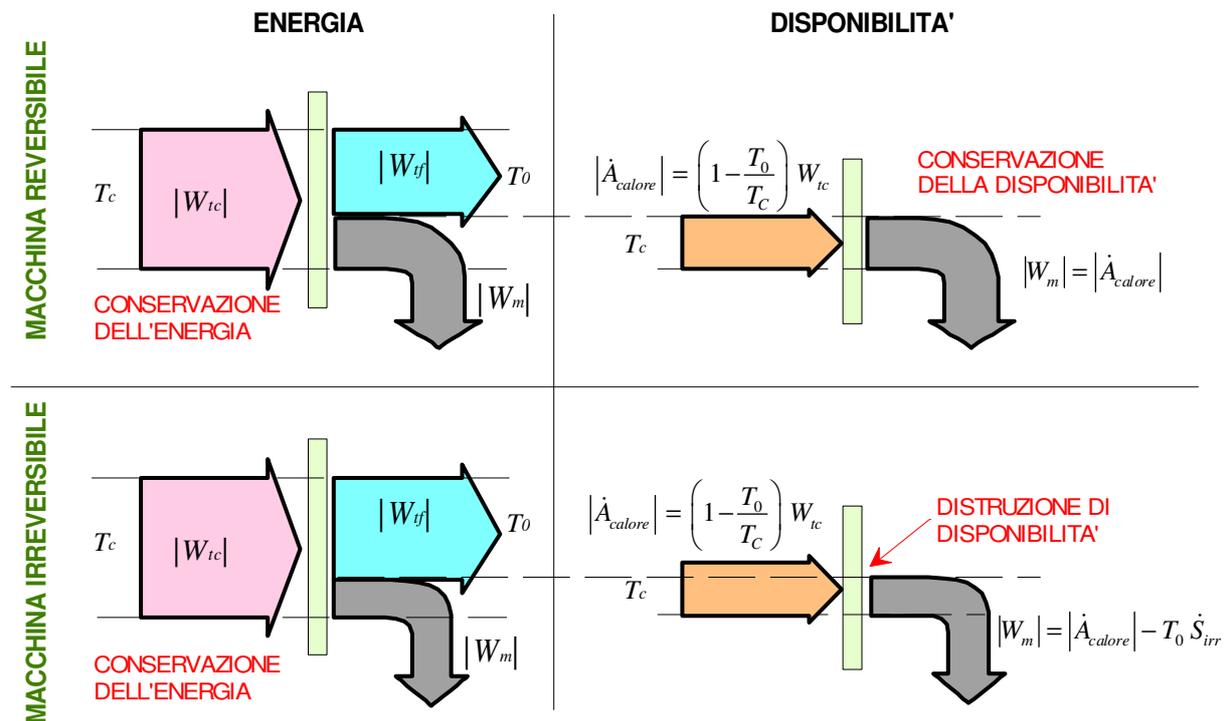


Figura 6.10: Flusso di energia e disponibilità in una macchina termica motrice semplice con temperatura inferiore pari a quella dello stato morto ($T_c = T_F$). In questo caso lo scambio di disponibilità termica con la sorgente fredda è nullo.

Per concludere questa sezione, è utile meditare sui flussi di energia e disponibilità nelle macchine, limitandosi al caso delle macchine semplici, che consentono di capire i concetti essenziali senza troppe complicazioni formali.

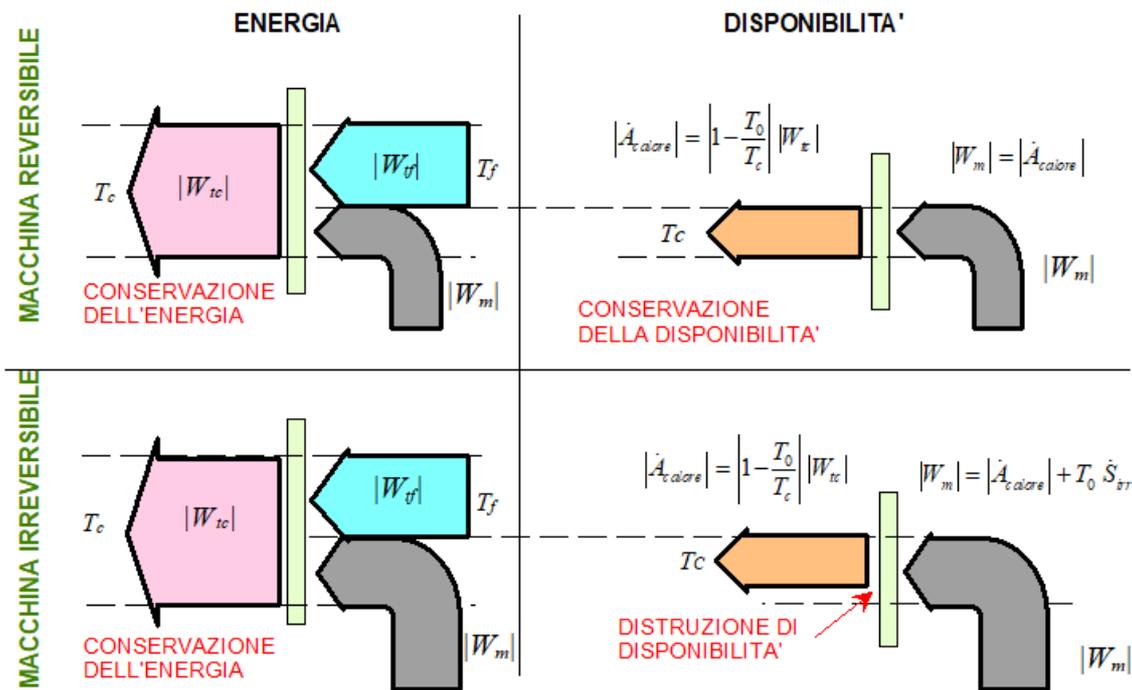


Figura 6.11: Flusso di energia e disponibilità in una macchina termica operatrice semplice con temperatura inferiore pari a quella dello stato morto ($T_0 = T_f$). In questo caso lo scambio di disponibilità termica con la sorgente fredda è nullo.

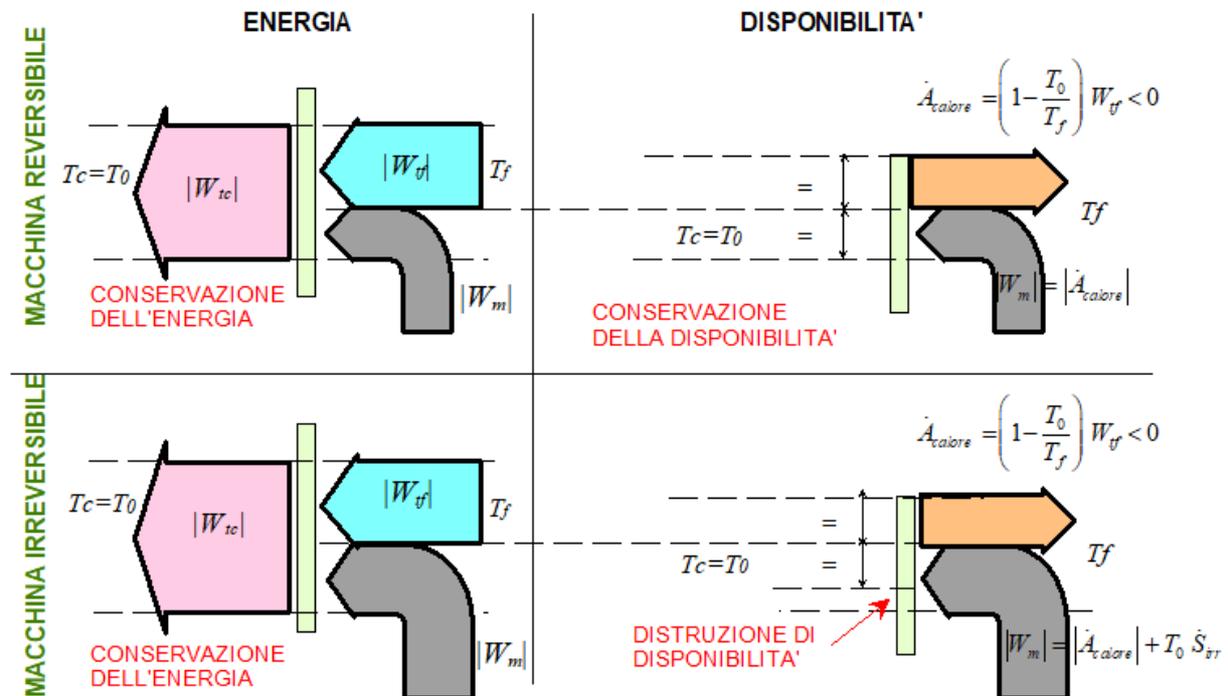


Figura 6.12: Flusso di energia e disponibilità in una macchina termica operatrice semplice con temperatura superiore pari a quella dello stato morto ($T_0 = T_c$). In questo caso lo scambio di disponibilità termica con la sorgente calda è nullo.

A tale scopo, si riporta in Fig.10 il flusso di energia e disponibilità per una macchina semplice la cui temperatura inferiore è pari a quella dello stato morto: questo consente di eliminare lo scambio di disponibilità con la sorgente a temperatura inferiore, dato che il fattore di Carnot si annulla (vedi paragrafo precedente). Si vede che nel caso di macchina reversibile anche il flusso di disponibilità si conserva, mentre nel caso irreversibile la disponibilità in uscita (potenza meccanica utile) è *inferiore* a quella della disponibilità in ingresso (calore scambiato moltiplicato per il fattore di Carnot). In altri termini, a causa delle irreversibilità, la macchina *distrugge disponibilità*: mentre, del tutto ovviamente, in nessun caso essa può distruggere l'energia.

Gli stessi diagrammi del caso precedente sono riportati in Fig.11 per una macchina operatrice la cui temperatura inferiore coincide con quella dello stato morto (pompa di calore). In questo caso, il flusso di disponibilità con la sorgente a temperatura inferiore è nullo (fattore di Carnot pari a zero) mentre il flusso di disponibilità connesso al calore scambiato con la sorgente calda è uscente dalla macchina. E' del tutto evidente che se la macchina cede disponibilità alla sorgente calda, per mantenersi in stato stazionario, deve assorbire una quantità pari o superiore di disponibilità dall'esterno sotto forma di potenza meccanica, ovvero si perviene alla stessa conclusione dell'enunciato di Clausius del secondo principio della termodinamica. Tale assorbimento di disponibilità sotto forma di potenza meccanica è esattamente pari al flusso di disponibilità uscente in caso di macchina reversibile, maggiore in caso di macchina irreversibile: anche in questo caso, quindi, *la macchina irreversibile distrugge disponibilità*. Infine, la Fig. 12 riporta i diagrammi per una macchina operatrice la cui temperatura superiore coincide con quella dello stato morto (macchina frigorifera). In questo caso lo scambio di disponibilità con la sorgente calda è nullo; visto poi che, essendo $T_f < T_0$, il fattore di Carnot è negativo, la macchina assorbe calore dalla sorgente fredda ($W_{ff} > 0$) ma le *cede* una disponibilità che nel caso reversibile è pari alla potenza meccanica, mentre nel caso irreversibile è inferiore a quest'ultima. Questo fatto può essere spiegato pensando che così facendo si incrementa la capacità di lavoro di una ipotetica macchina motrice di Carnot che operi tra lo stato morto e la sorgente fredda.

Bilancio di disponibilità per un sistema aperto a regime

Per un sistema aperto a regime si ha $dA/dt = 0$, $dV/dt = 0$, per cui W'_m e $W'_{m,a}$ coincidono (nel seguito useremo comunque il simbolo $W'_{m,a}$ per ricordare che è quella ottenuta dal bilancio di disponibilità)

$$0 = \sum_k \left(1 - \frac{T_0}{T_k}\right) W_{t,k} - W'_{m,a} + \sum_i G_i (a_{f,i} + e_{p,i} + e_{c,i}) - \sum_u G_u (a_{f,u} + e_{p,u} + e_{c,u}) - T_0 \dot{S}_{irr} \quad (6.49)$$

da cui

$$\begin{aligned} W'_{m,a} &= \\ &= \sum_i G_i (a_{f,i} + e_{p,i} + e_{c,i}) - \sum_u G_u (a_{f,u} + e_{p,u} + e_{c,u}) + \sum_k \left(1 - \frac{T_0}{T_k}\right) W_{t,k} - T_0 \dot{S}_{irr} = \quad (6.50) \\ &= W'_{m,a,rev} - T_0 \dot{S}_{irr} \end{aligned}$$

ovvero la potenza massima ottenibile è data dalle differenze tra i flussi convettivi exergetici in ingresso e in uscita, più la potenza ulteriormente recuperabile dalla cessione di calore a

temperatura superiore a quella ambiente; nel caso reale bisogna sottrarre la potenza perduta per le irreversibilità.

Notare che i termini connessi allo scambio di calore si annullano non solo in caso di trasformazioni adiabatiche, ma anche se il calore viene rilasciato alla temperatura dello stato morto, T_0 .

ESEMPIO 6.6 – Analisi exergetica di uno scambiatore di calore a superficie

Un generatore di vapore produce una portata $G_a = 50$ t/h di vapore a $p = 100$ bar $T = 450$ °C, partire da acqua alla temperatura di 120 °C. A tale scopo viene utilizzata una portata $G_s = 125$ t/h di fumi di combustione inizialmente a temperatura di 1200 °C, assimilabili ad un gas ideale con $c_p =$ costante = 1100 J/kg K. Determinare la perdita di lavoro nel dispositivo, trascurando le perdite di carico e le variazioni di energia cinetica e potenziale.

Si ha a che fare con uno scambiatore a superficie, e dato che le perdite di carico sono trascurabili le trasformazioni subite dall'acqua e dal vapore sono isobare. Lo scambio di calore e lavoro con l'esterno è nullo, pertanto i bilanci energetico e di disponibilità si scrivono nella forma seguente, dove i suffissi 1 e 2 si riferiscono al vapore (risp. ingresso ed uscita) e 3 e 4 ai fumi (risp. ingresso ed uscita)

$$G_a (h_1 - h_2) + G_s c_{p,s} (T_3 - T_4) = 0$$

$$G_a (a_{f1} - a_{f2}) + G_s (a_{f3} - a_{f4}) - \dot{A}_{distr} = 0$$

La seconda equazione, sfruttando le espressioni del gas ideale, può essere sviluppata nella forma

$$\dot{A}_{distr} = G_a \left[h_1 - h_2 - T_0 (s_1 - s_2) \right] + G_s \left[c_{p,s} (T_3 - T_4) - T_0 \left(c_{p,s} \ln \frac{T_3}{T_4} \right) \right]$$

Dalle tavole termodinamiche si ricava per l'acqua:

$$h_1 = 510.6 \text{ kJ/kg}, h_2 = 3241 \text{ kJ/kg}, s_1 = 1.519 \text{ kJ/kg K}, s_2 = 6.419 \text{ kJ/kg K}.$$

Dalla prima equazione si ottiene con semplici passaggi la temperatura di uscita dei fumi,

$$T_4 = T_3 - \frac{G_a (h_2 - h_1)}{G_s c_{p,s}} = 1200 - \frac{50 \cdot (3241 - 510)}{125 \cdot 1.1} = 207 \text{ °C}$$

dalla seconda si ricava il lavoro perduto per unità di tempo (notare che adesso è necessario convertire le portate in kg/s e le temperature in K):

$$\begin{aligned} \dot{A}_{distr} = & 13.9 \left[510 - 3241 - 298.15 \cdot (1.519 - 6.419) \right] + \\ & + 34.7 \left[1.1 \cdot (1473 - 480) - 298.15 \cdot \left(1.1 \cdot \ln \frac{1473}{480} \right) \right] = 7.48 \text{ MW} \end{aligned}$$

Questa grande perdita (rispetto ai 38 MW effettivamente scambiati) è dovuta al fatto che la disponibilità di calore a 1200 °C nei fumi viene “sprecata” per riscaldare il vapore a “soli” 450 °C.

Si può anche definire un rendimento exergetico (o di secondo principio) dello scambiatore nella forma

$$\varepsilon = \frac{\text{aum. di disponib. corrente fredda}}{\text{dimin. di disponib. corrente calda}} = \frac{G_a (a_{f4} - a_{f3})}{G_s (a_{f1} - a_{f2})} = \frac{17653}{25142} = 0.70$$

il che equivale a dire che solo il 70% della disponibilità ceduta dai fumi “sopravvive” alle irreversibilità dello scambiatore.



ESEMPIO 6.7 – Analisi exergetica di una turbina a vapore.

Determinare la massima potenza meccanica ottenibile da una turbina a vapore che opera in regime stazionario nelle seguenti condizioni

- portata di fluido $G = 4.6 \text{ t/h}$;
- condizioni in ingresso: $p_1 = 60 \text{ bar}$, $T_1 = 600 \text{ °C}$;
- condizioni in uscita: $p_2 = 0.1 \text{ bar}$, $x_2 = 0.97$.

Tramite le tabelle termodinamiche dell’acqua si ricavano i valori contenuti nella seguente tabella (dove le caselle ombreggiate indicano i valori usati come input)

punto	$T, \text{ °C}$	$p, \text{ bar}$	$h, \text{ kJ/kg}$	$s, \text{ kJ/kg K}$	x
1	600	60	3658	7.1676	=
2	45.8	0.1	2512	7.924	0.97
2i	45.8	0.1	2271	7.1676	0.87

da cui si ha

$$W'_m = G (h_1 - h_2) = 1.28 \cdot (3658 - 2512) = 1.466 \quad \text{MW}$$

$$\eta_T = \frac{W'_m}{W'_{m,i}} = \frac{G(h_1 - h_2)}{G(h_1 - h_{2i})} = \frac{1.466}{1.775} = 0.826$$

Il bilancio di disponibilità per il sistema aperto a regime reversibile, che porta alle condizioni 2, risulta in

$$W'_{m,a,rev} = G (a_{f,1} - a_{f,2}) = G [(h_1 - h_2) - T_0 (s_1 - s_2)] =$$

$$= 1.28 \cdot [3658 - 2512 - 298.15 \cdot (7.167 - 7.924)] = 1.755 \quad \text{MW}$$

Per questa valutazione non occorre che il sistema sia adiabatico, basta ipotizzare che rilasci calore solo alla temperatura dello stato morto; se così non fosse, dal sistema fluirebbe altra disponibilità sotto forma di calore che potrebbe comunque essere riutilizzata all’esterno.

si ha pertanto un rendimento di secondo principio dato da

$$\varepsilon = \frac{W'_m}{W'_{m,a}} = \frac{1.466}{1.755} = 0.835$$

Notare che il rendimento di secondo principio della turbina *non corrisponde* al rendimento isoentropico, introdotto nel cap.4, e i due valori sono notevolmente diversi in questo caso. La ragione di questo è che il rendimento isoentropico fa riferimento ad una diversa condizione finale (quella ideale) e soprattutto non tiene conto della disponibilità residua del vapore allo scarico: in altre parole, è vero che a seguito delle irreversibilità si perde lavoro utile, ma è anche vero che allo scarico, a seguito delle irreversibilità, si ottiene un vapore con maggiore disponibilità.

A riprova di quanto detto, consideriamo la potenza disponibile che si può ottenere portando reversibilmente il vapore dalle condizioni 2 alle condizioni 2i

$$W'_{m,a,rev} = G (a_{f,2} - a_{f,2i}) = G [(h_2 - h_{2i}) - T_0 (s_2 - s_{2i})] =$$

$$= 1.28 \cdot [2512 - 2271 - 298.15 \cdot (7.924 - 7.167)] = 19.6 \quad \text{kW}$$

che sommato al precedente (1.755 MW) restituisce a meno degli arrotondamenti il valore totale di 1.775 MW relativo all'espansione isoentropica.

□

ESEMPIO 6.8 – Analisi exergetica di un compressore.

Valutare il rendimento exergetico del compressore adiabatico studiato nell'esempio 5.5.

Si ricorda che nell'esempio 5.5 le condizioni erano

- Fluido: aria, gas ideale con $c_p = 1005 \text{ J/kg K} = \text{costante}$ e $R = 287 \text{ J/kg K}$
- Portata $G = 0.007 \text{ kg/s}$
- Ingresso: $p_1 = 1 \text{ bar}$, $T_1 = 290 \text{ K}$
- Uscita: $p_2 = 7 \text{ bar}$, $T_2 = 560 \text{ K}$

Per un compressore adiabatico il rendimento exergetico può venire espresso come il rapporto tra la potenza ideale (ovvero la minima necessaria per portare il gas *alle stesse condizioni finali*, e non solo alla stessa pressione come nel caso del rendimento isoentropico) e la potenza effettivamente spesa;

$$\varepsilon = \frac{|\text{potenza minima necessaria}|}{|\text{potenza reale}|} = \frac{|W'_{m,a,rev}|}{|W'_m|} = \frac{G(a_{f2} - a_{f1})}{G(h_2 - h_1)}$$

Bisogna notare che in questo caso la potenza è negativa, quindi in caso di reversibilità ha come al solito un massimo in valore e segno, ma un minimo in valore assoluto.

sviluppando si ha

$$\varepsilon = \frac{(h_2 - h_1) - T_0(s_2 - s_1)}{(h_2 - h_1)} = 1 - \frac{T_0(s_2 - s_1)}{(h_2 - h_1)}$$

nell'esempio 5.5 abbiamo ottenuto

$$\begin{cases} h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1) = 271 \text{ kJ/kg} \\ s_2 - s_1 = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = 103 \text{ J/kg K} \end{cases}$$

Sostituendo nella espressione del rendimento exergetico abbiamo

$$\varepsilon = 1 - \frac{298.15 \cdot 103}{271000} = 0.89$$

anche in questo caso, il rendimento exergetico è maggiore di quello isoentropico calcolato nell'esempio 5.5 ($\eta_c = 0.8$). Come nell'esempio precedente (7.7) questo è dovuto alla maggiore disponibilità posseduta dal gas in uscita, a seguito della sua maggiore temperatura, che sarebbe potenzialmente recuperabile in seguito.

Si nota infine che, essendo il compressore adiabatico, si ha $s_2 - s_1 = \Delta s_s$, per cui l'espressione del rendimento exergetico, tenuto conto dell'Eq.28 di Gouy-Stodola, può essere interpretato anche come

$$\varepsilon = \frac{(h_2 - h_1) - T_0 \Delta s_s}{(h_2 - h_1)} = \frac{\text{lavoro fatto} - \text{lavoro perduto}}{\text{lavoro fatto}}$$

□

Conclusioni relative al bilancio di disponibilità

In questa sezione abbiamo introdotto il bilancio di una nuova funzione termodinamica detta *disponibilità*, applicandola in particolare ai sistemi chiusi ed a quelli aperti a regime. Possiamo trarre tre conclusioni fondamentali che è consigliabile non dimenticare:

- tramite il bilancio di disponibilità è possibile valutare il massimo lavoro meccanico ricavabile da una generica trasformazione termodinamica, che si ottiene operando in condizioni reversibili;
- il termine di irreversibilità, ovvero la generazione entropica, è una misura della distruzione di lavoro disponibile subita nel processo, secondo l'equazione di Gouy-Stodola (Eq.28);
- il bilancio di disponibilità non è una nuova equazione termodinamica, essendo stato ottenuto combinando il bilancio energetico con quello entropico, ma può essere in alcuni casi vantaggiosamente usato in sostituzione del secondo nel valutare le prestazioni energetiche di un sistema.

In conclusione, la combinazione dei due principi della termodinamica, attuata in questo capitolo, ci consente, generalizzando l'analisi fatta da Carnot, di stabilire quale è la tendenza generale dei sistemi di conversione dell'energia: *conservazione* dell'energia e *incremento* dell'entropia, che si può sostituire con la *distruzione* della disponibilità.

Come ultima cosa, notiamo che sfortunatamente esiste in letteratura un po' di confusione sulla terminologia, ed i nomi con cui vengono indicate le varie funzioni variano da testo a testo; in particolare il ruolo dei termini disponibilità ed exergia viene spesso scambiato. Ad es. nel testo di A.Bejan si indica la disponibilità a con il nome *di non-flow exergy*, contrapponendola all'exergia a_f che viene chiamata *flow exergy*. Altrove, l'exergia è definita semplicemente come $h - T_0 s$ senza sottrarvi i valori allo stato morto.

BIBLIOGRAFIA

Per le macchine termiche semplici:

R. Mastrullo, P. Mazzei, R. Vanoli, Fondamenti di Energetica, Liguori, Napoli, 1992, cap.2.

Per l'analisi di disponibilità:

J. Moran and H. Shapiro, Fundamentals of Engineering Thermodynamics, Wiley, NY, cap. 7.

R. Sonntag and G. Van Wylen, Introduction to Thermodynamics: Classical and Statistical, Wiley, NY, cap.9.6-9.7.

A. Bejan, Advanced Engineering Thermodynamics, Wiley, NY, cap.3.

APPENDICE 6.1: Dimostrazione che in una macchina termica semplice il senso degli scambi termici non può essere invertito.

L'assunto viene dimostrato per assurdo. Riscriviamo i bilanci di entropia ed energia cambiando segno agli scambi termici

$$\begin{aligned} 0 &= -|W_{TC}| + |W_{TF}| - |W_M| \\ 0 &= -\frac{|W_{TC}|}{T_C} + \frac{|W_{TF}|}{T_F} + \dot{S}_{irr} \end{aligned} \quad (6.51)$$

Da cui, ricavando W_{TF} dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda, si ottiene

$$\begin{aligned} |W_M| &= |W_{TF}| - |W_{TC}| \\ 0 &= |W_{TC}| \left(\frac{1}{T_F} - \frac{1}{T_C} \right) + \frac{|W_M|}{T_F} + \dot{S}_{irr} \end{aligned} \quad (6.52)$$

Come si vede, tutti e tre gli addendi della seconda equazione sono positivi (essendo $1/T_C < 1/T_F$) e la loro somma non può quindi essere nulla.

In altri termini, la macchina non può cedere all'esterno potenza meccanica prelevando calore dalla sorgente fredda e cedendolo a quella calda.

APPENDICE 6.2: Derivazione del bilancio di disponibilità

Partiamo dalla espressione generale dei bilanci di energia ed entropia, ricavate nel cap.4, modificandole lievemente per evidenziare in particolare tra gli scambi termici la potenza termica $W_{t,0}$ ceduta all'intorno del sistema, che si trova alla temperatura T_0 .

$$\frac{d(U + E_c + E_p)}{dt} = \left(W_{t,0} + \sum_k W_{t,k} \right) - W'_m + \sum_i G_i (h_i + e_{ci} + e_{pi}) - \sum_u G_u (h_u + e_{cu} + e_{pu}) \quad (53)$$

$$\frac{dS}{dt} = \left(\frac{W_{t,0}}{T_0} + \sum_k \frac{W_{t,k}}{T_k} \right) + \sum_i G_i s_i - \sum_u G_u s_u + \dot{S}_{irr} \quad (6.54)$$

Eliminando $W_{t,0}$ tra le due precedenti equazioni, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d(U + E_c + E_p - T_0 S)}{dt} &= \sum_k \left(1 - \frac{T_0}{T_k} \right) W_{t,k} - W'_m + \\ &\sum_i G_i (h_i + e_{ci} + e_{pi} - T_0 s_i) - \sum_u G_u (h_u + e_{cu} + e_{pu} - T_0 s_u) - T_0 \dot{S}_{irr} \end{aligned} \quad (6.55)$$

Per completare il nostro studio è necessario notare che una parte della potenza meccanica che il sistema cede all'esterno viene impegnata nell'effettuare la dilatazione del sistema nel suo intorno, che si trova a pressione p_0 , e si può quindi separare da quella totale evidenziando la *potenza meccanica utile, o disponibile*, $W'_{m,a}$. In altre parole si ha

$$W'_{m,a} = W'_m - p_0 \frac{dV}{dt} \quad (6.56)$$

Notare che il lavoro atmosferico diminuisce $W'_{m,a}$ solo quando il sistema si dilata, quando il sistema si contrae il lavoro disponibile può anche essere superiore a W'_m . E' questo il caso dei primi motori atmosferici sviluppati, come la macchina a vapore di Papin o di Newcomen, dove la pressione interna al cilindro è inferiore a quella atmosferica nella fase utile.

Sostituendo la Eq.46 nel precedente bilancio e portando il termine $p_0 dV/dt$ a primo membro si ottiene infine

$$\begin{aligned} \frac{d(U + E_c + E_p + p_0 V - T_0 S)}{dt} = \sum_k \left(1 - \frac{T_0}{T_k}\right) W_{tk} - W'_{m,a} + \\ \sum_i G_i (h_i + e_{c,i} + e_{p,i} - T_0 s_i) - \sum_u G_u (h_u + e_{c,u} + e_{p,u} - T_0 s_u) - T_0 \dot{S}_{irr} \end{aligned} \quad (6.57)$$

Come ultimo passo, dobbiamo riferire le grandezze di stato allo stato morto T_0, h_0, V_0, s_0 . Questo non comporta modifiche sostanziali alle equazioni: è sufficiente sottrarre dalla precedente la seguente equazione

$$\frac{dM(u_0 + p_0 v_0 - T_0 s_0)}{dt} = \sum_i G_i (h_0 - T_0 s_0) - \sum_u G_u (h_0 - T_0 s_0) \quad (6.58)$$

che risulta identicamente verificata in forza del bilancio di massa.

Dopo questo, è immediato riconoscere nell'argomento della derivata a primo membro la funzione disponibilità A (v. Eq.25), nei termini tra parentesi che moltiplicano le portate in ingresso e in uscita la somma delle energie potenziale e cinetica specifiche con la exergia $a_f = h - T_0 s$, e nell'equazione appena trovata il bilancio di disponibilità, Eq.35

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} = \sum_k \left(1 - \frac{T_0}{T_k}\right) W_{t,k} - W'_{m,a} \\ + \sum_i G_i (a_{f,i} + e_{p,i} + e_{c,i}) - \sum_u G_u (a_{f,u} + e_{p,u} + e_{c,u}) - T_0 \dot{S}_{irr} \end{aligned} \quad (6.59)$$

APPENDICE 6.3 – Cenno sulle fonti di energia

Classificazione delle fonti energetiche

Tramite un'analisi attenta, ci si rende conto che l'energia disponibile sulla terra ha origine da tre sole sorgenti, ovvero:

- solare,
- nucleare,
- gravitazionale.

L'*energia solare* viene continuamente irradiata verso la terra dal sole con una potenza di picco¹ (al di fuori dell'atmosfera) di 1353 W/m^2 (la cosiddetta *costante solare*). A seconda della latitudine, dell'altitudine e della nuvolosità, su ogni metro quadro di superficie terrestre "piovono" ogni giorno all'incirca da 2 a 9 kWh (in Italia la media è intorno a 4). Sono di origine solare tutte quelle fonti che traggono o hanno tratto energia dal sole: direttamente il cosiddetto *solare fotovoltaico* (conversione diretta dell'energia solare in energia elettrica) e il *solare termico* (l'uso della radiazione solare per riscaldare – a temperatura più o meno alta) un fluido. Ma ci sono anche altre forme di energia che indirettamente (e talvolta inaspettatamente) derivano dal sole: ad esempio le *biomasse* (la legna e gli altri combustibili di origine vegetale od animale) si sviluppano grazie alle reazioni di fotosintesi clorofilliana che prelevano energia dal sole. In definitiva tutti gli animali (che si nutrono di vegetali o di altri animali che a loro volta si sono nutriti di vegetali) funzionano quindi "ad energia solare". Anche l'energia *idroelettrica* è di origine solare: infatti i bacini idrici di alta quota sono alimentati dalle piogge, che a loro volta derivano dalla evaporazione dell'acqua degli oceani, che a sua volta è indotta all'energia solare. Più in generale tutti i moti atmosferici traggono la loro energia dal sole, inclusi gli uragani e i venti, i quali ultimi possono anche essere sfruttati in generatori *eolici*. Infine, i *combustibili organici fossili* (petrolio, carbone e gas naturale) derivano dall'accumulo e dalla decomposizione di organismi vissuti nelle ere passate: essi non sono quindi altro che una forma "congelata" di energia solare. Ad un livello più ampio, si potrebbe considerare anche l'energia solare come una forma di energia nucleare prodotta dalle reazioni di fusione nucleare nel sole, ma per i nostri scopi questo non ha interesse.

La fonte *nucleare* deriva la sua energia dalle trasformazioni che coinvolgono i nuclei degli atomi. Può essere direttamente utilizzata nelle reazioni nucleari di *fissione* (la rottura del nucleo di un elemento pesante, come l'uranio, in due nuclei più leggeri) e di *fusione* (l'unione di due nuclei più leggeri in uno più pesante, ad esempio di due nuclei di idrogeno in uno di elio). Ma anche il fatto che il nucleo terrestre si mantiene caldo e fuso è dovuto al calore di decadimento degli elementi radioattivi contenuti al suo interno, in quantità piccole, ma significative sotto questo aspetto. Quindi tutti i fenomeni geodinamici, inclusi il vulcanismo, la deriva dei continenti ed i terremoti traggono la loro energia dalla fonte nucleare. Parimenti, è di origine nucleare l'*energia geotermica*, che otteniamo sfruttando il vapore proveniente da pozzi –naturali od artificiali – scavati sulla superficie terrestre.

La fonte *gravitazionale* è dovuta all'azione gravitazionale del sole e della luna sulla terra è quella meno sfruttabile dal punto di vista pratico: ad essa sono attribuibili le *maree*, che in

¹ Più precisamente, tale quantità varia di $\pm 3\%$ a causa dell'eccentricità dell'orbita terrestre. A livello suolo, la potenza di picco vale circa 1.1 kW/m^2 , con il sole allo zenith.

alcuni paesi nordici, dove le escursioni di livello nelle insenature sono elevate, sono sfruttate per la produzione di energia elettrica.

Fonti energetiche primarie, rinnovabili e non rinnovabili

Si definiscono *fonti energetiche primarie* quelle disponibili in natura senza subire alcuna trasformazione: i combustibili fossili, le fonti rinnovabili, il combustibile nucleare. Esse sono dette anche "risorse energetiche primarie" o "materie prime energetiche".

Alcune fonti energetiche (ad es. solare termico e fotovoltaico, biomasse, idroelettrico) sono *rinnovabili*, in quanto sono inesauribili oppure l'energia che preleviamo viene reintegrata dai processi naturali *in tempi dello stesso ordine di grandezza di quelli in cui viene consumata*. Ad esempio, l'energia solare non si attenua nel tempo, le piante ricrescono, le piogge reintegrano l'acqua prelevata dai bacini idroelettrici, etc.

Secondo la legislazione italiana sono considerate fonti rinnovabili quelli che utilizzano il sole, il vento, l'acqua, le risorse geotermiche, le maree, il moto ondoso e la trasformazione dei rifiuti organici ed inorganici o di biomasse; sono "assimilate a fonti rinnovabili" le forme di energia recuperabili in processi e in impianti, gli scarti di lavorazione e/o di processi.

Altre fonti, come ad esempio i materiali fissili nucleari, il petrolio e gli altri combustibili fossili sono invece *non rinnovabili*: quello che noi consumiamo non viene reintegrato alla stessa velocità e pertanto tali fonti sono *soggette ad esaurimento*.

ESERCIZI**ESERCIZIO 6.1**

Un ciclo di Carnot che utilizza aria ($R = 0,287$ kJ/kg K, $k=1.4$) come fluido motore è caratterizzato dai seguenti valori p , v e T :

$$p_3 = 40 \text{ bar}$$

$$V_3 = 0,030 \text{ m}^3$$

$$T_3 = 1000 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$T_1 = 270 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$V_4 = 0,08 \text{ m}^3$$

$$T_4 = 1000 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$T_2 = 270 \text{ }^\circ\text{C}$$

Determinare il rendimento del ciclo e le quantità di calore e di lavoro trasferite.

ESERCIZIO 6.2

Uno studioso afferma di aver realizzato un ciclo motore che assorbe 2000 kJ dalla sorgente a temperatura superiore (a 500 °C), restituisce 600 kJ alla sorgente a temperatura inferiore (a 20 °C), producendo un lavoro pari a 1700 kJ. Commentare tale affermazione.

[E' impossibile]

ESERCIZIO 6.3

Un inventore proclama di essere riuscito a realizzare miglie tecniche ad un impianto a ciclo Rankine (temperatura massima del vapore 550 °C, temperatura al condensatore 30 °C) che ne portano il rendimento a 0.66. Dimostrare che è un ciarlatano.

[Il rendimento di una macchina termica che opera tra quelle temperature non può superare 0.635]

ESERCIZIO 6.4

Si vuole riscaldare, mantenendola a 25 °C, una villetta di montagna, che richiede a questo scopo una potenza termica di 10 kW, prelevando calore con una macchina operatrice da un laghetto attiguo che si trova alla temperatura di 5 °C. Valutare la potenza meccanica minima che deve assorbire la macchina per potere assicurare queste prestazioni. (Suggerimento: fare riferimento alla "migliore" macchina termica inversa teoricamente ipotizzabile).

[$W = 0.671$ kW]

ESERCIZIO 6.5

Una centrale termoelettrica da 1000 MW elettrici (potenza utile erogata) ha un rendimento $\eta = 0.412$. Il secondario del condensatore è refrigerato tramite una portata esterna $G = 50$ t/s di acqua. Determinare la variazione di temperatura dell'acqua di raffreddamento tra ingresso e uscita del condensatore.

[$\Delta T = 6.8$ K]

ESERCIZIO 6.6

Un motore termico opera tra due sorgenti termiche, una alla temperatura di 400 °C e quella inferiore alla temperatura di 50 °C.

Il motore produce 7.5 kW di potenza e scarica sulla sorgente a temperatura inferiore una potenza termica di 9 kW

1. Trovare il rendimento del motore termico.
2. Il processo in questione è reversibile?

[0.455; no]

ESERCIZIO 6.7

Determinare la disponibilità di 2 kg di acqua a 70 °C alla pressione di 1 bar, considerandola un liquido incomprimibile con $c = 4186 \text{ J/kg K}$.
[12.9 kJ/kg]

ESERCIZIO 6.8

Dell'acqua (liquido incomprimibile con $c = 4186 \text{ J/kg K}$) inizialmente a 25 °C raffredda un freno idraulico in cui viene dissipata una potenza meccanica di 50 kW. Determinare la portata di acqua necessaria per avere in uscita una temperatura di 70 °C e la perdita di disponibilità (\dot{A}_{irr}) che si verifica nel dispositivo. Come mai è inferiore alla potenza meccanica introdotta?
[$G = 0.27 \text{ kg/s}$; 46.5 kW]

ESERCIZIO 6.9

Un compressore adiabatico riceve 0.3 kg/s di aria a 1 atm e 25 °C e la comprime fino a 8 bar con un rendimento isoentropico di compressione $\eta_c = 80\%$. Le variazioni di energia cinetica e potenziale sono trascurabili. Determinare

1. la temperatura di uscita dell'aria;
2. la potenza assorbita;
3. la potenza minima necessaria per il processo secondo l'analisi di disponibilità;
4. il rendimento di secondo principio del compressore, definito come il rapporto tra quest'ultima e la potenza assorbita di cui al punto 1.

Considerare l'aria un gas ideale con $c_p = 1005 \text{ J/kg K} = \text{costante}$

[1) 598 K; 2) - 90.45 kW; 3) 81.22 kW; 4) 0.90]

ESERCIZIO 6.10

Una sorgente geotermica eroga 10 t/h di vapore a 300 °C e 40 bar, che viene fatto espandere in una turbina con rendimento isoentropico 0.8 fino alla pressione di 1 bar, e quindi scaricato nell'atmosfera dove condensa e raggiunge le condizioni di equilibrio di acqua liquida alla pressione di 1 atm e a 25 °C. Le variazioni di energia cinetica e potenziale sono trascurabili. Determinare la potenza massima disponibile, quella erogata e l'efficienza di secondo principio del processo (rapporto tra le precedenti due quantità).

[2.96 MW; 1.42 MW; 0.48]

ESERCIZIO 6.11

Una turbina a vapore riceve in ingresso 30 kg/s di vapore a 30 bar, 350 °C. Nella posizione dove la pressione raggiunge 5 bar, si spillano 5 kg/s vapore alla temperatura di 200 °C. Le perdite termiche dall'involucro (a temperatura T_0) ammontano a 150 kW. La rimanente parte di vapore esce dalla turbina alla pressione di 0.15 bar ed un titolo del 90%. Le variazioni di energia cinetica e potenziale sono trascurabili. Determinare:

1. la potenza erogata dalla turbina;
2. la exergia del vapore all'ingresso ed alle due uscite;
3. la potenza massima erogabile reversibilmente;
4. il rendimento di secondo principio della turbina, definito come il rapporto tra la potenze di cui ai punti 1 e 3.

[1) 20.0 MW; 2) 1109.6 kJ/kg, 755.3 kJ/kg, 195.0 kJ/kg; 3) 24.6 MW; 4) 0.811]

ESERCIZIO 6.12

Per avviare il motore a scoppio di un'automobile è necessario un lavoro meccanico di 260 kJ, che viene in generale prelevato da un accumulatore elettrico. Supponendo che tale lavoro debba invece venire prelevato da una bombola del volume di 1 L, contenente aria compressa a temperatura ambiente, in un processo in cui il calore viene scambiato solo con l'intorno del sistema, determinare la minima pressione che si dovrebbe avere nella bombola, ipotizzando che l'aria sia un gas ideale con c_p costante.

[$p = 50$ MPa]

Appunti ed Esercizi di *Fisica Tecnica e Macchine Termiche*

Cap.7. I cicli termici delle macchine motrici

Paolo Di Marco

Versione 2021.00 – 29.11.2021

La presente dispensa è redatta ad esclusivo uso didattico per gli allievi dei corsi di studi universitari dell'Università di Pisa. L'autore se ne riserva tutti i diritti. Essa può essere riprodotta solo totalmente ed al fine summenzionato, non può essere alterata in alcuna maniera o essere rivenduta ad un costo superiore a quello netto della riproduzione. Ogni altra forma di uso e riproduzione deve essere autorizzata per scritto dall'autore.

L'autore sarà grato a chiunque gli segnali errori, inesattezze o possibili miglioramenti.

1. Introduzione

Nel presente capitolo viene affrontato lo studio delle macchine termiche motrici. Nella maggior parte dei casi (tranne che nei reattori nucleari, nelle applicazioni geotermiche e nei collettori solari) tali macchine prelevano l'energia termica ad alta temperatura da una reazione di combustione: i combustibili maggiormente usati sono quelli cosiddetti *fossili*, ovvero carbone, metano e petrolio. Si distinguono quindi le macchine a *combustione esterna*, in cui il fluido viene riscaldato attraverso uno scambiatore di calore, da quelle a *combustione interna*, in cui il fluido aumenta di temperatura e pressione attraverso una reazione chimica che avviene direttamente al suo interno. Nella prima parte del capitolo, vengono studiati i cicli termici effettivamente adottati nelle macchine motrici e gli accorgimenti per migliorarne il rendimento di primo principio.

L'aumento di rendimento di una macchina riduce, a parità di potenza meccanica utile prodotta, sia il costo del combustibile che le emissioni di prodotti inquinanti della combustione nell'atmosfera. La riduzione dei costi di esercizio implica tuttavia, in genere, un aumento di quelli di investimento, dato che la macchina deve essere realizzata con materiali e tecnologie migliori, e non si traduce quindi sempre in un risparmio economico.

Dopo decenni di sviluppo tecnologico, in cui le risorse primarie di energia sono state (eccetto che per la breve parentesi della crisi petrolifera degli anni '70) disponibili in misura superiore ai bisogni, considerazioni di risparmio economico e soprattutto di salvaguardia ambientale ci spingono adesso a limitare lo sfruttamento delle cosiddette *fonti primarie* di energia. Alcuni cenni su tali fonti sono riportati in Appendice 6-1.

Il risparmio energetico può essere perseguito quanto meno utilizzando le risorse disponibili in un modo più razionale. In un certo senso, come Pinocchio, siamo arrivati a chiederci se, dopo le pere, non sia venuto il momento di cominciare a mangiare anche le bucce e i torsoli! Alcune tecniche avanzate per un uso più razionale dell'energia, che ormai hanno raggiunto la piena maturità industriale, quali i *cicli combinati*, sono illustrati nella parte finale del capitolo; viene anche fatto cenno alla *cogenerazione*, che sarà oggetto in seguito di uno studio più dettagliato. In futuro, un maggiore ricorso a tali tecniche può permettere di risparmiare ed inquinare meno senza per questo dover contrarre eccessivamente i consumi energetici, il che porterebbe ad una depressione della produzione industriale.

Mantenere costanti i consumi di combustibile si traduce infatti non solo in un risparmio economico, ma anche nel *mantenere costanti le emissioni di prodotti di combustione*, in ottemperanza agli accordi delle conferenze di Kyoto e successive. Per l'Italia, l'emissione attuale di CO₂ (2020) è di circa 0.44 kg/kWh di energia elettrica prodotta, contro gli 0.12 di Francia e Svizzera, che fanno ampio ricorso alle fonti energetiche idroelettrica e nucleare.

2. I cicli termici utilizzati attualmente nelle macchine motrici

Nel precedente capitolo abbiamo visto che il ciclo semplice reversibile è quello che garantisce, a parità di temperature estreme, il massimo rendimento di primo principio. Il ciclo di Carnot (costituito da due adiabatiche e due isoterme) non è mai stato realizzato a causa delle difficoltà tecniche che si frappongono alla sua realizzazione. Altri due cicli termici realizzati praticamente, ovvero il ciclo Stirling (due adiabatiche e due isocore con recupero del calore) e quello Ericsson (due adiabatiche e due isobare con recupero del calore), possono

essere considerati cicli semplici in quanto scambiano calore con due sole sorgenti termiche, ma hanno trovato scarsissima applicazione pratica.

La difficoltà di realizzare cicli semplici è strettamente connessa a quella di realizzare trasformazioni isoterme. Al contrario, è possibile costruire macchine in cui avvengono trasformazioni che con ottima approssimazione (a meno delle inevitabili perdite termiche e per attrito) possono essere considerate isobare, o adiabatiche, o isovolumiche. I cicli termici delle macchine reali sono dunque basati su tali tipi di trasformazioni, come risulta dalla Tabella 1. I fluidi adottati sono quelli largamente disponibili e di basso costo, ovvero l'aria e l'acqua: nessuna alternativa valida è stata a tutt'oggi trovata, sebbene in alcuni cicli a gas si adottò l'elio o l'anidride carbonica.

Ciclo	Descrizione sommaria del ciclo di riferimento	Fluido	Combustione	Principali applicazioni
Rankine/Hirn	due adiabatiche e due isobare con cambiamento di fase	acqua/vapore fluidi organici	esterna	Propulsione navale. Centrali termoelettriche.
Joule/Brayton	due adiabatiche e due isobare senza cambiamento di fase	Aria elio o CO ₂	interna esterna	Propulsione aeronautica Centrali termoelettriche Prop. navale militare
Combinato	ciclo Brayton e ciclo Rankine (riscaldato dai gas di scarico del Brayton) in cascata	aria e vapore	interna	Centrali termoelettriche.
Otto	due adiabatiche e due isovolumiche	aria	interna	Motori alternativi per autotrazione. Generatori elettrici.
Diesel	due adiabatiche, una isobara e una isovolumica	aria	interna	Motori alternativi per autotrazione, generatori elettrici. Propulsione navale.
Stirling	Due isoterme e due isovolumiche, con recupero di calore.	aria	esterna	Motori ad aria di piccola potenza con apporto di calore dall'esterno.

Tabella 1: Principali caratteristiche dei cicli più usati nelle macchine termiche motrici.

Nel seguito, verranno illustrate le caratteristiche dei cicli Rankine/Hirn e di quello Joule/Brayton. Si tratteranno inoltre i cicli combinati, che uniscono i due precedenti in un unico impianto di maggiore rendimento e rappresentano gli impianti di maggiore interesse nel futuro prossimo. Si esporranno quindi brevemente i cicli Otto e Diesel, caratteristici dei motori alternativi per trazione, e dei generatori elettrici di limitata potenza. Infine, si tratterà brevemente il ciclo Stirling.

Nel corso di questo studio, faremo spesso riferimento a cicli *endoreversibili*, ovvero considereremo sistemi al cui interno non sono presenti irreversibilità. Studieremo separatamente l'effetto delle irreversibilità *interne* al ciclo.

Bisogna tenere conto che saranno comunque presenti delle *irreversibilità esterne*, dovute principalmente al fatto che sono necessarie differenze di temperatura finite per prelevare calore dalla sorgente calda e restituirlo alla sorgente fredda: la temperatura inferiore del fluido di lavoro sarà quindi lievemente maggiore di quella ambiente, e la temperatura superiore del fluido di lavoro sarà inferiore (in taluni casi anche largamente) a quella della sorgente calda. Questo implica una riduzione di rendimento rispetto a quello che si avrebbe utilizzando

completamente il salto di temperatura disponibile. Per ridurre tali differenze al minimo, aumentando il salto termico (tra le temperature medie di scambio superiore ed inferiore) effettivamente a disposizione del ciclo e quindi il rendimento termodinamico, sono necessari scambiatori di calore ad alta efficienza.

3. Il ciclo Rankine/Hirn

Il ciclo di Rankine/Hirn¹ (nel seguito lo si definirà semplicemente ciclo Rankine) è quello caratteristico delle macchine a vapore, usate attualmente principalmente per la produzione di energia elettrica, in impianti fissi che raggiungono la potenza complessiva di 1200 MW ed oltre. Sta invece cadendo rapidamente in disuso nella trazione ferroviaria (locomotive a vapore), sostituito dalla trazione elettrica o dal motore Diesel, e nella propulsione navale, in cui viene soppiantato dal Diesel a due o quattro tempi. Come vedremo meglio in seguito, il punto di forza di tale ciclo è la bassa quantità di energia richiesta per la compressione del fluido, dato che essa avviene allo stato liquido; ricordiamo che (vedi Cap.4) essendo il lavoro di compressione proporzionale a vdp , è sempre opportuno comprimere il fluido nello stato più denso (a minore volume specifico) possibile. La temperatura massima del vapore non supera attualmente i 550-620 °C, per evitare danni ai primi stadi della turbina ed ai fasci tubieri del generatore di vapore. Si raggiungono rendimenti di primo principio dell'ordine del 40-45 %, che potrebbero ulteriormente aumentare negli impianti cosiddetti *ultra super critici*, di cui parleremo in seguito.

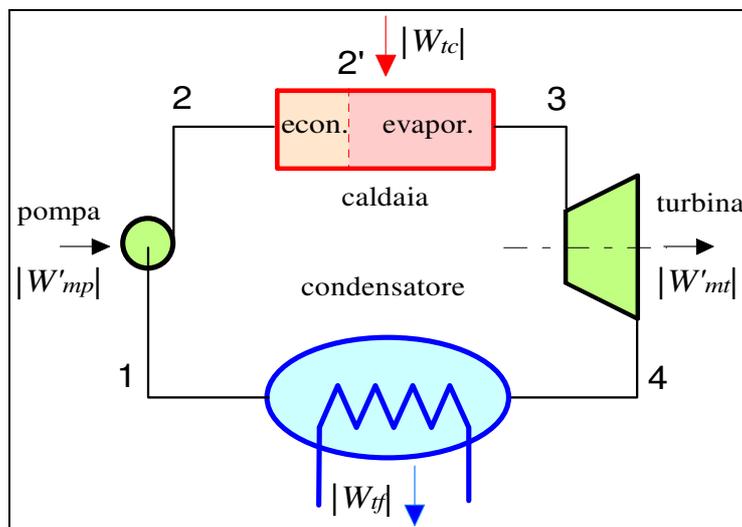


Figura 1: Componenti principali di un impianto a vapore saturo.

¹ William John Macquorn Rankine, (1820-1872), ingegnere e fisico scozzese, scrisse nel 1859 quello che può essere considerato il primo testo di energetica (*Manual of the Steam Engine and Other Prime Movers*). Gustav Adolf Hirn (1815-1890) tecnico e fisico alsaziano, introdusse l'uso del vapore surriscaldato nelle motrici a vapore.

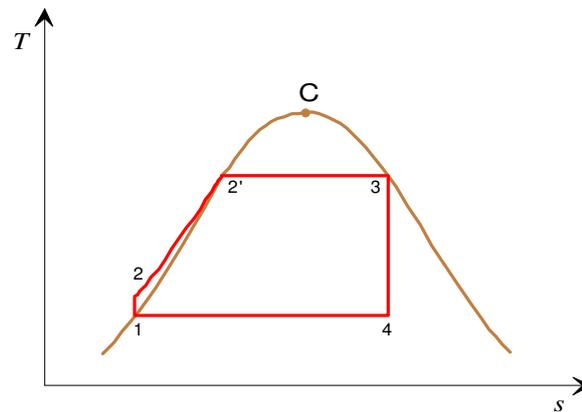


Figura 2: Ciclo Rankine a vapore saturo sul diagramma T - s .

Ciclo Rankine a vapore saturo.

I componenti principali di un impianto a ciclo Rankine sono illustrati in Fig.1. L'impianto è costituito da quattro organi, schematizzabili individualmente come sistemi aperti a regime, che nel loro complesso costituiscono un sistema chiuso. Il ciclo lavora fra due pressioni, quella superiore (dei punti 2 e 3) e quella inferiore, dei punti 4 e 1. Le trasformazioni sono rappresentate nel diagramma T - s in Fig.2.

Il liquido saturo (punto 1) a bassa pressione e temperatura viene compresso isoentropicamente fino alla pressione p_2 . L'aumento di temperatura in questa trasformazione è trascurabile, dato che il fluido può essere considerato incomprimibile (se fosse esattamente tale, l'aumento di temperatura sarebbe nullo, vedi Cap.2). La potenza meccanica assorbita in questa trasformazione, W'_{mp} , è trascurabile rispetto a quella erogata dalla turbina. Il liquido compresso e sottoraffreddato viene quindi immesso in una caldaia, in cui avviene la trasformazione isobara 2-3: esso raggiunge dapprima la temperatura di saturazione (punto 2') e successivamente evapora a pressione, e quindi anche a temperatura costante, fino alle condizioni di vapore saturo secco (punto 3). In tale trasformazione, esso assorbe dalla sorgente calda la potenza termica W'_{tc} . Il vapore viene quindi immesso nella turbina, dove si espande isoentropicamente fino alla pressione p_4 , erogando la potenza W'_{mt} . Il vapore saturo all'uscita della turbina viene immesso nel condensatore, dove condensa a temperatura e pressione costanti (trasformazione isotermodarica) fino a tornare alle condizioni iniziali di liquido saturo, punto 1. In quest'ultima trasformazione, esso cede alla sorgente fredda (in genere l'ambiente) la potenza termica W'_{tf} . La potenza meccanica utile, W'_{mu} , è data dalla differenza tra quella erogata dalla turbina e quella di pompaggio

$$|W'_{mu}| = |W'_{mt}| - |W'_{mp}| \tag{7.1}$$

Il bilancio di energia, considerando come sistema il complesso dei quattro organi (sistema chiuso a regime) risulta in

$$W'_{tc} + W'_{tf} = W'_{mt} + W'_{mp} \tag{7.2}$$

Nel diagramma T - s , le aree sottese dalle trasformazioni 2-3 e 4-1 rappresentano il calore scambiato per unità di massa rispettivamente con la sorgente calda (positivo) e la sorgente fredda (negativo): la differenza dei loro valori assoluti, ovvero l'area del ciclo, rappresenta il

lavoro utile per unità di massa, che moltiplicato per la portata in massa, dà la potenza meccanica utile, W'_{mu} .

Il ciclo termico può essere rappresentato anche nel diagramma di Mollier, $h-s$, (Fig.3) o in quello $p-v$ (Fig.4) Da quest'ultimo risulta evidente che il lavoro di pompaggio ($-\int v dp$, vedi Cap.1) nella trasformazione 1-2 è trascurabile rispetto a quello di espansione nella trasformazione 3-4. Nei casi pratici, tali lavori stanno indicativamente nel rapporto 1:100.

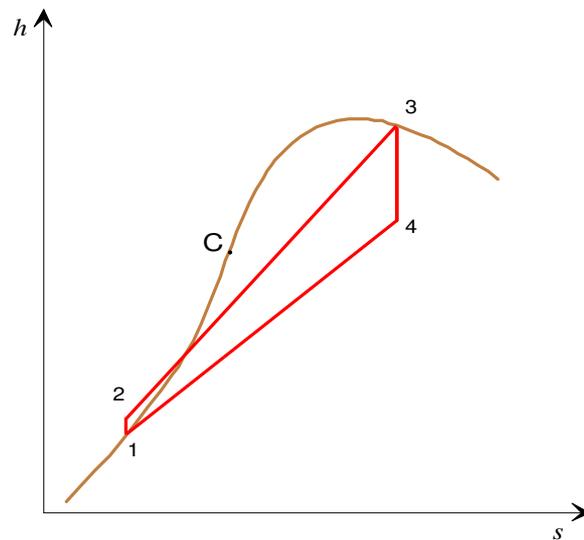


Figura 3: Ciclo Rankine a vapore saturo sul diagramma di Mollier ($h-s$).

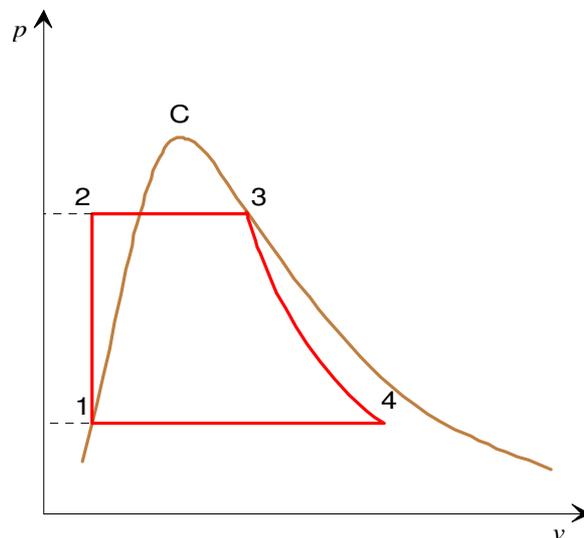


Figura 4: Ciclo Rankine a vapore saturo sul diagramma $p-v$.

I bilanci di energia dei quattro organi (sistemi aperti a regime) danno rispettivamente

$$\text{pompa (1-2)} \quad W'_{mp} = -G(h_2 - h_1) \quad (7.3)$$

$$\text{caldaia (2-3)} \quad W_{tc} = G(h_3 - h_2) \quad (7.4)$$

$$\text{turbina (3-4)} \quad W'_{mt} = G(h_3 - h_4) \quad (7.5)$$

$$\text{condensatore (4-1)} \quad W_{tf} = -G(h_4 - h_1) \quad (7.6)$$

Dove si è supposto che i due scambiatori siano a pareti indeformabili (lavoro nullo) e la turbina e la pompa adiabatiche. Il rendimento di primo principio è dato quindi da

$$\eta = \frac{W'_{mu}}{W_{tc}} = \frac{W'_{mt} - |W'_{mp}|}{W_{tc}} = \frac{G(h_3 - h_4) - G(h_2 - h_1)}{G(h_3 - h_2)} = \frac{(h_3 - h_4) - (h_2 - h_1)}{(h_3 - h_2)} \quad (7.7)$$

Dato che il lavoro di compressione è trascurabile, e che quindi $h_2 \cong h_1$, la espressione precedente si può approssimare come

$$\eta \cong \frac{(h_3 - h_4)}{(h_3 - h_1)} \quad (7.8)$$

con il vantaggio che h_1 è facilmente ottenibile dalle tabelle del vapore saturo. La procedura per il calcolo del rendimento è riportata nel successivo esempio 7.1.

La portata massica unitaria (*PMU*) ovvero la portata di fluido necessaria per produrre 1 W di potenza meccanica utile è data da

$$PMU = \frac{G}{W'_{mu}} = \frac{1}{(h_3 - h_4) - (h_2 - h_1)} \cong \frac{1}{(h_3 - h_4)} \quad (7.9)$$

Dalla equazione precedente, si può anche dedurre che la *PMU* è inversamente proporzionale all'area del ciclo sul piano *T-s*.

Il rendimento di secondo principio è dato da

$$\varepsilon = \frac{\eta}{\eta_{Carn}} = \frac{\eta}{1 - \frac{T_4}{T_3}} \quad (7.10)$$

dove è necessario esprimere le temperature in kelvin.

La scelta delle temperature che compaiono nel rendimento della macchina di Carnot è per certi versi arbitraria: si possono scegliere le temperature estreme del ciclo, come è stato fatto sopra, oppure, considerando che il calore è originariamente disponibile alla temperatura di combustione, la temperatura di combustione stessa (circa 1200 °C) e quella dell'ambiente, che è leggermente inferiore (di 10-15 K) alla T_4 .

Una espressione alternativa del rendimento di primo principio può essere ricavata introducendo il concetto di temperatura media di scambio. Da quanto visto sull'analisi di disponibilità nel Cap.6, per una macchina ciclica reversibile

$$\eta = 1 - \frac{T_{mF}}{T_{mC}} \quad (7.11)$$

Dove T_{mC} e T_{mF} sono le temperature medie di scambio superiore ed inferiore, già definite nello stesso Cap. 6 come

$$T_{mC} = \frac{\sum_i |W_{TC,i}|}{\sum_i \frac{|W_{TC,i}|}{T_i}}, \quad T_{mF} = \frac{\sum_j |W_{TF,j}|}{\sum_j \frac{|W_{TF,j}|}{T_j}} \quad (7.12)$$

E' evidente quindi che qualunque azione che incrementi la T_{mC} o riduca la T_{mF} ha come conseguenza un aumento di rendimento. Ma possiamo vedere adesso come si può arrivare ad una semplice interpretazione fisica delle temperature medie di scambio. Limitandoci per semplicità alla sola T_{mC} (ma il discorso sarebbe completamente analogo per la T_{mF}), possiamo scrivere

$$T_{mC} = \frac{\sum_i |W_{TC,i}|}{\sum_i \frac{|W_{TC,i}|}{T_i}} = \frac{G(h_3 - h_2)}{G \int_2^3 \frac{dh}{T}} \quad (7.13)$$

ma dalla seconda equazione di Gibbs, per un processo isobaro, si ha

$$dh = Tds + vdp = Tds \quad (7.14)$$

e quindi,

$$T_{mC} = \frac{G(h_3 - h_2)}{G \int_2^3 \frac{T ds}{T}} = \frac{h_3 - h_2}{\int_2^3 ds} = \frac{h_3 - h_2}{s_3 - s_2} \quad (7.15)$$

Dalla equazione precedente e dalla Fig.5 si può vedere che, sul diagramma, $T-s$ la T_{mC} rappresenta graficamente l'altezza di un rettangolo che ha la stessa area di quella sottesa dalla trasformazione 2-3. Infatti il calore scambiato reversibilmente per unità di massa nella trasformazione isobara 2-3 è rappresentato, oltre che dal salto entalpico, dall'area sottesa dalla curva stessa (vedi Cap.1).

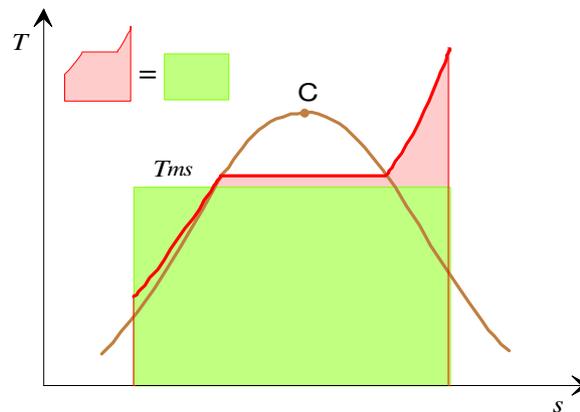


Figura 5: Rappresentazione grafica della temperatura media di scambio superiore.

Analogamente si può definire la temperatura media di scambio inferiore come

$$T_{mF} = \frac{h_4 - h_1}{s_4 - s_1} \quad (7.16)$$

E dato che la trasformazione 4-1 avviene a temperatura costante, la T_{mF} in questo caso è semplicemente la temperatura al condensatore.

Il ciclo Rankine a vapore saturo viene scarsamente utilizzato in pratica poiché il vapore a titolo relativamente basso alla fine della espansione contiene una frazione di liquido troppo elevata. Tale liquido, in forma di gocce, provoca un precoce danneggiamento per erosione delle palette degli ultimi stadi della turbina. Tuttavia, esso può risultare conveniente per applicazioni a bassa temperatura del vapore (fino a 300 °C) oppure quando l'espansore, anziché una turbina, è una macchina a pistoni (locomotive, vecchi impianti navali). Negli altri casi, si procede a *surriscaldare* il vapore, come esposto nel successivo paragrafo.

Come già accennato, il ciclo di Rankine è stato largamente usato in passato per la trazione ferroviaria nelle locomotive a vapore: in questo caso, dato che un condensatore mobile è tecnicamente improponibile, l'impianto lavora in ciclo aperto scaricando il vapore nell'atmosfera, alla pressione di 1 bar. E' quindi necessario trasportare nel tender (il piccolo rimorchio che segue la locomotiva), oltre al combustibile, anche l'acqua necessaria per l'intero viaggio.

ESEMPIO 7-1 –Ciclo Rankine a vapore saturo.

Un ciclo Rankine a vapore saturo lavora tra le pressioni di ammissione in turbina di 100 bar e la pressione al condensatore di 0.04 bar. La portata di vapore vale $G = 30$ kg/s. Determinare i rendimenti di primo e secondo principio, la potenza meccanica utile, la potenza termica ceduta in caldaia e la portata massica unitaria.

I calcoli sono eseguiti tramite il foglio di calcolo EXCEL C7RANKINE.XLS (che richiede la libreria TPX).

Le proprietà del fluido nei punti chiave del ciclo sono riportate nella tabella seguente.

Notare che i punti 1 e 3 sono completamente determinati dal punto di vista termodinamico, dato che per essi si conoscono due proprietà di stato indipendenti; i punti 2 e 4 sono determinati dalla pressione e dal valore dell'entropia, che è uguale rispettivamente a quella dei punti 1 e 3 determinati in precedenza.

	Temp.	Pressione	Volume spec.	Entalpia	Entropia	Titolo
	C	MPa	m3/kg	kJ/kg	kJ/kg/K	
1.	28.96	0.004	0.001004	121.4	0.4226	0
2.	29.18	10	0.0009996	131.5	0.4226	
3.	311.1	10	0.01803	2725	5.614	1
4.	28.96	0.004	22.44	1690	5.614	0.6447

Il rendimento di primo principio vale

$$\eta = \frac{(h_3 - h_4) - (h_2 - h_1)}{(h_3 - h_2)} = 0.395$$

e quello di secondo principio

$$\varepsilon = \frac{\eta}{\eta_{Carn}} = \frac{\eta}{1 - \frac{T_4}{T_3}} = \frac{39.5}{48.3} = 81.8\%$$

La potenza meccanica utile è data da

$$W'_{mu} = G(h_3 - h_4) - G(h_2 - h_1) = 30.8 \text{ MW}$$

La potenza termica ceduta in caldaia si ottiene da

$$W_{tc} = G(h_3 - h_2) = 77.8 \text{ MW}$$

ed infine la PMU è data da

$$PMU = \frac{G}{W'_{mu}} = 0.97 \text{ kg/MJ}$$

□

Ciclo Rankine a vapore surriscaldato.

Il ciclo Rankine a vapore surriscaldato viene anche indicato come ciclo Hirn. Abbiamo già accennato come una riduzione eccessiva del titolo del vapore comporti un rapido danneggiamento delle palettature degli ultimi stadi della turbina. Per ovviare a questo inconveniente, si può introdurre il vapore in turbina nello stato surriscaldato: questo implica che nell'impianto, a valle dell'evaporatore, si debba aggiungere un ulteriore componente detto *surriscaldatore* (v. Fig.6). Il ciclo si modifica come indicato sul diagramma *T-s* in Fig.7. Le equazioni di bilancio e le espressioni dei rendimenti e della *PMU* rimangono inalterate, Eqq. (7.3)-(7.9). E' intuitivo che il surriscaldamento porta ad un aumento della temperatura media di scambio superiore, con un conseguente miglioramento del rendimento. Contemporaneamente, la *PMU* diminuisce, a causa del maggiore salto entalpico disponibile in turbina.

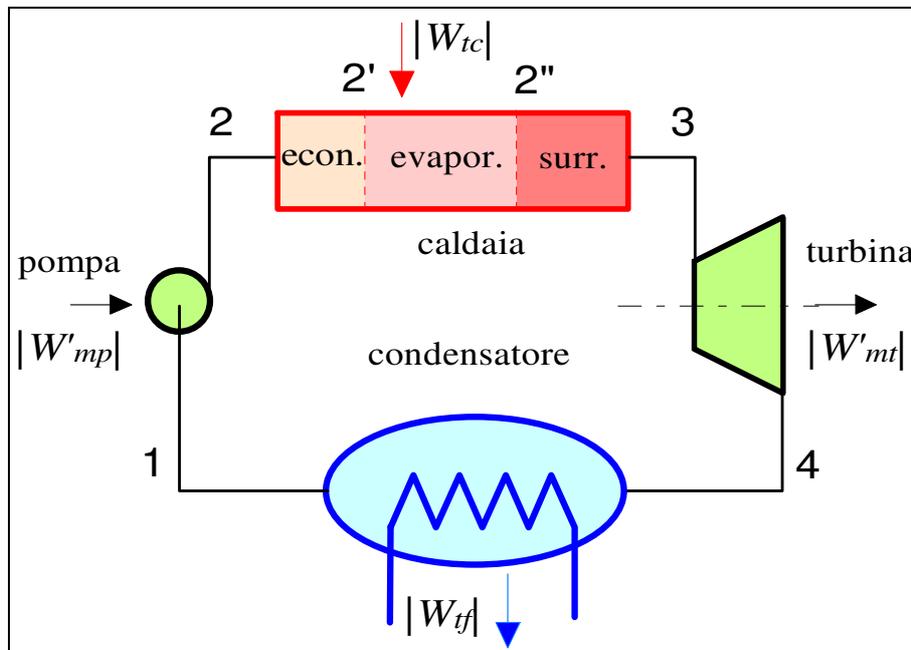


Figura 6: Componenti principali di un impianto a vapore surriscaldato.

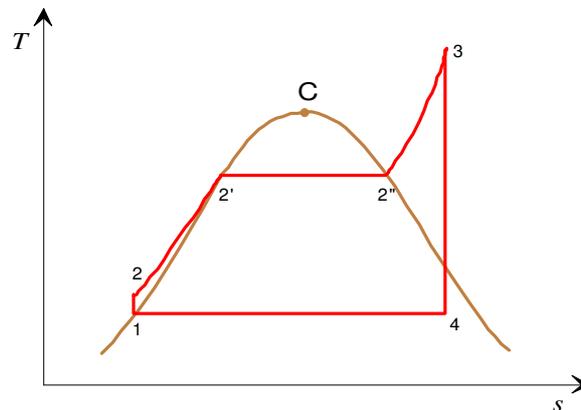


Figura 7: Ciclo Rankine a vapore surriscaldato sul diagramma $T-s$.

ESEMPIO 7-2 –Ciclo Rankine a vapore surriscaldato.

Un ciclo Rankine a vapore surriscaldato lavora tra le pressioni e temperatura di ammissione in turbina di 100 bar e 500 °C e la pressione al condensatore di 0.04 bar. La portata di vapore vale $G = 30$ kg/s. Determinare i rendimenti di primo e secondo principio, la potenza meccanica utile, la potenza termica ceduta in caldaia e la portata massica unitaria.

I calcoli sono eseguiti tramite il foglio di calcolo EXCEL C7RANKINE.XLS (che richiede la libreria TPX).

Le proprietà del fluido nei punti chiave del ciclo sono riportate nella seguente tabella

	Temp.	Pressione	Volume spec.	Entalpia	Entropia	Titolo
	C	MPa	m ³ /kg	kJ/kg	kJ/kg/K	
1.	28.96	0.004	0.001004	121.4	0.4226	0
2.	29.18	10	0.001	131.5	0.4226	
3.	500	10	0.03279	3374	6.597	
4.	28.96	0.004	26.68	1987	6.597	0.7668

Il rendimento di primo principio vale

$$\eta = \frac{(h_3 - h_4) - (h_2 - h_1)}{(h_3 - h_2)} = 42.5 \%$$

e quello di secondo principio

$$\varepsilon = \frac{\eta}{\eta_{Cam}} = \frac{\eta}{1 - \frac{T_4}{T_3}} = \frac{42.5}{60.9} = 69.8 \%$$

La potenza meccanica utile è data da

$$W'_{mu} = G(h_3 - h_4) - G(h_2 - h_1) = 41.3 \text{ MW}$$

La potenza termica ceduta in caldaia si ottiene da

$$W_{tc} = G(h_3 - h_2) = 97.3 \text{ MW}$$

ed infine la PMU è data da

$$PMU = \frac{G}{W'_{mu}} = 0.72 \text{ kg/MJ}$$



Effetto delle irreversibilità nel ciclo Rankine

Ogni componente del ciclo Rankine presenta un certo grado di irreversibilità, che riduce le prestazioni del ciclo rispetto al caso ideale. Le irreversibilità nella pompa hanno un effetto trascurabile, per il basso valore della potenza richiesta. Parimenti, le cadute di pressione nel condensatore hanno un effetto trascurabile. Le cadute di pressione tra pompa e turbina possono arrivare a circa 30 bar in un impianto termoelettrico tradizionale (incluso l'attraversamento di tutti i preriscaldatori) su una pressione di ammissione del vapore in turbina di circa 170 bar: dato il basso valore della potenza di pompaggio del fluido, anche queste hanno tutto sommato una influenza trascurabile. Le irreversibilità nella turbina sono comunque le più rilevanti: abbiamo già visto che il rendimento isoentropico della turbina oscilla all'incirca tra 0.85 e 0.90: tale valore comporta una corrispondente riduzione della potenza erogata dalla turbina, e quindi del rendimento di primo e secondo principio. L'unico piccolo vantaggio della irreversibilità della turbina consiste nel fatto che il vapore in uscita ha un titolo maggiore rispetto al caso ideale, vedi Fig.8.

Un'altra grossa fonte di irreversibilità, che noi però abbiamo considerato *esterna* al ciclo, è dovuta allo scambio termico con elevata differenza di temperatura in caldaia fra i prodotti di combustione (circa 1200 °C) ed il vapore, che non supera i 600 °C. Questo comporta la distruzione di una rilevante aliquota di disponibilità dei fumi stessi. Vedremo successivamente come il ciclo combinato ponga rimedio a questo inconveniente.

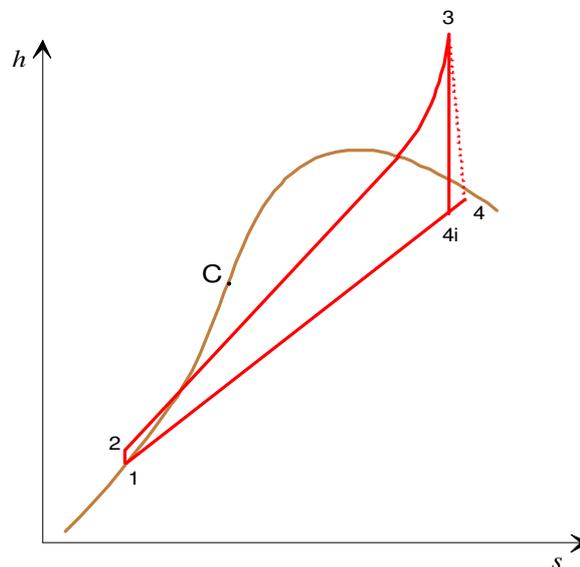


Figura 8: Ciclo Rankine a vapore surriscaldato sul diagramma h - s : confronto tra espansione in turbina reversibile ed irreversibile.

ESEMPIO 7-3 –Ciclo Rankine a vapore surriscaldato con espansione reale.

Un ciclo Rankine a vapore surriscaldato lavora tra le pressioni e temperatura di ammissione in turbina di 100 bar e 500 °C e la pressione al condensatore di 0.04 bar. Il rendimento isoentropico di espansione è dell'85%. La portata di vapore vale $G = 30$ kg/s. Determinare i rendimenti di primo e secondo principio, la potenza meccanica utile, la potenza termica ceduta in caldaia e la portata massica unitaria.

☐ *I calcoli sono eseguiti tramite il foglio di calcolo EXCEL C7RANKINE.XLS (che richiede la libreria TPX).*

Le proprietà del fluido nei punti chiave del ciclo sono riportate nella seguente tabella

	Temp.	Pressione	Volume spec.	Entalpia	Entropia	Titolo
	C	MPa	m ³ /kg	kJ/kg	kJ/kg/K	
1.	28.96	0.004	0.001004	121.4	0.4226	0
2.	29.18	10	0.001	131.5	0.4226	
3.	500	10	0.03279	3374	6.597	
4i.	28.96	0.004	26.68	1987	6.597	0.7668
4r.	28.96	0.004	29.66	2195	7.285	0.8523

Il rendimento di primo principio vale

$$\eta = \frac{(h_3 - h_{4r}) - (h_2 - h_1)}{(h_3 - h_2)} = 36\%$$

e quello di secondo principio

$$\varepsilon = \frac{\eta}{\eta_{Carn}} = \frac{\eta}{1 - \frac{T_4}{T_3}} = 59.1\%$$

La potenza meccanica utile è data da

$$W'_{mu} = G(h_3 - h_{4r}) - G(h_2 - h_1) = 35.1 \text{ MW}$$

La potenza termica ceduta in caldaia si ottiene da

$$W_{ic} = G(h_3 - h_2) = 97.3 \text{ MW}$$

ed infine la *PMU* è data da

$$PMU = \frac{G}{W'_{mu}} = 0.85 \text{ kg/MJ}$$

☐

Miglioramento delle prestazioni del ciclo Rankine

Ogni miglioramento del rendimento di primo principio comporta, secondo la Eq.(7.11), un abbassamento della T_{mF} od un innalzamento della T_{mC} . Per cui, le possibili azioni possono essere classificate come segue.

- *Mantenere più bassa possibile la pressione nel condensatore*, compatibilmente con la temperatura dell'ambiente esterno e con il salto di temperatura comunque necessario per trasferire il calore all'ambiente stesso. Il condensatore opera tipicamente a temperature di 30-35 °C, cui corrisponde una pressione di saturazione di circa 5 kPa: sono necessari pertanto organi ausiliari che rimuovano con continuità i gas incondensabili (frutto delle

reazioni di corrosione o delle infiltrazioni dall'esterno) che inevitabilmente tendono ad accumularsi nel condensatore stesso.

Gli impianti aperti, privi di condensatore, che scaricano il vapore saturo nell'atmosfera a pressione di circa 1 bar, hanno una temperatura media inferiore di scambio di 100 °C e subiscono quindi una forte penalizzazione di rendimento. Per tale motivo, oltre che per riciclare l'acqua di processo, il condensatore è sempre presente negli impianti fissi.

- *Aumentare la temperatura di ammissione in turbina:* attualmente, come detto in precedenza, il limite tecnologico è attualmente di circa 620 °C, ed è imposto principalmente dalla resistenza alle sollecitazioni termomeccaniche delle tubazioni del surriscaldatore; molti impianti ENEL lavorano a 538 °C.
- *Aumentare la pressione di esercizio della caldaia:* questa azione aumenta la T_{mc} , ma, come ci si può facilmente rendere conto per mezzo del diagramma $T-s$, ha come conseguenza indesiderata (a parità di temperatura di ammissione in turbina) una riduzione del titolo in uscita dalla turbina. Sono quindi necessari uno o più risurriscaldamenti, come esposto in seguito. Inoltre, aumentano le sollecitazioni meccaniche sui fasci tubieri della caldaia. In alcuni impianti (impianti *ipercritici*, tipo la centrale termoelettrica di La Spezia) la pressione in caldaia supera la pressione critica dell'acqua, che vale 22.09 MPa.

Negli impianti termoelettrici a vapore, la pressione di esercizio è salita negli anni da 70 bar agli attuali 170 bar. L'impianto ipercritico di La Spezia ha una pressione di ammissione in turbina di circa 250 bar. Negli impianti di prossima generazione, detti *ultra super critici*, si prevede di arrivare a condizioni di ammissione in turbina di 620 °C e 300 bar.

- *Risurriscaldare il vapore:* si fraziona l'espansione, rinviando il vapore in caldaia tra un'espansione e l'altra. Questa tecnica è illustrata in dettaglio in un paragrafo successivo.
- *Preriscaldare l'acqua di alimento* della caldaia sfruttando piccole quantità di vapore prelevato (*spillato*) dalla turbina. Dall'esame del ciclo di Rankine, Fig.2, si nota che il riscaldamento dell'acqua dalla temperatura di uscita della pompa ($T_2 \cong T_1$) a quella di saturazione T_2' , comporta un notevole abbassamento della T_{mc} . Con lo spillamento, il riscaldamento dell'acqua a bassa temperatura viene effettuato a spese di uno scambio di energia interno al ciclo: la prima parte della trasformazione 2-2' è pertanto adiabatica rispetto all'esterno, e di conseguenza non deve essere tenuta in conto nel calcolo della temperatura media superiore di scambio. L'effetto complessivo è quindi un aumento della T_{mc} , e quindi del rendimento. Tale tecnica, detta degli *spillamenti*, o *rigenerazione*, è largamente adottata in pratica e viene discussa in dettaglio in un paragrafo successivo.

Il ciclo Rankine con risurriscaldamento

Lo schema a blocchi di questo impianto è riportato in Fig.9 ed il relativo diagramma $T-s$ in Fig.10. Dopo una prima espansione in turbina, fino alla pressione intermedia p_i , il vapore viene riportato in caldaia, dove viene nuovamente surriscaldato fino alla massima temperatura del ciclo in un apposito fascio tubiero, detto appunto *risurriscaldatore*, e nuovamente inviato agli stadi a media e bassa pressione della turbina.

La potenza meccanica erogata è la somma delle aliquote relative alle due turbine

$$W'_{mi} = G(h_3 - h_4) + G(h_5 - h_6) \quad (7.17)$$

D'altra parte, anche la potenza termica da fornire è la somma di due aliquote

$$W_{tc} = G(h_3 - h_2) + G(h_5 - h_4) \quad (7.18)$$

E conseguentemente il rendimento di primo principio (trascurando la potenza di pompaggio) si esprime come

$$\eta = \frac{(h_3 - h_4) + (h_5 - h_6)}{(h_3 - h_2) + (h_5 - h_4)} \quad (7.19)$$

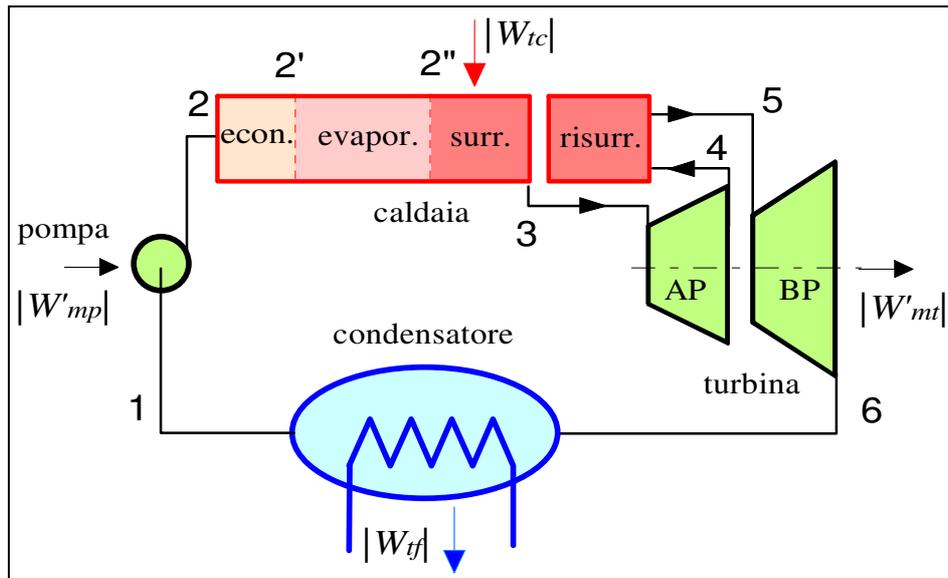


Figura 9: Componenti principali di un impianto a vapore con risurriscaldamento.

I vantaggi principali di tale procedura sono:

- *aumento del titolo in uscita* dalla turbina senza aumento della temperatura nella stessa: è questa la principale ragione per cui si esegue il risurriscaldamento;
- *lieve aumento del rendimento*, conseguente a quello della T_{mC} , se la pressione di risurriscaldamento è superiore ad un determinato valore.
- *diminuzione della PMU*, associata all'aumento dell'area del ciclo sul diagramma $T-s$.

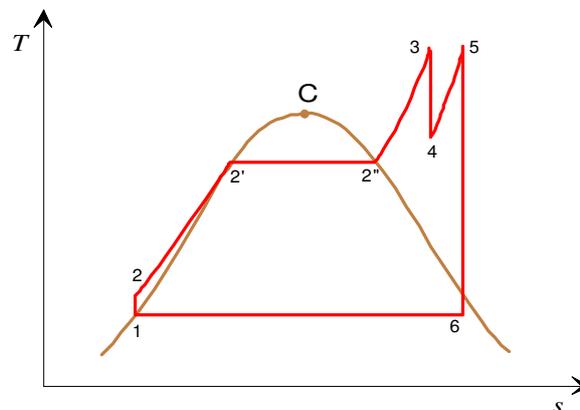


Figura 10: Ciclo Rankine a vapore con risurriscaldamento sul diagramma $T-s$.

ESEMPIO 7-4 –Ciclo Rankine con risurriscaldamento.

Un ciclo Rankine a vapore surriscaldato lavora tra le pressioni e temperatura di ammissione in turbina di 100 bar e 500 °C e la pressione al condensatore di 0.04 bar. Il vapore viene risurriscaldato fino a 500 °C alla pressione di 40 bar. La portata di vapore vale $G = 30$ kg/s. Determinare i rendimenti di primo e secondo principio, la potenza meccanica utile, la potenza termica ceduta in caldaia e la portata massica unitaria.

 I calcoli sono eseguiti tramite il foglio di calcolo EXCEL C7RANKRIS.XLS (che richiede la libreria TPX).

Le proprietà del fluido nei punti chiave del ciclo sono riportate nella seguente tabella

	Temp.	Pressione	Volume spec.	Entalpia	Entropia	Titolo
	C	MPa	m ³ /kg	kJ/kg	kJ/kg/K	
1.	28.96	0.004	0.001004	121.4	0.4226	0
2.	29.18	10	0.001	131.5	0.4226	
3.	500	10	0.03279	3374	6.597	
4.	353.7	4	0.06697	3102	6.597	
5.	500	4	0.08643	3445	7.09	
6.	28.96	0.004	28.82	2136	7.09	0.828

Il rendimento di primo principio vale

$$\eta = \frac{(h_3 - h_4) + (h_5 - h_6)}{(h_3 - h_2) + (h_5 - h_4)} = 43.8\%$$

e quello di secondo principio $\varepsilon = \frac{\eta}{\eta_{Carn}} = \frac{\eta}{1 - \frac{T_1}{T_3}} = 71.9\%$

La potenza meccanica utile è data da $W'_{mu} = G(h_3 - h_4) + G(h_5 - h_6) - G(h_2 - h_1) = 47.1$ MW

La potenza termica ceduta in caldaia si ottiene da $W_{ic} = G(h_3 - h_2) + G(h_5 - h_4) = 108$ MW

ed infine la PMU è data da $PMU = \frac{G}{W'_{mu}} = 0.637$ kg/MJ

La seguente tabella riporta i valori dei principali parametri in funzione della pressione di risurriscaldamento, a parità di altri dati:

p_4	x_6	η	W'_{mu}	PMU
bar	%	%	MW	kg/MJ
80	78	43	43	0.698
60	80	43.4	44.9	0.668
40	82.8	43.8	47.1	0.637
30	85	44	48.4	0.620
20	87	44	49.9	0.601
10	91	43.7	51.6	0.581
5	95	43.1	52.7	0.569

da essa si vede che il risurriscaldamento a pressioni troppo basse può portare ad una diminuzione di rendimento. □

Il ciclo Rankine con spillamento

Lo schema a blocchi di questo impianto è riportato in Fig.11. Il vapore spillato dalla turbina AP viene inviato ad uno scambiatore (detto preriscaldatore) dove esso condensando cede calore all'acqua di alimento. Il condensato viene quindi reimmesso nella linea di alimentazione, previa laminazione, in corrispondenza del punto 1. Come si vedrà in seguito, questo primo schema rappresenta il processo di preriscaldamento in forma semplificata rispetto all'impianto reale, ma concettualmente corretta. Nell'impianto sono presenti due pompe, una a monte ed una a valle del preriscaldatore, che opera quindi ad una pressione intermedia tra p_1 e p_4 . Il ciclo risultante è riportato in Fig.12: in realtà esso consiste nella sovrapposizione dei due cicli, uno dei quali (3-4-5-6) effettuato dal fluido spillato e l'altro (1-4-5-7) effettuato dal fluido che si espande anche nella turbina BP. Per tale motivo, l'area totale del ciclo in questo caso non è pari al lavoro per unità di massa. Si definisce *rapporto di spillamento* la quantità

$$Y = \frac{G_s}{G} = \frac{G_s}{G_s + G_{co}} \quad (7.20)$$

Per studiare il ciclo a spillamento, si fanno le seguenti assunzioni:

- il fluido uscente dal preriscaldatore (punto 3) è liquido saturo alla pressione dello spillamento ($p_3 = p_6$);
- la potenza assorbita dalle pompe è trascurabile.

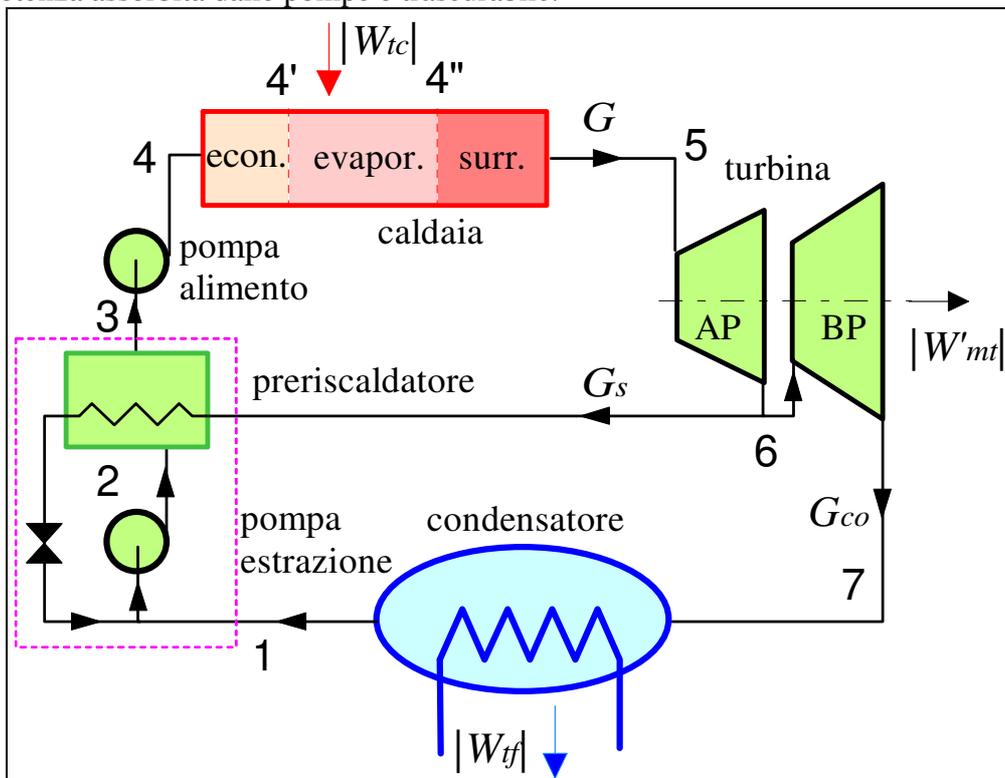


Figura 11: Componenti principali di un impianto a vapore surriscaldato con spillamento.

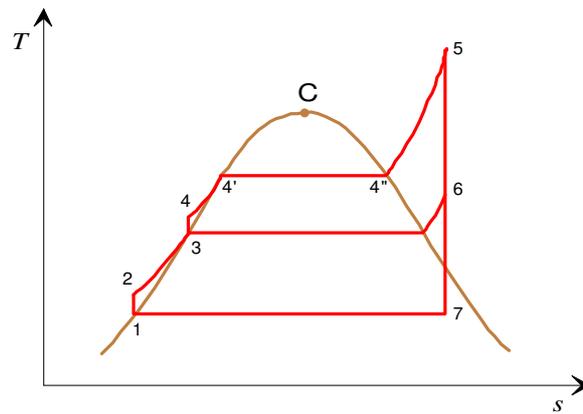


Figura 12: Ciclo Rankine a vapore con spillamento sul diagramma T - s .

Con tali ipotesi, possiamo determinare il valore della portata da spillare (o di Y) facendo il bilancio energetico del sistema incluso nella linea tratteggiata in Fig.11 (in pratica, uno scambiatore a miscelamento)

$$\begin{aligned} G_s h_6 + G_{co} h_1 &= (G_s + G_{co}) h_3 \\ \frac{G_{co}}{G_s} &= \frac{h_6 - h_3}{h_3 - h_1} \end{aligned} \quad (7.21)$$

$$Y = \frac{G_s}{G} = \frac{1}{1 + \frac{G_{co}}{G_s}} = \frac{h_3 - h_1}{h_6 - h_1}$$

Il rendimento di primo principio è espresso da

$$\eta = \frac{W'_{mu}}{W'_{tc}} \cong \frac{W'_{mt}}{W'_{tc}} = \frac{G(h_5 - h_6) + G_{co}(h_6 - h_7)}{G(h_5 - h_4)} = \frac{(h_5 - h_6) + (1 - Y)(h_6 - h_7)}{(h_5 - h_4)} \quad (7.22)$$

Sebbene non sia evidente a prima vista, ci si può convincere che η aumenta notando che, come detto in precedenza, si eliminano scambi termici a bassa temperatura e quindi si aumenta T_{mC} .

Un difetto di questa procedura è che, in conseguenza della riduzione di portata nella turbina BP, la PMU aumenta, come risulta da (sempre trascurando la potenza di pompaggio)

$$PMU = \frac{G}{W'_{mu}} = \frac{G}{G(h_5 - h_6) + G_{co}(h_6 - h_7)} = \frac{1}{(h_5 - h_6) + (1 - Y)(h_6 - h_7)} \quad (7.23)$$

Tuttavia si ha anche un vantaggio consistente nella riduzione di dimensioni del condensatore e degli stadi di bassa pressione della turbina, che sono attraversati da una portata di vapore ridotta. La tecnica degli spillamenti, combinati con uno o più surriscaldamenti, è ampiamente utilizzata negli impianti termoelettrici in cui si eseguono tipicamente sette-otto spillamenti, per una portata totale di vapore spillato che può raggiungere il 60-70%.

La pressione a cui si effettua lo spillamento è un parametro suscettibile di ottimizzazione: si potrebbe dimostrare che il massimo aumento di rendimento si ottiene se lo spillamento viene

realizzato alla temperatura media tra quelle di saturazione delle pressioni inferiore e superiore del ciclo, ovvero $T_6 = (T_4 + T_7)/2$.

Di solito si eseguono spillamenti multipli, a diverse pressioni: il grafico di Fig.13 mostra tuttavia che il rendimento tende ad un asintoto orizzontale all'aumentare del numero di spillamenti.

ESEMPIO 7-5 –Ciclo Rankine con spillamento.

Un ciclo Rankine a vapore surriscaldato lavora tra le pressioni e temperatura di ammissione in turbina di 100 bar e 500 °C e la pressione al condensatore di 0.04 bar. Il vapore viene spillato alla pressione di 20 bar. La portata di vapore vale $G = 30$ kg/s. Determinare i rendimenti di primo e secondo principio, la potenza meccanica utile, la potenza termica ceduta in caldaia e la portata massica unitaria.

I calcoli sono eseguiti tramite il foglio di calcolo EXCEL C7RANKSPIL.XLS (che richiede la libreria TPX).

Le proprietà del fluido nei punti chiave del ciclo sono riportate nella seguente tabella

	Temp.	Pressione	Volume spec.	Entalpia	Entropia	Titolo
	C	MPa	m3/kg	kJ/kg	kJ/kg/K	
1.	28.96	0.004	0.001004	121.4	0.4226	0
2.	29.01	2	0.001003	123.4	0.4226	
3.	212.4	2	0.001177	908.8	2.447	0
4.	213.9	10	0.00117	918.2	2.447	
5.	500	10	0.03279	3374	6.597	
6.	260.8	2	0.1146	2930	6.597	
7.	28.96	0.004	26.68	1987	6.597	0.7668

Il rapporto di spillamento è dato da

$$Y = \frac{h_3 - h_1}{h_6 - h_1} = 0.28$$

Il rendimento di primo principio vale

$$\eta = \frac{(h_5 - h_6) + (1 - Y)(h_6 - h_7)}{(h_5 - h_4)} = 45.3\%$$

e quello di secondo principio

$$\varepsilon = \frac{\eta}{\eta_c} = \frac{\eta}{1 - \frac{T_7}{T_5}} = 0.74$$

La potenza meccanica utile è data da

$$W'_{mu} = G [(h_5 - h_6) + (1 - Y)(h_6 - h_7)] = 33.4 \text{ MW}$$

La potenza termica ceduta in caldaia si ottiene da

$$W_{tc} = G (h_5 - h_4) = 73.7 \text{ MW}$$

ed infine la PMU è data da

$$PMU = \frac{G}{W'_{mu}} = 0.898 \text{ kg/MJ}$$

La seguente tabella riporta i valori dei principali parametri in funzione della pressione dello spillamento, a parità di altri dati:

p_6	T_6	η	W'_{mu}	PMU	Y
bar	°C	%	MW	kg/MJ	%
40	354	44.6	30.5	0.983	32
30	313	45.0	31.8	0.943	30
20	261	45.3	33.4	0.898	28
10	182	45.5	35.5	0.845	24
7	165	45.6	36.4	0.824	22
5	152	45.5	37.2	0.807	20
2	120	45.3	38.8	0.773	16

da essa emerge la convenienza di spillare a basse pressioni e si nota che il rendimento ha un massimo alla temperatura di spillamento che è la media tra quelle di saturazione alla pressione inferiore e superiore (nel nostro caso $(311+29)/2 = 170$ °C).

□

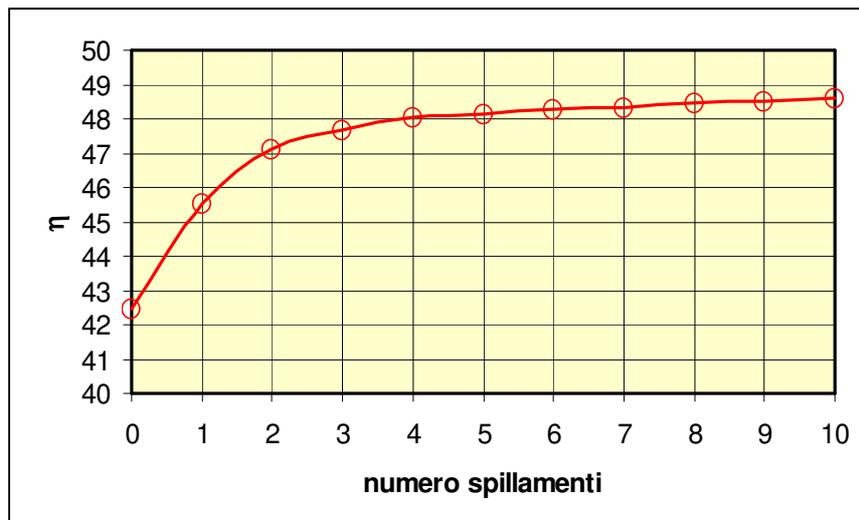


Figura 13: Andamento del rendimento all'aumentare del numero di spillamenti.

Negli impianti di maggior potenza (v.Fig.14), gli spillamenti sono organizzati in due gruppi, ad alta pressione (*preriscaldatori di alta*) e a bassa pressione (*preriscaldatori di bassa*), separati da un componente, detto *degasatore*, che oltre al preriscaldamento assolve lo scopo di rimuovere i gas incondensabili che sono presenti nel vapore o vi si accumulano a causa delle infiltrazioni d'aria nella sezione subatmosferica dell'impianto.

Questi gas, accumulandosi nel condensatore e non potendo essere condensati, causerebbero un incremento di pressione nello stesso (*perdita di vuoto al condensatore*) con conseguente peggioramento del rendimento.

Il degasatore è l'unico scambiatore a miscelamento; gli altri sono a superficie: in essi il vapore spillato condensa preriscaldando l'acqua di alimento, viene successivamente laminato (per

riportarlo allo stato vapore che ha un più alto coefficiente di scambio termico) ed inviato ai preriscaldatori successivi per essere infine convogliato nel *degasatore* (per i preriscaldatori di alta) o nel condensatore (per quelli di bassa). Il *degasatore* opera ad una pressione intermedia per cui è necessario dividere il sistema di pompaggio in tre sezioni: pompe di *estrazione del condensato* (dal condensatore al *degasatore*), pompe *booster* (dal *degasatore* ai preriscaldatori di alta) e *pompe di alimento* (dai preriscaldatori di alta al generatore di vapore). Il ciclo termodinamico standard di un impianto ENEL da 320 MW è riportato in Fig.15.

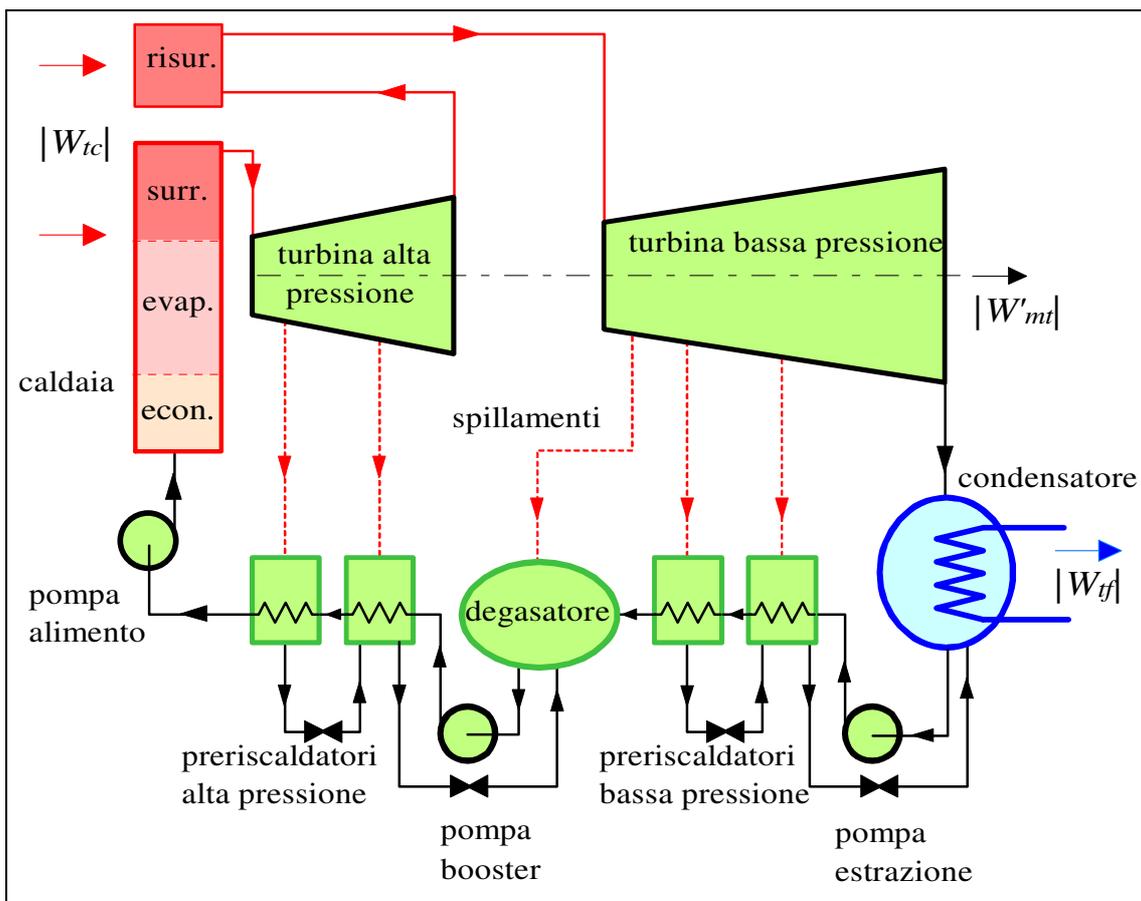


Figura 14: Organizzazione degli spillamenti in un impianto termoelettrico a ciclo Rankine con risurriscaldamento.

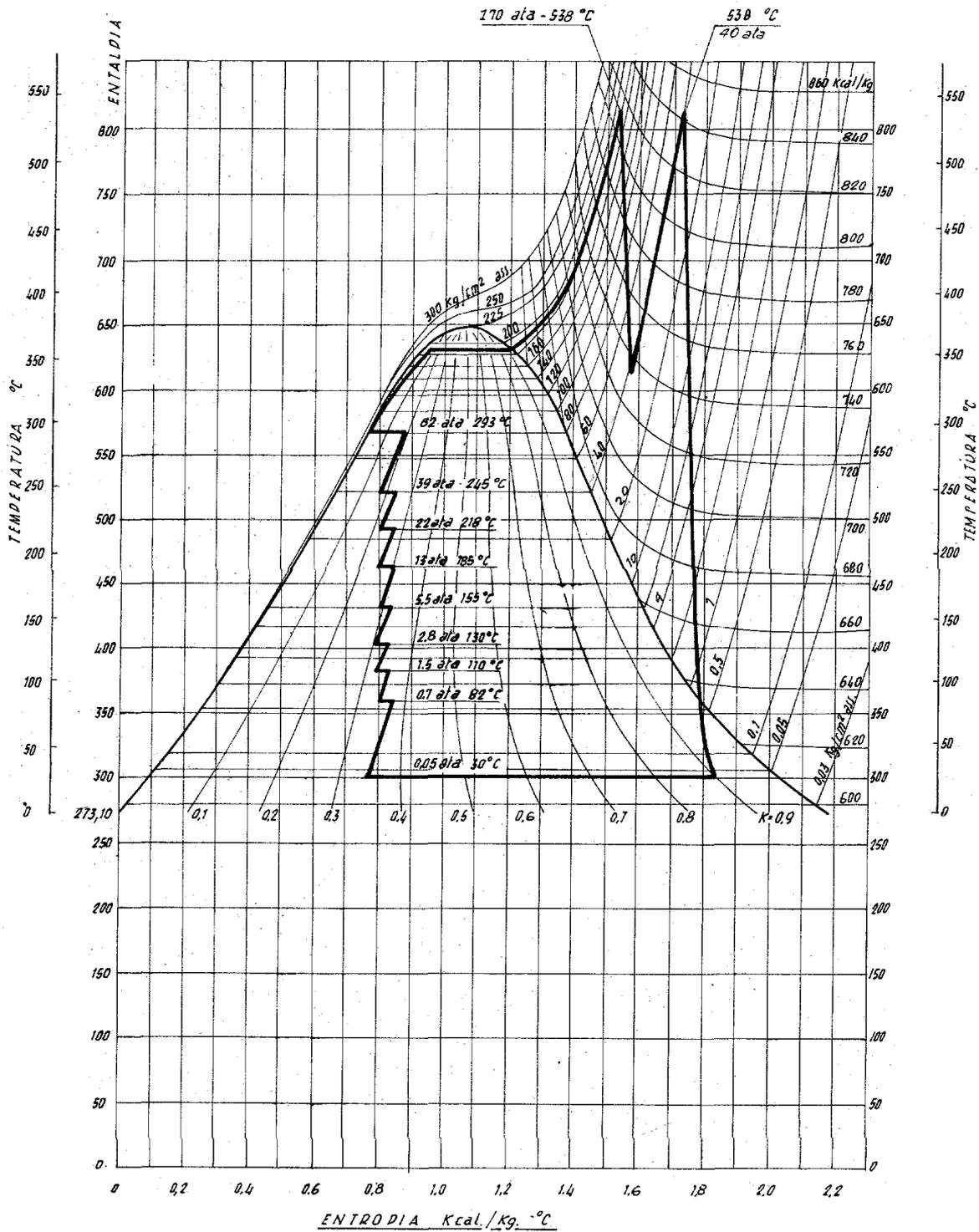


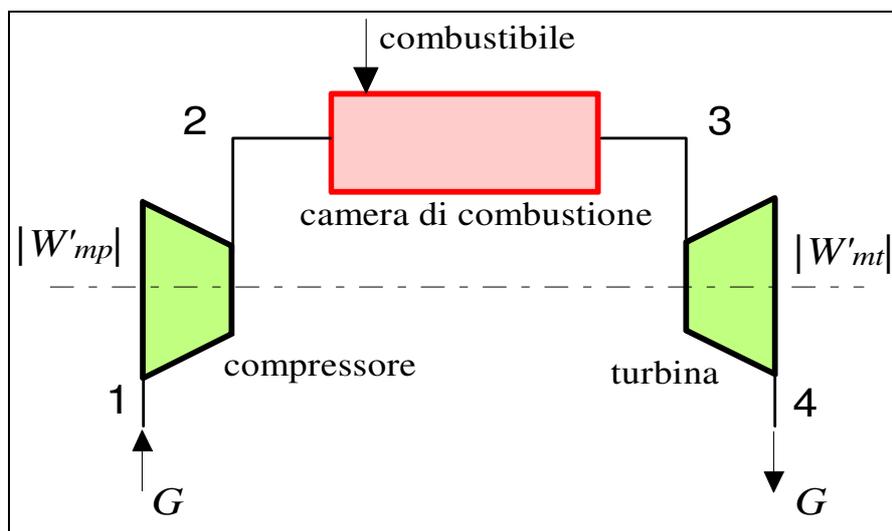
Figura 15: Ciclo Rankine caratteristico dei gruppi termoelettrici ENEL da 320 MW. Si nota la presenza di 8 spillamenti ed un risurriscaldamento. Gli spillamenti vengono rappresentati in modo che l'area racchiusa dal ciclo rappresenti il lavoro effettivo per unità di massa. Il rendimento effettivo del ciclo è di circa il 41%.

4. Il ciclo Joule/Brayton²

Gli impianti motori con turbina a gas sono caratterizzati da un basso rapporto peso/potenza e costo/potenza e dalla relativa facilità con cui possono far fronte a variazioni di carico. Per questo motivo essi sono largamente adottati nella propulsione aeronautica, ma anche in impianti fissi per la produzione di energia elettrica e per l'azionamento di macchine operatrici, (es. centrali di pompaggio). I valori attuali del rendimento di primo principio sono però inferiori a quelli del ciclo Rankine. Lo schema del motore è riportato in Fig.16: il fluido di lavoro (aria), dopo la compressione, entra nella camera di combustione, dove viene immesso il combustibile e avviene, a pressione approssimativamente costante, la reazione chimica di combustione: i gas prodotti di reazione, ad elevata temperatura e pressione, si espandono nella turbina e vengono scaricati nell'atmosfera. In questa configurazione, l'impianto è *a circuito aperto e combustione interna*. Lo stesso impianto (Fig.17) può funzionare a circuito chiuso: in questo caso il fluido (generalmente elio, o anidride carbonica) riceve calore isobaricamente in uno scambiatore ad alta temperatura (che può essere originato da una combustione esterna o anche un reattore nucleare) e dopo l'espansione in turbina, cede il calore residuo all'ambiente in un secondo scambiatore a bassa temperatura.

Nello studio dell'impianto a ciclo Brayton assumeremo le ipotesi semplificative seguenti, che consentono comunque una descrizione soddisfacente del caso reale.

- L'impianto è a circuito chiuso: la eventuale reazione di combustione può essere sostituita dalla adduzione dall'esterno di una equivalente quantità di calore a pressione costante; lo scarico in atmosfera può essere sostituito da una cessione di calore isobara all'ambiente che riporta il fluido nelle condizioni iniziali.
- Il fluido di lavoro può essere considerato un gas ideale a calore specifico costante.
- Turbina e compressore sono adiabatici. Tutte le trasformazioni sono reversibili.



² James Prescott Joule (1818-1889) fisico, matematico e birraio di Manchester, è noto principalmente per aver stabilito l'equivalente meccanico del calore; l'unità SI di energia prende nome da lui. George Brayton (1830-1892), ingegnere statunitense, è noto per l'ideazione e la brevettazione del ciclo omonimo e per l'introduzione del processo di combustione continua, che è alla base della realizzazione delle turbine a gas.

Figura 16: Turbina a gas a circuito aperto.

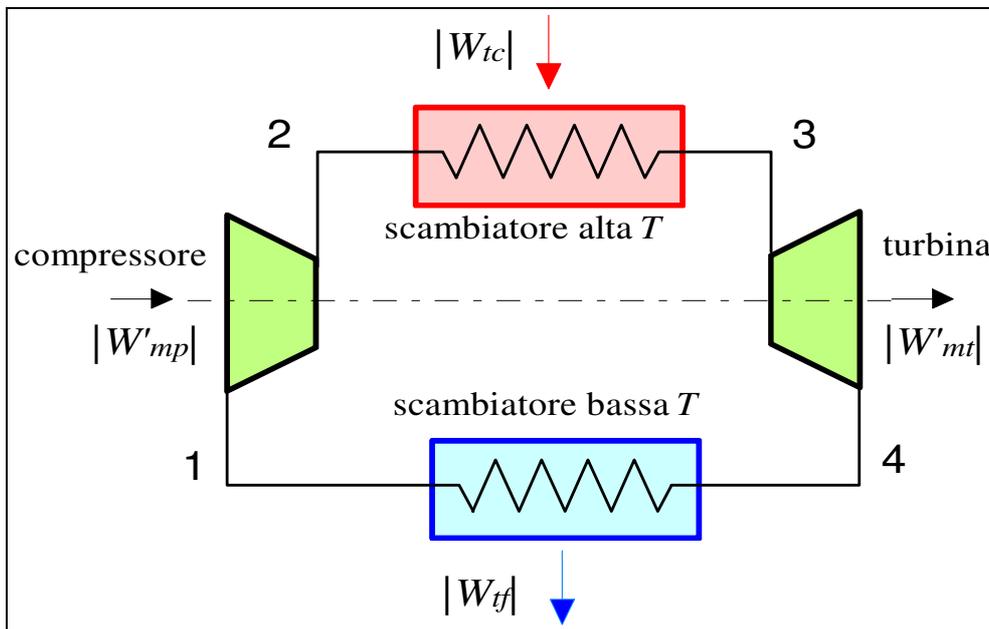


Figura 17: Turbina a gas a circuito chiuso (ciclo Brayton semplice).

Il ciclo risultante è riportato sul diagramma $T-s$ in Fig.18. In tali ipotesi, il bilancio termico dei quattro sistemi aperti in serie che costituiscono l'impianto dà come risultato:

$$\text{compressore (1-2)} \quad W'_{mp} = -G(h_2 - h_1) = -G c_p (T_2 - T_1) \quad (7.24)$$

$$\text{scambiatore alta } T \text{ (2-3)} \quad W_{tc} = G(h_3 - h_2) = G c_p (T_3 - T_2) \quad (7.25)$$

$$\text{turbina (3-4)} \quad W'_{mt} = G(h_3 - h_4) = G c_p (T_3 - T_4) \quad (7.26)$$

$$\text{scambiatore bassa } T \text{ (4-1)} \quad W_{tf} = -G(h_4 - h_1) = -G c_p (T_4 - T_1) \quad (7.27)$$

Notare che i bilanci suddetti sono perfettamente analoghi a quelli del ciclo Rankine, con le importanti differenze che l'ipotesi di gas ideale con c_p costante permette di sostituire i salti entalpici con i corrispondenti salti termici e che in questo caso il lavoro di compressione per un aeriforme *non è trascurabile*.

Posto

$$a = \frac{R}{c_p} = \frac{k-1}{k} \quad (7.28)$$

$$r_p = \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_3}{p_4}$$

dalla espressione della trasformazione adiabatica reversibile per un gas ideale risulta

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} = r_p^a \quad (7.29)$$

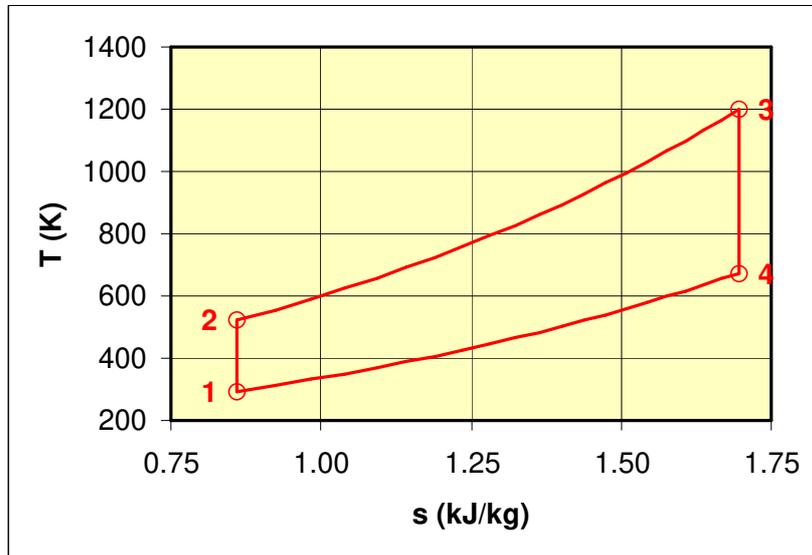


Figura 18: Ciclo Brayton reversibile sul diagramma T - s .

Il rendimento di primo principio del ciclo è dato da

$$\eta = \frac{W'_{mu}}{W_{ic}} = \frac{G(h_3 - h_4) - G(h_2 - h_1)}{G(h_3 - h_2)} \quad (7.30)$$

e, tenendo conto della ipotesi di gas ideale ($\Delta h = c_p \Delta T$) ed eliminando la quantità $G c_p$

$$\eta = \frac{(T_3 - T_4) - (T_2 - T_1)}{(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \quad (7.31)$$

l'espressione precedente può essere semplificata notevolmente tenendo conto che

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} = r_p^a \quad \Rightarrow \quad \frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} = \frac{T_4}{T_2} r_p^a \quad (7.32)$$

da cui

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_1 \left(\frac{T_4}{T_1} - 1 \right)}{T_2 \left(\frac{T_3}{T_2} - 1 \right)} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{1}{r_p^a} \quad (7.33)$$

Come si vede, il rendimento cresce all'aumentare del rapporto di compressione, e dipende solo da quest'ultimo e dal tipo di fluido adottato (che determina il valore di a). Non dipende invece da nessun valore di temperatura del ciclo (ma questo vale solo per il ciclo endoreversibile).

Il rendimento di secondo principio è dato da

$$\varepsilon = \frac{\eta}{\eta_{Carn}} = \frac{1 - \frac{T_1}{T_2}}{1 - \frac{T_1}{T_3}} \quad (7.34)$$

La PMU è data da

$$PMU = \frac{G}{W'_{mu}} = \frac{1}{(h_3 - h_4) - (h_2 - h_1)} = \frac{1}{c_p [(T_3 - T_4) - (T_2 - T_1)]} \quad (7.35)$$

E può essere riarrangiata nella forma

$$PMU = \frac{1}{c_p T_1 \left(1 + \frac{T_3}{T_1} - r_p^a - \frac{T_3}{T_1 r_p^a} \right)} \quad (7.36)$$

La PMU diminuisce all'aumentare del rapporto T_3/T_1 ed è inversamente proporzionale a c_p : questo giustifica l'adozione dell'elio che ha un c_p molto alto, e spiega la tendenza ad incrementare continuamente T_3 .

E' interessante riportare in funzione del rapporto di compressione l'andamento di η e del lavoro unitario $L' = 1/PMU$, per un dato valore del rapporto T_3/T_1 , per l'aria (Fig.19). Da esso si vede come il rendimento cresce monotonicamente con il rapporto di compressione, ma L' ha un massimo (e corrispondentemente la PMU ha un minimo) per un valore del rapporto di compressione dato da

$$r_{pOTT} = \sqrt{\left(\frac{T_3}{T_1} \right)^{\frac{1}{a}}} = \left(\frac{T_3}{T_1} \right)^{\frac{c_p}{2R}} \quad (7.37)$$

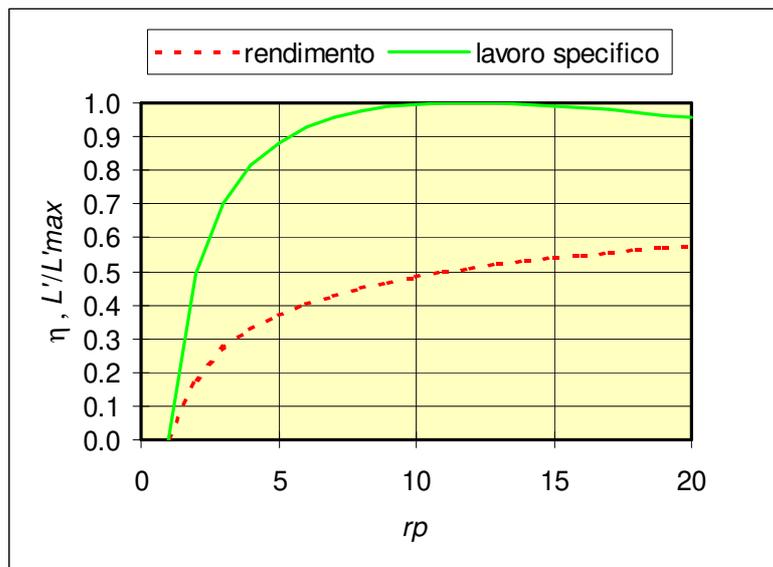


Figura 19: Andamento del rendimento e del lavoro specifico in funzione del rapporto di compressione per un ciclo Brayton reversibile.

Il rapporto di compressione ottimale può essere ricavato derivando la Eq.(7.36) rispetto al rapporto di compressione ed uguagliando a zero.

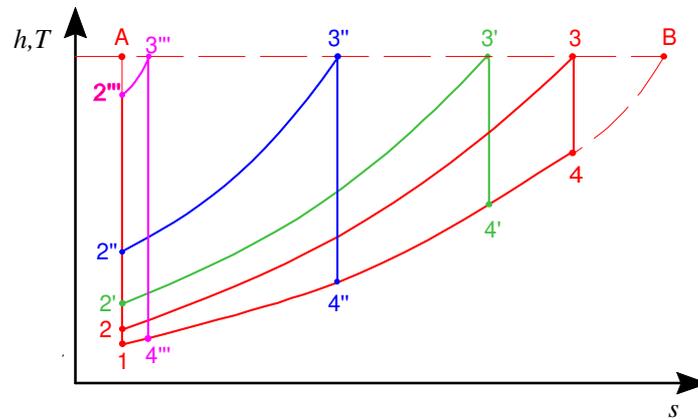


Figura 20: Diverse configurazioni del ciclo Brayton reversibile, al variare del rapporto di compressione, per le medesime condizioni di ingresso (T_1, p_1) e la medesima temperatura massima (T_3).

Queste considerazioni possono essere meglio comprese osservando il diagramma $T-s$ di Fig.20: avendo imposto il valore della temperatura massima del ciclo T_3 e le condizioni di ingresso T_1, p_1 , il ciclo deve essere comunque contenuto all'interno del triangolo mistilineo 1-A-B. Si vede che al crescere del rapporto di compressione (ovvero via via che il punto 2 si sposta verso l'alto) l'area del ciclo prima aumenta e poi torna a diminuire (essa infatti è nulla sia quando 2 coincide con 1 che quando 2 coincide con A). Dato che l'area del ciclo è proporzionale al lavoro ottenuto per unità di massa (e quindi inversamente proporzionale alla PMU) si comprende come il lavoro per unità di massa abbia un massimo come riportato in Fig.19.

Quindi da un lato la tendenza ad incrementare il rendimento porterebbe ad aumentare il rapporto di compressione (riducendo i costi di esercizio), dall'altra il costo di impianto ed il peso possono essere ridotti minimizzando la PMU, ovvero lavorando in condizioni prossime al rapporto di compressione ottimale. Queste considerazioni verranno parzialmente modificate nel prossimo paragrafo, in cui si terrà conto dell'effetto delle irreversibilità. Si nota che il rapporto di compressione ottimale dipende anche, attraverso la variabile a , vedi Eq.(7.37), dal tipo di fluido adottato.

E' relativamente semplice verificare che in un ciclo Brayton che lavora al rapporto di compressione ottimale si ha $T_2 = T_4$.

ESEMPIO 7-6 –Ciclo Brayton endoreversibile ad aria.

Un ciclo Brayton con turbina e compressore ideali lavora tra le temperature di ammissione in turbina di 1200 °C e la temperatura ambiente di 20 °C, pressione di 1 bar. La portata di fluido (aria con $c_p =$ costante, $k = 1.4$, $R = 287$ J/kg K) vale $G = 0.5$ kg/s. Per un valore del rapporto di compressione pari a 6, determinare i rendimenti di primo e secondo principio, la potenza meccanica utile, la potenza termica ceduta nello scambiatore ad alta temperatura e la portata massica unitaria. Ripetere i calcoli per il valore del rapporto di compressione corrispondente alle condizioni di minimo ingombro.

I calcoli sono eseguiti con il foglio di calcolo EXCEL C7BRAYTON.XLS.

Le proprietà del fluido nei punti chiave del ciclo sono riportate nella seguente tabella, dove si sono sfruttate le relazioni (v. Cap.4)

$$T_2 = T_1 r_p^{R/c_p}, \quad T_4 = \frac{T_3}{r_p^{R/c_p}}$$

	p	T	h	s
	bar	K	kJ/kg	kJ/kg K
1	1	293.15	0.0	0.8598
2	6	489.1	196.9	0.8598
3	6	1473	1185.2	1.9672
4	1	882.8	592.3	1.9672

Il rendimento di primo principio vale

$$\eta = 1 - \frac{1}{r_p^a} = 0.401$$

e quello di secondo principio

$$\varepsilon = \frac{\eta}{\eta_{Carn}} = \frac{\eta}{1 - \frac{T_1}{T_3}} = 0.50$$

La potenza meccanica utile è data da

$$W'_{mu} = G c_p [(T_3 - T_4) - (T_2 - T_1)] = 198 \text{ kW}$$

dove si è posto $c_p = Rk / (k - 1) = 1004 \text{ J/kg K}$.

La potenza termica ceduta in caldaia si ottiene da

$$W_{tc} = G c_p (T_3 - T_2) = 494 \text{ kW}$$

ed infine la PMU è data da

$$PMU = \frac{G}{W'_{mu}} = 2.54 \text{ kg/MJ}$$

Il rapporto di compressione ottimale è dato da

$$r_{p\text{OTT}} = \sqrt{\left(\frac{T_3}{T_1}\right)^{\frac{1}{a}}} = 16.86$$

e, ripetendo i calcoli, risulta $\eta = 0.554$, $\varepsilon = 0.69$, $W'_{mu} = 227 \text{ kW}$, $W_{tc} = 410 \text{ kW}$, $PMU = 2.21 \text{ kg/MJ}$. Le proprietà del fluido nei punti chiave del ciclo sono riportate nella seguente tabella

	p	T	h	s
	bar	K	kJ/kg	kJ/kg K
1	1	293.15	0.0	0.8598
2	16.86	657.1	365.6	0.8598
3	16.86	1473	1185.2	1.6707
4	1	657.2	365.6	1.6707



ESEMPIO 7-7 –Ciclo Brayton endoreversibile ad elio.

Ripetere i calcoli dell'esempio precedente considerando come fluido di lavoro l'elio (gas ideale con c_p = costante, $k = 1.667$, $R = 2078$ J/kg K).

 I calcoli sono eseguiti con il foglio di calcolo EXCEL C7BRAYTON.XLS.

Le proprietà del fluido nei punti chiave del ciclo sono riportate nella seguente tabella

	p	T	h	s
	bar	K	kJ/kg	kJ/kg K
1	1	293.15	0.0	6.2251
2	6	600.4	1595.7	6.2251
3	6	1473	6127.5	10.8860
4	1	719.2	2212.7	10.8860

Il rendimento di primo principio vale

$$\eta = 1 - \frac{1}{r_p^a} = 0.512$$

e quello di secondo principio

$$\varepsilon = \frac{\eta}{\eta_{Cam}} = \frac{\eta}{1 - \frac{T_1}{T_3}} = 0.64$$

La potenza meccanica utile (essendo per l'elio $c_p = R k / (k-1) = 5195$ J/kg K) è data da

$$W'_{mu} = G c_p [(T_3 - T_4) - (T_2 - T_1)] = 1160 \text{ kW}$$

La potenza termica ceduta in caldaia si ottiene da

$$W_{ic} = G c_p (T_3 - T_2) = 2266 \text{ kW}$$

ed infine la PMU è data da

$$PMU = \frac{G}{W'_{mu}} = 0.43 \text{ kg/MJ}$$

Il rapporto di compressione ottimale (essendo per l'elio $a = 0.400$) è dato da

$$r_{pOTT} = \sqrt{\left(\frac{T_3}{T_1}\right)^{\frac{1}{a}}} = 7.52$$

e, ripetendo i calcoli, risulta $\eta = 0.554$, $\varepsilon = 0.69$, $W'_{mu} = 1174$ kW, $W_{ic} = 2120$ kW, $PMU = 0.43$ kg/MJ (si vede che il minimo nella PMU è piuttosto blando, dato che questo valore praticamente coincide con il precedente). Le proprietà del fluido nei punti chiave del ciclo sono riportate nella seguente tabella.

	p	T	h	s
	bar	K	kJ/kg	kJ/kg K
1	1	293.15	0.0	6.2251
2	7.52	657.2	1890.6	6.2251
3	7.52	1473	6127.5	10.4168
4	1	657.1	1890.0	10.4168

Notare come, rispetto al caso dell'aria, si ottengano prestazioni decisamente superiori. 

Effetto delle irreversibilità nel ciclo Brayton

Le irreversibilità che influenzano le prestazioni del ciclo Brayton sono quelle dovute alla non idealità delle espansioni nella turbina e nel compressore. A differenza del ciclo Rankine, anche queste ultime sono importanti, dato che il compressore assorbe un'aliquota non trascurabile della potenza erogata dalla turbina. Le perdite di carico negli scambiatori hanno invece un impatto minore sulle prestazioni.

Altri problemi sono legati al fatto che il fluido non è un gas ideale: i calori specifici variano con la temperatura e la stessa natura del fluido, a causa delle reazioni chimiche di combustione e dissociazione termica, cambia da punto a punto nel ciclo.

Consideriamo quindi un ciclo Brayton a gas ideale in cui la turbina ed il compressore sono caratterizzati da un rendimento isoentropico di espansione e di compressione, rispettivamente η_t ed η_c . Il ciclo si modifica come in Fig.21. L'espressione del rendimento rimane formalmente inalterata

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \tag{7.38}$$

e con un po' di pazienza, tenendo conto delle relazioni tra T_2 , T_4 e T_{2i} , T_{4i} (vedi Cap.4), può essere rielaborata nella forma

$$\eta = \frac{\eta_t \frac{T_3}{T_1} \left(1 - \frac{1}{r_p^a} \right) - \frac{r_p^a - 1}{\eta_c}}{\frac{T_3}{T_1} - 1 - \frac{r_p^a - 1}{\eta_c}} \tag{7.39}$$

Si nota pertanto che il rendimento è minore di zero se

$$\eta_c \eta_t < r_p^a \frac{T_1}{T_3} \tag{7.40}$$

In tal caso, il compressore assorbe più lavoro di quanto ne eroga la turbina. Fintantoché non è stato possibile costruire compressori con alto valore del rendimento isoentropico, il ciclo Brayton non ha trovato realizzazione pratica.

La PMU può essere espressa come segue

$$PMU = \frac{1}{c_p T_1 \left[\eta_t \frac{T_3}{T_1} \left(1 - \frac{1}{r_p^a} \right) + \frac{1 - r_p^a}{\eta_c} \right]} \tag{7.41}$$

Riportando nuovamente in grafico (Fig.22) i valori di η e $L' = 1/PMU$, si nota come L' abbia un massimo, dato da

$$r_{p,OTT,PMU} = \sqrt{\left(\frac{T_3}{T_1} \eta_c \eta_t \right)^{\frac{1}{a}}} \tag{7.42}$$

ovvero, spostato a valori minori rispetto al caso ideale.

In questo caso, tuttavia, anche la curva del rendimento presenta un massimo per un valore del rapporto di compressione più elevato di quello della Eq.(7.42). Nel caso reale, inoltre, il rendimento aumenta anche all'aumentare della temperatura massima del ciclo, T_3 , e questo giustifica la tendenza all'aumento di quest'ultima. Nella selezione del rapporto di compressione per una macchina reale, bisogna quindi scegliere il valore del rapporto di compressione in modo da operare in condizioni di massimo rendimento o di minimo ingombro. I motori aeronautici lavorano generalmente in condizioni di massimo rendimento, dato che questo permette di ridurre il carico di combustibile e quindi il peso globale dell'aeromobile. Al contrario, spesso gli impianti fissi vengono progettati per le condizioni di minimo ingombro per ridurre i costi di impianto. Notare anche che la condizione di massimo rendimento implica un rapporto di compressione maggiore di quella di minimo ingombro. La distanza tra i due valori ottimali del rapporto di compressione cresce con T_3 .

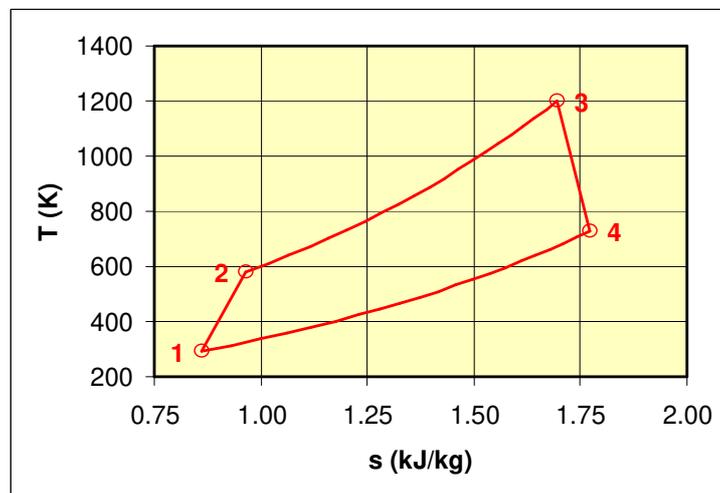


Figura 21: Ciclo Brayton reale sul diagramma T - s .

Indicativamente, i rapporti di compressione attualmente adottati oscillano tra 5 e 15 per impianti fissi (detti anche *heavy duty*) e tra 15 e 30 per motori aeronautici o turbine fisse *aeroderivate* (ovvero, derivate da motori aeronautici). C'è tendenza ad aumentare il rapporto di compressione (fino a 40:1). Le potenze installate sono da poche decine di kW fino a rispettivamente 200 MW per *heavy duty* e 40 MW per *aeroderivate*. I rendimenti sono, tranne poche eccezioni, intorno al 33-42%, ma si pensa di riuscire a superare in futuro il 45%. La temperatura massima di ammissione in turbina nelle applicazioni civili è attualmente di 1300 °C (oltre 1500 °C per gli aerei militari) e raggiungerà i 1450 °C nelle turbine di prossima generazione. Questo comporta l'adozione di sofisticati sistemi di raffreddamento delle palette, che, essendo alimentati dal compressore, possono impegnare fino al 20% dell'aria aspirata dalla macchina.

Gli impianti a ciclo Brayton devono il loro successo al limitato rapporto peso-potenza che, oltre a renderli adatti alla propulsione aeronautica, rende gli impianti fissi compatti e consegnabili "chiavi in mano". Inoltre, presentano brevi transitori di avviamento e sono quindi utili a far fronte ad improvvisi picchi nelle richieste di potenza. Come tutti i motori a

combustione interna, non hanno coppia allo spunto e per l'avviamento hanno bisogno di un motore di lancio.

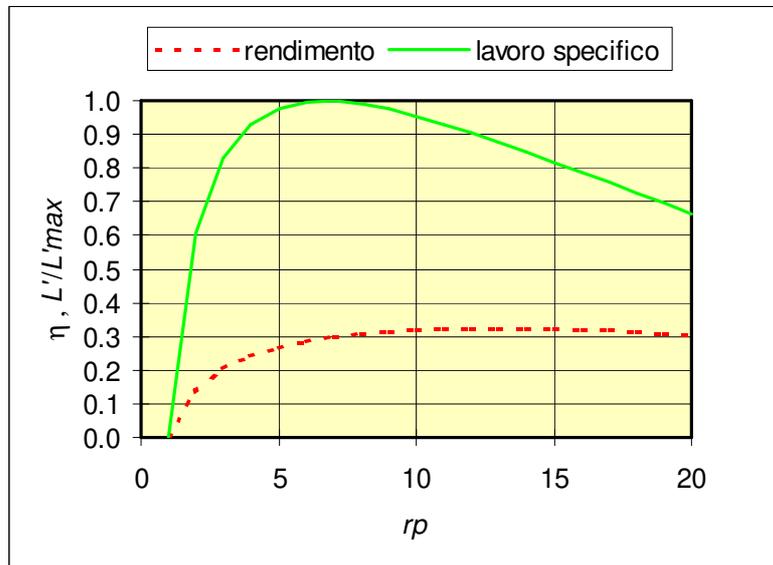


Figura 22: Andamento del rendimento e della PMU in funzione del rapporto di compressione per un ciclo Brayton reale.

ESEMPIO 7-8 –Ciclo Brayton reale.

Un ciclo Brayton con turbina e compressore reali lavora tra le temperature di ammissione in turbina di 1200 °C ed la temperatura ambiente di 20 °C, pressione di 1 bar. La portata di fluido (aria con c_p = costante, $k = 1.4$, $R = 287$ J/kg K) vale $G = 0.5$ kg/s. Il rendimento isoentropico della turbina vale 0.9 e quello del compressore 0.8. Per un valore del rapporto di compressione pari a 6, determinare i rendimenti di primo e secondo principio, la potenza meccanica utile, la potenza termica ceduta nello scambiatore ad alta temperatura e la portata massica unitaria. Determinare inoltre la massima potenza teoricamente recuperabile dai gas di scarico.

I calcoli possono essere eseguiti con il foglio di calcolo EXCEL C7BRAYTON.xls.

Le proprietà del fluido nei punti chiave del ciclo sono riportate nella seguente tabella, dove si sono sfruttate le relazioni seguenti (v. Cap.4)

$$T_{2i} = T_1 r_p^{R/c_p} \quad , \quad T_2 = T_1 + \frac{T_{2i} - T_1}{\eta_c}$$

$$T_{4i} = \frac{T_3}{r_p^{R/c_p}} \quad , \quad T_4 = T_3 - \eta_t (T_3 - T_{4i})$$

	p	T	h	s
	bar	K	kJ/kg	kJ/kg K
1	1	293.15	0.0	0.8598
2	6	538.1	246.1	0.9557
3	6	1473	1185.2	1.9672
4	1	941.8	651.6	2.0322

Il rendimento di primo principio vale

$$\eta = 1 - \frac{1 - \frac{T_3}{T_1} \left(1 - \eta_t + \frac{\eta_t}{r_p^a} \right)}{1 - \frac{T_3}{T_1} + \frac{r_p^a - 1}{\eta_c}} = 0.306$$

e quello di secondo principio

$$\varepsilon = \frac{\eta}{\eta_{Carn}} = \frac{\eta}{1 - \frac{T_1}{T_3}} = 0.38$$

La potenza meccanica utile è data da

$$W'_{mu} = G c_p [(T_3 - T_4) - (T_2 - T_1)] = 144 \text{ kW}$$

La potenza termica ceduta in caldaia si ottiene da

$$W_{tc} = G c_p (T_3 - T_2) = 470 \text{ kW}$$

ed infine la PMU è data da

$$PMU = \frac{G}{W'_{mu}} = 3.49 \text{ kg/MJ}$$

Il rapporto di compressione ottimale che massimizza il lavoro specifico (o minimizza la PMU) è dato da

$$r_{p,OTT,PMU} = \sqrt{\left(\frac{T_3}{T_1} \eta_c \eta_t \right)^{\frac{1}{a}}} = 9.49$$

e, ripetendo i calcoli, risulta $\eta = 0.351$, $\varepsilon = 0.44$, $W'_{mu} = 150 \text{ kW}$, $W_{tc} = 427 \text{ kW}$, $PMU = 3.35 \text{ kg/MJ}$. Le proprietà del fluido nei punti chiave del ciclo sono riportate nella seguente tabella

	p	T	h	s
	bar	K	kJ/kg	kJ/kg K
1	1	293.15	0.0	0.8598
2	9.49	623.7	332.0	0.9723
3	9.49	1473	1185.2	1.8356
4	1	844.3	553.6	1.9223

Infine la potenza teorica massima ottenibile dai gas di scarico si può calcolare tramite il bilancio di disponibilità (v. Cap.6), e corrisponde a quella di un processo reversibile che riporta i gas di scarico allo stato morto (convenzionalmente $T_0 = 298.15 \text{ K}$, $p_0 = 1.013 \text{ bar}$)

$$W'_{m,max} = G (a_{f,4} - a_{f,0}) = G a_{f,4} = G [(h_4 - h_0) - T_0 (s_4 - s_0)]$$

quindi, per un gas ideale con $c_p = \text{cost}$

$$W'_{m,\max} = G \left[c_p (T_4 - T_0) - T_0 \left(c_p \ln \frac{T_4}{T_0} - R \ln \frac{p_4}{p_0} \right) \right] = G c_p \left[(T_4 - T_0) - T_0 \ln \frac{T_4}{T_0} \right] = 151 \text{ kW}$$

dove il termine contenente le pressioni è nullo, perchè si scarica a pressione ambiente. La potenza (attenzione! massima, teorica) perduta è quindi dello stesso ordine di grandezza di quella prodotta.

□

Cenni all'utilizzazione del ciclo Brayton nei motori aeronautici

I turbomotori aeronautici moderni si dividono in due categorie:

- motori *turboelica*, in cui la turbina, oltre ad azionare il compressore, mette in movimento l'elica;
- motori *turbogetto*, in cui la turbina eroga potenza unicamente per azionare il compressore (questa parte di motore è detta generatore di gas); i gas in uscita dalla turbina, ancora ad elevato contenuto entalpico, vengono accelerati in un *ugello* fino ad una velocità superiore a quella di volo: la corrispondente variazione di quantità di moto fornisce la spinta propulsiva all'aereo.

Nei motori turbogetto, spesso il primo stadio di compressione è realizzato mediante un diffusore (v. Cap.4). I motori turbogetto hanno consentito la realizzazione di aeromobili per il volo ad alta velocità (anche superiore alla velocità del suono) ed alta quota.

Ultimamente, hanno preso piede anche i motori *turbofan*, che, in estrema sintesi, combinano i due tipi precedenti: in essi, *una parte* dell'aria aspirata viene semplicemente compressa, e, senza passare attraverso la camera di combustione viene scaricata posteriormente a velocità maggiore, realizzando un effetto propulsivo analogo a quello dell'elica. La parte centrale del motore è invece un normale turbogetto.

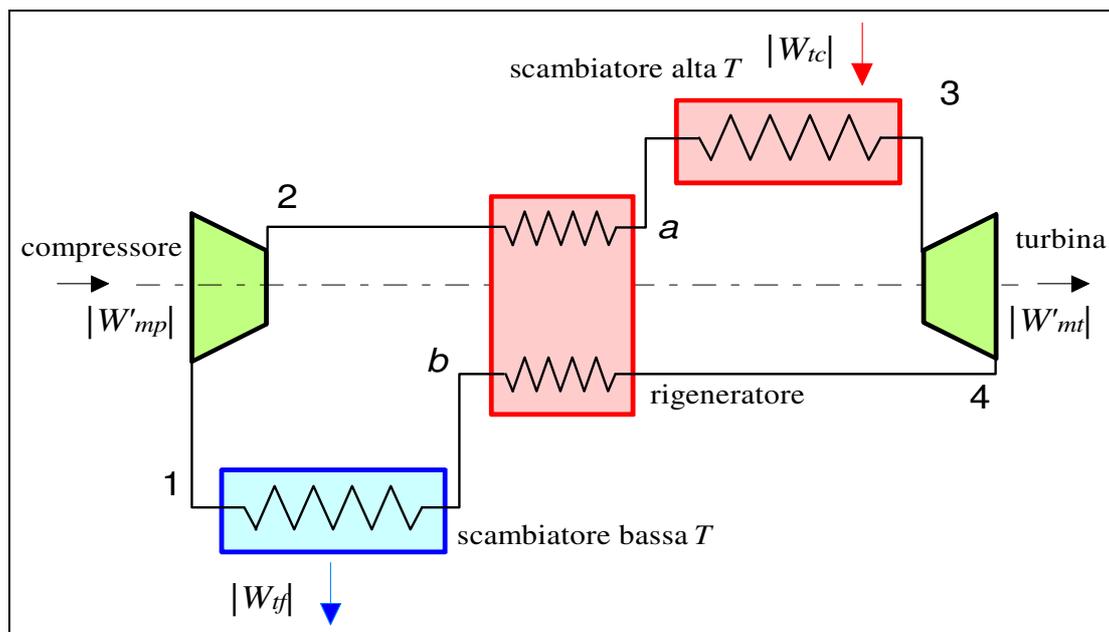


Figura 23: Schema di ciclo Brayton con rigenerazione.

Il ciclo Brayton con rigenerazione

Lo schema di questo tipo di impianto è riportato in Fig.23 ed il ciclo termodinamico in Fig.24: negli impianti a combustione interna e ciclo aperto, ovviamente lo scambiatore di bassa temperatura non è presente. In questo impianto si utilizzano i gas caldi in uscita dalla turbina, a temperatura ancora elevata, per preriscaldare tramite uno scambiatore di calore a superficie, detto *rigeneratore* il gas all'uscita del compressore prima dell'introduzione nella camera di combustione. Si risparmia quindi combustibile, aumentando il rendimento, a spese dell'introduzione di un nuovo componente, generalmente costoso ed ingombrante. La rigenerazione si adotta talvolta in impianti di potenza inferiore a 10 MW, ed è considerata antieconomica per potenze superiori date le grosse dimensioni del rigeneratore, per quanto l'introduzione di nuovi scambiatori di calore compatti potrebbe in futuro modificare queste considerazioni. Inoltre, essa è improponibile (per motivi di ingombro e peso) nel caso della propulsione aeronautica.

I bilanci dei cinque sistemi aperti che costituiscono l'impianto sono riportati nel seguito: le prime quattro espressioni sono identiche a quelle del ciclo Brayton semplice. Come di consueto, le espressioni in cui compare l'entalpia sono valide per qualunque fluido, quelle in cui compare la temperatura solo per gas ideali a c_p costante.

compressore (1-2) $W'_{mp} = -G(h_2 - h_1) = -G c_p (T_2 - T_1)$ (7.43)

scambiatore alta T (2-3) $W'_{tc} = G(h_3 - h_2) = G c_p (T_3 - T_2)$ (7.44)

turbina (3-4) $W'_{mt} = G(h_3 - h_4) = G c_p (T_3 - T_4)$ (7.45)

scambiatore bassa T (4-1) $W'_{tf} = -G(h_4 - h_1) = -G c_p (T_4 - T_1)$ (7.46)

rigeneratore (4-b e 2-a) $G(h_a - h_2) = G(h_4 - h_b)$; $T_a - T_2 = T_4 - T_b$ (7.47)

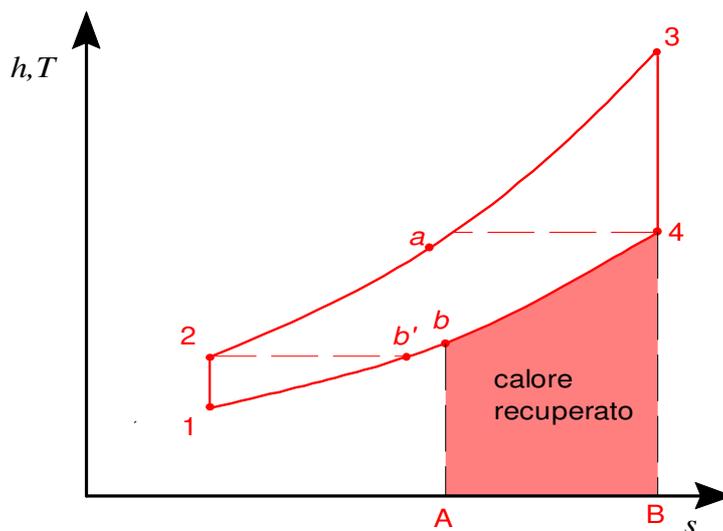


Figura 24: Diagramma $T-s$ per ciclo Brayton con rigenerazione.

Il calore recuperato nel rigeneratore è rappresentato sul piano $T-s$ (Fig.24) dall'area $AB4b$. Ovviamente, dato che lo scambio termico avviene sempre dal corpo più caldo a quello più freddo, per la rigenerazione è necessario che i gas in uscita dalla turbina siano più caldi di quelli in uscita dal compressore, quindi deve essere

$$T_a \leq T_4 \quad ; \quad T_2 \leq T_b \quad (7.48)$$

da cui segue che

$$T_2 \leq T_4 \quad (7.49)$$

La condizione limite si ha dunque se il punto b in Fig.24 coincide con il punto b' . Nel caso di ciclo endoreversibile, essendo come è noto $T_2 / T_1 = T_3 / T_4$ (v. Eq.(7.29)) nelle condizioni limite per la rigenerazione si ha

$$T_2 = T_4 = \sqrt{T_3 T_1} \quad (7.50)$$

Si vede quindi che la rigenerazione è possibile solo se il rapporto di compressione soddisfa

$$r_p \leq \left(\frac{T_3}{T_1} \right)^{\frac{c_p}{2R}} \quad (7.51)$$

e quindi per *bassi valori del rapporto di compressione* (notare che il valore limite di r_p corrisponde a quello per cui la PMU del ciclo endoreversibile ha un minimo, v. Eq.(7.37)).

La massima quantità di calore recuperabile per unità di tempo è dunque data da

$$W_{TR,max} = G c_p (T_4 - T_2) \quad (7.52)$$

Dalla figura 24, si vede che in questo caso il calore dovrebbe trasferirsi tra i due fluidi con differenza di temperatura nulla, per cui il corrispondente ipotetico scambiatore di calore dovrebbe avere superficie infinita. Si introduce pertanto l'*efficienza del rigeneratore*, ϵ_R , definita come

$$\epsilon_R = \frac{\text{calore recuperato nel rigeneratore}}{\text{calore max. recuperabile}} = \frac{W_{TR}}{W_{TR,max}} = \frac{T_a - T_2}{T_4 - T_2} = \frac{T_4 - T_b}{T_4 - T_2} \quad (7.53)$$

Il concetto di *efficienza* si può applicare a qualunque scambiatore di calore e verrà ripreso in maggior dettaglio nel Cap.13. Ovviamente, l'efficienza è sempre minore di 1.

Poste queste definizioni, si può passare a determinare il *rendimento di primo principio* del ciclo Brayton con rigenerazione, che è dato da

$$\eta = \frac{W'_{mu}}{W_{tc}} = \frac{G(h_3 - h_4) - G(h_2 - h_1)}{G(h_3 - h_a)} \quad (7.54)$$

e quindi per un gas ideale con c_p costante, tenuto conto anche della Eq.(7.53)

$$\eta = \frac{W'_{mu}}{W_{tc}} = \frac{(T_3 - T_4) - (T_2 - T_1)}{T_3 - T_a} = \frac{(T_3 - T_4) - (T_2 - T_1)}{(T_3 - T_2) - \epsilon_R (T_4 - T_2)} \quad (7.55)$$

Tramite una serie di calcoli analoghi a quelli condotti in precedenza per il ciclo Brayton semplice, che qui si omettono, per $\eta_c = \eta_t = 1$ questa espressione può essere messa in funzione delle sole temperature estreme del ciclo (T_1, T_3) e dell'efficienza del rigeneratore ϵ_R

$$\eta = 1 - \frac{1}{r_p^a} \frac{\frac{T_3}{T_1} \frac{1}{r_p^a} (1 - \epsilon_R) + \epsilon_R r_p^a - 1}{\frac{T_3}{T_1} \frac{1}{r_p^a} \left(1 - \frac{\epsilon_R}{r_p^a} \right) + \epsilon_R - 1} \quad (7.56)$$

Che nel caso ideale $\epsilon_R = 1$ si traduce in

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_3} r_p^a \quad (7.57)$$

Il rendimento è quindi in questo caso una funzione *decescente* del rapporto di compressione, al contrario del ciclo Brayton semplice. Dal diagramma di Fig.25 si vede che per efficienza dello scambiatore minore di 1, invece, il rendimento mostra un massimo che si sposta verso destra al diminuire dell'efficienza dello scambiatore. La curva $\epsilon_R = 0$ corrisponde al ciclo Brayton semplice.

Si noti che la rigenerazione *non altera l'area del ciclo sul piano T-s*, e quindi il lavoro specifico e la PMU (e la loro dipendenza dal rapporto di compressione) rimangono inalterati rispetto al corrispondente ciclo Brayton semplice. Si vede anche che guadagni significativi di rendimento sono possibili solo in caso di alta efficienza del rigeneratore.

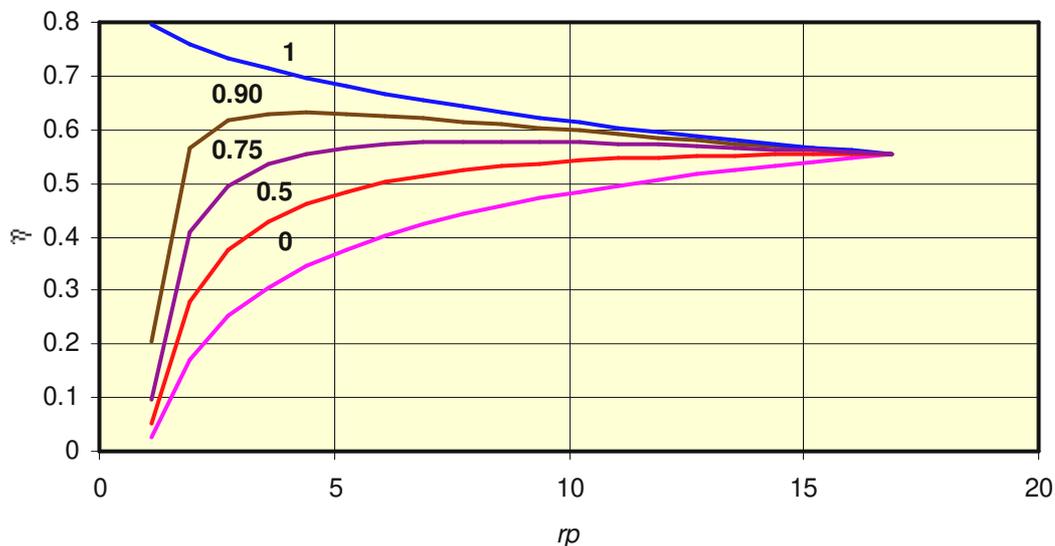


Figura 25: Rendimento del ciclo Brayton con rigenerazione in funzione del rapporto di compressione, per diversi valori dell'efficienza del rigeneratore; $T_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_3 = 1200 \text{ }^\circ\text{C}$. Il caso $\epsilon_R = 0$ corrisponde all'assenza di rigeneratore. Il rapporto di compressione limite per la rigenerazione in questo caso vale 16.9, e tutte le curve vanno a coincidere per tale valore.

Recentemente è stato proposto un ciclo Brayton rigenerato chiuso ad elio per il raffreddamento di futuri reattori nucleari a gas, con una potenza utile di circa 300 MW: con un rapporto di compressione pari a 2.7 ed una temperatura di ingresso in turbina pari a 850°C a 72 bar, ed efficienza di rigenerazione attorno al 95%, sembra possibile raggiungere rendimenti attorno al 50%.

ESEMPIO 7-9 – Ciclo Brayton con rigenerazione.

Un ciclo Brayton a rigenerazione, con turbina e compressore ideali, lavora tra le temperature di ammissione in turbina di 1200 °C e la temperatura ambiente di 20 °C, pressione di 1 bar. La portata di fluido (aria con c_p = costante, $k = 1.4$, $R = 287 \text{ J/kg K}$) vale $G = 0.5 \text{ kg/s}$. Per un valore del rapporto di compressione pari a 6, ed una efficienza del rigeneratore $\epsilon_R = 0.75$, determinare i rendimenti di primo e secondo principio, la potenza meccanica utile, la potenza termica ceduta nello scambiatore ad alta temperatura e la portata massica unitaria. Ripetere i calcoli per un rendimento isoentropico della turbina $\eta_t = 0.9$ e del compressore $\eta_c = 0.8$.

 I calcoli possono essere eseguiti con il foglio di calcolo EXCEL C7BRAYTON-RIG.xls.

Le proprietà del fluido nei punti chiave del ciclo sono riportate nella seguente tabella, analoga a quella dell’Es.6: la presenza del rigeneratore in effetti non cambia nulla riguardo ai punti 1,2,3,4. Le proprietà dei punti *a* e *b* sono ricavabili dalla efficienza del rigeneratore, Eq.(7.53) da cui segue

$$T_a = T_2 + \epsilon_R (T_4 - T_2) = 784.5 \text{ K}$$

$$T_b = T_4 - \epsilon_R (T_4 - T_2) = 587.6 \text{ K}$$

	p	T	h	s
	bar	K	kJ/kg	kJ/kg K
1	1	293.15	0.0	0.8598
2	6	489.1	196.9	0.8598
3	6	1473	1185.2	1.9672
4	1	882.8	592.3	1.9672
<i>a</i>	6	784.5	493.5	1.3343
<i>b</i>	1	587.6	295.7	1.5582

La potenza meccanica utile è data da

$$W'_{mu} = G c_p [(T_3 - T_4) - (T_2 - T_1)] = 198 \text{ kW}$$

e rimane quindi inalterata rispetto al caso dell’Esempio 7.6 (infatti, l’area del ciclo e la portata rimangono invariate). Il calore ceduto in caldaia vale invece

$$W_{ic} = G c_p (T_3 - T_a) = 345.9 \text{ kW}$$

Il rendimento di primo principio è ottenibile come

$$\eta = \frac{W'_{m,u}}{W_{ic}} = 0.572$$

ed è superiore a quello del ciclo Brayton semplice di pari caratteristiche, Es.6, che valeva 0.401. Si può anche verificare che esso coincide con quanto ricavabile dalla Eq.(7.56) (di uso molto più scomodo)

$$\eta = 1 - \frac{1 - \frac{T_3}{T_1} \frac{1}{r_p^a} (1 - \epsilon_R) + \epsilon_R r_p^a - 1}{\frac{r_p^a}{T_1} \frac{T_3}{r_p^a} \left(1 - \frac{\epsilon_R}{r_p^a} \right) + \epsilon_R - 1} = 0.572$$

Il rendimento di secondo principio vale

$$\epsilon = \frac{\eta}{\eta_{Cam}} = \frac{\eta}{1 - \frac{T_1}{T_3}} = 0.71$$

ed infine la PMU (sempre inalterata rispetto all' Esempio 7.6) è data da

$$PMU = \frac{G}{W'_{mu}} = 2.54 \text{ kg/MJ}$$

Per quanto riguarda il caso di turbina e compressore non ideali, le proprietà dei punti 1,2,3,4 sono analoghe a quelle dell' Esempio 7.8 e sono riportate nella tabella seguente, dove si è fatto nuovamente uso della Eq.(7.53) per il calcolo di T_a e T_b .

	p	T	h	s
	bar	K	kJ/kg	kJ/kg K
1	1	293.15	0.0	0.8598
2	6	538.1	246.1	0.9557
3	6	1473	1185.2	1.9672
4	1	941.8	651.6	2.0322
a	1	841.0	550.3	1.4042
b	6	639.1	347.5	1.6426

La potenza meccanica utile (inalterata rispetto all'Es.8) è data da

$$W'_{mu} = G c_p [(T_3 - T_4) - (T_2 - T_1)] = 144 \text{ kW}$$

mentre la potenza termica ceduta in caldaia si ottiene da

$$W_{tc} = G c_p (T_3 - T_a) = 317.5 \text{ kW}$$

Che è minore di quella del caso ideale! Questo miglior risultato per il ciclo con rigenerazione è imputabile al fatto che i gas escono dalla turbina "reale" a temperatura maggiore, e quindi una maggiore aliquota di energia termica è recuperabile. Inoltre, essi escono anche dal compressore a temperatura superiore. D'altra parte, la potenza meccanica utile diminuisce.

Conseguentemente, il rendimento di primo principio vale

$$\eta = \frac{W'_{m,u}}{W_{tc}} = 0.453$$

Il rendimento di secondo principio è dato da

$$\epsilon = \frac{\eta}{\eta_{Cam}} = \frac{\eta}{1 - \frac{T_1}{T_3}} = 0.57$$

ed infine la PMU (invariata rispetto all' Esempio 7.8) è data da

$$PMU = \frac{G}{W'_{mu}} = 3.49 \text{ kg/MJ}$$

□

Cenni ad ulteriori possibili miglioramenti del ciclo Brayton

Si accenna qui solo brevemente agli ulteriori metodi per migliorare il rendimento del ciclo Brayton dato che essi sono ancora poco diffusi a livello applicativo. Per una loro trattazione approfondita, si veda ad esempio Mastrullo, Mazzei e Vanoli, Termodinamica per Ingegneri, Liguori, Cap.2.7-2.8.

- *Compressione multistadio interrefrigerata*: abbiamo visto (Cap.4) che con tale tecnica si può ridurre il lavoro di compressione. Combinata alla rigenerazione, essa produce un sensibile aumento di rendimento a spese di una notevole complicazione dell'impianto. Recentemente, gli studi sulla compressione interrefrigerata hanno subito un nuovo impulso dettato dalla necessità di elevare il rapporto di compressione fino a 40:1 ed oltre; è stato proposto anche di effettuare la interrefrigerazione iniettando acqua nel fluido di lavoro invece di utilizzare uno scambiatore di calore.
- *Espansione multistadio con risurriscaldamento*: detta anche *post-combustione*, è un processo analogo al risurriscaldamento del ciclo Rankine. In questo caso si sfrutta il fatto che i gas combusti hanno ancora un residuo tenore di ossigeno, dato che la combustione avviene in *eccesso di aria* (v. Cap.15) per limitare le temperature di ingresso in turbina. I gas vengono pertanto spillati dalla turbina ad una pressione intermedia, vi si effettua una seconda combustione incrementandone la temperatura e successivamente essi vengono rinviati alla turbina di bassa pressione. Nei motori aeronautici a reazione, la post-combustione si effettua a valle della turbina e prima dell'ugello: è diffusa specialmente negli aviogetti militari.

Queste soluzioni comportano generalmente un incremento di peso, complessità e costo della macchina, vanificando la semplicità di impianto e di installazione caratteristica del ciclo Brayton, cosicché esse hanno avuto finora poco successo commerciale, nonostante il vantaggio termodinamico; vengono adesso riproposte, specialmente per quanto riguarda la interrefrigerazione, come temi di ricerca per la realizzazione di impianti ad elevato rendimento.

Metodi di studio più accurati per il ciclo Brayton

Tutte le considerazioni svolte finora sono valide nel caso che il fluido di lavoro sia un gas ideale con calore specifico costante. Si possono considerare modelli via via più accurati del fluido di lavoro:

- gas ideale con $c_p = f(T)$;
- gas reale con $h = f(T, p)$;
- gas reale di composizione chimica variabile tra compressione ed espansione (per effetto della combustione interna).

In tutti questi casi, le espressioni in cui compare l'entalpia (es. Eq.(7.30)) e non la temperatura del fluido (es. Eq.(7.31)) rimangono comunque valide.

In generale, un modello realistico del ciclo Brayton dovrebbe anche tener conto delle perdite di carico nella camera di combustione, nonché di quelle dovute al sistema di scarico ed al filtraggio dell'aria in aspirazione: questo tuttavia non comporta complicazioni eccessive dal punto di vista concettuale, ma solo un appesantimento nei bilanci. Una trattazione esauriente ed applicativa delle turbine a gas è riportata nel testo di Lozza. A titolo di esempio si riporta in Fig.26 (tratta dal testo suddetto) l'andamento di un ciclo reale sul diagramma $T-s$.

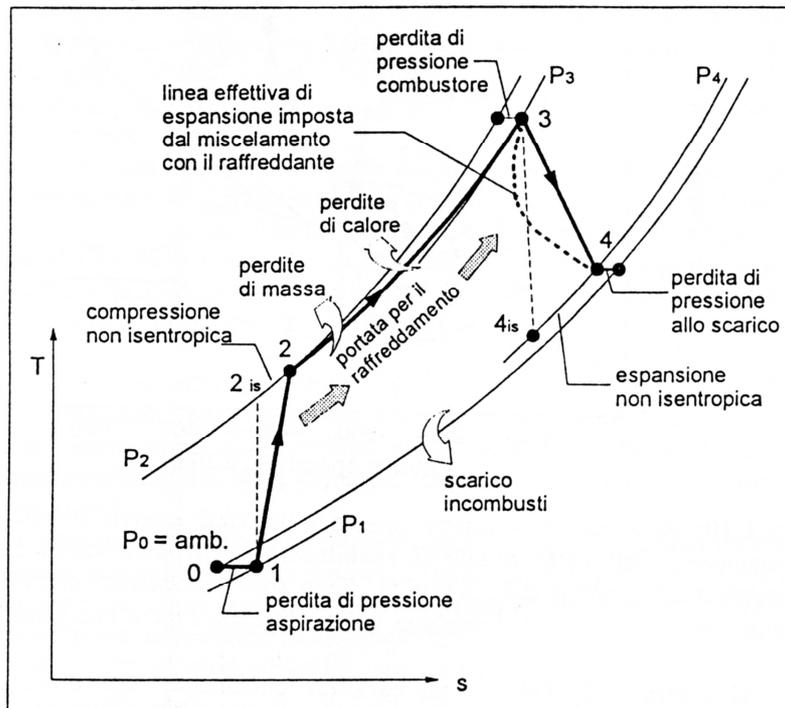


Figura 26: Ciclo di Brayton reale con indicazione dei principali scostamenti da quello ideale (dal testo di Lozza).

Breve confronto tra i punti di forza e debolezza dei cicli Brayton e Rankine

I cicli Brayton e Rankine sono tuttora i più utilizzati per la produzione di energia elettrica; nel compararne le prestazioni e i vantaggi, si può brevemente concludere quanto segue.

- **Rendimento:** Il ciclo Brayton lavora a temperature decisamente più alte del ciclo Rankine: il limite per il primo è dettato dalla resistenza termomeccanica delle palettature del primo stadio (che possono essere raffreddate) mentre nel secondo la massima temperatura è limitata dalla resistenza termomeccanica delle tubazioni del surriscaldatore. Nonostante questo, con il ciclo Rankine si raggiungono rendimenti termodinamici (circa 45%) lievemente superiori a quello del Brayton, a causa soprattutto del limitato lavoro di pompaggio e la minore temperatura media di scambio nel condensatore.
- **Combustibile:** il ciclo Rankine è a combustione esterna, quindi si può ottenere calore anche dai combustibili meno nobili, come i rifiuti solidi urbani. Il ciclo Brayton a combustione interna richiede combustibili liquidi o gassosi, che devono essere compressi fino alla pressione in camera di combustione; tali combustibili sono generalmente più costosi di quelli utilizzabili nel ciclo Rankine. Il ciclo Brayton a combustione esterna richiede elevate superfici di scambio per consentire il trasferimento di calore aria-aria.
- **Tempi di avviamento:** il ciclo Brayton è in grado di arrivare alla potenza di regime in pochi minuti; il ciclo Rankine ha una grande inerzia termica e richiede molte ore (fino a 30) dall'avviamento al raggiungimento della piena potenza.

- *Rapporto peso-potenza e volume potenza*: il confronto è decisamente favorevole al ciclo Brayton per entrambi: un ciclo turbogas da 100 MW occupa più o meno una (grande) aula universitaria, il ciclo Rankine equivalente occupa l'intero edificio.
- *Potenza massima*: la potenza massima del ciclo Brayton è limitata a poco più di 200 MW per ragioni di ingombro dei componenti; le turbine del ciclo Rankine degli impianti nucleari superano invece i 1000 MW di potenza.

Nel prossimo paragrafo vedremo che i due cicli possono essere accoppiati in un unico impianto detto *a ciclo combinato*: come in ogni buon matrimonio, si mettono così a comune sia i pregi che i difetti di entrambi i coniugi.

5. Impianti a ciclo combinato

Abbiamo accennato come una delle principali cause di irreversibilità del ciclo Rankine consista nella elevata differenza di temperatura tra il vapore ed i prodotti della combustione in caldaia, e come al contrario il rendimento del ciclo Brayton sia penalizzato dallo scarico dalla turbina di gas ad elevata temperatura rispetto all'ambiente. Da queste considerazioni nasce l'idea *di accoppiare i due cicli*, utilizzando i gas di scarico della turbina del ciclo Brayton per riscaldare (totalmente od in parte) il vapore del ciclo Rankine. Il flusso energetico in questo tipo di impianto è mostrato in Fig.27.

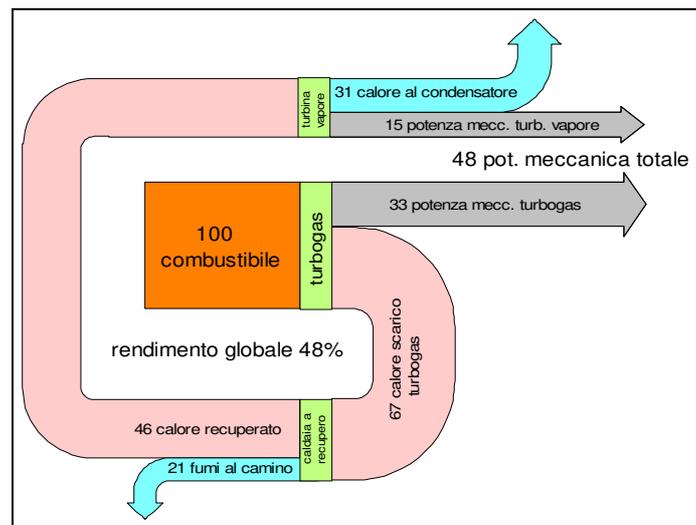


Figura 27: Diagramma di Sankey (semplificato senza tener conto delle perdite) che illustra i flussi energetici in un ciclo combinato *unfired*.

Tale concetto, sorprendentemente, fu già espresso con chiarezza estrema da Sadi Carnot nel 1824 nel suo saggio "Sulla potenza motrice del fuoco": "... L'aria, allora, sembrerebbe più conveniente del vapore per realizzare la potenza motrice da cadute di calorico da temperature alte; forse a temperature minori il vapore può andare meglio. Potremmo immaginare anche la possibilità di far agire lo stesso calore successivamente sull'aria e sull'acqua. Sarebbe solo necessario che l'aria avesse, dopo l'uso, una temperatura elevata ed invece di buttarla immediatamente nell'atmosfera, avvolgesse una caldaia proprio come se fosse uscita direttamente da una fornace." Tuttavia, esso è rimasto inapplicato per più di

un secolo! Naturalmente questo non è dovuto semplicemente a "stupidità": fino a non molti anni fa, gli impianti con turbine a gas avevano rendimenti troppo bassi per rendere economicamente conveniente il ciclo combinato.

L'impianto che ne risulta è detto *a ciclo combinato*, ed è in grado di raggiungere, con opportuni accorgimenti, rendimenti di primo principio sicuramente oltre il 50%, e fino al 60% in alcuni impianti recenti. Questa tecnica costituisce la prospettiva più promettente per incrementare le prestazioni degli impianti termoelettrici; nel prossimo futuro è prevista, oltre che la costruzione di nuovi impianti, anche la conversione di impianti esistenti in impianti a ciclo combinato (*repowering*) per aumentarne la potenza erogata a parità di consumi di combustibile, e quindi di inquinanti emessi.

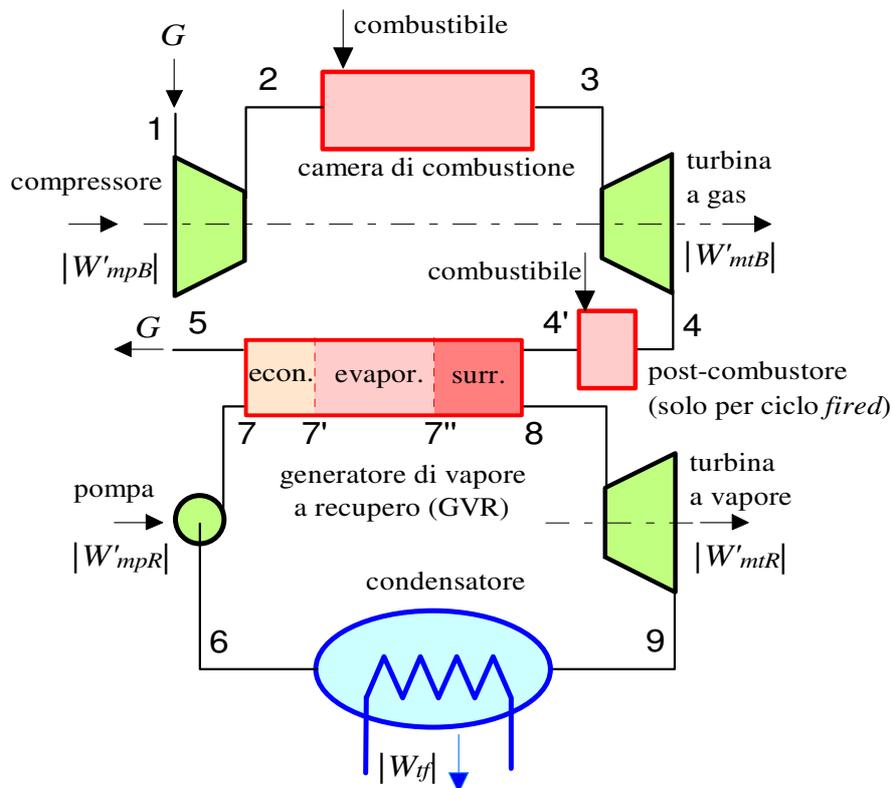


Figura 28: Impianto a ciclo combinato. Negli impianti *unfired* il post-combustore 4-4' non è installato

Lo schema di massima di un ciclo combinato è riportato in Fig.28. La sezione a ciclo Brayton (detto *topper*, cioè quello che sta sopra) non presenta differenze sostanziali da quello convenzionale. I gas allo scarico, anziché essere convogliati al camino, vengono inviati ad un componente detto *generatore di vapore a recupero (GVR)* dove cedono la loro energia residua all'acqua del ciclo Rankine (detto *bottomer*, cioè quello che sta sotto). Questo schema è il più diffuso ed è detto *unfired*, in contrapposizione al cosiddetto ciclo *fired*, in cui un post-combustore è interposto tra lo scarico della turbogas e il generatore di vapore a recupero. Nel post-combustore, ulteriore combustibile viene bruciato sfruttando il residuo tenore di ossigeno

dei gas di scarico, e questi subiscono un ulteriore aumento di temperatura prima di entrare nella GVR.

Con esclusione dell'eventuale apporto di energia nel post-combustore, la produzione di vapore è quindi "gratuita". Il rendimento di primo principio si ottiene quindi come

$$\eta = \frac{W'_{mu}}{W_{tc}} = \frac{W'_{mu,R} + W'_{mu,B}}{W_{tc,B} + W_{t,post}} \quad (7.58)$$

dove i pedici B e R indicano rispettivamente i cicli Brayton e Rankine e, ovviamente, la potenza termica ceduta nel postcombustore, $W_{t,post}$, è nulla per il ciclo *unfired*.

Nel caso in cui si consideri il ciclo Brayton operante ad aria standard e si possa trascurare (come di consueto) la potenza di pompaggio nel ciclo Rankine, si ha

$$\eta = \frac{W'_{mu}}{W_{tc}} = \frac{W'_{mu,R} + W'_{mu,B}}{W_{tc,B} + W_{t,post}} = \frac{G_B c_p (T_3 - T_4) - G_B c_p (T_2 - T_1) + G_R (h_8 - h_9)}{G_B c_p (T_3 - T_2) + G_B c_p (T_4' - T_4)} \quad (7.59)$$

Il cuore dell'impianto a ciclo combinato è costituito dal generatore di vapore a recupero, che non è altro che uno scambiatore gas-vapore. Il suo bilancio termodinamico si esprime come

$$G_B c_p (T_4' - T_5) = G_R (h_8 - h_7) \quad (7.60)$$

e lega la portata di vapore nel ciclo Rankine, G_R , con quella del ciclo Brayton, G_B . In particolare, fissati i parametri del ciclo Brayton e la temperatura dei fumi allo scarico T_5 , dalla Eq.(7.60) è possibile ottenere la portata (e quindi la potenza) del ciclo Rankine.

E' logico che (tranne che in caso di costruzioni particolari) la sezione a vapore non può funzionare quando la sezione a ciclo Brayton è inoperativa, mentre quest'ultima può essere azionata anche da sola bypassando il GVR.

In genere, nei cicli *unfired* il rapporto tra la potenza della sezione a gas e quella a vapore è circa 2:1, con pressioni di vapore da 40 a 70 bar e temperature di ammissione nella turbina a vapore da 450 a 500 °C; la temperatura di scarico dei gas al camino varia da 150 a 110 °C. Nei cicli *fired*, invece, il vapore all'ammissione in turbina può superare i 100 bar e i 510 °C e la potenza della sezione a vapore è in genere superiore a quella della sezione a gas.

Lo schema del ciclo con la disposizione dei fasci tubieri è mostrato in Fig.29. Nella caldaia a recupero i fasci tubieri in cui viene prodotto il vapore sono ordinati in ordine decrescente di temperatura in modo da sfruttare il salto termico in maniera ottimale (come esposto in maggior dettaglio nel Cap.13, questo schema è detto *controcorrente* in quanto i due fluidi percorrono lo scambiatore in direzioni opposte). Infatti lo scambio di calore con salto termico troppo elevato ha come risultato un'alta irreversibilità con conseguente ingente distruzione della disponibilità dei gas di scarico. Per ottimizzare ulteriormente il salto termico tra gas e vapore, come è mostrato in Fig.30, risulta conveniente disporre di due fasci evaporatori a pressione (e quindi temperatura) diverse. Si ottiene così il cosiddetto *ciclo combinato a due pressioni*, il cui schema è mostrato in Fig.31. La pressione dello stadio di bassa è pari a circa il 10% di quello di alta pressione. Sono concepibili anche cicli *a tre pressioni*, ma la loro applicazione è per ora poco conveniente.

Nella sezione vapore del ciclo combinato non sono in genere presenti preriscaldatori: ciò è dovuto al fatto che è inutile sottrarre vapore alla turbina per il preriscaldamento, in quanto il

GVR funziona "gratis"; inoltre, introducendo in quest'ultima acqua a bassa temperatura, si può spingere il recupero di calore dai gas di scarico fino a temperature più basse.

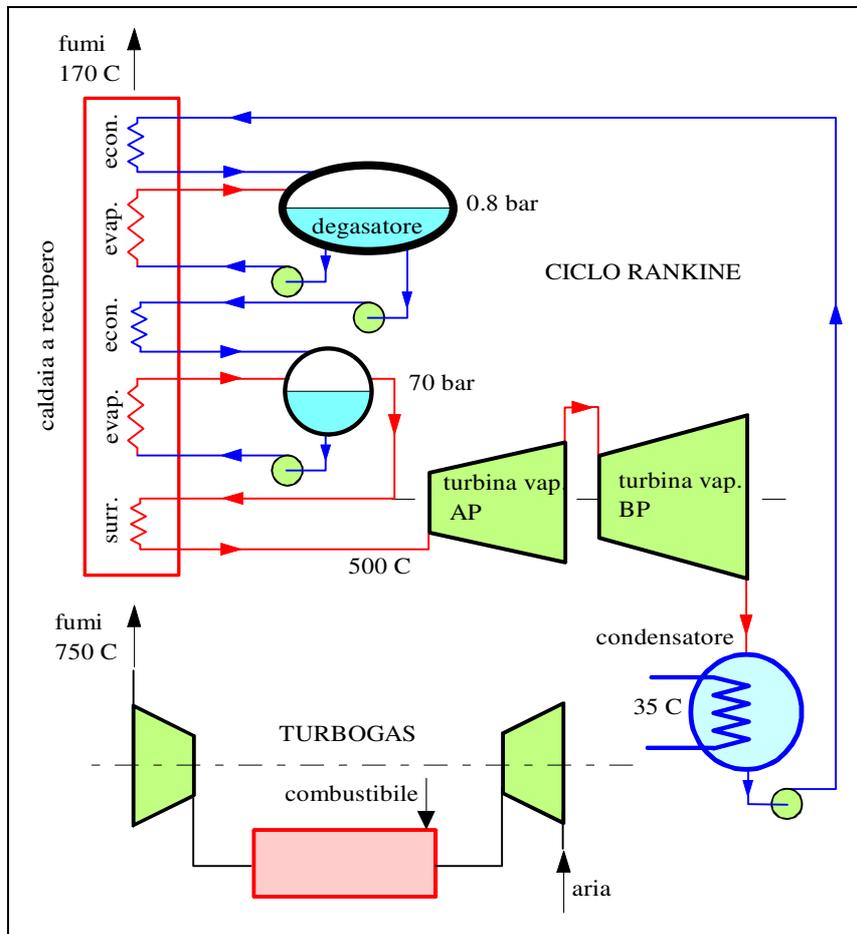


Figura 29: Schema di ciclo combinato unfired ad 1 pressione.

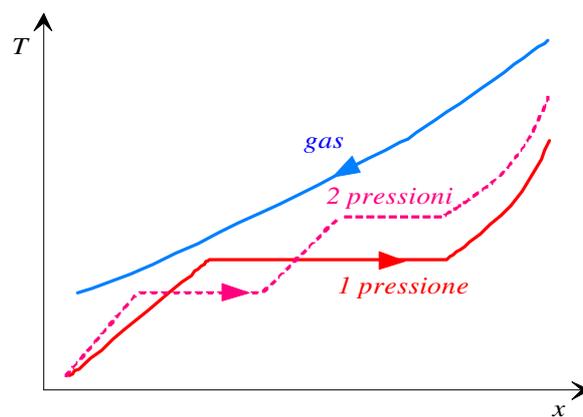


Figura 30: Andamento delle temperature dei due fluidi nel generatore di vapore a recupero.

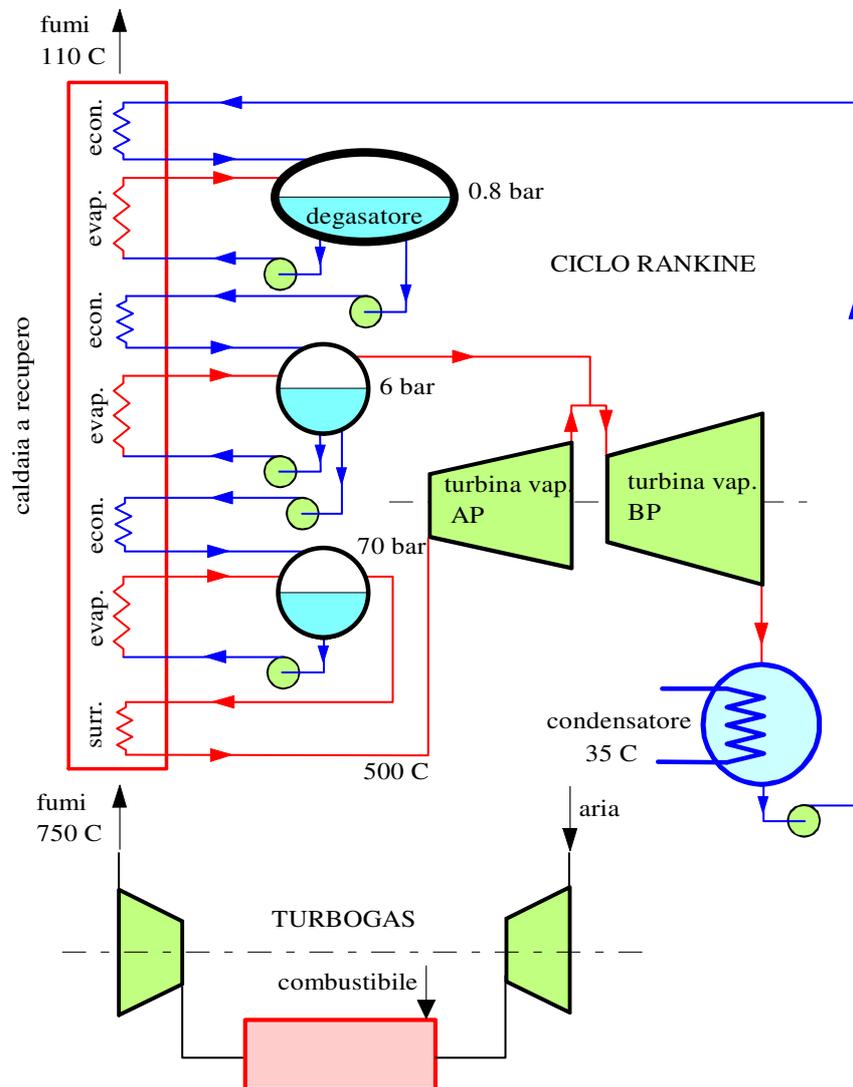


Figura 31: Schema di ciclo combinato *unfired* a 2 pressioni.

ESEMPIO 7-10 – Ciclo combinato unfired ad una pressione.

In un ciclo combinato *unfired* la sezione turbogas eroga una potenza di 15 MW. Pressione e temperatura all'aspirazione ed ingresso turbina a gas valgono rispettivamente $p_1 = 1$ bar, $T_1 = 300$ K, $p_3 = 12$ bar, $T_3 = 1550$ K. La temperatura di scarico dei fumi dalla caldaia a recupero è $T_5 = 440$ K. Considerare il fluido di lavoro aria standard. La sezione vapore è caratterizzata da pressione e temperatura di ammissione in turbina $p_1 = 70$ bar, $T_8 = 500$ °C e temperatura al condensatore $T_9 = 35$ °C. Le due turbine hanno rendimento isoentropico 0.85 ed il compressore del ciclo Brayton ha rendimento 0.82. Determinare le portate di fluido nelle due sezioni, la potenza erogata dalla sezione vapore e il rendimento dell'impianto. Con riferimento alla Fig. 28, determinare inoltre le temperature dei fumi e dell'acqua nel punto 7', supponendo che l'acqua sia in condizione di liquido saturo in tale punto.

I calcoli possono essere eseguiti con il foglio di calcolo EXCEL C7CICLOCOMB.xls (che richiede la libreria TPX).

Le temperature nei punti 2 e 4 del ciclo Brayton possono essere ricavate come nell'Es.8 e valgono

$$T_{2i} = T_1 r_p^{R/c_p} = 610.2 \text{ K}, \quad T_2 = T_1 + \frac{T_{2i} - T_1}{\eta_c} = 678.3 \text{ K}$$

$$T_{4i} = \frac{T_3}{r_p^{R/c_p}} = 762.1 \text{ K}, \quad T_4 = T_3 - \eta_t (T_3 - T_{4i}) = 880.3 \text{ K}$$

La portata del ciclo Brayton è ottenibile da

$$G_B = \frac{W'_{mu,B}}{c_p [(T_3 - T_4) - (T_2 - T_1)]} = \frac{15 \cdot 10^6}{1004.5 \cdot [(1550 - 880.3) - (678.3 - 300)]} = 51.2 \text{ kg/s}$$

Mentre la potenza termica ceduta nello scambiatore ad alta temperatura (2-3) vale

$$W_{tc,B} = G_B c_p (T_3 - T_2) = 44.9 \text{ MW}$$

Le proprietà del vapore nei punti caratteristici del ciclo Rankine sono ricavabili come illustrato nell'Es.3 e sono riportate nella seguente tabella, dove si è aggiunto il punto 7' (uscita dall'economizzatore, liquido saturo a 7 MPa)

	Temp.	Pressione	Entalpia	Entropia	Titolo
	C	MPa	kJ/kg	kJ/kg/K	
6.	35	0.0056	146.7	0.505	0
7.	35.18	7	153.7	0.505	
7'.	285.9	7	1267.2	3.121	0
8.	500	7	3410.3	6.797	
9i.	35.0	0.0056	2085.6	6.797	0.80
9r.	35.0	0.0056	2284.3	7.442	0.88

E' possibile ora calcolare la portata di vapore dal bilancio del generatore di vapore a recupero, Eq.(7.60)

$$G_B c_p (T_4 - T_5) = G_R (h_8 - h_7) \Rightarrow G_R = \frac{G_B c_p (T_4 - T_5)}{h_8 - h_7} = 6.96 \text{ kg/s}$$

E la potenza erogata dal ciclo Rankine vale allora

$$W'_{mu,R} = G_R (h_8 - h_{9r}) = 7.79 \text{ MW}$$

Il rendimento globale dell'impianto è dato da (Eq.(7.59))

$$\eta = \frac{W'_{mu,R} + W'_{mu,B}}{W_{tc,B}} = 0.508$$

Infine la differenza di temperatura richiesta può essere ricavata ottenendo la temperatura $T_{B,A}$ dei fumi nel punto A dal bilancio della sola sezione economizzatore della caldaia a recupero

$$G_B c_p (T_{B,A} - T_5) = G_R (h_7 - h_7) \Rightarrow$$

$$T_{B,A} = T_5 + \frac{G_R (h_7 - h_7)}{G_B c_p} = 440 + \frac{6.96(285.9 - 35.18) \cdot 10^6}{51.2 \cdot 1004.5} = 590.5 \text{ K}$$

ed essendo nota la temperatura del vapore all'uscita di tale sezione si ha

$$\Delta T_{pinch} = T_{B,A} - T_7 = 31.5 \text{ K}$$

che deve essere positivo per consentire lo scambio termico dai fumi all'acqua. Questa è la posizione in cui le temperature dei due fluidi si avvicinano di più (v. Fig.30).

□

ESEMPIO 7-11 – Confronto tra il rendimento exergetico di un generatore di vapore convenzionale ed uno a recupero.

Confrontare il rendimento exergetico del GVR di cui all'esempio 7.10 con quello di un generatore di vapore convenzionale nel cui lato primario si utilizzino direttamente dei fumi di combustione alla temperatura di ingresso di 1200 °C e di uscita di 167° C. Per semplicità, considerare anche in questo secondo caso i fumi come aria standard.

☞ *I calcoli possono essere eseguiti con il foglio di calcolo EXCEL C7EX-GVAP.xls (che richiede la libreria TPX).*

Come risulta dell'Esempio 7.7, il rendimento exergetico di uno scambiatore è definito come

$$\epsilon = \frac{\text{aum. di disponib. corrente fredda}}{\text{dimin. di disponib. corrente calda}} = \frac{G_R (a_{f8} - a_{f7})}{G_B (a_{f4} - a_{f5})} = \frac{G_R [h_8 - h_7 - T_0 (s_8 - s_7)]}{G_B \left[c_p (T_4 - T_5) - T_0 \left(c_p \ln \frac{T_4}{T_5} \right) \right]}$$

dove si è considerato il fluido caldo un gas ideale con c_p costante ed il processo isobaro.

Nel primo caso (GVR) si ha quindi

$$\epsilon_{GVR} = \frac{G_R [h_8 - h_7 - T_0 (s_8 - s_7)]}{G_B c_p \left[(T_4 - T_5) - T_0 \ln \frac{T_4}{T_5} \right]} = 0.80$$

Nel secondo caso è necessario calcolare la portata di fumi necessaria G_F , che è data facilmente dal bilancio energetico dello scambiatore

$$G_F = \frac{G_R (h_8 - h_7)}{c_p (T_4 - T_5)} = 21.8 \text{ kg/s}$$

Ripetendo il calcolo si ha quindi.

$$\epsilon_{CONV} = \frac{G_R [h_8 - h_7 - T_0 (s_8 - s_7)]}{G_F c_p \left[(T_4 - T_5) - T_0 \ln \frac{T_4}{T_5} \right]} = 0.65$$

□

6. I cicli dei motori alternativi a combustione interna: Otto, Diesel e Sabathè

I cicli Otto e Diesel sono i cicli caratteristici dei motori alternativi a combustione interna; vedremo che essi possono essere considerati due casi particolari di un unico ciclo, il ciclo Sabathè, del quale esamineremo le prestazioni.

Il ciclo Otto (o Beau de Rochas).

Analizziamo cosa accade nel cilindro di un motore alternativo a benzina a quattro tempi. Per far questo, possiamo costruire sul piano p - V un diagramma detto *diagramma indicato* (introdotto da J. Watt alla fine del '700) in quanto può essere ricavato sperimentalmente in laboratorio disponendo di due sensori (indicatori) di pressione e di angolo di manovella: da quest'ultimo mediante semplici calcoli si può risalire al volume istantaneo del fluido contenuto tra cilindro e pistone, ovvero di quello che consideriamo il nostro sistema.

In una prima fase di *aspirazione* (v. Fig.32) il pistone si muove dal punto morto superiore (PMS, punto 1) al punto morto inferiore (PMI, punto Q) aspirando la miscela aria-benzina attraverso la valvola di aspirazione: il volume aumenta e la pressione si mantiene approssimativamente costante ad un valore lievemente inferiore a quella esterna a causa delle perdite nei condotti di aspirazione. Al termine di tale fase inizia quella di *compressione*: le due valvole sono chiuse e nella sua corsa dal PMI al PMS il pistone comprime il fluido. Quando il pistone ha raggiunto il PMS (punto 2), la scintilla scoccata nella candela (per tale motivo, tali motori si dicono anche ad *accensione comandata*) provoca la *combustione* della miscela aria-benzina: essendo rapidissima, si può ipotizzare che essa avvenga a volume costante (2-3): la pressione e la temperatura del fluido aumentano notevolmente ed inizia la fase di *espansione*, durante la quale il pistone ritorna al PMI (punto P). Al termine di tale fase, la valvola di scarico si apre ed il fluido viene scaricato all'esterno mentre il pistone ritorna al PMS: il volume diminuisce nuovamente e la pressione (sempre a causa delle perdite di carico) si mantiene grossomodo costante ad un valore superiore a quella atmosferica. L'intero ciclo del motore a quattro tempi si compie pertanto in quattro fasi, ognuna delle quali avviene in una corsa del pistone dal PMI al PMS o viceversa: *aspirazione*, *compressione*, *combustione/espansione* (detta più comunemente *scoppio*) e *scarico*.

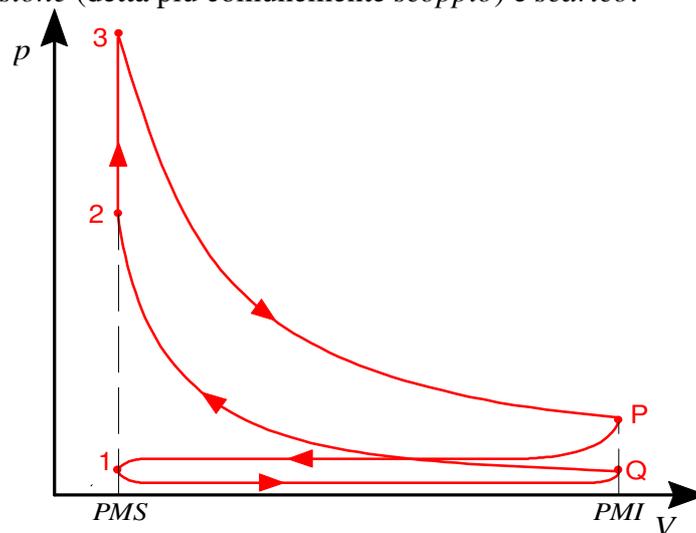


Figura 32: Diagramma indicato (semplificato) per un motore alternativo ad accensione comandata.

Nella realtà, tali fasi non sono così ben delimitate dal PMI e dal PMS: esistono *anticipi* nell'accensione e nell'apertura delle valvole, oltre a ritardi nella chiusura di queste ultime, che rendono le transizioni tra le fasi meno nette di quanto ipotizzato. Inoltre, la combustione non è esattamente isovolumica.

Il rapporto di compressione volumetrico, r_v , dei motori alternativi è dato da (v. Fig.33)

$$r_v = \frac{V_1}{V_2} = \frac{v_1}{v_2} \quad (7.61)$$

esso è limitato dal fatto che, a causa dell'incremento di temperatura dovuto alla compressione, la miscela aria benzina può accendersi spontaneamente prima che il pistone abbia raggiunto il PMS: questo fenomeno, detto *detonazione*, provoca un'improvvisa forza resistente sul pistone che si traduce nel cosiddetto *battito in testa* del motore. Per ovviare a questo, si aggiungono alle benzine additivi antidetonanti. Il potere antidetonante della benzina è indicato dal suo *numero di ottano*. Anche in presenza di antidetonanti, il rapporto di compressione volumetrico nei motori a benzina difficilmente supera 15:1 ed è in genere attorno a 10:1.

In passato l'antidetonante più usato era il *piombo tetraetile* (presente nella benzina super), attualmente proibito perché considerato dannoso per la salute. Gli antidetonanti usati attualmente nelle cosiddette *benzine verdi* sono principalmente idrocarburi aromatici, tra cui il benzene, e MTBE, metil-ter-butil-etero. Si sospetta che essi siano ancor più dannosi del loro predecessore, se non eliminati correttamente dalle marmitte catalitiche. In particolare, la potente azione cancerogena del benzene è ben nota fino dagli anni '60.

La cilindrata dei motori commerciali ad accensione comandata per trazione può raggiungere gli 8 litri, con regimi di rotazione attorno ai 5000 rpm. Nei motori da competizione si raggiungono 20000 rpm con potenze dell'ordine di 300 kW/L.

Il ciclo così descritto è caratteristico di un motore a *regime periodico* ed il ciclo è forzatamente *aperto* a causa della *combustione interna* che esaurisce l'ossigeno presente nel fluido. Tuttavia, come nel caso del ciclo Joule-Brayton, è possibile ricondurre questo schema ad un *ciclo chiuso equivalente* dal punto di vista energetico facendo alcune semplici ipotesi:

1. Il fluido di lavoro è un gas ideale a c_p costante di composizione chimica invariabile (la cosiddetta *aria standard*).
2. La combustione interna viene sostituita da un equivalente *riscaldamento a volume costante* dall'esterno.
3. Le fasi di aspirazione e scarico vengono sostituite da un *raffreddamento isovolumico* (con cessione di calore all'esterno) che riporta il fluido dalle condizioni P alle condizioni Q in Fig.32.
4. Tutte le trasformazioni sono ipotizzate reversibili; compressione ed espansione si considerano adiabatiche.

Il ciclo di riferimento così ottenuto è costituito da due adiabatiche (reversibili, e quindi isoentropiche) raccordate da due isovolumiche ed è detto ciclo *Otto* o *Beau de Rochas*³. Esso è rappresentato nei piani $p-v$ e $T-s$ rispettivamente in Fig.33 ed in Fig.34.

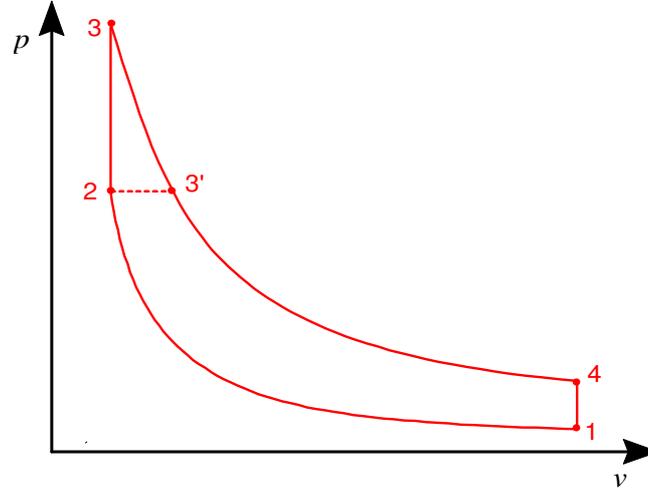


Figura 33: Diagramma $p-v$ per i cicli Otto (1-2-3-4) e Diesel (1-2-3'-4).

Il ciclo Diesel

Le principali differenze tra il ciclo Otto e quello Diesel⁴ sono le seguenti:

- durante la fase di compressione viene compressa solamente aria;
- il combustibile (gasolio) viene iniettato nel cilindro alla fine della compressione e la combustione inizia spontaneamente a causa dell'alta temperatura dell'aria; inoltre, la combustione del gasolio è più graduale di quella della benzina e si può ipotizzare che avvenga a *pressione costante*.

Questi motori sono detti pertanto ad *accensione spontanea* e non hanno bisogno né di candele né di circuito di accensione: per contro richiedono un sofisticato sistema di iniezione ad alta pressione. Il fatto che durante la compressione sia presente solo aria rende possibile realizzare rapporti di compressione volumetrici più elevati che nei motori a ciclo Otto (indicativamente intorno a 20:1).

³ Tale ciclo fu brevettato dal francese Alphonse Beau de Rochas nel 1862. Il primo motore a combustione interna ad accensione comandata fu presentato all'esposizione di Parigi del 1867 dai tedeschi Nikolaus August Otto e Eugen Langen: esso riprendeva con alcuni perfezionamenti un prototipo costruito nel 1854 dagli italiani Eugenio Barsanti e Felice Matteucci, che trovò poche applicazioni pratiche per la prematura malattia e morte degli inventori.

⁴ Brevettato dal tedesco Rudolf Diesel nel 1893.

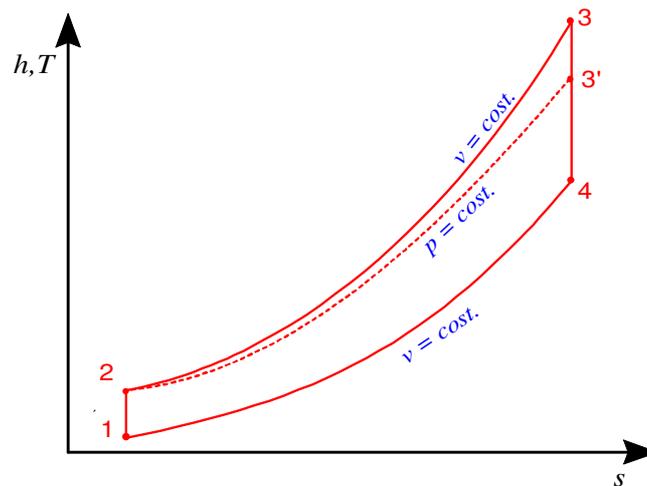


Figura 34: Diagramma $T-s$ per i cicli Otto (1-2-3-4) e Diesel (1-2-3'-4).

Mediante le stesse ipotesi semplificative introdotte per il ciclo Otto, si può definire *un ciclo Diesel di riferimento ad aria standard*, costituito da due isoentropiche raccordate da una isobara e da una isovolumica, rappresentato nei piani $p-v$ e $T-s$ rispettivamente in Fig.33 ed in Fig.34.

Per completezza, ricordiamo che esistono anche *motori alternativi a due tempi* (sia ad accensione spontanea che comandata) in cui l'intero ciclo si compie in due sole corse del pistone. La loro trattazione esula dagli scopi di queste note ed il lettore interessato può trovare dettagli su di essi nel testo di Della Volpe (Cap.8).

I motori Diesel si distinguono a seconda del regime di rotazione in *veloci* (fino a 5000 rpm, potenze fino a 400 kW), *medio-veloci* (800 rpm, 20 MW) e *lenti* (120 rpm). I motori diesel lenti sono generalmente a due tempi.

Il ciclo Sabathè

Abbiamo visto che la fase di combustione nei motori alternativi non è, in ogni caso, né esattamente isobara né esattamente isovolumica. Il ciclo Sabathè rappresenta tale fase di combustione con un primo tratto isovolumico seguito da uno isobaro ed è pertanto più aderente alla realtà. Esso è rappresentato nei piani $p-v$ e $T-s$ rispettivamente in Fig.35 ed in Fig.36. Dato che i cicli Otto e Diesel non sono che casi particolari del ciclo Sabathè, ci limiteremo a studiare le prestazioni di quest'ultimo. A questo scopo, nel seguito definiamo preventivamente alcune grandezze.

Il *rapporto di adduzione del calore a volume costante*, τ , è definito (con riferimento alla Fig.35) come

$$\tau = \frac{T_3}{T_2} \quad (7.62)$$

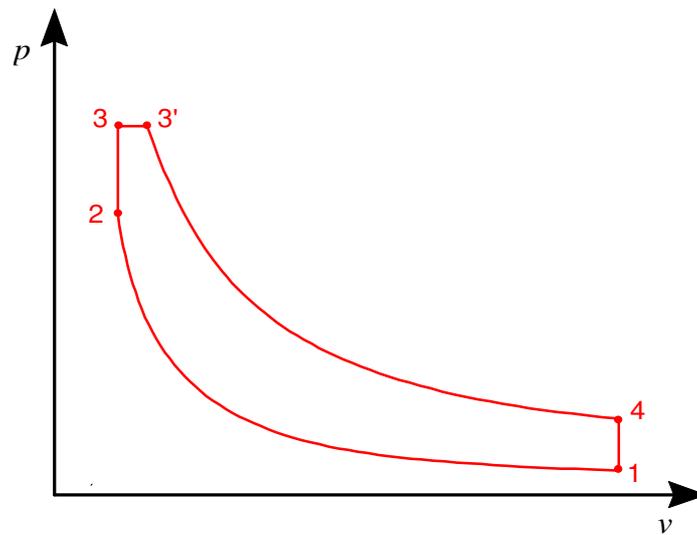


Figura 35: Diagramma $p-v$ per il ciclo Sabathè.

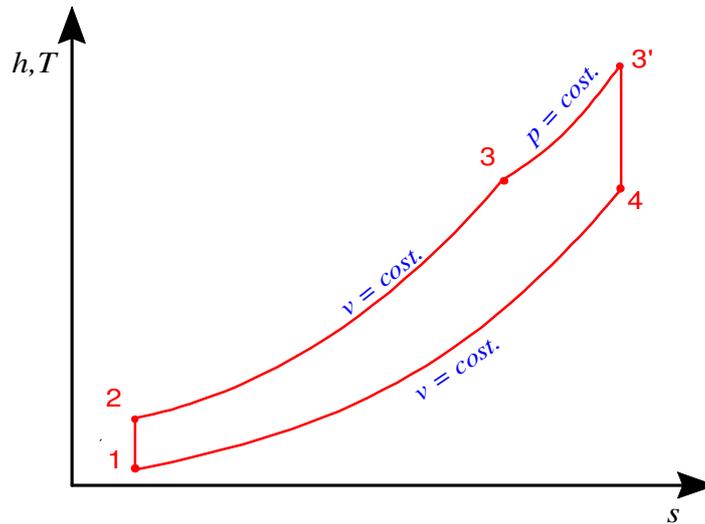


Figura 36: Diagramma $T-s$ per il ciclo Sabathè.

ed il rapporto di adduzione del calore a pressione costante, b , è dato da

$$b = \frac{T_{3'}}{T_3} \quad (7.63)$$

Infine, si definisce *pressione media indicata*, p_{mi} , il valore di quella pressione costante che, se applicata durante tutta la corsa al pistone, darebbe luogo allo stesso lavoro utile prodotto effettivamente dal ciclo. Detti D l'alesaggio e C la corsa del cilindro, essa si può pertanto ottenere dall'eguaglianza

$$L = p_{mi} \frac{\pi D^2}{4} C = p_{mi} (V_1 - V_2) \quad (7.64)$$

da cui

$$p_{mi} = \frac{L}{V_1 - V_2} = \frac{l}{v_1 - v_2} \quad (7.65)$$

Ricordiamo che il lavoro utile specifico, l , è rappresentato graficamente dall'area del ciclo sui piani $p-v$ e $T-s$. Un basso valore della pressione media indicata è indicativo di un motore in cui le forze di attrito meccanico hanno un peso relativo importante: a parità di lavoro erogato, il pistone ha una corsa molto lunga oppure un valore elevato dell'alesaggio. Al contrario, un valore troppo alto di p_{mi} indica un motore soggetto a forti sollecitazioni meccaniche.

Il rendimento di primo principio del ciclo può essere più opportunamente espresso nella forma

$$\eta = \frac{W_{mu}}{W_{TC}} = 1 - \frac{|W_{TF}|}{W_{TC}} = 1 - \frac{|Q_F|}{Q_C} = 1 - \frac{|q_F|}{q_C} \quad (7.66)$$

dove

$$\begin{aligned} |q_F| &= u_4 - u_1 \\ q_C &= (u_3 - u_2) + (h_{3'} - h_3) \end{aligned} \quad (7.67)$$

nel caso di un fluido con calori specifici costanti (non necessariamente un gas ideale) tali espressioni divengono

$$\begin{aligned} |q_F| &= c_v (T_4 - T_1) \\ q_C &= c_v (T_3 - T_2) + c_p (T_{3'} - T_3) = c_v [(T_3 - T_2) + k (T_{3'} - T_3)] \end{aligned} \quad (7.68)$$

da cui il rendimento del ciclo è dato da

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{(T_3 - T_2) + k (T_{3'} - T_3)} \quad (7.69)$$

Le trasformazioni 1-2 e 3'-4 sono isoentropiche, per cui per un gas ideale si può scrivere:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{k-1} ; \quad \frac{T_{3'}}{T_4} = \left(\frac{v_4}{v_{3'}} \right)^{k-1} \quad (7.70)$$

da cui, ricordando che la trasformazione 3-3' è isobara e la 2-3 e 4-1 isovolumiche, tenuto conto della Eq.(7.61) si ottiene

$$\begin{aligned} T_2 &= T_1 r_v^{k-1} \\ T_4 &= T_{3'} \left(\frac{v_{3'}}{v_4} \right)^{k-1} = T_{3'} \left(\frac{b v_3}{v_4} \right)^{k-1} = T_{3'} \left(\frac{b v_2}{v_1} \right)^{k-1} = T_{3'} \left(\frac{b}{r_v} \right)^{k-1} \end{aligned} \quad (7.71)$$

siamo ora in grado di ricavarci tutte le temperature del ciclo in funzione della sola T_1 , per poi procedere alla loro sostituzione nell'espressione del rendimento.

Le temperature valgono rispettivamente, tenuto conto delle Eqq.(7.62) e (7.63)

$$\begin{aligned}
 T_2 &= T_1 r_v^{k-1} \\
 T_3 &= T_2 \tau = T_1 r_v^{k-1} \tau \\
 T_{3'} &= T_3 b = T_2 b \tau = T_1 r_v^{k-1} b \tau \\
 T_4 &= T_{3'} \left(\frac{b}{r_v} \right)^{k-1} = T_1 b^k \tau
 \end{aligned}
 \tag{7.72}$$

da cui finalmente si ottiene l'espressione del rendimento del ciclo Sabathè ad aria standard

$$\eta_{Sab} = 1 - \frac{1}{r_v^{k-1}} \frac{\tau b^k - 1}{[(\tau - 1) + \tau k (b - 1)]}
 \tag{7.73}$$

Questa espressione nel caso del ciclo Otto ($b = 1$) si semplifica in

$$\eta_{Otto} = 1 - \frac{1}{r_v^{k-1}}
 \tag{7.74}$$

il rendimento del ciclo Otto dipende pertanto dalle proprietà del gas (k) e dal rapporto di compressione volumetrico: in particolare, aumenta al crescere di quest'ultimo.

Nel caso del ciclo Diesel ($\tau = 1$) si ha invece

$$\eta_{Dies} = 1 - \frac{1}{r_v^{k-1}} \frac{b^k - 1}{k (b - 1)} = 1 - \frac{1}{r_v^{k-1}} f(b, k)
 \tag{7.75}$$

si può notare che $f(b, k)$ è una funzione crescente di b che tende ad 1 per $b = 1$ (ovvero per il ciclo Otto). Pertanto, *a parità di rapporto di compressione*, il rendimento del ciclo Diesel ($b > 1$) è inferiore a quello del ciclo Otto (ma in realtà il ciclo Diesel ammette rapporti di compressione nettamente superiori, per cui nella pratica il confronto si ribalta). Inoltre, si nota che il rendimento del ciclo Diesel diminuisce al crescere di b , ovvero della quantità di calore somministrata: parimenti, comunque, aumenta l'area del ciclo sui diagrammi $p-v$ e $T-s$ e quindi il lavoro utile unitario, come si può vedere in Figg.32-33

ESEMPIO 7-12 – Ciclo Otto.

Un ciclo Otto ad aria standard ha un rapporto di compressione 8. Le condizioni all'ingresso sono $p_1 = 1$ bar e $T_1 = 15$ °C. Il trasferimento di calore dalla sorgente calda è $q_{23} = 1800$ kJ/kg per ciclo. Determinare il rendimento di primo principio, la pressione e la temperatura nei tre rimanenti punti del ciclo, la pressione media indicata e la portata di fluido necessaria per avere una potenza di 110 kW. Si consideri l'aria un gas ideale a calore specifico costante con $k = 1.4$, $c_v = 716.5$ J/kg K.

Il rendimento può essere calcolato facilmente dalla Eq.(7.74)

$$\eta = 1 - \frac{1}{r_v^{k-1}} = 1 - \frac{1}{8^{0.4}} = 0.565$$

Per le temperature e pressioni si ha

$$T_2 = T_1 r_v^{k-1} = 288 \cdot 8^{0.4} = 662 \text{ K} \quad , \quad p_2 = p_1 r_v^k = 1 \cdot 8^{1.4} = 18.4 \text{ bar}$$

$$T_3 = T_2 + \frac{q_{23}}{c_v} = 662 + \frac{1800}{0.717} = 3172 \text{ K} \quad , \quad p_3 = p_2 \frac{T_3}{T_2} = 18.4 \cdot \frac{3172}{662} = 88.1 \text{ bar}$$

$$T_4 = T_3 r_v^{1-k} = 3172 \frac{1}{8^{0.4}} = 1380 \text{ K} \quad , \quad p_4 = p_3 r_v^{-k} = \frac{88.1}{8^{1.4}} = 4.8 \text{ bar}$$

Il lavoro unitario vale

$$l' = q_{23} - |q_{41}| = q_{23} - c_v (T_4 - T_1) = 1800 - 0.717 \cdot (1380 - 288) = 1017 \text{ kJ/kg}$$

essendo

$$v_1 = \frac{RT}{p_1} = 0.827 \text{ m}^3/\text{kg} \quad , \quad v_2 = \frac{v_1}{r_v} = 0.103 \text{ m}^3/\text{kg}$$

si ha

$$p_{mi} = \frac{l'}{v_1 - v_2} = \frac{1017 \cdot 10^3}{0.827 - 0.103} = 1405 \text{ kPa} = 14.1 \text{ bar}$$

$$G = \frac{W}{l'} = \frac{110}{1017} = 0.108 \text{ kg/s}$$

Si noti che tali prestazioni (specie il rendimento) differiscono notevolmente da quelle reali di un motore a benzina, a causa delle ipotesi semplificative assunte.

□

ESEMPIO 7-13 – Ciclo Diesel.

Un ciclo Diesel ad aria standard ha un rapporto di compressione 20. Le condizioni all'ingresso sono $p_1 = 1 \text{ bar}$ e $T_1 = 15 \text{ °C}$. Il trasferimento di calore dalla sorgente calda è $q_{23} = 1400 \text{ kJ/kg}$ per ciclo. Determinare il rendimento di primo principio, la pressione e la temperatura nei tre rimanenti punti del ciclo, la pressione media indicata e la portata di fluido necessaria per avere una potenza di 110 kW. Si consideri l'aria un gas ideale a calore specifico costante con $k = 1.4$, $c_v = 716.5 \text{ J/kg K}$.

Si ha

$$v_1 = \frac{RT}{p_1} = 0.827 \text{ m}^3/\text{kg} \quad , \quad v_2 = \frac{v_1}{r_v} = 0.041 \text{ m}^3/\text{kg}$$

Per le temperature e pressioni si ha

$$T_2 = T_1 r_v^{k-1} = 288 \cdot 20^{0.4} = 955 \text{ K} \quad , \quad p_2 = p_1 r_v^k = 1 \cdot 20^{1.4} = 66.3 \text{ bar}$$

$$T_{3'} = T_2 + \frac{q_{23}}{c_p} = 955 + \frac{1400}{1.004} = 2350 \text{ K} \quad , \quad p_3 = p_2 \quad , \quad v_{3'} = v_2 \frac{T_{3'}}{T_2} = 0.101 \text{ m}^3/\text{kg}$$

$$T_4 = T_{3'} \left(\frac{v_{3'}}{v_4} \right)^{k-1} = 2350 \left(\frac{0.101}{0.827} \right)^{0.4} = 1013 \text{ K} \quad , \quad p_4 = p_{3'} \left(\frac{T_4}{T_{3'}} \right)^{\frac{k}{k-1}} = 66.3 \left(\frac{1013}{2350} \right)^{3.5} = 3.5 \text{ bar}$$

Il calore ceduto alla sorgente fredda è dato da

$$|q_{41}| = c_v (T_4 - T_1) = 0.717 \cdot (1013 - 288) = 519 \text{ kJ/kg}$$

Il lavoro unitario vale quindi

$$l' = q_{23} - q_{41} = 1400 - 519 = 881 \text{ kJ/kg}$$

Il rendimento è dato da

$$\eta = 1 - \frac{|q_{41}|}{q_{23}} = 1 - \frac{519}{1400} = 0.63$$

e si ha infine

$$p_{mi} = \frac{l'}{v_1 - v_2} = \frac{881 \cdot 10^3}{0.827 - 0.103} = 1216 \text{ kPa} = 12.2 \text{ bar}$$

$$G = \frac{W}{l'} = \frac{110}{881} = 0.124 \text{ kg/s}$$

Si noti che tali prestazioni (specie il rendimento) differiscono notevolmente da quelle reali di un motore Diesel, a causa delle ipotesi semplificative assunte.



Le ipotesi semplificative assunte nel passaggio dal ciclo reale a quello di riferimento sono piuttosto pesanti; in particolare vengono trascurati:

- la variazione di composizione chimica e di calore specifico del fluido;
- il lavoro compiuto durante le fasi di aspirazione e scarico;
- lo scambio termico con le pareti durante la compressione e l'espansione (nella pratica si possono anche assumere espansione e compressione politropiche con esponenti rispettivamente 1.33 e 1.25);
- le irreversibilità meccaniche (particolarmente importanti nei motori alternativi) e termodinamiche (associate ai gradienti di pressione e temperatura nel sistema);
- le imperfezioni nel processo di combustione;
- la *dissociazione* molecolare del fluido durante la combustione, che implica assorbimento di energia termica che viene "restituita" quando le molecole si ricombinano durante la successiva espansione.

Questo fa sì che le prestazioni ottenute dallo studio dei cicli di riferimento siano abbastanza lontane da quelle reali. In particolare, come vedremo nel seguito, il rendimento effettivo di tali motori difficilmente supera il 35% (con l'eccezione di alcuni tipi di motori Diesel, come riportato più avanti). E' necessario pertanto procedere in questo caso ad uno studio di natura più empirica, come accennato nel seguito. I valori caratteristici dei cicli Otto e Diesel reali sono riportati nella Tab.2.

	Otto	Diesel (°)
Rapporto di compressione volumetrico, r_v	6-11	13-23
Temperatura fine compressione, T_2 , °C	350-550	700-900
Pressione fine compressione p_2 , bar	9-18	30-50
Pressione massima del ciclo p_3 , bar	35-50	60-90
Temperatura massima del ciclo T_3 , K	~ 2500	~ 2000
Pressione media effettiva, p_{me} , bar	8-14	7-12
Temperatura gas di scarico T_4 , °C	800-1000	600-700

Tabella 2: Parametri caratteristici dei motori a ciclo Otto e Diesel

(°) esclusi i motori navali a basso numero di giri, v. nota nel testo

Una rimarchevole eccezione ai dati della Tab.2 è costituita dai *motori Diesel lenti per propulsione navale*: si tratta di perfezionatissimi motori *a due tempi*, sovralimentati, a

bassissimo numero di giri (60-120 rpm) con potenze dell'ordine di 3 MW per cilindro, che raggiungono rendimenti superiori al 50% (comparabili, attualmente, solo con quelli del ciclo combinato). La cilindrata di questi motori può superare i 20 m³, con potenze dell'ordine dei 50 MW e p_{me} fino a 17 bar. Questi motori hanno soppiantato il ciclo a vapore e le turbogas sulle grandi navi (v. Della Volpe, Cap.14).

Un'altra importante differenza tra i motori ad accensione comandata e quelli ad accensione spontanea consiste nel *metodo di regolazione*: nei motori Otto, essa è effettuata variando la quantità di aria aspirata mediante una valvola (la valvola a farfalla collegata all'acceleratore); nei motori Diesel, si varia la quantità di combustibile iniettata nelle camere di combustione (la portata di aria varia solo per effetto della variazione dei giri del motore). Per questo, ed anche per le peggiori condizioni di miscelazione col combustibile, nei motori Diesel si ha *combustione in eccesso di aria*, con minori temperature massime e ridottissima produzione di CO. Per contro, questi ultimi emettono in genere maggiori quantità di particolato.

Potenza erogata da un motore alternativo

La potenza erogata da un motore alternativo composto si può ottenere moltiplicando il lavoro utile per cilindro (Eq.(7.64)) per il numero, z , di cilindri per il numero di cicli compiuti nell'unità di tempo. Quest'ultimo, per un motore a quattro tempi il cui albero compie n giri al secondo, è dato da $n/2$, dato che il ciclo si compie in due giri dell'albero. Si ha pertanto

$$W_{pist} = L z \frac{n}{2} = z p_{mi} (V_1 - V_2) \frac{n}{2} = \frac{n V_T}{2} p_{mi} \quad (7.76)$$

dove V_T è la cilindrata del motore. Questa espressione rappresenta la potenza ceduta al pistone, che è il primo organo mobile. Per ottenere la potenza all'albero del motore bisogna considerare le perdite dovute all'attrito meccanico e all'azionamento degli ausiliari, espresse da un rendimento η_m .

$$W_{alb} = \eta_m \frac{n V_T}{2} p_{mi} \quad (7.77)$$

definendo la *pressione media effettiva*, p_{me} come

$$p_{me} = \eta_m p_{mi} \quad (7.78)$$

si ottiene infine

$$W_{alb} = \frac{n V_T}{2} p_{me} \quad (7.79)$$

questa equazione indica che, a parità di pressione media effettiva, la potenza erogata è proporzionale alla cilindrata ed al numero di giri. Le grandezze devono essere espresse in unità SI. Una formula più comoda per l'uso pratico è data da

$$W_{alb} [\text{kW}] = \frac{n [\text{rpm}] V_T [\text{L}]}{300 t} p_{me} [\text{bar}] \quad (7.80)$$

dove t rappresenta il numero dei tempi del motore (4 o 2).

La potenza all'asse delle ruote di un veicolo è ulteriormente inferiore a quella data dall'Eq.(7.80) a causa del rendimento meccanico della trasmissione. Alcuni costruttori

(specie di piccoli motocicli) giocano su questo equivoco per “gonfiare” le prestazioni dei propri prodotti.

ESEMPIO 7-14 – Pressione media effettiva di un motore automobilistico.

Un motore automobilistico di 1600 cc a quattro tempi ha una potenza all’albero di 100 Cv, ad un regime di 5000 rpm. Determinare la pressione media effettiva.

Si ha intanto $W_{alb} = 100 \text{ Cv} = 100 (0.735 \text{ kW}) = 73.5 \text{ kW}$.

Dalla Eq.(7.80) si ottiene facilmente

$$p_{me} = W_{alb} \frac{300t}{n V_T} = 73.5 \frac{1200}{5000 \cdot 1.6} = 11 \text{ bar}$$

□

ESEMPIO 7-15 – Determinazione approssimativa della cilindrata di un motore.

Si vuole realizzare un elettrogeneratore della potenza di 700 kW, tramite un motore ad accensione comandata, ad un regime di rotazione di 1500 rpm. Supponendo che la pressione media effettiva valga 11 bar, determinare la cilindrata approssimativa del motore richiesto, trascurando il rendimento di conversione elettrica.

Dalla Eq.(7.80) si ottiene facilmente

$$V_T = W_{alb} \frac{300t}{n p_{me}} = 700 \frac{1200}{1500 \cdot 11} = 51 \text{ L}$$

□

Bilancio energetico del motore ad accensione comandata

Conviene rivedere il bilancio energetico del motore alternativo da un punto di vista più empirico. La potenza termica ottenibile dalla completa combustione del carburante, W_{comb} , si suddivide in quattro aliquote principali

$$W_{comb} = W'_{m,u} + W_{T,raff} + W_{T,scar} + W_{perd} \quad (7.81)$$

dove $W_{m,u}$ rappresenta la potenza meccanica utile, $W_{T,raff}$ la potenza termica ceduta all’esterno attraverso il sistema di raffreddamento (dell’acqua e dell’olio), $W_{T,sc}$ la potenza termica ceduta all’esterno tramite i gas di scarico e infine W_{perd} la potenza perduta per varie cause, tra cui l’azionamento degli ausiliari (pompa dell’acqua, dell’olio, ventole, etc.), le perdite per irraggiamento e per la incompleta combustione del combustibile. I valori indicativi di tali aliquote, espresse in percentuale, sono riportate nella Tab.3.

	Otto		Diesel	
	range	tipico	range	tipico
Potenza meccanica utile	20-30	24	28-40	32
Sist di raffreddamento acqua e olio	16-33	33	15-37	32
Scarico	30-50	36	24-40	29
Perdite	4-20	7	4-12	7

Tabella 3: Suddivisione percentuale della potenza ottenibile dal combustibile, W_{comb} , nei motori a ciclo Otto e Diesel

In pratica in questi motori vale (molto indicativamente) la regola "1/3, 1/3, 1/3": circa un terzo della potenza termica del combustibile è convertito in energia meccanica, ed il calore refluo (due terzi) si suddivide in parti grossomodo uguali tra i gas di scarico ed il sistema di raffreddamento. Questo è da prendere in considerazione nella progettazione di sistemi cogenerativi, dato che (a meno di non disporre di un doppio sistema di recupero) si recupera solo la metà della potenza che invece si otterrebbe da un ciclo Brayton di pari potenza, nel quale praticamente tutto il calore refluo è convogliato nei gas di scarico.

7. Cenno al ciclo Stirling.

Questo ciclo termodinamico prende il nome dai fratelli Robert e James Stirling⁵. Si tratta di un motore ad aria a combustione esterna, costituito da due isovolumiche e due isoterme, il cui ciclo di riferimento è rappresentato in figura 37 sui piani $p-v$ e $T-s$.

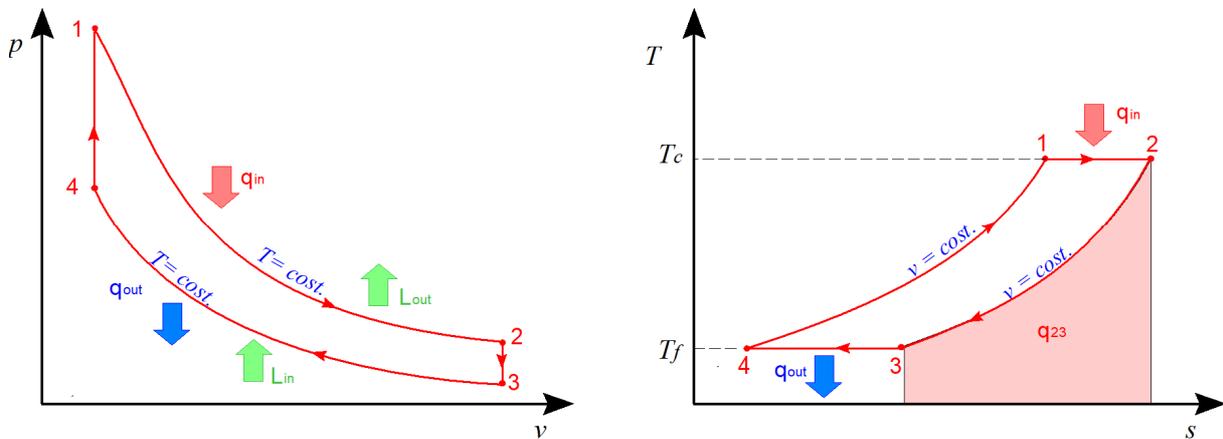


Figura 37: Ciclo Stirling di riferimento nei piani $p-v$ e $T-s$. Il calore ceduto nella fase 2-3, q_{23} , viene completamente recuperato nella fase 4-1.

Se il gas ha un calore specifico costante, il calore per unità di massa ceduto nella trasformazione 2-3 è uguale a quello assorbito nella trasformazione 4-1, e si può pensare di recuperarlo integralmente tramite un recuperatore; le due trasformazioni diventano quindi *adiabatiche verso l'esterno*. Fatto questo, le trasformazioni in cui il calore viene assorbito e ceduto *all'esterno* sono unicamente le *isoterme* 1-2 e 2-3: Il ciclo diventa equivalente a quello di una macchina semplice ed ha quindi il massimo rendimento possibile (uguale alla macchina di Carnot) a parità di temperature estreme.

La realizzazione in linea di principio del ciclo della macchina è mostrata in figura 38 e descritta nel seguito.

1. Allo stato iniziale 1 l'intera massa di gas è contenuta nella camera di sinistra ed assorbe calore a temperatura costante, espandendosi fino alle condizioni 2 tramite il movimento del pistone di sinistra, A, ed erogando lavoro all'esterno.
2. Al punto 2, entrambi i pistoni A e B cominciano a muoversi verso destra, ed il fluido, il cui volume rimane costante, attraversa il rigeneratore cedendogli calore; la pressione

⁵ Robert Stirling (1790-1878) prelado ed ingegnere scozzese; lui ed il fratello James (1800-1876), ingegnere, progettaron in collaborazione una serie di motore ad aria calda introducendo per la prima volta il *rigeneratore*.

e la temperatura del fluido diminuiscono fino al punto 3. In questa fase il lavoro è nullo (quello dei due pistoni è uguale ed opposto e si cancella). Dato che stiamo considerando il ciclo di riferimento (endoreversibile) non c'è caduta di pressione nell'attraversamento del recuperatore.

3. Al punto 3 il solo pistone di destra B continua a muoversi, ed il fluido cede calore a temperatura costante fino al punto 4, assorbendo lavoro dall'esterno.
4. Al punto 4 i due pistoni ricominciano a muoversi assieme verso sinistra, ed il fluido attraversa il recuperatore mantenendo costante il volume, recuperando il calore precedentemente immagazzinato e ritornando alla temperatura T_1 ; anche in questa fase il lavoro è nullo.

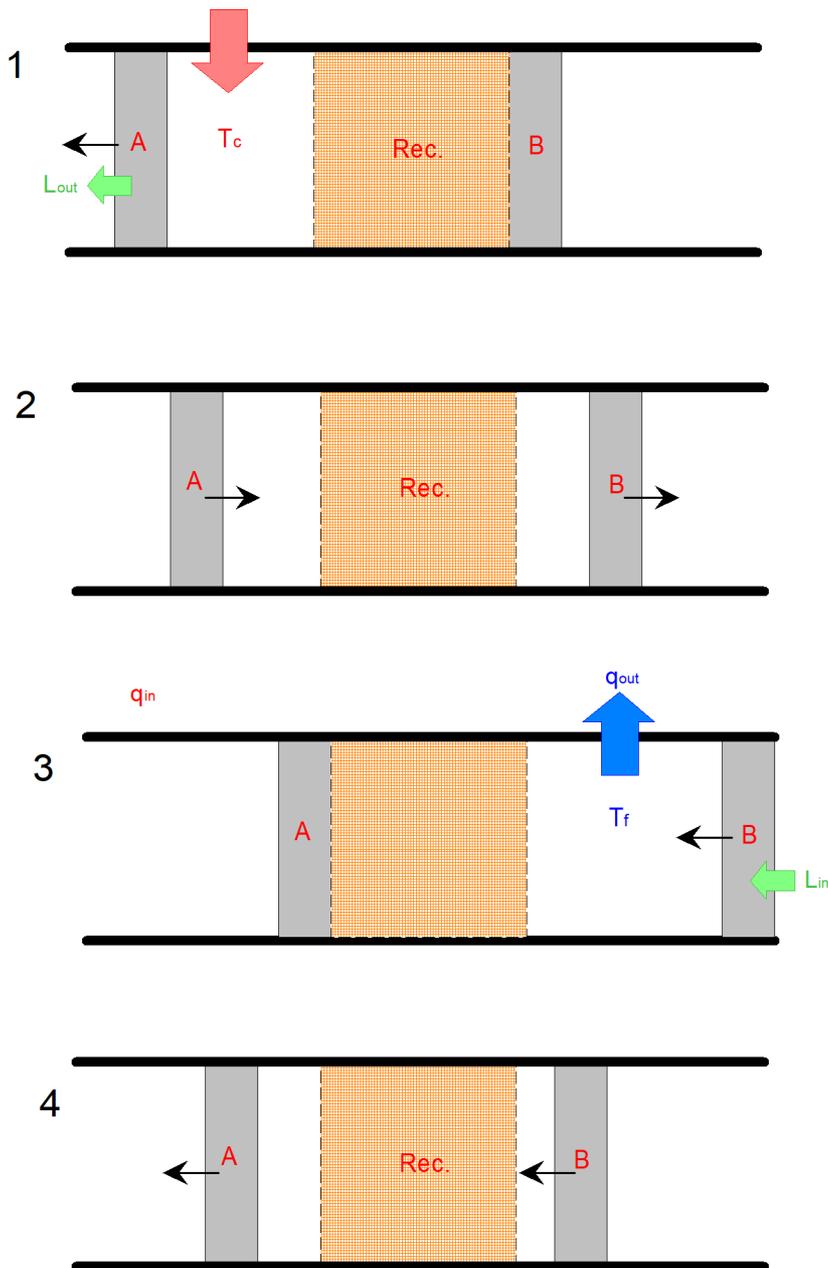


Figura 38: Fasi del ciclo Stirling.

Il lavoro utile raccolto è la differenza tra quello erogato nella fase 1-2 e quello assorbito nella fase 3-4 ed è rappresentato (per unità di massa) dall'area del ciclo nel diagramma $p-v$; alternativamente lo si può vedere come differenza tra il calore assorbito nella fase 1-2 e quello ceduto nella fase 2-3, e quindi anche dall'area del ciclo nel diagramma $T-s$ ⁶.

Il rigeneratore quindi è un accumulatore di energia termica, e deve essere realizzato con un materiale ad alta capacità termica e con una elevata superficie di scambio; si adotta in genere una rete o una schiuma solida metallica o ceramica.

Dal punto di vista realizzativo, il motore Stirling si presenta in diverse versioni (alfa, beta e gamma) in cui il cilindro motore viene separato da quello recuperatore (displacer). La difficoltà di riscaldare l'aria con una combustione o apporto di calore dall'esterno lo rende applicabile solo per piccole potenze. Unito ad altre difficoltà tecniche, tra cui principalmente quella di realizzare un rigeneratore compatto, questo fa sì che il motore, per quanto molto promettente in teoria, abbia trovato fino ad adesso pochissime applicazioni pratiche, principalmente nel campo dell'energia solare. La macchina operata a ciclo inverso (con gas diversi dall'aria) invece si presta bene a realizzare macchine frigorifere di piccola potenza per applicazioni criogeniche (fino a 70 K).

8. Rendimento globale di un impianto motore. Consumo specifico di combustibile.

Nei precedenti paragrafi abbiamo esposto i metodi per il calcolo del rendimento termodinamico di primo principio η_{td} (detto in genere più semplicemente rendimento termodinamico ed indicato con η nei paragrafi precedenti) che è esprimibile nella forma

$$W'_{m,u} = \eta_{td} W_{TC} \quad (7.82)$$

dove, come è noto, W_{TC} è la potenza termica ceduta al fluido dalla sorgente calda, è W'_{mu} è la potenza meccanica utile che il fluido cede agli organi meccanici della macchina motrice. Il rendimento termodinamico considera quindi solo i fenomeni fisici che avvengono nel fluido motore ed è ormai ampiamente ribadito che anche in assenza di imperfezioni (irreversibilità) non può raggiungere il valore unitario.

La potenza termica W_{TC} nella maggior parte dei casi è ottenuta tramite combustione e (come è più ampiamente illustrato nel Cap.15) in tal caso è esprimibile come

$$W_{TC} = \eta_b G_c H_i \quad (7.83)$$

dove G_c è la portata di combustibile, H_i il *potere calorifico inferiore* del combustibile (ovvero l'energia ottenibile dalla combustione completa di 1 kg di combustibile, con l'acqua presente nei fumi allo stato gassoso, v. Cap.15) ed infine η_b rappresenta il *rendimento di combustione*, che tiene conto di diversi fattori tra cui la combustione non completa, il calore asportato dai fumi, le perdite termiche nell'organo in cui avviene la combustione. Il rendimento di combustione è minore di uno (in genere oscilla tra 0.8 e 0.95) e riduce la massima potenza teoricamente ottenibile dalla combustione, pari a $G_c H_i$.

⁶ Per comprendere meglio ciò si può sommare e sottrarre il calore recuperato nelle due isovolumiche, rappresentato dalle aree sottese dalle trasformazioni 2-3 e 3-4.

Infine la potenza meccanica utile ceduta dal fluido agli organi della macchina differisce da quella raccolta all'asse motore della macchina stessa a causa degli attriti negli organi di trasmissione e di questo si tiene conto attraverso un rendimento meccanico,

$$W_{asse} = \eta_m W'_{mu} \quad (7.84)$$

Combinando le tre espressioni precedenti, si ottiene che la potenza all'asse è data da

$$W_{asse} = \eta_b \eta_{td} \eta_m G_c H_i = \eta_g G_c H_i \quad (7.85)$$

dove η_g è detto *rendimento globale* dell'impianto motore.

In sostanza, il rendimento termodinamico non è l'unico fattore che riduce la potenza meccanica ottenibile dalla combustione di 1 kg di combustibile (ovvero *la potenza motrice del fuoco*, per usare l'espressione di Sadi Carnot). Sebbene esso costituisca l'aliquota più significativa, dato che raramente supera il 50%, bisogna tener conto anche delle imperfezioni della combustione e delle trasmissioni meccaniche, che pur essendo più ridotte sono anch'esse importanti.

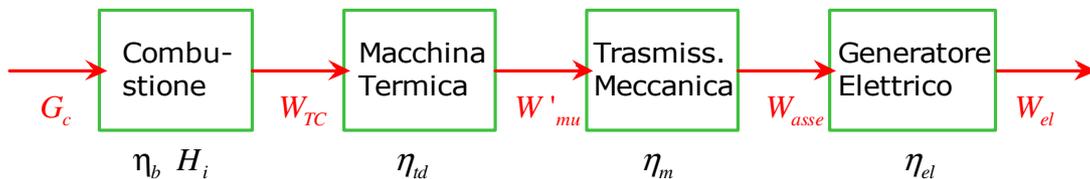


Figura 39: Processo di conversione dell'energia dal combustibile ai morsetti elettrici.

Se l'energia meccanica viene convertita in energia elettrica bisogna tener conto anche di un *rendimento elettrico* che va a diminuire ulteriormente il rendimento globale.

$$W_{el} = \eta_{el} W_{asse} = \eta_m \eta_b \eta_{td} \eta_{el} G_c H_i = \eta_g \eta_{el} G_c H_i \quad (7.86)$$

l'intero processo di conversione è schematizzato in Fig.39.

Alcuni testi definiscono il rendimento globale come quello derivante dalla (7.86), ovvero

$$\eta_{ge} = \frac{W_{el}}{G_c H_i} = \eta_m \eta_b \eta_{td} \eta_{el} = \eta_g \eta_{el} \quad (7.87)$$

Per evitare confusione, chiameremo η_{ge} *rendimento globale elettrico*.

A questo punto è immediato calcolare il consumo di combustibile dell'impianto

$$G_c = \frac{W_{asse}}{\eta_g H_i} = \frac{W_{el}}{\eta_{ge} H_i} \quad (7.88)$$

Il rendimento globale viene detto anche "*tank-to-wheel*" (lett. dal serbatoio alla ruota) e nel caso elettrico si ferma ai morsetti del generatore, non includendo quindi i costi energetici di distribuzione dell'energia elettrica, dovuti al rendimento delle linee. Nel 2005, secondo l'Autorità per l'Energia, il fabbisogno medio pesato del parco termoelettrico italiano è stato di 2107 kcal/kWh, corrispondente a un rendimento globale medio di circa il 40,8%.

Generalmente si fa riferimento al *consumo specifico di combustibile*, cs , ovvero la portata di combustibile necessaria per produrre 1 W di potenza meccanica od elettrica

$$cs_{mecc} = \frac{G_c}{W_{asse}} = \frac{1}{\eta_g H_i} \quad \left[\frac{\text{kg/s}}{\text{W}} = \frac{\text{kg}}{\text{J}} \right] \quad (7.89)$$

$$cs_{el} = \frac{G_c}{W_{el}} = \frac{1}{\eta_g \eta_{el} H_i} \quad \left[\frac{\text{kg/s}}{\text{W}} = \frac{\text{kg}}{\text{J}} \right] \quad (7.90)$$

Il consumo specifico è anche interpretabile come la massa di combustibile che è necessario bruciare per produrre l'unità di energia, ed è ancora invalso l'uso di esprimerlo in unità tecniche quali g/Cvh o kg/kWh.

Negli ultimi anni, in una prospettiva globale di risparmio energetico, è invalso l'uso di considerare anche il ciclo integrato del combustibile, inclusa l'energia spesa nella sua estrazione, nel trasporto, e nella eventuale raffinazione e distribuzione dello stesso: si parla così di rendimento "well-to-wheel" (dal pozzo alla ruota); visti i numerosi fattori coinvolti, la sua valutazione esatta non è semplice.

ESEMPIO 7-16 – Consumo specifico di combustibile.

Una centrale termoelettrica eroga 1250 MW elettrici ai morsetti dell'alternatore. Il rendimento termodinamico vale 0.42, il rendimento di combustione 0.9, quello meccanico 0.95 e quello elettrico 0.97 Nelle caldaie si brucia carbone con un potere calorifico inferiore di 35 MJ/kg. Determinare il consumo specifico di combustibile ed il fabbisogno giornaliero di carbone.

Si ha

$$\eta_g = \eta_b \eta_{td} \eta_m = 0.359$$

$$cs_{el} = \frac{1}{\eta_g \eta_{el} H_i} = 0.0821 \text{ kg/MJ} = 0.295 \text{ kg/kWh}$$

la portata di combustibile vale

$$G_c = cs_{el} W_{el} = 0.0821 \cdot 1250 = 102.5 \text{ kg/s}$$

ed il fabbisogno giornaliero (un giorno consiste di 86400 s)

$$M = G_c t = 102.5 \cdot 86400 = 8862 \text{ t}$$

pari al contenuto di circa 120 carri ferroviari a quattro assi.



8. Cenno alla cogenerazione ed alla multigenerazione

Abbiamo visto come la produzione di energia elettrica o meccanica da una fonte di calore (in genere, la combustione) abbia come effetto indesiderato e inevitabile che una parte del calore prodotto non può essere convertito in energia meccanica, ma viene restituito come "rifiuto" alla sorgente fredda. D'altra parte, in altre applicazioni (in genere per il riscaldamento di edifici) "sprechiamo" calore disponibile ad alta temperatura (sempre originato da una

combustione) per utilizzarlo a temperatura molto più bassa. Viene quindi spontaneo domandarsi perché non si utilizzi per questi ultimi scopi il calore reflu, a bassa temperatura, proveniente dagli impianti di generazione di energia elettrica o meccanica. Ad esempio, si potrebbe costruire un impianto a ciclo Brayton che provveda a generare l'energia elettrica necessaria agli edifici della nostra facoltà ed utilizzi il calore ceduto alla sorgente fredda per il suo riscaldamento invernale, invece di scaricarlo semplicemente nell'ambiente. In questo modo l'energia chimica inizialmente disponibile nel combustibile verrebbe sfruttata quasi integralmente e nel modo ottimale. Questa procedura prende il nome di *cogenerazione*. Il lettore interessato può richiedere all'autore un capitolo dedicato, che non fa parte del programma di questo corso.

In realtà tutti noi utilizziamo da tempo una piccola forma di cogenerazione per riscaldare l'abitacolo delle nostre automobili, prelevando a questo scopo il calore reflu dall'impianto di raffreddamento del motore.

Gli impianti cogenerativi possono essere classificati sommariamente nelle categorie seguenti:

- *Impianti a ciclo non modificato*: in questi impianti, si aggiunge semplicemente uno scambiatore che recupera il calore dai prodotti della combustione, allo scarico di una turbina o di un motore alternativo, senza modificare il ciclo termodinamico dell'impianto originario. Nel caso del motore alternativo, il calore può essere recuperato anche dal sistema di raffreddamento dei cilindri. In questo caso il calore recuperato è completamente "gratuito" dal punto di vista energetico, ma si devono sostenere dei costi per installare lo scambiatore di recupero e la rete di distribuzione dell'energia termica recuperata.
- *Impianti a ciclo modificato*: alcuni cicli, tra cui principalmente quello Rankine, hanno il pregio di restituire il calore reflu a temperature molto basse: se si vuole recuperare questo calore, è necessario modificare il ciclo innalzandone la temperatura inferiore, cioè innalzando la pressione nel condensatore o eliminandolo (si ottengono così i cosiddetti impianti a *contropressione*). Un'altra possibilità è quella di spillare una parte del vapore destinata alla turbina a pressione relativamente elevata, destinandolo semplicemente alla produzione di energia termica. Entrambe queste soluzioni penalizzano il rendimento di primo principio dell'impianto originario, per cui il calore recuperato non è completamente "gratuito". I relativi costi vanno a sommarsi a quelli di impianto, analoghi al caso precedente.

I maggiori ostacoli che si frappongono alla diffusione su larga scala della cogenerazione sono: contemporaneità e continuità dei fabbisogni di calore e di energia elettrica/meccanica, maggiori costi d'impianto e costo della rete di distribuzione del calore.

Viene spontaneo chiedersi cosa fare del calore utilizzato per il riscaldamento civile durante l'estate o nei paesi caldi. Nel capitolo sugli impianti frigoriferi, vedremo brevemente come il calore può essere utilizzato nei cosiddetti *cicli ad assorbimento* anche per raffrescare gli ambienti: si parla in questo caso di *trigenerazione* (energia, calore, freddo). Un piccolo esempio di ciclo ad assorbimento sono i frigoriferi a gas montati sui camper. Ultimamente, si è giunti ad ipotizzare la costruzione di impianti di *pentagenerazione* (energia, calore, freddo, dissalazione dell'acqua marina ed idrogeno).

L'uso estensivo e razionale delle tecniche cogenerative richiede una oculata politica di pianificazione delle scelte energetiche e degli insediamenti.

BIBLIOGRAFIA

- R. Mastrullo, P. Mazzei, R. Vanoli, *Termodinamica per Ingegneri*, Liguori, Cap.2.
R. Della Volpe, *Macchine*, Liguori, capp.6-9 e 14.
G. Cornetti, *Macchine a Fluido*, Edizioni il Capitello.
G. Lozza, *Turbine a Gas e Cicli Combinati*, Esculapio, Bologna, ISBN88-86524-08-0
P. Di Marco, *Impianti cogenerativi*, dispense.

APPENDICE – Ulteriori cenni ai motori a combustione interna

Curve caratteristiche dei motori a combustione interna

La potenza di un motore a c.i. varia al variare del regime di rotazione. Tuttavia, contrariamente a quanto potrebbe apparire dalla Eq.(7.80), la potenza non è direttamente proporzionale al numero di giri, dato che al variare di questo varia anche la p_{me} . L'andamento della potenza e della coppia all'albero in funzione del numero di giri è riportato nelle cosiddette *curve caratteristiche*, illustrate qualitativamente in Fig.A1.1.

Da tali curve si nota che la potenza ha un massimo ad un numero di giri di poco inferiore a quello massimo per cui il motore è utilizzabile. La coppia all'albero invece ha un massimo per un numero di giri notevolmente inferiore: questo rappresenta il numero di giri a cui il motore deve essere utilizzato per ottenere la massima accelerazione (nel caso di trazione) o il massimo sforzo, p. es. per il sollevamento di un carico.

Si nota anche che le curve sono tracciate a partire da un *numero di giri minimo* al di sotto del quale il motore non funziona regolarmente. Nella trazione, l'intervallo di giri in cui il motore ha un funzionamento regolare non è sufficiente a coprire l'intero campo di velocità del veicolo mediante una trasmissione semplice: è necessario introdurre un *cambio di velocità* per adattare i giri del motore alle varie condizioni operative.

E' anche importante notare che questi motori (differentemente dai motori elettrici ed a vapore) hanno coppia allo spunto nulla, per cui necessitano di essere messi in moto a vuoto e connessi successivamente al carico (generalmente, questo avviene tramite un innesto meccanico a *frizione*). Inoltre come tutti i motori a combustione interna, essi non si avviano spontaneamente ma hanno bisogno di un sistema di lancio.

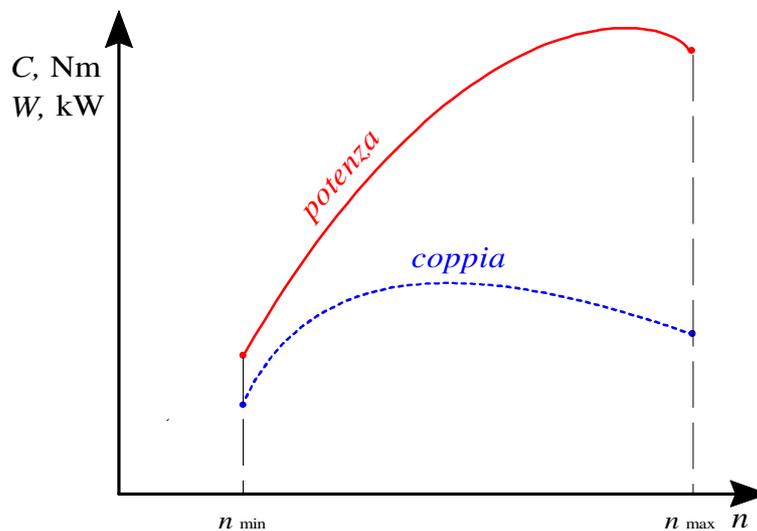


Figura A1.1: Curve caratteristiche di coppia e potenza per il motore alternativo.

Cenno alla sovralimentazione

Nel caso di motore alternativo a 4 tempi, la portata G di fluido in ingresso è esprimibile come

$$G = \frac{n}{2} \rho_i \lambda_v \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) V_T \quad (7.91)$$

nella quale α rappresenta il rapporto portata di aria/portata di combustibile, ρ_i è la densità dell'aria in ingresso e λ_v è il cosiddetto *coefficiente di riempimento* del motore. Si può vedere che esso rappresenta il rapporto tra l'aria effettivamente aspirata dal motore per unità di tempo e quella teoricamente aspirabile. Tale differenza è dovuta alle perdite di carico e ad altre caratteristiche del sistema di aspirazione. Nella pratica, il valore di λ_v non supera 0.8-0.9 per motori cosiddetti "aspirati", ovvero che aspirano aria a pressione atmosferica. La quantità $(1+1/\alpha)$ è sempre molto prossima ad 1 (α può variare indicativamente da 12 per motori a benzina fino a oltre 70 per i motori a gasolio).

E' logico pensare che, aumentando la massa di aria introdotta per ogni ciclo, si può aumentare la quantità di combustibile bruciato e quindi incrementare l'afflusso di energia termica. Si può quindi vedere che la potenza del motore, oltre ad aumentare con la cilindrata V_T e col numero di giri n , come già evidenziato, può essere incrementata anche aumentando il fattore $\rho_i \lambda_v$: questo è il principio della *sovralimentazione*.

Naturalmente ogni aumento di potenza a parità di cilindrata e numero di giri, incluso quello dovuto alla sovralimentazione, implica anche un aumento della p_{mi} , come si può dedurre immediatamente dalla Eq.(7.77).

Nei motori sovralimentati l'aria viene compressa prima di essere inviata all'aspirazione del motore. La compressione può avvenire in un *compressore volumetrico*, azionato meccanicamente dal motore stesso, o in un *turbocompressore* la cui turbina è azionata dai gas di scarico. Dato che durante la compressione l'aria si riscalda e la sua densità diminuisce (vanificando così parte dell'effetto voluto) talvolta essa viene refrigerata in un refrigeratore intermedio (*intercooler*) prima di essere avviata ai condotti di aspirazione del motore alternativo. Questo ultimo schema è riportato in Fig.A1.2.

La sovralimentazione non è totalmente "gratuita" in quanto la potenza necessaria per azionare il compressore deve essere a sua volta prelevata dal motore alternativo.

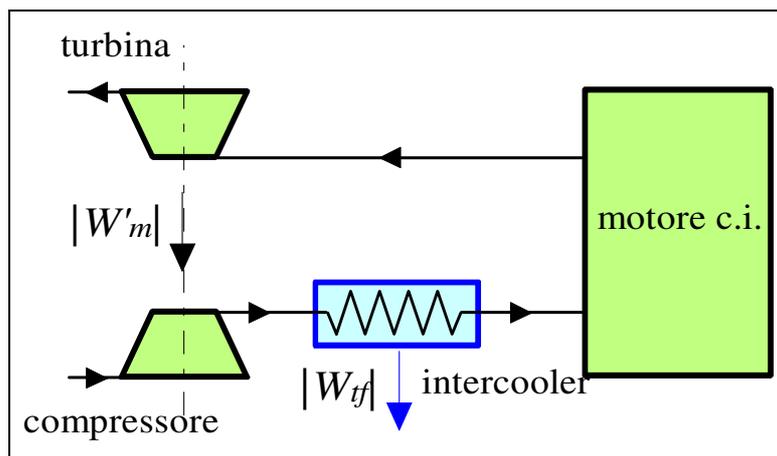


Figura A1.2: Schema di motore sovralimentato mediante turbocompressore con intercooler.

ESERCIZI

ESERCIZIO 7.1

Determinare il rendimento di un ciclo reversibile di Rankine a vapore saturo evolvente fra le temperature $T_1 = 100\text{ }^\circ\text{C}$ e $T_3 = 300\text{ }^\circ\text{C}$.

[0.29]

ESERCIZIO 7.2

Un impianto a ciclo Brayton eroga 15 MW di potenza utile. La temperatura minima del ciclo è $T_1 = 300\text{ K}$ e la massima $T_3 = 1400\text{ K}$. La pressione di ammissione al compressore è $p_1 = 1\text{ bar}$, e il rapporto di compressione è $p_2/p_1=10$. Si assuma che il fluido di lavoro sia aria (gas ideale) con c_p costante, $R= 287\text{ J/kg K}$, $k = 1.400$. Tracciare il ciclo sui diagrammi p,v e T,s e calcolare le condizioni a fine compressione (T_2) e a fine espansione (T_4), il rendimento del ciclo e il valore della portata massica di aria nell'impianto nelle seguenti condizioni:

- ciclo Brayton ideale senza rigenerazione;
- ciclo Brayton senza rigenerazione con rendimento isoentropico del compressore $\varepsilon_c = 0.85$ e della turbina $\varepsilon_t = 0.88$;

caso	p_2	T_2	T_4	η	G
	bar	K	K	=	kg/s
a)	10	579	725	.48	37.7
b)	10	629	806	.34	56.3

ESERCIZIO 7.3 (adatto alla risoluzione tramite calcolatore)

Con riferimento all'esercizio precedente, mantenendo costanti tutti gli altri dati, si traccino i diagrammi del rendimento in funzione del rapporto di compressione nei due casi.

ESERCIZIO 7.4

Si consideri un ciclo a vapore d'acqua avente le seguenti caratteristiche: temperatura all'uscita del condensatore $T_1=35^\circ\text{C}$, pressione all'ammissione in turbina $p_3 = 12\text{ MPa}$, portata di fluido $G = 360\text{ t/h}$. Calcolare il valore del rendimento, del titolo in uscita alla turbina (x_4) e della potenza netta erogata dall'impianto nelle seguenti condizioni:

- ciclo a vapor saturo (il vapore entra in turbina in condizioni di saturazione, $x_3=1$);
- ciclo a vapore surriscaldato, con temperatura di ammissione in turbina $T_3= 600\text{ }^\circ\text{C}$;
- ciclo a vapore surriscaldato con temperatura di ammissione in turbina $T_3= 600\text{ }^\circ\text{C}$, espansione in turbina fino al $p_{3'} = 0.6\text{ MPa}$ e risurriscaldamento fino a $T_{3''} = 600\text{ }^\circ\text{C}$.

In tutti i casi, si consideri l'espansione in turbina ideale (adiabatica e reversibile).

caso	η	x_4	W
	=	=	MW
a)	.39	.64	100
b)	.44	.8	152
c)	.45	.989	169

ESERCIZIO 7.5

Si ripetano i calcoli dell'esercizio precedente considerando una espansione in turbina reale con rendimento isoentropico 0.88.

caso	η	x_4	W
	=	=	MW
a)	.34	.69	87
b)	.385	.88	133
c)	.40	.92	149

ESERCIZIO 7.6

In un impianto a vapore della potenza $W = 2000$ kW il fluido motore evolve reversibilmente secondo un ciclo di Rankine a vapore surriscaldato tra le temperature di ammissione in turbina di 300 °C (a 70 bar) e quella nel condensatore di 40 °C. Determinare il rendimento del ciclo semplice e di quello con uno spillamento rispettivamente a 50, 30, 5, 2 bar.

Si assuma che le condizioni dell'acqua in uscita dal rigeneratore siano pari a quelle di liquido saturo.

Suggerimento: per la soluzione, si può fare uso del programma RACY
 [0.37; 0.379; 0.388; 0.398; 0.396]

ESERCIZIO 7.7

In un impianto a vapore, supposto reversibile, della potenza di 5000 kW circola vapore prodotto alla pressione $p_3 = 20$ bar ed alla temperatura $T_3 = 300$ °C da un generatore di vapore che brucia 2000 kg/h di combustibile (potere calorifico inferiore 30000 kJ/kg).

L'acqua entra nel generatore a 40 °C. L'aumento di temperatura nella pompa è trascurabile.

Determinare il rendimento del generatore di vapore, il rendimento del ciclo, la portata di vapore e la portata massica unitaria in kg/kJ.

[0.93; 0.32; 5.47 kg/s; 1.09×10^{-3} kg/kJ (0.39 kg/kWh)]

ESERCIZIO 7.8

In un ciclo il vapore entra in turbina alla pressione di 20 bar ed alla temperatura di 400 °C. La pressione nel condensatore è di 0,2 bar e il liquido esce dal condensatore in condizioni di saturazione. Assumendo che le trasformazioni che subisce il fluido all'interno della turbina e della pompa siano adiabatiche e reversibili:

- Determinare le condizioni in tutti i punti del ciclo
- Calcolare il calore ed il lavoro scambiato in ogni trasformazione e nel ciclo
- Calcolare il rendimento del ciclo
- Confrontare il rendimento del ciclo in esame con quello del Ciclo di Carnot equivalente.

[vedi soluzione completa in app.6]

ESERCIZIO 7.9

Si consideri un ciclo Rankine internamente reversibile a vapore surriscaldato per il quale siano state fissate la temperatura del vapore all'ingresso della turbina e la pressione di condensazione. Quale è l'effetto dell'aumento di pressione nel generatore di vapore su:

- | | | | |
|--------------------|-------------|----------------|---------------------|
| lavoro della pompa | (a) aumenta | (b) diminuisce | (c) resta lo stesso |
| lavoro turbina | (a) aumenta | (b) diminuisce | (c) resta lo stesso |

- | | | | |
|----------------------------|-------------|----------------|---------------------|
| calore in caldaia | (a) aumenta | (b) diminuisce | (c) resta lo stesso |
| calore condensatore | (a) aumenta | (b) diminuisce | (c) resta lo stesso |
| rendimento del ciclo | (a) aumenta | (b) diminuisce | (c) resta lo stesso |
| titolo vapore uscita turb. | (a) aumenta | (b) diminuisce | (c) resta lo stesso |
- [vedi soluzione completa in app.6]

ESERCIZIO 7.10

Aria alla temperatura di 300 K ed alla pressione di 100 kPa entra nel compressore di un impianto a turbina a gas che opera seguendo un ciclo di Brayton. Il flusso di massa è di 5 kg/s e la temperatura massima che raggiunge l'aria è di 1200 K.

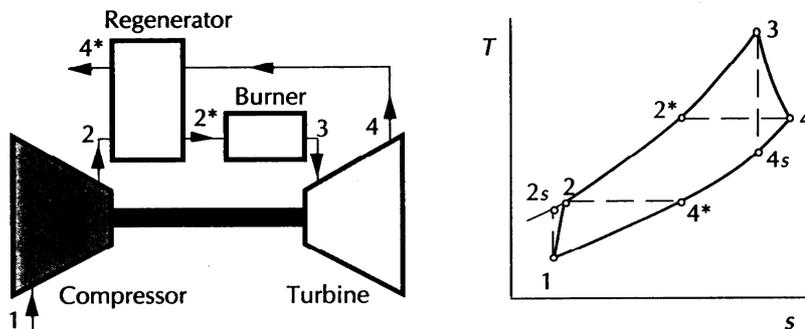
Supposto che il rapporto di compressione sia 4, determinare:

- Il rendimento dell'impianto assumendo ideali la compressione e l'espansione;
- La potenza in uscita, sempre in condizioni ideali;
- Se il compressore e la turbina non operano in condizioni ideali, quale dovrebbe essere il rendimento isoentropico di ciascun componente per non avere lavoro utile?
- Quali dovrebbero essere, per questo caso le temperature in uscita dalla turbina e dal compressore?

[vedi soluzione completa in app.6]

ESERCIZIO 7.11

Aria entra in un compressore di un impianto a turbina a gas con rigenerazione, mostrato nella successiva figura



alla temperatura di 300 K ed alla pressione di 100 kPa. Il rapporto di compressione è 4 e la temperatura massima nel ciclo è 1200 K. Il flusso di massa è di 8 kg/s.

I rendimenti isoentropici del compressore e della turbina sono rispettivamente 0.85 e 0.9, mentre il rigeneratore è ideale.

Determinare

- La potenza netta in uscita
- Il rendimento del ciclo

[vedi soluzione completa in app.6]

Appunti ed Esercizi di *Fisica Tecnica*

Cap.8. I cicli termici delle macchine operatrici

Paolo Di Marco

Versione 2022.00 – 10.01.2022.

La presente dispensa è redatta ad esclusivo uso didattico per gli allievi dei corsi di studi universitari dell'Università di Pisa. L'autore se ne riserva tutti i diritti. Essa può essere riprodotta solo totalmente ed al fine summenzionato, non può essere alterata in alcuna maniera o essere rivenduta ad un costo superiore a quello netto della riproduzione. Ogni altra forma di uso e riproduzione deve essere autorizzata per scritto dall'autore.

L'autore sarà grato a chiunque gli segnali errori, inesattezze o possibili miglioramenti.

Introduzione

Nel presente capitolo viene affrontato lo studio delle macchine termiche operatrici, ovvero quelle che trasferiscono calore da una sorgente più fredda ad una più calda assorbendo lavoro meccanico dall'esterno. Come visto nel Cap.6, tali macchine vengono convenzionalmente distinte in pompe di calore (quando l'ambiente è la sorgente fredda) e macchine frigorifere (quando l'ambiente è la sorgente calda). I cicli termici su cui funzionano questi due tipi di macchine sono comunque gli stessi, tanto è vero che alcune di tali macchine sono invertibili, ovvero possono funzionare sia da frigoriferi che, con piccole modifiche dei circuiti, da pompe di calore. E' questo il caso dei condizionatori d'aria che d'inverno funzionano da impianti di riscaldamento. Nel presente capitolo verranno studiate le caratteristiche del più semplice tra i cicli frigoriferi utilizzati nella pratica, che viene applicato correntemente ai frigoriferi ed ai condizionatori domestici e di potenza limitata. Gli impianti industriali di refrigerazione, di grande potenza, utilizzano versioni modificate di tale ciclo che qui vengono solo accennate. Con queste macchine, si possono raggiungere anche $-150\text{ }^{\circ}\text{C}$ con potenze frigorifere (W_{TF}) dell'ordine di 10 MW

Faremo quindi un cenno al ciclo ad assorbimento, caratterizzato dal fatto di non utilizzare quantità significative di potenza meccanica: tale ciclo è applicato ad es. nei piccoli frigoriferi da campeggio, ma anche nei grandi impianti che utilizzano calore a bassa temperatura recuperato da impianti cogenerativi.

Il ciclo frigorifero

Nel seguito, faremo riferimento al caso in cui si deve mantenere stabilmente uno spazio confinato (una cella frigorifera) a temperatura T^* inferiore a quella dell'ambiente circostante, T_a . Per effetto di tale differenza di temperatura, una certa potenza termica (determinata dalla differenza di temperatura stessa, dalla superficie della parete e dai materiali di cui è costituita, secondo le leggi della trasmissione del calore esposte nel Cap.12) fluisce *spontaneamente* dall'esterno nella cella. La stessa potenza termica deve essere quindi asportata dalla cella e "pompatà" verso l'esterno, ad una temperatura più alta, in un processo che per il secondo principio della termodinamica (enunciato di Clausius) non può essere spontaneo e deve essere realizzato tramite una macchina termica operatrice.

Ciclo semplice inverso.

Il ciclo semplice inverso (ciclo di Carnot), come illustrato nel Cap.6, è costituito nel piano $T-s$ da un rettangolo che viene percorso in senso antiorario. Esso potrebbe essere realizzato in pratica nella forma illustrata nella Fig.1, dove si sfrutta il fatto che all'interno della campana di saturazione le isoterme sono anche isobare e quindi facili da realizzare in pratica.

Dato che il fluido deve asportare calore dalla sorgente fredda, la sua temperatura inferiore T_F deve essere leggermente inferiore a quella della sorgente fredda stessa, T^* . Per lo stesso motivo, dovendo il fluido cedere calore alla sorgente calda, la sua temperatura superiore T_C deve essere leggermente superiore a quella della sorgente calda stessa, ovvero quella ambiente, T_a .

L'entità delle differenze di temperatura suddette dipende dalle modalità (superficie di scambio e conduttanza globale di parete) con cui sono realizzati i relativi scambiatori di calore.

Per tale ciclo ideale, il COP (v. Cap.6) è dato da:

$$COP_{f,rev} = \frac{|W_{ff}|}{|W'_{mu}|} = \frac{T_F}{T_C - T_F} \quad (8.1)$$

dove, nel caso ideale (scambiatore di calore di superficie infinita), si può assumere $T_F = T^*$ e $T_C = T_A$.

Tale ciclo presenta tuttavia gli inconvenienti esposti in seguito, che ne rendono impossibile la effettiva realizzazione.

- a) La trasformazione di compressione 1-2 deve essere realizzata su un vapore saturo, in presenza di goccioline di liquido, il che provocherebbe notevoli problemi fluidodinamici all'interno del compressore, con conseguenti problemi di usura e danneggiamento meccanico del compressore stesso ed elevate irreversibilità. Il rendimento isoentropico di tale macchina sarebbe comunque molto basso.
- b) Durante l'espansione 3-4, il lavoro recuperato dalla turbina sarebbe comunque trascurabile rispetto a quello assorbito dal compressore; questo perché il lavoro in tali trasformazioni è proporzionale a vdp , ed il fluido che si espande ha un volume specifico decisamente inferiore a quello del fluido che viene compresso. A questo si aggiungono i problemi tecnologici connessi all'espansione di una miscela bifasica, analoghi a quelli illustrati al punto precedente.

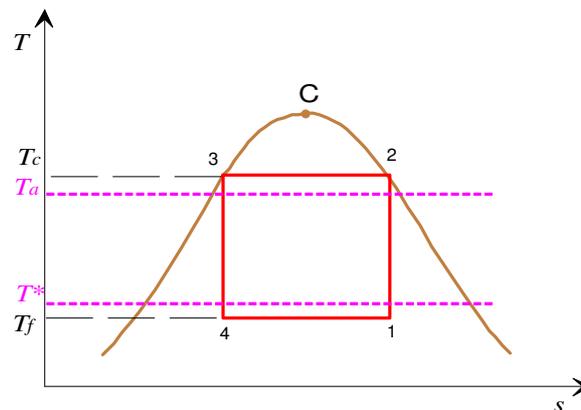


Figura 8.1:Ciclo semplice inverso nel piano T - s .

Ciclo frigorifero

Per ovviare ai problemi tecnologici illustrati nei punti a) e b) alla fine della precedente sezione, il ciclo viene modificato come segue (vedi Fig.2).

- a) Si opera la compressione su fluido monofasico, ovvero vapore surriscaldato. A tal fine, il cambiamento di fase nell'evaporatore viene spinto fino ad avere all'uscita vapore saturo secco, che viene successivamente compresso nel compressore. Questo, come illustrato in Fig.2, comporta che il fluido esca dal compressore stesso ad una temperatura (T_2) più elevata di quella di condensazione, T_3 . Questo comporta anche un aumento delle dimensioni del condensatore, dato che il vapore surriscaldato ha un coefficiente di scambio che è indicativamente un ordine di grandezza inferiore a quello del vapore saturo.

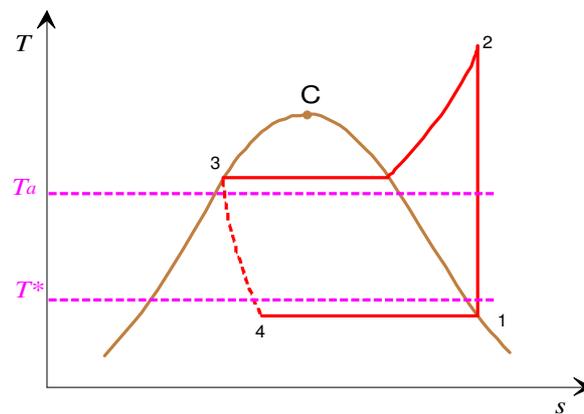


Figura 8.2:Ciclo frigorifero standard a compressione di vapore nel piano T - s .

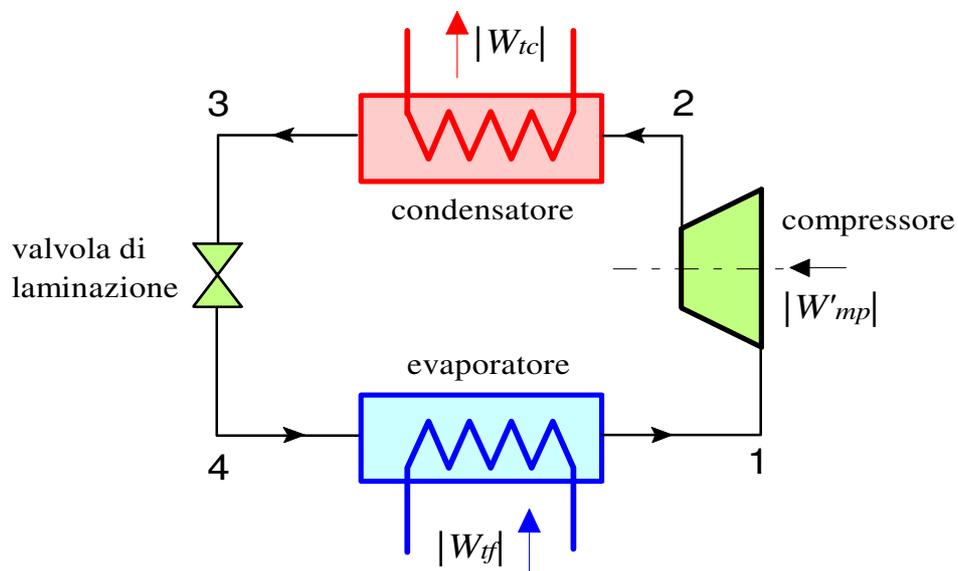


Figura 8.3:Componenti del ciclo frigorifero standard.

b) Si rinuncia a recuperare lavoro dall'espansione e si sostituisce la turbina con un organo di laminazione: tale organo è compatto ed economico e realizza la caduta di pressione necessaria per riportare il fluido alla pressione inferiore del ciclo.

Tale ciclo prende il nome di *ciclo Joule secco* o *ciclo frigorifero standard*, ed è caratterizzato dalla presenza di una irreversibilità interna intrinseca, dovuta alla valvola di laminazione.

I componenti principali dell'impianto frigorifero sono illustrati in Fig.3. Come di consueto, l'impianto è costituito da quattro organi, schematizzabili individualmente come sistemi aperti a regime, che nel loro complesso costituiscono un sistema chiuso. Il ciclo lavora fra due pressioni, quella superiore (dei punti 2 e 3) e quella inferiore, dei punti 4 e 1. Le trasformazioni sono rappresentate nel diagramma T - s in Fig.2.

Il ciclo può anche essere rappresentato sul diagramma p - h , con il vantaggio che tre trasformazioni diventano segmenti di retta, Fig.4. Il fluido in 1, allo stato di vapore saturo secco ($x_1=1$), viene compresso isoentropicamente fino alla pressione superiore del ciclo (punto

2); entra quindi nel condensatore, dove condensando cede calore all'ambiente esterno, e ne esce allo stato di liquido saturo (punto 3, $x_3 = 0$). Si espande quindi (3-4) nell'organo di laminazione: dato che tale organo è considerato adiabatico e non si raccoglie lavoro utile, tale espansione è *isoentalpica* (v. Cap.4). Il fluido quindi evapora nell'evaporatore (4-1) sottraendo calore alla sorgente fredda e ritornando alle condizioni iniziali 1.

Il bilancio energetico applicato a ciascuno dei quattro organi dell'impianto (sistemi aperti a regime), risulta in

$$\text{compressore (1-2)} \quad W'_{mp} = -G(h_2 - h_1) \quad (8.2)$$

$$\text{condensatore (2-3)} \quad W_{tc} = G(h_3 - h_2) \quad (8.3)$$

$$\text{valvola di laminazione (3-4)} \quad h_3 = h_4 \quad (8.4)$$

$$\text{evaporatore (4-1)} \quad W_{tf} = G(h_1 - h_4) \quad (8.5)$$

Mentre applicando il bilancio energetico applicato all'intero impianto (sistema chiuso a regime) si ha come risultato

$$|W_{tc}| = |W_{tf}| + |W'_{mp}| \quad (8.6)$$

ovvero, dividendo per la portata G e riportandolo all'unità di massa

$$|q_{23}| = |q_{41}| + |l'_{12}| \quad (8.7)$$

Il coefficiente di prestazione è dato da

$$COP_f = \frac{W_{tf}}{|W'_{mp}|} = \frac{q_{41}}{|l'_{12}|} = \frac{(h_1 - h_4)}{(h_2 - h_1)} \quad (8.8)$$

esso si presta ad una semplice interpretazione geometrica sul diagramma $p-h$ di Fig.4, essendo dato dal rapporto della lunghezza dei segmenti AB e BC. Il COP_f è inversamente proporzionale al costo di esercizio della macchina.

Per confrontare le prestazioni con quelle della macchina ideale, si confrontano i relativi COP

$$\Psi = \frac{COP_f}{COP_{f,rev}} = \frac{(h_1 - h_4)}{(h_2 - h_1)} \frac{T_3 - T_1}{T_1} \quad (8.9)$$

La PMU è data da

$$PMU = \frac{G}{W_{tf}} = \frac{1}{h_1 - h_4} \quad (8.10)$$

ed è direttamente proporzionale al costo di impianto. Dato che spesso il compressore è una macchina volumetrica, ha interesse considerare anche la portata volumica unitaria, PVU

$$PVU = \frac{G_{v1}}{W_{tf}} = \frac{G}{\rho_1 W_{tf}} = \frac{v_1}{h_1 - h_4} \quad (8.11)$$

che rappresenta la portata in volume *all'ingresso del compressore* necessaria per asportare 1 W dalla sorgente fredda e si misura in m³/J. Sulla base di questo valore viene determinata la cilindrata del compressore.

Si ricordi che, al contrario della portata in massa, la portata in volume varia da punto a punto dell'impianto.

Per ridurre la PVU è dunque necessario disporre di un fluido caratterizzato da elevata entalpia di vaporizzazione e da piccolo volume specifico (ovvero elevata densità) nelle condizioni di aspirazione.

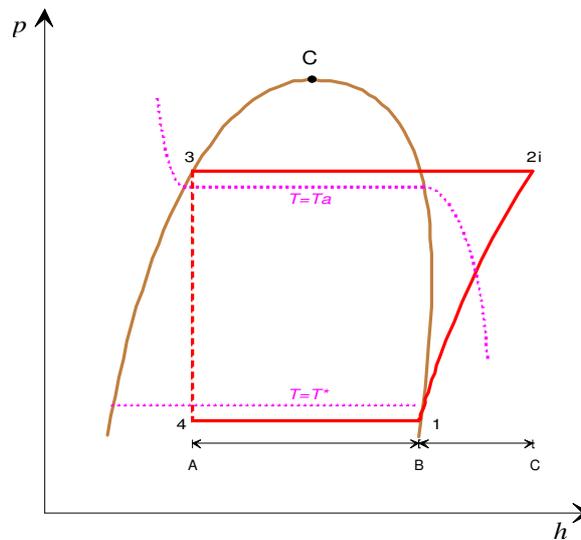


Figura 8.4: Ciclo frigorifero standard a compressione di vapore nel piano $p-h$.

Effetto delle irreversibilità

Nel ciclo reale, oltre alle irreversibilità presenti nell'organo di laminazione, saranno presenti effetti dissipativi anche negli altri componenti del ciclo. Le irreversibilità negli scambiatori di calore si traducono in cadute di pressione tra ingresso ed uscita ed hanno un impatto generalmente trascurabile sulle prestazioni. Le irreversibilità nel compressore, come è noto (v. Cap.4), fanno aumentare la potenza assorbita dallo stesso in ragione inversa al valore del rendimento isoentropico:

$$W'_{mp} = -G (h_{2r} - h_1) = -G \frac{(h_{2i} - h_1)}{\eta_c} \quad (8.12)$$

e conseguentemente il coefficiente di prestazione si modifica in

$$COP_f = \frac{W_{tf}}{|W'_{mp, reale}|} = \frac{(h_1 - h_4)}{(h_{2r} - h_1)} = \frac{(h_1 - h_4)}{(h_{2i} - h_1)} \eta_c \quad (8.13)$$

vale a dire, si riduce in ragione proporzionale al rendimento isoentropico del compressore stesso. Inoltre il fluido esce dal compressore a temperatura maggiore, vedi Fig.5. I valori della PMU e della PVU non vengono invece alterati.

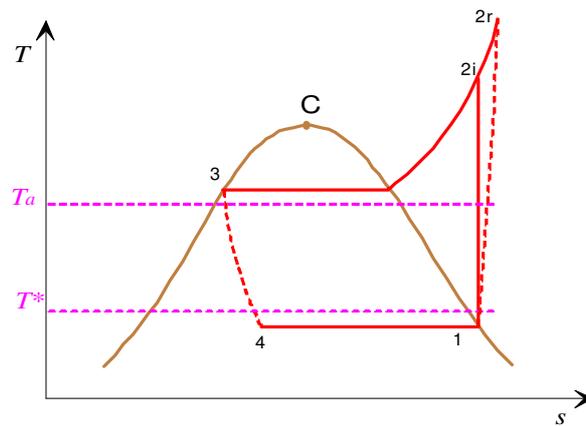


Figura 8.5: Ciclo frigorifero standard a compressione di vapore nel piano T - s con compressione reale (rendimento isoentropico del compressore minore di 1).

ESEMPIO 8-1 – Ciclo frigorifero standard a compressione di vapore.

Un ciclo frigorifero standard che opera con fluido R134a deve asportare la potenza di 5 kW da un serbatoio a $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$; l'ambiente si trova a 20° e si assume un $\Delta T = 15\text{ K}$ per entrambi gli scambiatori. Valutare il COP , la potenza meccanica assorbita, la PMU , la PVU e la portata massica di fluido necessaria nei due casi seguenti: a) compressione isoentropica; b) rendimento isoentropico di compressione pari a 0.75.

Per effetto dei salti di temperatura negli scambiatori si ha $T_1 = T_4 = -20\text{ }^{\circ}\text{C}$ e $T_3 = 35\text{ }^{\circ}\text{C}$

Le proprietà del fluido nei punti chiave del ciclo sono riportate nella seguente tabella

	Temp.	Pressione	Volume spec.	Entalpia	Entropia	Titolo
	C	MPa	m^3/kg	kJ/kg	$\text{kJ}/\text{kg}/\text{K}$	
1.	-20	0.1327	0.1474	386.6	1.741	1
2i.	43.2	0.887	0.02428	426	1.741	
2r.	55.8	0.887	0.02603	439.1	1.782	
3.	35	0.887	0.0008565	249	1.167	0
4.	-20	0.1327	0.05266	249	1.198	0.354

Notare che i punti 1 e 3 sono completamente determinati dal punto di vista termodinamico, dato che per essi si conoscono due proprietà di stato indipendenti; il punto 2i è determinato dalla pressione, che è uguale a quella del punto 3, e dal valore dell'entropia, che è uguale a quella del punto 1, determinate in precedenza. Il punto 2r è determinato dalla pressione e dall'entalpia, quest'ultima ottenibile dal valore del rendimento isoentropico.

$$h_{2r} = h_1 + \frac{(h_{2i} - h_1)}{\eta_c}$$

Infine il punto 4 è determinato dalla pressione (uguale a quella del punto 1) e dall'entalpia, che è uguale a quella del punto 3.

Nel caso a), la portata è data da

$$G = \frac{|W_{tf}|}{h_1 - h_4} = \frac{5}{386.6 - 249} = 0.036\text{ kg/s}$$

la portata in volume all'ingresso del compressore è data da

$$G_{v1} = G v_1 = 0.036 \cdot 0.1474 = 0.005 \text{ m}^3/\text{s}$$

la PMU e la PVU sono date da

$$PMU = \frac{1}{h_1 - h_4} = \frac{1}{386.6 - 249} = 0.0073 \text{ kg/kJ}$$

$$PVU = \frac{v_1}{h_1 - h_4} = 0.0073 \cdot 0.1474 = 0.0011 \text{ m}^3/\text{kJ}$$

ed il COP vale

$$COP_f = \frac{(h_1 - h_4)}{(h_{2i} - h_1)} = \frac{137.6}{39.4} = 3.49$$

la potenza meccanica assorbita è data da

$$|W'_{mp}| = \frac{W_{tf}}{COP_f} = \frac{5}{3.49} = 1.43 \text{ kW}$$

nel caso b) la portata, la PMU e la PVU rimangono inalterate mentre il COP diviene

$$COP_f = \frac{(h_1 - h_4)}{(h_{2i} - h_1)} \eta_c = 3.49 \cdot 0.75 = 2.62$$

e la potenza meccanica assorbita

$$|W'_{mp}| = \frac{W_{tf}}{COP_f} = 1.91 \text{ kW}$$

□

Pompe di calore

Le pompe di calore funzionano sullo stesso ciclo esposto in precedenza. Le uniche differenze consistono nel fatto che in questo caso la temperatura ambiente è la temperatura inferiore del ciclo e l'effetto utile è dato dalla cessione di calore alla sorgente calda. Pertanto, con riferimento alla Fig.4, il coefficiente di prestazione è dato da

$$COP_p = \frac{|W_{tc}|}{|W'_{mp}|} = \frac{q_{23}}{l'_{12}} = \frac{(h_2 - h_3)}{(h_2 - h_1)} \quad (8.14)$$

e va confrontato con il valore ideale dato da (v. Cap.6)

$$COP_{p,rev} = \frac{|W_{tc}|}{|W'_{mu}|} = \frac{T_C}{T_C - T_F} \quad (8.15)$$

I valori di PMU e PVU sono dati rispettivamente da

$$PMU = \frac{G}{W_{tc}} = \frac{1}{h_2 - h_3} \quad (8.16)$$

$$PVU = \frac{G_{v1}}{W_{tc}} = \frac{v_1}{h_2 - h_3} \quad (8.17)$$

Fluidi frigorigeni

Come in parte già accennato, un fluido frigorigeno deve possedere le seguenti caratteristiche:

- temperatura tripla inferiore alla temperatura della sorgente fredda;
- temperatura critica superiore alla temperatura della sorgente calda;
- basso valore di PVU nelle condizioni di impiego;
- elevato valore del COP nelle condizioni di impiego;
- bassa tossicità e infiammabilità;
- compatibilità chimica con i materiali ed i lubrificanti della macchina;
- bassa pericolosità per l'ambiente;
- pressioni di esercizio non troppo elevate né troppo basse;
- buone proprietà di scambio termico.

L'acqua (R-718) viene generalmente esclusa perché ha una temperatura tripla troppo elevata e una pressione troppo bassa alle temperature di esercizio, che potrebbe provocare infiltrazioni dall'esterno. In passato, si è fatto ampio ricorso all'ammoniaca (NH₃, R-717), ancora usata in qualche grande impianto industriale. Nei piccoli impianti, essa è stata abbandonata per la sua aggressività chimica, l'infiammabilità ed il potere irritante anche nel caso di piccole perdite. Anche i clorofluorocarburi e gli idroclorofluorocarburi (detti anche rispettivamente CFC e HCFC o Freon, marchio registrato della DuPont) hanno avuto largo impiego in passato e vengono oggi abbandonati per il loro elevato ODP (*ozone depletion potential*, potere distruttivo dello strato di ozono) dovuto alla presenza di cloro. Tra essi, sono stati particolarmente utilizzati l'R-12 e l'R-22. Questi fluidi vengono rimpiazzati dagli idrofluorocarburi (HFC), quali l'R-134a, attualmente utilizzato largamente nei frigoriferi domestici. Un altro fluido utilizzato correntemente nei frigoriferi domestici è l'isobutano (R-600a). In futuro, si prevede di passare anche ad altri idrocarburi, quali il propano (R-290) ed il pentano (C₅H₁₂, R-601). Inoltre prendono piede le miscele di due o più fluidi puri, quali R-407c (miscela ternaria di R-32, R-125 e R-134a).

La Tab.1 riporta per alcuni fluidi frigorigeni le pressioni di esercizio e la PVU valutate alle temperature di -20 °C e 35 °C. Da essa si nota che la PVU di R-12 e R-134a e propano è circa doppia di quella di R-22 e ammoniaca. Per contro, questi ultimi (ed anche il propano) lavorano a pressioni maggiori.

Fluido	Formula	Pressione a -20 °C, bar	Pressione a 35 °C, bar	ODP	GWP	PVU, m ³ /MJ
R-12	CCl ₂ F ₂	1.51	8.48	0.9	8500	0.997
R-22	CHClF ₂	2.45	13.6	0.05	1700	0.601
R-134a	CF ₃ CH ₂ F	1.33	8.87	0	1300	1.076
R-717 (ammoniaca)	NH ₃	1.9	13.5	0	<1	0.578
R-290 (propano)	C ₃ H ₈	2.4	12.2	0	3	0.945
R-600a (isobutano)	C ₄ H ₁₀	0.72	4.6	0	3	1.55
R-744 (anidr. carbonica)	CO ₂	19.7	80 (ipercrit.)	0	1	

Tabella 8.1: Caratteristiche di alcuni fluidi frigorigeni, valutate alle temperature di -20 e 35°C.

Tutti questi fluidi di nuova generazione hanno potere distruttivo dell'ozono (ODP) nullo, ma costituiscono lo stesso un pericolo ambientale per il loro contributo all'effetto serra (GWP, *global warming potential*), che per esempio vale 1300 per l'R-134a (per confronto, il GWP della CO₂ vale 1). Questo vuol dire, approssimativamente, che la rottamazione dell'impianto di condizionamento di un'autovettura (contenente 600 g di R134a), con conseguente dispersione in atmosfera del fluido, è equivalente a 650 kg di CO₂, ovvero alla quantità emessa dal motore della stessa auto in circa 4000 km.

Cenno a cicli frigoriferi più avanzati

I principali inconvenienti del ciclo frigorifero a semplice compressione, illustrato in precedenza, sono la elevata potenza meccanica richiesta e la elevata temperatura del fluido in uscita dal compressore che, nei casi estremi, può superare il limite di compatibilità con il lubrificante del compressore. Per ovviare a questi inconvenienti, si può ricorrere ad una *compressione interrefrigerata*, secondo le modalità illustrate nel Cap.4. Per migliorare ulteriormente le prestazioni, anche la laminazione può essere sdoppiata, a spese di una notevole complicazione del ciclo: dettagli su questo tipo di cicli (*a doppia compressione e doppia laminazione*) possono essere trovati sul testo di Anglesio o di Grazzini. Si possono infine usare, per elevati salti di temperatura, due *cicli frigoriferi in cascata*, operanti con differenti fluidi.

Per applicazioni semplici e compatte, tipicamente aeronautiche, si può utilizzare un *ciclo frigorifero ad aria*, che non è altro che un ciclo di Joule Brayton (v. Cap.7) operante in maniera inversa: per la refrigerazione, si sfrutta l'aria fredda uscente dalla turbina, e quindi si acquista energia termica nello scambiatore a bassa temperatura.

Infine, le tendenze di ricerca attuali portano a considerare l'uso di fluidi naturali e di basso impatto ambientale; il dibattito in merito è ancora aperto, ma uno dei possibili candidati è l'*anidride carbonica* (sigla R744) che, tutto sommato, ha un GWP molto inferiore a quello dei fluidi attualmente utilizzati. Dato che la temperatura critica della CO₂ è di 31 °C, in questo caso è spesso necessario che la trasformazione superiore del ciclo avvenga a *pressione ipercritica*; questi cicli possono arrivare ad operare a pressioni di 80 bar ed oltre, vedi Fig.6.

Per le bassissime temperature (sotto i 120 K) si adottano spesso il *ciclo Stirling inverso* e il *ciclo Gifford-McMahon*; dettagli su questi cicli possono essere facilmente reperiti su Internet.

Per concludere, una nota meriterebbero anche i vari *impianti di liquefazione dei gas*, quali aria e metano: il lettore interessato può trovare dettagli in merito sul testo di Grazzini e Milazzo, oltre che su Internet. Inoltre ci sono anche cicli frigoriferi basati su principi fisici diversi, quali l'effetto Peltier, i cicli termoacustici ed i cicli magnetotermici. Anche per questi il lettore interessato è indirizzato al testo di Grazzini e Milazzo.

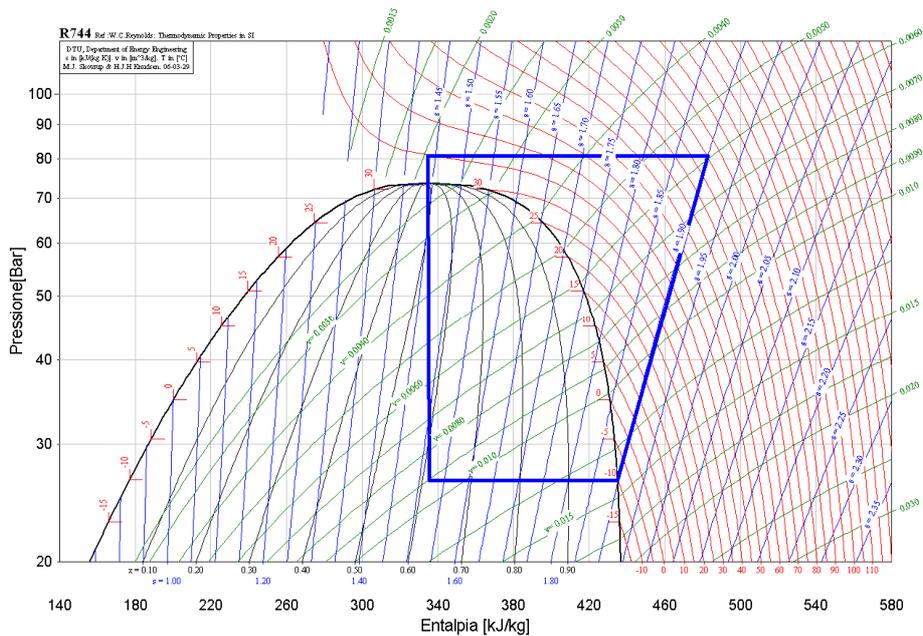


Figura 8.6: Ciclo ipercritico a CO₂ operante tra -10 e 35 °C.

Cenno al ciclo frigorifero ad assorbimento

Nel ciclo frigorifero precedentemente esposto, è necessaria una elevata potenza meccanica per la compressione del vapore. Illustriamo adesso il principio di funzionamento di un ciclo (detto ad *assorbimento*) in cui il consumo di energia meccanica è molto limitato e la macchina viene fatta funzionare prevalentemente con energia termica prelevata a temperatura superiore a quella ambiente.

Questo ciclo sfrutta una soluzione di due fluidi (allo stato attuale, ammoniaca in acqua, o acqua in bromuro di litio) in cui la solubilità varia con la temperatura.

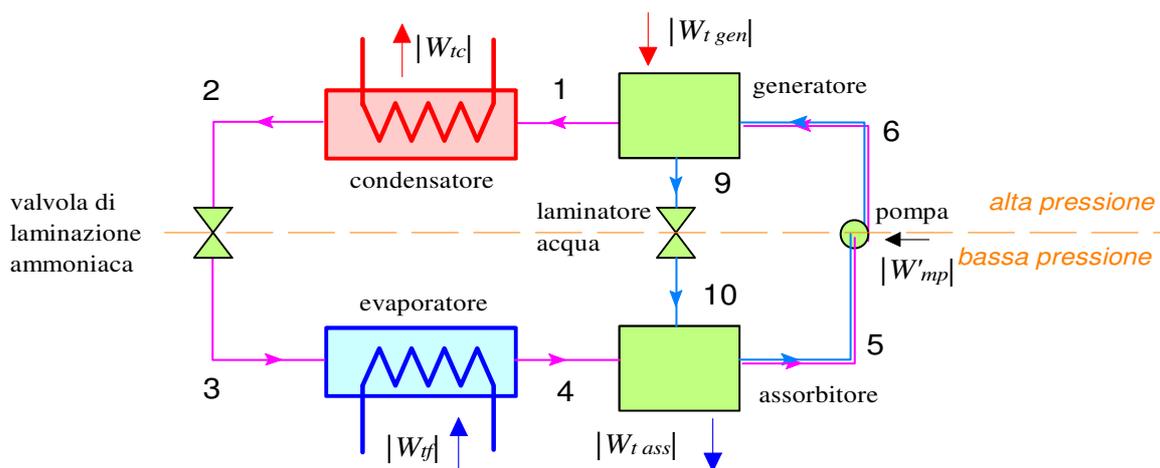


Figura 8.7: Ciclo frigorifero ad assorbimento.

Riferendosi allo schema di Fig.7, nel generatore la soluzione acqua-ammoniaca, riscaldata, libera ammoniaca gassosa ad alta pressione, assorbendo calore ad alta temperatura (intorno ai 100-130 °C). L'ammoniaca liberata viene condensata nel condensatore, dove cede calore, e successivamente laminata e fatta evaporare a bassa temperatura e pressione, sottraendo calore alla sorgente fredda (questa parte del ciclo, 1234, non differisce dal ciclo frigorifero standard). A questo punto l'ammoniaca gassosa viene miscelata nuovamente con l'acqua nell'assorbitore: in esso fluisce anche, previa laminazione, l'acqua impoverita di ammoniaca proveniente dal generatore. Nel processo di soluzione viene liberato calore, che deve essere ceduto all'esterno. Infine la soluzione acqua-ammoniaca, ricostituita, viene ripompata, allo stato liquido, nel generatore, chiudendo il ciclo. In questo processo di pompaggio, dato che il fluido è allo stato liquido, si assorbe una potenza meccanica molto piccola rispetto a quella che sarebbe necessaria per comprimere l'ammoniaca allo stato gassoso.

Il bilancio di energia applicato all'intero ciclo risulta in

$$|W_{tc}| + |W_{tass}| = |W_{tf}| + |W_{tgen}| + |W'_{mp}| \quad (8.18)$$

Il coefficiente di prestazione risulta in questo caso dato da

$$COP_{ass} = \frac{|W_{tf}|}{|W'_{mp}| + |W_{tgen}|} \quad (8.19)$$

ed ha valori tipici intorno a 0.5: vale a dire, visto che W'_{mp} è in genere trascurabile, la potenza termica necessaria è circa doppia di quella ottenuta per la refrigerazione. L'analisi dettagliata del ciclo, che in realtà include anche altri organi di rettificazione e recupero, richiede l'uso di diagrammi di stato per miscele bicomponenti ed esula dagli scopi di questa trattazione.

E' da notare che questo impianto può utilizzare il calore reflu di un impianto cogenerativo: in questo modo, tramite la cosiddetta *trigenerazione*, il calore reflu può essere utilizzato sia per il riscaldamento nei mesi invernali che il per condizionamento in quelli estivi.

Ciclo frigorifero e disponibilità (cenni)

Per concludere queste brevi note, appare utile riconsiderare, almeno in via qualitativa, il ciclo frigorifero sotto l'aspetto dell'analisi di disponibilità: il ciclo frigorifero trasferisce calore da una sorgente a bassa temperatura ad una ad alta temperatura, aumentando quindi la disponibilità di tale energia termica. Poichè la disponibilità non può essere creata, ma solo distrutta, è necessario apportare disponibilità da un'altra fonte: tale disponibilità viene infatti introdotta nel sistema sotto forma di lavoro meccanico nei cicli a compressione, e sotto forma di calore ad alta temperatura nel ciclo ad assorbimento.

BIBLIOGRAFIA

- R. Mastrullo, P. Mazzei, R. Vanoli, *Termodinamica per Ingegneri*, Liguori, cap.3.
- A. Cavallini, R. Mattarolo, *Termodinamica Applicata*, CLEUP, Padova, 1988, cap.12.
- P. Anglesio, *Elementi di Impianti Termotecnici*, Pitagora, Bologna, 1998, cap.4.
- G. Grazzini, A. Milazzo, *Tecnica del Freddo*, Esculapio, 2017.

ESERCIZI

ESERCIZIO 8.1

Un ciclo di refrigerazione utilizza il fluido R-12 per rimuovere 6 kW da un recipiente a bassa temperatura a -7°C ; la temperatura dell'ambiente è di 38°C .

Occorre notare che quando il calore è “rimosso” da un recipiente a bassa temperatura il fluido operativo deve essere ad una temperatura più bassa, mentre nel condensatore, quando il calore è trasferito dal fluido operativo all'ambiente, la temperatura del fluido deve essere superiore a quella dell'ambiente. Una differenza di temperatura di 3 K è quindi richiesta a questo scopo sia nell'evaporatore che nel condensatore. Il rendimento isoentropico del compressore vale $\eta_c = 0.75$ e il suo rendimento elettro-meccanico è pari a $\eta_m = 94\%$.

- a) Descrivere il ciclo in un diagramma pressione-entalpia;
 - b) Trovare il coefficiente di prestazione (COP);
 - c) Determinare la portata di fluido necessaria;
 - d) Determinare la potenza richiesta dalla rete per azionare il compressore.
- [b) 3.03; c) 0.056 kg/s; d) 2.11 kW]

Appunti ed Esercizi di *Fisica Tecnica*

Cap. 9. Cenni sui meccanismi di trasmissione del calore

Paolo Di Marco

Nicola Forgione

Versione 2020.00 – 18.12.2020

La presente dispensa è redatta ad esclusivo uso didattico per gli allievi dei corsi di studi universitari dell'Università di Pisa. L'autore se ne riserva tutti i diritti. Essa può essere riprodotta solo totalmente ed al fine summenzionato, non può essere alterata in alcuna maniera o essere rivenduta ad un costo superiore a quello netto della riproduzione. Ogni altra forma di uso e riproduzione deve essere autorizzata per scritto dall'autore.

L'autore sarà grato a chiunque gli segnali errori, inesattezze o possibili miglioramenti.

Introduzione

Nel capitolo 1 è stato introdotto il concetto di calore scambiato da un sistema. Il secondo principio della termodinamica asserisce, tra l'altro, che tale scambio avviene spontaneamente da un corpo a temperatura più alta ad uno a temperatura più bassa. La termodinamica tuttavia non ci dà nessuna ulteriore informazione: in particolare non spiega le modalità con cui tale scambio avviene, né determina il tempo necessario per lo scambio stesso. Tali problemi sono l'oggetto di una disciplina tecnica detta *Trasmissione del Calore*.

Lo scopo della Trasmissione del Calore è descrivere quantitativamente le modalità con cui la differenza di temperatura tra due corpi regola lo scambio di calore tra di essi. Queste conoscenze sono indispensabili per determinare il tempo in cui si compiono le trasformazioni termodinamiche: infatti in termodinamica lo scambio di calore e di lavoro dipende solo dalle trasformazioni del sistema e non dal tempo in cui il sistema evolve: a parità di trasformazioni, il calore ed il lavoro scambiati sono gli stessi sia che la evoluzione del sistema avvenga in un millisecondo che in un milione di anni. Le conoscenze di trasmissione del calore sono anche indispensabili per risolvere altri problemi tecnici: ad es. controllo di temperatura in impianti industriali, isolamento termico di macchinari ed edifici, raffreddamento efficiente delle macchine.

Una parte importante della trasmissione del calore riguarda lo studio dello scambio termico nella persona umana e delle condizioni ambientali per le quali l'uomo si trova in stato di benessere. Essa verrà trattata nel Cap.14.

E' necessario richiamare la definizione esatta di due grandezze che verranno usate nel seguito:

- *Flusso termico totale o potenza termica* (inglese: *heat rate* o *heat flow*) (W_T o \dot{Q}): il calore trasmesso attraverso una superficie per unità di tempo [W];
- *Flusso termico specifico o semplicemente flusso termico* (inglese: *heat flux*) (q''): il calore trasmesso attraverso una superficie per unità di tempo e di superficie [W/m²].

Sia il flusso termico che il flusso termico specifico sono caratterizzati anche da una direzione ed un verso, e sono quindi quantità vettoriali. In particolare, come vedremo meglio in seguito, esiste una certa analogia tra il flusso termico e la densità di corrente (quantità di carica elettrica che attraversa una superficie per unità di tempo e superficie).

Modalità di scambio termico

Da un punto di vista tecnico, le modalità con cui il calore si trasmette possono essere raggruppate in tre categorie fondamentali:

- **Conduzione**: la trasmissione di calore nei corpi materiali, non associata a spostamento di materia. E' l'unica modalità di trasmissione del calore possibile all'interno dei solidi opachi (ovvero che non vengono attraversati da radiazioni elettromagnetiche).
- **Convezione**: la trasmissione di calore nei corpi materiali, associata a spostamento di materia. In genere, è il meccanismo di scambio termico predominante nei fluidi.
- **Irraggiamento**: la trasmissione di calore associata alla propagazione della radiazione elettromagnetica. E' l'unica modalità di trasferimento di calore possibile nel vuoto.

Ad esempio, il calore si trasmette per conduzione all'interno di una barra di ferro, o di una parete di una casa. Alla superficie di tali corpi, che sono in generale lambiti da un fluido (l'aria) lo scambio termico avviene principalmente per convezione. Il sole trasmette invece

calore alla terra (e a noi stessi), attraverso lo spazio vuoto, per irraggiamento; ma riceviamo calore con tale modalità anche quando siamo di fronte ad un corpo molto caldo (un fuoco o la bocca di una fornace); basta tuttavia l'interposizione di uno schermo opaco per sopprimere tale trasferimento: non per nulla quando abbiamo caldo ci spostiamo all'ombra.

Dal punto di vista fisico, invece, le modalità fondamentali di scambio termico sono solo conduzione e irraggiamento, che avvengono secondo le leggi fisiche specifiche espresse nel seguito (postulato di Fourier, legge di Stefan-Boltzmann); la convezione è invece una modalità complessa di trasporto di energia, predicibile (in teoria) tramite le altre leggi fisiche, ma che non è regolata da alcuna legge fisica particolare.

La Tab.1 riassume le modalità di trasmissione del calore che sono possibili nei mezzi solidi, fluidi e nel vuoto.

	Conduzione	Convezione	Irraggiamento
Mezzi solidi	SI	NO	SI <i>se trasparenti</i>
Mezzi fluidi	SI	SI	SI <i>se trasparenti</i>
Vuoto	NO	NO	SI

Tabella 1: meccanismi di trasmissione del calore nei vari mezzi.

La conduzione

La conduzione può essere pensata come trasferimento di energia a livello microscopico per interazione tra le particelle più energetiche (dotate di energia vibrazionale) a quelle meno energetiche. In regime monodimensionale, in cui la temperatura T è funzione della sola x , il flusso termico (calore trasmesso per unità di tempo e superficie) che attraversa una qualunque superficie perpendicolare all'asse x è dato dal postulato di Fourier, che per una lastra piana è esprimibile come:

$$q''_x = -k \frac{dT}{dx} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \quad 9.1$$

notare il segno meno, in accordo con il secondo principio della termodinamica (il calore fluisce verso le zone più fredde).

Nel caso di andamento tridimensionale di temperatura il flusso termico è un vettore (caratterizzato quindi da direzione e verso oltre che dal modulo) esprimibile come

$$\vec{q}'' = -k \text{ grad } T \quad 9.2$$

Il fattore di proporzionalità k [W/m K] è detto conducibilità termica ed è una proprietà fisica della sostanza: le sostanze con alto valore di k sono buoni *conduttori termici* (ovvero trasmettono elevati flussi termici con piccoli gradienti di temperatura) e quelle con basso k sono detti *isolanti termici* e sono usati per coibentare termicamente le strutture. Il valore di k è in generale funzione della temperatura, ma tale dipendenza può essere trascurata nella maggior parte dei casi. Alcuni valori di k per i materiali più comuni sono riportati in Tab.2.

Analogia tra conduzione elettrica e termica

La Eq.9.2 presenta notevoli analogie con l'equazione della densità di corrente elettrica

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = -\sigma \text{grad } V \quad 9.3$$

entrambi i fenomeni sono infatti *fenomeni diffusivi*: la propagazione di una determinata quantità (calore o corrente nel nostro caso) è legata da una costante al gradiente della stessa quantità o di un'altra (temperatura o potenziale nel caso in questione). In particolare è da notare l'analogia tra la conducibilità elettrica σ e la conducibilità termica k : così come i buoni conduttori elettrici (alto valore di σ) consentono il passaggio di corrente con piccole differenze di potenziale, analogamente ci saranno buoni conduttori termici, caratterizzati da un alto valore di k che consentono il passaggio di calore con limitate differenze di temperatura. Al contrario, dovendo isolare termicamente un ambiente si ricorrerà ad isolanti termici (basso valore di k) così come per l'isolamento elettrico si ricorre a materiali con basso valore di σ .

Generalmente i buoni conduttori elettrici, ovvero i metalli, sono anche buoni conduttori termici e viceversa. Fanno eccezione alcuni materiali ceramici ed il diamante, che hanno buona conducibilità termica ma bassa conducibilità elettrica, che si usano quindi per ottenere un buon isolamento elettrico senza pregiudicare lo smaltimento termico.

Materiale	k [W/m K]
Diamante	2300
Rame	400
Alluminio	240
Acciaio al C	40 - 60
Acciaio inox	15
Nitrato di boro	15
Lana di vetro	0.04
Vetro	1 - 1.5
Mattoni	0.7
Acqua	0.6
Gas	0.02 - 0.2

Tabella 2: valori indicativi della conducibilità termica k per alcuni materiali.

Applicheremo ora, tramite alcuni esempi, il postulato di Fourier (Eq.9.2) per calcolare l'andamento della temperatura all'interno di un solido opaco, ove, per quanto detto in precedenza, l'unico meccanismo di scambio termico possibile è la conduzione. In questi esempi ci ricaveremo caso per caso il bilancio energetico del corpo nella particolare forma che ci sarà più utile. Il lettore più attento potrà verificare che tali bilanci energetici non sono che casi particolari di una equazione più generale, l'*equazione della conduzione o di Fourier*, la cui derivazione viene illustrata in Appendice 9-1.

E' necessario porre particolare attenzione nell'evitare di confondere il *postulato di Fourier*, Eq.9.2 con la *equazione di Fourier*, riportata in appendice 9-1, che invece non è altro che il bilancio di energia in un corpo solido all'interno del quale è applicabile il postulato di Fourier.

ESEMPIO 9.1 - Conduzione stazionaria in una lastra piana

Sia data una lastra piana di acciaio al C, di spessore $s = 3$ cm e superficie $A = 4$ m² (dato che l'altezza e la larghezza sono molto maggiori dello spessore, la temperatura si può considerare funzione della sola x). La lastra si trova in condizioni stazionarie con le due superfici rispettivamente a $T_1 = 300$ °C e $T_2 = 25$ °C. Determinare la potenza termica scambiata attraverso la lastra stessa.

Non è difficile convincersi che il flusso termico totale attraverso una qualunque superficie della lastra parallela alle facce deve essere costante. Infatti ogni sistema delimitato da due qualunque di tali superfici è in condizioni stazionarie e quindi, dato che siamo in assenza di lavoro, la potenza termica che entra da destra deve essere uguale a quello che esce da sinistra, ovvero

$$-k A \frac{dT}{dx} \Big|_{x=x_a} = -k A \frac{dT}{dx} \Big|_{x=x_b} \quad \forall x_a, x_b \Rightarrow \frac{dT}{dx} = \text{cost} = \frac{T_2 - T_1}{s}$$

dove si è sfruttato il fatto che in una lastra A non dipende da x . Conseguentemente (con k ricavato dalla Tab.2) si ha

$$W_T = -k A \frac{T_2 - T_1}{s} = 40 \cdot 4 \frac{300 - 25}{0.03} = 1.47 \text{ MW}$$

è da notare che il flusso termico totale è proporzionale alla differenza di temperatura tra le facce. Si può stabilire un'analogia tra una resistenza elettrica R ai cui capi ci sono le tensioni V_1 e V_2 , che è attraversata da una corrente I e la lastra in questione, ai cui capi ci sono le temperature T_1 e T_2 , che è attraversata da un flusso termico W_T . La "resistenza termica" si misura in [K/W] ed è data da

$$R_T = \frac{T_1 - T_2}{W_T} = \frac{s}{kA}$$

Come approccio alternativo si può considerare l'applicazione della equazione di Fourier al nostro problema, che porta a

$$\nabla^2 T = \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dT}{dx} = \text{cost}$$

da cui, moltiplicando per kA , si arriva alla formulazione da cui siamo partiti in questo esempio.

□

ESEMPIO 9.2 - Conduzione stazionaria in una parete cilindrica

Sia data una tubazione di rame, di spessore $s = 1$ mm, diametro esterno $D = 12$ mm e lunghezza $L = 0.4$ m. Il tubo si trova in condizioni stazionarie con le due superfici rispettivamente a $T_1 = 28$ °C e $T_2 = 25$ °C. Determinare la potenza termica scambiata attraverso il tubo.

Se si trascura il calore uscente dai due estremi del tubo, non è difficile convincersi che il flusso termico totale attraverso una qualunque superficie cilindrica interna al tubo e coassiale alle facce deve essere costante. Infatti ogni sistema delimitato da due qualunque di tali superfici è in condizioni stazionarie, e quindi, dato che siamo in assenza di lavoro, il calore che entra da destra deve essere uguale a quello che esce da sinistra. E' da notare che, a differenza del caso della lastra piana, il fatto che W_T sia costante non implica che q'' sia costante, perché le due superfici hanno area diversa. In termini matematici

$$W_T(r) = \text{cost} = W_T$$

$$q''(r) A(r) = W_T$$

$$2q''(r) \pi r L = W_T$$

$$r q''(r) = \frac{W_T}{2 \pi L}$$

e sfruttando il postulato di Fourier $q'' = -k \, dT/dr$

$$-r k \frac{dT}{dr} = \frac{W_T}{2 \pi L}$$

in definitiva si ottiene un problema differenziale del primo ordine

$$\begin{cases} \frac{dT}{dr} = -\frac{W_T}{2 \pi k r L} \\ T(r_1) = T_1 \end{cases}$$

la cui soluzione vale

$$T(r) = T_1 - \frac{W_T}{2 \pi k L} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$$

ovviamente il valore di W_T è ancora incognito, ma può essere determinato sfruttando la condizione non ancora utilizzata $T(r_2) = T_2$

$$W_T = 2 \pi k L \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

da cui, assunto $k = 400 \text{ W/m K}$ (vedi tabella 2) si ha

$$W_T = 2 \pi \cdot 400 \cdot 0.4 \frac{28 - 25}{\ln\left(\frac{6}{5}\right)} = 16.5 \text{ kW}$$

in questo caso la resistenza termica (definita come nell'esempio della lastra piana), vale

$$R_T = \frac{T_1 - T_2}{W_T} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2 \pi k L} = \frac{r_2 - r_1}{k A_m} \quad \text{dove}$$

$$A_m = 2\pi r_m L, \quad r_m = \frac{r_2 - r_1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

ed r_m è detto anche *raggio medio logaritmico*; per piccoli valori del rapporto tra spessore e raggio, coincide praticamente con il raggio medio aritmetico.

Molto spesso nelle corpi cilindrici, come le tubazioni, si fa riferimento al flusso termico per unità di lunghezza, q' [W/m], dato da

$$q' = \frac{W_T}{L} = 2\pi k \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = 41.35 \text{ kW/m}$$

Se il materiale fosse stato vetro ($k=1$ W/m K) anziché rame il calore scambiato sarebbe stato circa 400 volte minore: la verifica è lasciata per esercizio all'allievo.

In alternativa, l'applicazione della equazione di Fourier al nostro problema deve tener conto che il laplaciano va espresso in coordinate cilindriche, e porta a

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad r \frac{dT}{dr} = \text{cost}$$

che, una volta espressa opportunamente la costante, è analoga alla formulazione iniziale di questo esempio.

In definitiva, cosa distingue la conduzione in un guscio cilindrico da quella in una lastra piana? Il fatto che nel cilindro la superficie attraversata dal calore cresce con il raggio dello stesso, mentre nella lastra piana la superficie rimane costante. Ne segue che quando lo spessore della tubazione è piccolo rispetto al raggio, la variazione di superficie è trascurabile e si può utilizzare anche per i cilindri l'espressione più semplice valida per le lastre piane. Nella pratica, questo è del tutto accettabile per spessori minori di un decimo del raggio. L'allievo può verificare che, applicando l'espressione della lastra piana al caso in questione (utilizzando il valore dell'area della superficie esterna della tubazione), si ottiene una potenza termica pari a 18.1 kW.

□

ESEMPIO 9.3 - Conduzione stazionaria con generazione di calore: filo percorso da corrente elettrica

Un conduttore di rame di sezione cilindrica, con diametro $D = 2$ mm, lunghezza $L = 2$ m e conducibilità termica $k_c = 400$ W/(m K), è percorso da una corrente elettrica di densità $j = 15$ A/mm². La resistività elettrica del rame vale $\rho_e = 17.2$ nΩm. Il conduttore è ricoperto da un isolante plastico di spessore $s = 0.5$ mm e conducibilità termica $k_i = 0.5$ W/(m K). La superficie esterna dell'isolante si trova alla temperatura di $T_e = 60$ °C. Si determini:

1. la temperatura all'interfaccia rame-isolante;
2. la distribuzione di temperatura al suo interno del rame.

Supponiamo che la temperatura dipenda unicamente dal raggio e non dalla coordinata assiale, il che è giustificato dal fatto che il corpo ha una lunghezza molto maggiore del diametro e la quantità di calore uscente dalle sue basi è trascurabile.

La prima parte del problema può essere facilmente risolta aiutandosi con il risultato del precedente ESEMPIO 9.2. Infatti, detti r_i ed r_e i raggi interno ed esterno dello strato isolante

$$T_i - T_e = W_T R_T = W_T \frac{\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}{2\pi k_i L}$$

La potenza termica dissipata è facilmente calcolabile come

$$W_T = R_e I^2 = \rho_e \frac{L}{A} j^2 A^2 = \rho_e j^2 V = \rho_e j^2 \pi r_i^2 L = 17.2 \cdot 10^{-9} \cdot (15 \cdot 10^6)^2 \cdot \pi \cdot 0.001^2 \cdot 2 = 24.3 \text{ W}$$

Sostituendo nella precedente si ha

$$T_i = T_e + \frac{W_T}{2\pi k_i L} \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right) = T_e + \frac{\rho_e j^2 \cancel{\pi} r_i^2 \cancel{L}}{2 \cancel{\pi} k_i \cancel{L}} \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right) = 61.570^\circ\text{C}$$

Per quanto riguarda la temperatura nel rame, scriviamo il bilancio di energia per un cilindro di raggio generico r centrato rispetto all'asse imponendo che, a regime, la potenza dissipata per effetto Joule sia pari a quella asportata per conduzione alla superficie laterale del cilindro:

$$q'' A_L = W_T(r) = \rho_e j^2 \pi r^2 L$$

$$-k_c \frac{dT}{dr} 2\pi r L = \rho_e j^2 \pi r^2 L$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\rho_e j^2}{2k_c} r$$

Quest'ultima costituisce una equazione differenziale lineare del primo ordine, che deve essere risolta associandola alla condizione al contorno $T(r_i) = T_i$. Notiamo per inciso (e con sollievo, viste le ipotesi fatte) che l'andamento di temperatura non dipende dalla lunghezza del filo, L . Notiamo anche che in questo caso il flusso termico non è costante, ma cresce proporzionalmente al raggio.

Separando le variabili e procedendo con l'integrazione (dal raggio generico r al raggio esterno del conduttore r_i) abbiamo

$$\int_{T_i}^T dT = - \int_r^{r_i} \frac{\rho_e j^2}{2k_c} r dr$$

$$T - T_i = \frac{\rho_e j^2}{4k_c} (r_i^2 - r^2)$$

E quindi la temperatura nel cilindro ha andamento parabolico. In particolare, il valore massimo sull'asse del cilindro vale

$$T_c = T_i + \frac{\rho_e j^2}{4k_c} r_i^2 = 61.572^\circ\text{C}$$

Il suo valore differisce di pochissimo da T_i data la grande conducibilità termica del rame. Notiamo infine che definendo il flusso termico lineare come

$$q' = \frac{W_T}{L} = \rho_e j^2 \pi r_i^2$$

L'espressione della temperatura massima nel cilindro di rame possa essere scritta come

$$T_c = T_i + \frac{q'}{4\pi k_c}$$

e che quindi essa dipende unicamente dal valore del flusso termico lineare e non dal raggio del conduttore di rame.

Si potrebbe pensare che lo strato esterno di isolante di un conduttore, necessario dal punto di vista elettrico, sia un ostacolo dal punto di vista termico in quanto fa aumentare la temperatura del conduttore stesso. Mentre questo è sicuramente vero nel caso in questione, in cui la temperatura esterna dell'isolante è imposta, non è necessariamente così nel caso in cui all'esterno dell'isolante ci sia un fluido che asporta calore per convezione. In questo caso, infatti, per particolari valori dello spessore, l'aumento di resistenza termica dovuto allo spessore di isolante è più che compensato dall'aumento della superficie di scambio convettiva esterna. Si veda in merito l'appendice 9-4 che tratta il *raggio critico di isolamento*.



L'irraggiamento

Nell'irraggiamento, il calore è trasportato dalle onde elettromagnetiche che tutti i corpi (solidi, liquidi o gassosi) emettono ed assorbono come risultato di cambiamenti nella configurazione elettronica degli atomi di cui sono composti.

La *radiazione elettromagnetica* può essere vista sotto il duplice aspetto di fenomeno *ondulatorio* (sistemi di campi elettromagnetici variabili che si propagano nello spazio) o *particellare* (propagazione di particelle, dette *fotoni*). Se si assume il modello ondulatorio, la radiazione elettromagnetica viene emessa in uno spettro continuo di lunghezze d'onda che vanno dalle onde radio (lunghezza d'onda da 10 km a 1 m) fino alla radiazione gamma (lunghezze d'onda di 10^{-4} nm). Lo *spettro visibile* è quella sezione dello spettro elettromagnetico a cui è sensibile la retina dell'occhio umano (circa 400÷700 nm). Le radiazioni di lunghezza d'onda immediatamente al di sotto della finestra visibile sono dette raggi *infrarossi*; quelle immediatamente al di sopra *ultravioletti*.

La *radiazione termica* è localizzata principalmente nelle lunghezze d'onda dell'*infrarosso*. Nonostante ciò, se un corpo viene riscaldato a temperatura sufficiente, esso emette una frazione significativa di energia anche alle lunghezze d'onda dello spettro visibile (sole, filamento delle lampadine). Come già accennato, visto che le onde elettromagnetiche si propagano anche nel vuoto, questa è l'unica modalità di trasmissione di calore possibile nel vuoto stesso.

Oltre ad emettere radiazione, i corpi interagiscono con le radiazioni incidenti su di loro ed emesse dagli altri corpi circostanti. Vediamo le modalità di tali interazioni.

Radiazione incidente

La radiazione incidente su di una superficie per unità di area e di tempo è detta *irradiazione* e si indica generalmente con G [W/m^2]. Quando la radiazione incide su di una superficie parte di essa viene assorbita, parte riflessa e la restante parte, se c'è, viene trasmessa (v. Fig.1). La somma delle frazioni di radiazione assorbita ($a \equiv G_{\text{ass}} / G$), riflessa ($r \equiv G_{\text{rif}} / G$) e trasmessa ($t \equiv G_{\text{tr}} / G$) è unitaria ($a + r + t = 1$). I tre rapporti prendono il nome di coefficiente di assorbimento (a), riflessione o rinvio (r) e trasparenza (t). Nei *corpi opachi* il coefficiente di trasparenza è nullo, come avviene frequentemente, per spessori anche modesti, nei materiali solidi. In questo caso la radiazione può essere solo assorbita e/o riflessa.

Quando in un corpo opaco si annulla anche il coefficiente di riflessione, il coefficiente di assorbimento è unitario; tutta la radiazione che colpisce il corpo viene assorbita: il corpo viene detto *corpo nero*.

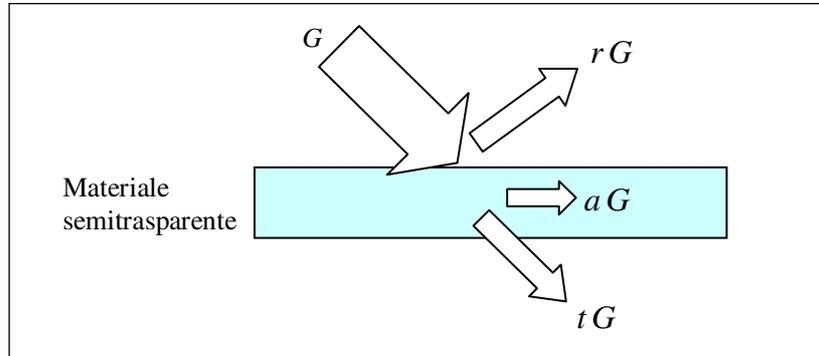


Figura 1: interazione della radiazione con un corpo materiale.

I coefficienti di assorbimento e di rinvio possono variare con la lunghezza d'onda: questo rende ragione del diverso *colore* delle superfici: una superficie verde rinvia la maggior parte della radiazione verde incidente, mentre assorbe le radiazioni rosse e blu.

Radiazione emessa: leggi di Planck, Stefan-Boltzmann e Kirchoff.

Benché si tratti di un'idealizzazione, mai perfettamente realizzata in natura, il corpo nero è un modello di riferimento per analizzare anche la potenza emessa per radiazione.

Un corpo nero infatti, oltre ad assorbire tutta la radiazione incidente, indipendentemente dalla lunghezza d'onda o dalla direzione, *emette* anche una potenza termica radiante per unità di area.

Se si vogliono avere informazioni, oltre che sull'energia emessa, anche sulla lunghezza d'onda delle radiazioni elettromagnetiche emesse dal corpo, bisogna esaminare il *potere emissivo monocromatico del corpo nero* ($E_{n\lambda}$). Esso rappresenta la potenza emessa dal corpo nero alla temperatura T per unità di superficie e per unità di lunghezza d'onda intorno a λ .

Il suo valore è dato dalla *legge di Planck* (1900):

$$E_{n\lambda} = \frac{C_1}{\lambda^5 \left[e^{(C_2/\lambda T)} - 1 \right]} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \mu\text{m}} \right] \quad 9.4$$

dove $C_1 = 3.742 \cdot 10^8 \text{ W } \mu\text{m}^4/\text{m}^2$ e $C_2 = 1.439 \cdot 10^4 \text{ } \mu\text{m K}$. In Fig. 2 è riportata la variazione di $E_{n\lambda}$ con la lunghezza d'onda per quattro differenti valori della temperatura, detto *spettro di emissione* del corpo nero.

Se invece si vuole esaminare l'energia emessa dal corpo nero a tutte le lunghezze d'onda, bisogna considerare il *potere emissivo totale del corpo nero* (E_n). Ovviamente, l'integrale su tutto lo spettro delle lunghezze d'onda del potere emissivo monocromatico del corpo nero (Eq. 9.5) fornirà come risultato il potere emissivo totale, che è dato dalla *legge di Stefan-Boltzmann* (1879):

$$E_n = \sigma T^4 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \quad 9.5$$

dove $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}^4)$ è la *costante di Stefan-Boltzmann* e T la temperatura assoluta della superficie, in kelvin.

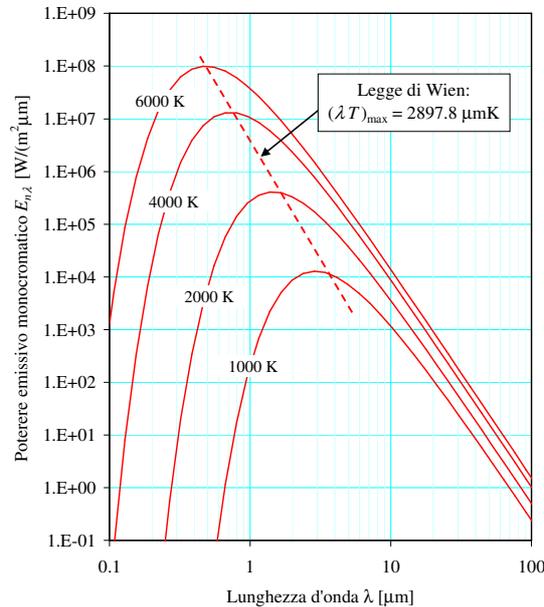


Figura 2: potere emissivo monocromatico del corpo nero per alcune temperature.

La forma della curva di figura 2 rende ragione del fatto che un corpo riscaldato emette luce visibile di colore che varia con la temperatura: infatti, al crescere della temperatura il massimo della lunghezza d'onda della radiazione emessa si sposta dall'infrarosso (in cui la radiazione non è visibile al nostro occhio) nel visibile, a partire dal rosso, poi dal giallo ed infine dal blu. La posizione del massimo si può ottenere derivando la legge di Planck ed è data dalla cosiddetta *legge di Wien*, $\lambda T = 2897.8 \mu\text{m K}$. Questo rende ragione anche del fatto che le stelle hanno colore diverso a seconda della loro temperatura superficiale: il nostro Sole, la cui superficie è a circa 6000 K ha il massimo di emissione a 500 nm, ovvero nel giallo.

Si può dimostrare che, data una certa temperatura, il corpo nero presenta la massima emissione per radiazione tra tutti i corpi. Un corpo *non* nero alla stessa temperatura presenta un potere emissivo monocromatico:

$$E_{\lambda} = \varepsilon(\lambda) E_{n\lambda} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \mu\text{m}} \right] \quad 9.6$$

dove ε (epsilon) è un parametro caratteristico della superficie, detto *emissività*, il cui valore è compreso tra 0 ed 1 e dipende generalmente da vari fattori, tra cui in particolare la lunghezza d'onda della radiazione emessa od assorbita.

La *legge di Kirchoff* asserisce (in forma semplificata) che per tutti i corpi si ha $\varepsilon = a$. In pratica questo vuol dire che i buoni assorbitori sono anche buoni emettitori: in particolare il corpo nero, oltre ad essere un perfetto assorbitore, è anche un perfetto emettitore. Inoltre essa implica che le superfici opache possono essere caratterizzate tramite un unico parametro ovvero l'*emissività* (essendo per tali superfici $\varepsilon = a$, $t = 0$, $r = 1 - \varepsilon$).

Infine, per una particolare classe di corpi detti *corpi grigi*, il coefficiente di assorbimento a (e quindi anche la emissività) *sono indipendenti dalla lunghezza d'onda*.

Scambio termico per irraggiamento

Lo scambio netto di calore per irraggiamento tra due corpi è il risultato del bilancio tra la radiazione emessa dall'uno che viene assorbita dall'altro e viceversa; la sua determinazione coinvolge la valutazione dei *fattori di vista*, che dipendono puramente dalle proprietà geometriche delle superfici coinvolte, e la conoscenza delle caratteristiche di assorbimento e/o riflessione dei due corpi (proprietà radiative). Il fattore di vista tra una superficie i ed una superficie j , $F_{i \rightarrow j}$, è la frazione della radiazione emessa dalla superficie i che incide direttamente sulla superficie j . I fattori di vista, per particolari geometrie, sono riportate in forma analitica in tabelle o in forma grafica.

Una volta introdotti i fattori di vista, nel caso di due corpi neri (i e j) risulta immediato il calcolo della potenza termica *netta* trasmessa per irraggiamento, data dalla relazione:

$$W_T = F_{i \rightarrow j} A_i \sigma (T_i^4 - T_j^4) \quad [W] \quad 9.7$$

I fattori di vista godono di alcune proprietà, tra cui in particolare quella di reciprocità per cui si ha $A_i F_{i \rightarrow j} = A_j F_{j \rightarrow i}$

Nel caso di superfici non nere il calcolo risulta notevolmente più complesso a causa dei *rinvii*, ovvero dell'energia emessa dalle superfici che, per effetto della riflessione da parte delle altre superfici, torna a colpire la superficie di partenza (per i corpi neri questo problema non si pone in quanto essi hanno coefficiente di riflessione r nullo). Una classe di superfici non nere particolarmente utili nelle applicazioni pratiche sono le superfici *grigie* (proprietà radiative indipendenti dalla lunghezza d'onda), *diffondenti* (proprietà radiative indipendenti dalla direzione) ed *opache* ($t = 0$). In Tab.3 sono riportate le formule per il calcolo della potenza termica scambiata tra due *superfici grigie, diffondenti ed opache* (è necessario che presentino *tutte* le caratteristiche suddette) in quattro differenti configurazioni geometriche.

Ci limiteremo nel seguito a considerare il caso semplice di un corpo relativamente piccolo a temperatura T_1 contenuto in una grande cavità a temperatura T_2 (es. il filamento di una lampadina contenuto in una stanza) il flusso termico scambiato per irraggiamento è dato da (v. Tab. 3):

$$W_T = \varepsilon_1 A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad [W] \quad 9.8$$

dove ε_1 ed A_1 sono riferiti alla superficie del corpo interno alla cavità. E' da notare che la legge di trasmissione del calore per irraggiamento non è lineare nella temperatura, e questo complica molto i relativi calcoli.

Si può ricondurre in forma approssimata la legge precedente ad una lineare

$$W_T = h_{cR} A_1 (T_1 - T_2) \quad , \quad h_{cR} = \varepsilon_1 \sigma (T_1 + T_2) (T_1^2 + T_2^2) \quad 9.9$$

dove si nota che dipende anche dalla temperatura. In geometrie più complesse, h_{cR} dipende ovviamente anche dai fattori di vista, v. Eq.9.7.

La *resistenza termica per irraggiamento* vale quindi

$$R_T = \frac{1}{h_{cR} A_1} \quad 9.10$$

In generale quando è presente convezione forzata, il calore trasmesso per irraggiamento è trascurabile per temperature delle superfici inferiori a 500 °C. In caso di modalità di convezione scarsamente efficienti, l'irraggiamento acquista importanza: ad esempio un normale termosifone domestico emette circa il 30% del calore per irraggiamento ed il rimanente 70% per convezione. In una stanza dalle pareti più fredde (es. perché esposta a nord), a parità di temperatura dell'aria, abbiamo più freddo a causa dell'irraggiamento tra il nostro corpo ed i muri.

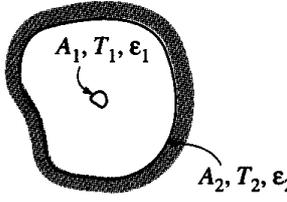
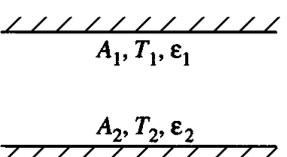
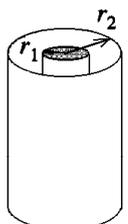
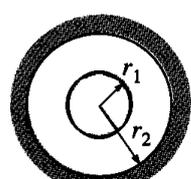
<p>Piccolo oggetto in una grande cavità</p> 	$\frac{A_1}{A_2} \approx 0$ $F_{12} = 1$	$W_t = A_1 \sigma \epsilon_1 (T_1^4 - T_2^4)$
<p>Piastre parallele infinitamente larghe</p> 	$A_1 = A_2 = A$ $F_{12} = 1$	$W_t = \frac{A \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1}$
<p>Cilindri concentrici infinitamente lunghi</p> 	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1}{r_2}$ $F_{12} = 1$	$W_t = \frac{A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)}$
<p>Sfere concentriche</p> 	$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$ $F_{12} = 1$	$W_t = \frac{A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}$

Tabella 3: potenza termica scambiata tra due superfici grigie diffondenti ed opache in alcune particolari configurazioni.

ESEMPIO 9.4 - Irraggiamento

Il filamento di una lampadina ha una superficie $A = 15.7 \text{ mm}^2$ ed una emissività $\varepsilon = 0.9$. Esso è contenuto in un globo di vetro di superficie molto maggiore che si trova alla temperatura di $80 \text{ }^\circ\text{C}$. Dentro il globo è stato fatto il vuoto. Determinare la potenza elettrica che è necessario fornire al filamento perché esso si mantenga alla temperatura di $2700 \text{ }^\circ\text{C}$.

📄 *La soluzione è riportata nel file C9LAMP.XLS*

Non essendoci alcun mezzo fisico interposto tra il filamento ed il vetro, l'unica modalità di scambio termico possibile è l'irraggiamento. Essendo il filamento di superficie molto più piccola del suo contenitore, il problema si risolve con la equazione:

$$W_T = \varepsilon_f A_f \sigma (T_f^4 - T_v^4)$$

dove gli indici f e v si riferiscono rispettivamente al filo ed al vetro. Quindi

$$W_T = 0.91 \cdot 15.7 \cdot 10^{-6} \cdot 5.67 \times 10^{-8} (2973^4 - 353^4) = 63 \text{ W}$$

Notare che in questo caso è *indispensabile* esprimere le temperature in kelvin. Da rimarcare anche che il risultato è poco sensibile al valore della temperatura del vetro (a causa della presenza delle quarte potenze).

□

La convezione

La convezione (dal latino *conveho*, "trasporto insieme") è la modalità di scambio termico che si ha alla superficie di un solido lambito da un fluido per l'effetto combinato della conduzione nel fluido e del trasporto di energia associato allo spostamento di materia, dovuto al moto del fluido stesso. E' da notare che perché si abbia convezione è *necessario che il fluido sia in moto*: nei fluidi in quiete la trasmissione del calore avviene per conduzione (ed irraggiamento se il fluido è trasparente).

Dal punto di vista pratico la convezione può essere classificata in

- *Convezione naturale*: quando il moto del fluido è dovuto alle differenze di densità indotte dalle differenze di temperatura (ad esempio, un fluido più caldo, essendo più leggero, tende generalmente a salire): è il caso ad esempio dell'acqua in una pentola posta sul fuoco, o dell'aria sull'asfalto caldo;
- *convezione forzata*: quando il moto relativo tra il fluido e la superficie è indotto dall'esterno tramite appositi organi (in genere, pompe o ventilatori);

ed, indipendentemente, anche in:

- *convezione interna*: quando il fluido scorre internamente ad un condotto (in genere una tubazione) in modo tale che la presenza della parete provoca effetti sul moto dell'intero fluido;
- *convezione esterna*: quando il fluido lambisce dall'esterno un oggetto (es. l'ala di un aereo, la pala di una turbina), ed, a sufficiente distanza da esso, non risente dell'influenza della parete stessa.

Inoltre la convezione, sia forzata che naturale, può essere *monofase* o *con cambio di fase*: quando il fluido cambia fase (evapora o condensa) a contatto della superficie.

Per calcolare il flusso termico trasmesso per convezione è necessario risolvere contemporaneamente le equazioni differenziali del moto (di Navier-Stokes) e del trasporto di energia nel fluido: un problema matematico formidabile, che a tutt'oggi è stato risolto solo in pochi casi semplici. Pertanto si ricorre generalmente a determinazioni sperimentali.

Il flusso termico per convezione è esprimibile mediante l'espressione *empirica* (anch'essa dovuta originariamente a Fourier, che sviluppò una precedente osservazione di Newton):

$$q'' = h_c (T_s - T_r) \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \quad 9.11$$

dove T_s rappresenta la temperatura della superficie. T_r è invece un'opportuna temperatura di riferimento del fluido: più precisamente, in caso di convezione *esterna*, T_r è data dal valore asintotico che la temperatura raggiunge a sufficiente distanza dalla superficie e che non è influenzato dalla presenza della superficie stessa; in caso di convezione *interna* T_r è la cosiddetta *temperatura di miscela* (ovvero un'opportuna media della temperatura nella sezione trasversale del condotto, che ne conserva il contenuto medio entalpico).

Nella Eq.9.11 si considera positivo il flusso termico *uscende* dalla superficie. Per uniformarsi alle convenzioni adottate in termodinamica, ovvero che il calore è positivo quando *entra* nel sistema, in alcuni casi è necessario aggiungere un segno negativo nella Eq.9.11 (in particolare, quando il sistema è costituito dalla parete solida e l'esterno dal liquido che lo lambisce).

Il coefficiente h_c [$\text{W}/\text{m}^2 \text{K}$], indicato talvolta anche con α , è detto *coefficiente di convezione*, e (al contrario di k) *non è solo una proprietà del fluido*: esso è un coefficiente empirico che incorpora gli effetti dovuti alla natura del fluido, al campo di velocità in prossimità della superficie, alla geometria del sistema. Quanto più h_c è elevato, tanto maggiore è lo scambio termico convettivo (ovviamente, a parità di differenza di temperatura).

Riflettendo attentamente, ci si può rendere conto che l'Eq.9.11, ben lungi dall'essere una legge fisica, è semplicemente la definizione di h_c

Noi tutti sappiamo per esperienza che *in generale* lo scambio termico in convezione forzata (e quindi il valore di h_c) è maggiore che in convezione naturale (per questo soffiato sulla minestra e la rimescoliamo col cucchiaino per raffreddarla) e che i liquidi asportano calore per convezione meglio dei gas (per questo stiamo bene in aria a 20°C e abbiamo freddo se immersi in acqua alla stessa temperatura). Alcuni valori indicativi di h_c per i casi più comuni sono riportati in Tabella 4.

	Liquidi	Gas
Convezione naturale	50 - 2 000	2 - 25
Convezione forzata	100 - 20 000	25 - 250
Convezione con cambio di fase (ebollizione, condensazione)	2 500 - 100 000	

Tabella 4: valori indicativi di h_c [$\text{W}/\text{m}^2 \text{K}$] per i casi più comuni.

Determinazione più accurata del coefficiente di scambio termico convettivo

Una determinazione più accurata di h_c si effettua in genere utilizzando le cosiddette *correlazioni di scambio termico convettivo*: esse si trovano in gran numero sui manuali di scambio termico, e maggiori dettagli su questa procedura sono riportati in Appendice A9-6.

ESEMPIO 9.5 – Valutazione della temperatura superficiale di un corpo.

Una stufa avente superficie esposta all'aria $A = 1.5 \text{ m}^2$ dissipa nell'ambiente esterno una potenza termica $W_t = 0.8 \text{ kW}$. La stufa è circondata da aria calma, alla temperatura $T_a = 20 \text{ °C}$, per cui si può stimare un coefficiente di convezione naturale $h_c = 10 \text{ W/m}^2 \text{ K}$. Valutare la temperatura della superficie della stufa.

Il problema si risolve semplicemente applicando l'Eq.9.11

$$q'' = h_c (T_s - T_a) \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$$

da cui, considerando ai valori assoluti per liberarci dei problemi di segno

$$\begin{aligned} |W_t| &= |q''| A = h_c A (T_s - T_a) \\ T_s &= \frac{|W_t|}{h_c A} + T_a = \frac{800}{10 \cdot 1.5} + 20 = 73 \text{ °C} \end{aligned}$$

Da notare che la temperatura della superficie della stufa eccede quella di sicurezza per un contatto accidentale, per cui la stessa andrebbe protetta opportunamente. L'allievo può verificare che in caso di convezione forzata ($h_c = 100 \text{ W/m}^2 \text{ K}$) tale temperatura si ridurrebbe notevolmente.

Per completezza, aggiungiamo che non abbiamo considerato esplicitamente il contributo dello scambio termico dovuto all'irraggiamento (v. paragrafo successivo) che può essere molto significativo. Di esso si tiene in genere conto in modo semplificato maggiorando opportunamente il coefficiente di convezione.

Analogamente a quanto fatto per la conduzione negli Esempi 2-1 e 2-2, possiamo introdurre anche *una resistenza termica convettiva*, data da

$$R_T = \frac{T_s - T_a}{W_T} = \frac{1}{h_c A}$$

□

ESEMPIO 9.6 – Irraggiamento e convezione combinati

Una termocoppia è situata sull'asse di un condotto metallico in cui scorre aria a $T_a = 300 \text{ °C}$, per misurarne la temperatura. Il rivestimento della termocoppia ha una emissività $\varepsilon = 0.9$. Le pareti della tubazione si trovano alla temperatura $T_p = 600 \text{ °C}$. Il coefficiente di convezione tra l'aria e la termocoppia vale $\alpha = 200 \text{ W/m}^2 \text{ K}$. Determinare la temperatura misurata dalla termocoppia.

 *La soluzione è riportata nel file C2TCMEAS.XLS*

Dato che la termocoppia è a regime, il suo scambio termico globale deve essere nullo. In particolare, essa riceve calore per irraggiamento dalle pareti calde della tubazione e lo cede per convezione all'aria circostante. Detta quindi T la temperatura della termocoppia, si ha

$$q''_{irr} + q''_{conv} = 0$$

ed essendo la termocoppia stessa assimilabile ad un corpo molto piccolo contenuto entro uno molto grande (vedi Eq.9.8)

$$\varepsilon \sigma (T^4 - T_p^4) + h_c (T - T_a) = 0$$

Il valore della temperatura della termocoppia si ottiene quindi risolvendo una equazione di quarto grado. Dato che essa non è risolvibile in forma chiusa, si può utilizzare un risolutore (es. tipo quelli implementati sulle calcolatrici portatili, od il risolutore di EXCEL) oppure il metodo cosiddetto di *tentativo ed errore*, illustrato nel seguito.

a) Si riarrangia l'equazione precedente nella forma:

$$h_c (T - T_a) = \varepsilon \sigma (T_p^4 - T^4)$$

b) Si stima un valore di tentativo, ad esempio $T^* = T_a$

c) Si sostituisce il valore di T^* a T nel membro destro

d) Si ottiene un nuovo valore di tentativo tramite

$$T^*_i = T_a + \frac{\varepsilon \sigma}{h_c} (T_p^4 - T^{*4}_{i-1})$$

Si procede alternando c) e d) fino a quando le due stime successive non differiscono di una quantità trascurabile. I successivi valori ottenuti sono riportati nella tabella seguente.

i	$T^*(i)$ (K)	$T^*(i+1)$ (K)
1	573.00	693.76
2	693.76	662.14
3	662.14	672.21
4	672.21	669.16
5	669.16	670.10
6	670.10	669.81
7	669.81	669.90
8	669.90	669.87
9	669.87	669.88
10	669.88	

Si vede che il metodo converge in poche iterazioni. Tale metodo è di semplice applicazione e generalizzabile a molti altri problemi. Tuttavia la convergenza non è sempre assicurata (provare ad esempio con $h_c = 10 \text{ W/m}^2 \text{ K}$).

Si nota anche che la temperatura misurata dalla termocoppia differisce sensibilmente da quella effettiva dell'aria. Questo esempio illustra come le misure di temperatura possano essere notevolmente falsate in presenza di irraggiamento con superfici più calde o più fredde del fluido.

□

Convezione e conduzione combinate – scambio termico attraverso una parete

Nei casi tecnici rilevanti, la convezione avviene in prossimità di una parete lambita da un fluido, ed è quindi spesso associata alla conduzione all'interno della parete stessa. Tale modalità composta di scambio termico è illustrata nell'esempio seguente.

ESEMPIO 9.7 - Lastra piana lambita da due fluidi.

Sia data una lastra piana di vetro ($k = 1.5 \text{ W/m K}$), di spessore $s = 5 \text{ mm}$ e superficie $A = 0.5 \text{ m}^2$ (dato che l'altezza e la larghezza sono molto maggiori dello spessore, la temperatura si può considerare funzione della sola x). La lastra si trova in condizioni stazionarie; sul lato sinistro è lambita da acqua a $T_1 = 50 \text{ °C}$ e coefficiente di convezione $h_{c1} = 250 \text{ W/m}^2 \text{ K}$, e su quello destro da aria a $T_2 = 15 \text{ °C}$ e coefficiente di convezione $h_{c2} = 10 \text{ W/m}^2 \text{ K}$. Determinare il flusso termico totale attraverso la lastra e la temperatura delle sue facce.

Dette T' e T'' le temperature delle due facce della lastra, si ha che il flusso termico totale per conduzione al suo interno (vedi Es.2-1) è dato da

$$W_T = -k A \frac{dT}{dx} = k A \frac{T' - T''}{s}$$

il problema è risolto dal sistema di equazioni seguenti, nelle incognite T' , T'' , W_T , dove si è assunto positivo il calore che fluisce verso destra (v. Fig.3)

$$\begin{cases} W_T = \alpha_1 A (T_1 - T') \\ W_T = k A \frac{T' - T''}{s} \\ W_T = h_{c2} A (T'' - T_2) \end{cases}$$

in molti casi ha interesse eliminare T' e T'' dalle equazioni di cui sopra per ottenere una relazione che lega direttamente W_T a T_1 e T_2 . Il problema è analogo a determinare la resistenza equivalente a tre resistenze elettriche in serie, in cui la temperatura è analoga alla tensione ed il flusso termico alla corrente (v. anche Es.2-1). Lo schema elettrico equivalente è riportato in Fig.4, dove le tre "resistenze termiche" (vedi Esempi 2-1 e 2-4) sono date da:

$$R_{t1} = \frac{1}{h_{c1} A}, \quad R_{t2} = \frac{s}{k A}, \quad R_{t3} = \frac{1}{h_{c2} A}$$

La soluzione è data da

$$\begin{cases} W_T = \frac{T_1 - T_2}{R_T} \\ R_T = R_{t1} + R_{t2} + R_{t3} \end{cases}$$

Nel nostro caso si ha:

$$R_T = \frac{1}{0.5 \cdot 250} + \frac{0.005}{0.5 \cdot 1.5} + \frac{1}{0.5 \cdot 10} = 0.215 \text{ K/W}$$

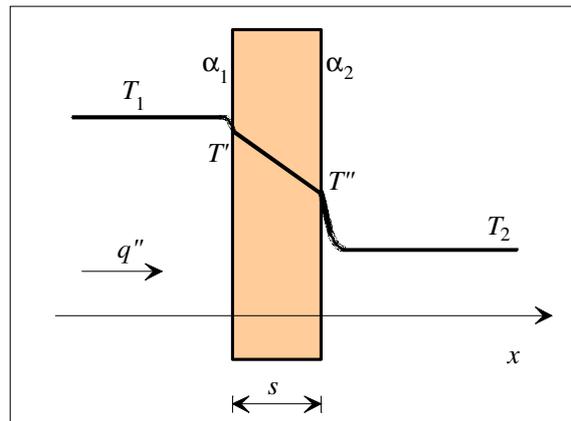


Figura 3: andamento qualitativo della temperatura in una lastra lambita da due fluidi.

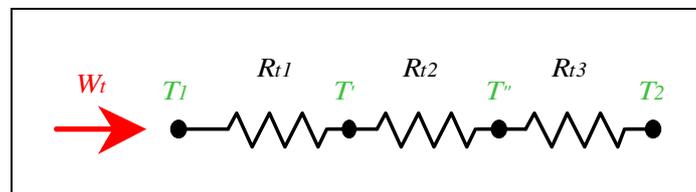


Figura 4: Rete elettrica equivalente al fenomeno di scambio termico in una parete lambita da due fluidi.

E' da notare che, come spesso accade, uno solo dei tre addendi in parentesi prevale di uno o più ordini di grandezza sugli altri (nel caso in esame, il terzo); è del tutto inutile quindi determinare accuratamente i due rimanenti. Svolgendo i calcoli:

$$W_t = 163 \text{ W}$$

$$q'' = \frac{W_t}{A} = 326 \text{ W/m}^2$$

$$T' = T_1 - W_T R_{t1} = 48.6 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$T'' = T_2 + W_T R_{t2} = 47.6 \text{ }^\circ\text{C}$$

In questo caso quasi tutto il salto termico è localizzato alla superficie della lastra in contatto con il fluido di minore coefficiente di convezione, dove si ha la maggiore resistenza termica.

□

Nella tecnica si fa spesso riferimento al reciproco della resistenza termica R_T , che si indica con U ed è detta *conduttanza di parete*; detta grandezza si misura in [W/K]. Si usa spesso anche il *coefficiente globale di scambio*, o *conduttanza unitaria di parete*, già introdotto nel cap.1, che è riferito all'unità di superficie e vale quindi $u = U/A$ e si misura in [W/m² K]. In sintesi, la relazione tra queste tre quantità è quindi

$$R_T = \frac{1}{U} = \frac{1}{u A}$$

Il valore della resistenza termica nei casi più comuni è riportato in Tab.5. Nei manuali sono disponibili anche valori della resistenza termica per casi bidimensionali (es. tubazioni interrate, spigoli di pareti). Nei casi più complessi, è necessario considerare reti di resistenze termiche in serie ed in parallelo, che possono essere risolte tramite i metodi appresi in elettrotecnica. Nell'esempio che segue facciamo invece uso della conduttanza di parete.

Il concetto di resistenza termica non è applicabile nei casi in cui si ha generazione interna di calore, limitatamente alle zone dove tale generazione non è nulla: si veda in merito l'esempio 9.3.

Configurazione	Resistenza termica [K/W]	Note
Conduzione monodimensionale parete piana	$R_T = \frac{T_1 - T_2}{W_T} = \frac{s}{kA}$	v. Esempio 2-1
Conduzione monodimensionale parete cilindrica	$R_T = \frac{r_2 - r_1}{kA_m}$ dove $A_m = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\ln(r_2 / r_1)} L$	v. Esempio 2-2 Per $r_2 - r_1 < 0.1 r_1$ la parete si può considerare piana.
Conduzione multidimensionale	$R_T = \frac{1}{kS}$	v. App.2-2
Convezione	$R_T = \frac{T_s - T_a}{W_T} = \frac{1}{h_c A}$	v. Esempio 2-5
Convezione su superficie alettata	$R_T = \frac{1}{h_c \eta_a A_{con}}$	v. App. 2-3
Irraggiamento (caso semplificato)	$R_T = \frac{1}{h_{cR} A_1}$	v. Eq.9.9

Tabella 5: valori della resistenza termica per i casi più comuni.

ESEMPIO 9.8 – Perdite termiche da una tubazione.

In una tubazione di acciaio inossidabile ($k = 16 \text{ W/m K}$), di spessore $s = 5 \text{ mm}$ e diametro esterno $D = 40 \text{ mm}$, di lunghezza $L = 10 \text{ m}$, scorre vapore saturo a temperatura $T_1 = 300 \text{ °C}$, con coefficiente di convezione $h_{c1} = 5000 \text{ W/m}^2 \text{ K}$. La tubazione si trova in condizioni stazionarie, e sul lato esterno è lambita da aria a $T_2 = 20 \text{ °C}$ e coefficiente di convezione $h_{c2} = 15 \text{ W/m}^2 \text{ K}$. Determinare la perdita di calore dalla tubazione (ovvero, il flusso termico totale).

Dato che la tubazione è molto più lunga del suo diametro e non vi sono disuniformità circonferenziali, la temperatura può essere considerata funzione unicamente del raggio. Il problema si può risolvere determinando la conduttanza di parete dalle tre resistenze termiche in serie (vedi Esempi 2-2 e 2-8 e Tab.5):

$$\begin{cases} W_T = U (T_1 - T_2) \\ U = (R_{r1} + R_{r2} + R_{r3})^{-1} = \left(\frac{1}{A_1 h_{c1}} + \frac{s}{A_m k} + \frac{1}{A_2 h_{c2}} \right)^{-1} \end{cases}$$

notare che in questo caso, a causa della geometria cilindrica, le aree di scambio che compaiono nelle tre resistenze termiche sono diverse. In particolare

$$\begin{cases} A_1 = \pi (D - 2s) L = 0.94 \text{ m}^2 \\ A_m = 2\pi \frac{s}{\ln\left(\frac{D}{D - 2s}\right)} L = 1.09 \text{ m}^2 \\ A_2 = \pi D L = 1.26 \text{ m}^2 \end{cases}$$

si ha quindi

$$U = \left(\frac{1}{0.94 \cdot 5000} + \frac{0.005}{1.09 \cdot 16} + \frac{1}{1.26 \cdot 15} \right)^{-1} = 18.72 \text{ W/K}$$

$$W_T = 18.72 \cdot (300 - 20) = 5.24 \text{ kW}$$

□

BIBLIOGRAFIA

Per approfondimenti sulla trasmissione del calore si può consultare:

- Y.A. Cengel, Termodinamica e Trasmissione del Calore, 3° ed., McGraw-Hill, 2009, capp. 12-20.

Inoltre esistono numerosi testi italiani ed inglesi dedicati esclusivamente alla trasmissione del calore. Tra essi si citano

- G. Guglielmini, C. Pisoni, Elementi di Trasmissione del Calore, Veschi, 1990.
- A. Bejan, Heat Transfer, Wiley, 1993.
- F.P. Incropera, D.P. De Witt, Fundamentals of Heat and Mass Transfer, Wiley, 1996.
- A.F. Mills, Basic heat and mass transfer, Irwin, 1995.

Appendice 9-1 – L'equazione di Fourier (o della conduzione)

Il punto di partenza dell'analisi di un problema di conduzione del calore è l'equazione di bilancio dell'energia ricavata per un sistema chiuso il cui volume è V . Nel caso di un solido incompressibile ($\rho = \text{costante}$ e $du = c dT$) con un termine fittizio di produzione dell'energia (dovuto ad esempio all'effetto Joule) si ha

$$\frac{dU}{dt} = W_T + W_{gen} \quad 9.1$$

dove la potenza meccanica scambiata con l'esterno è stata posta nulla in virtù del fatto che il sistema è indeformabile ed indilatabile.

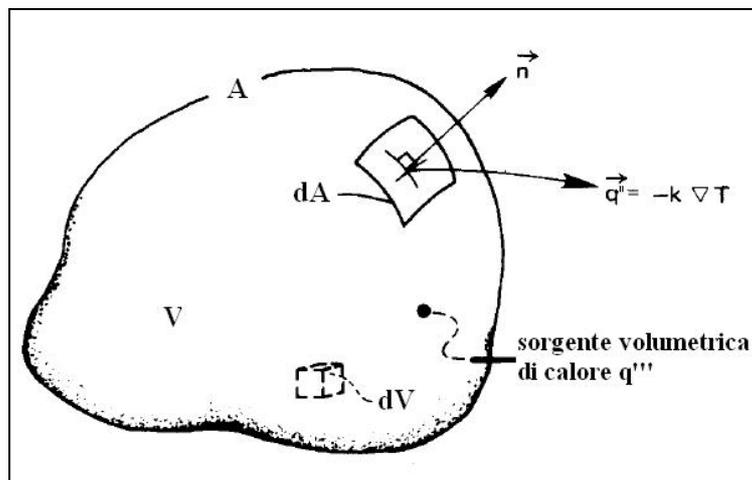


Figura A1-1: Generico volume di controllo al cui interno si ha scambio termico per conduzione.

Il termine fittizio dovuto alla generazione interna di calore può esser posto nella forma

$$W_{gen} = \int_V q''' dV \quad 9.2)$$

Posto inoltre che il solido sia isotropo (k indipendente dalla direzione) si ha che la potenza termica scambiata per conduzione attraverso la superficie A del volume di controllo V vale, in base al postulato di Fourier

$$W_T = - \int_A \vec{q}'' \cdot \vec{n} dA = - \int_A (-k \text{grad} T) \cdot \vec{n} dA \quad 9.3$$

Sfruttando il teorema della divergenza (noto dall'elettrostatica) l'equazione precedente assume la seguente forma:

$$W_T = \int_V [\text{div} \cdot (k \text{grad} T)] dV \quad 9.4$$

Il rateo di variazione dell'energia interna che compare a primo membro dell'eq. 9.1 si può, invece, scrivere come:

$$\frac{dU}{dt} = \int_V \rho \frac{du}{dt} dV = \int_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV \quad 9.5$$

Dove è necessario rammentare che in generale $dU = c_v dT + B_u dv$ ed abbiamo supposto che nel solido avvenga una trasformazione a volume costante¹ e $c_v = c$.

Inserendo i risultati ottenuti nelle eqq. 9.2, 9.4 e 9.5 nell'eq. 9.1 si ricava:

$$\int_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV = \int_V [\text{div}(k \text{ grad } T) + q'''] dV \quad 9.6$$

L'uguaglianza tra i due integrali di volume, dovendo valere per un generico volume V , si estende quindi anche alle funzioni integrande fornendo così la ben nota *equazione di Fourier*:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(k \text{ grad } T) + q''' \quad 9.7$$

Per problemi di conduzione per i quali non c'è generazione interna di calore e la conducibilità termica ed il calore specifico possono essere assunti costanti, il bilancio dell'energia si semplifica nella:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \nabla^2 T \quad 9.8$$

Per problemi di conduzione nello stato stazionario con generazione interna di calore e con conducibilità termica costante il bilancio dell'energia può essere scritto come:

$$\nabla^2 T + \frac{q'''}{k} = 0 \quad 9.9$$

Un'equazione di questa forma in matematica è detta *equazione di Poisson*.

Infine per problemi di conduzione nello stato stazionario senza conversione di energia interna e con conducibilità termica costante l'equazione di bilancio dell'energia assume la seguente forma:

$$\nabla^2 T = 0 \quad 9.10$$

che in matematica è detta *equazione di Laplace*. Queste ultime due equazioni sono analoghe a quelle per la determinazione di un campo potenziale elettrico in presenza di carica libera (Eq.9.9 o meno (Eq.9.10), e questa analogia può, in alcuni casi, essere utilizzata per ottenere la soluzione di problemi di conduzione.

¹ In luogo di una trasformazione a volume costante si potrebbe considerare una trasformazione isobara, e questo porterebbe a dover considerare il c_p in luogo di c_v , si veda ad esempio il testo di Bejan. Per i solidi, come è noto, la differenza tra c_p e c_v è trascurabile.

Condizioni iniziali ed al contorno per l'equazione di Fourier

L'analisi di un problema della conduzione coinvolge la soluzione dell'appropriata forma dell'equazione di bilancio dell'energia, la quale in generale deve essere associata ad opportune condizioni iniziali (valori di temperatura all'istante iniziale, solo per problemi transitori) ed al contorno (alla superficie del volume, per qualunque problema sia stazionario che transitorio).

Condizione iniziale

Nel caso generale di un problema di conduzione in transitorio è necessario conoscere in un certo istante temporale, che si assume come istante iniziale, la distribuzione di temperatura nel dominio V di integrazione:

$$T(\vec{r}, t = 0) = T_0(\vec{r}) \quad \vec{r} \in V \quad 9.11$$

La soluzione dell'equazione della conduzione dovrà quindi fornire la distribuzione di temperatura in ogni istante successivo.

Condizione al contorno del primo tipo (o condizione di Dirichlet)

In questo caso è nota la distribuzione di temperatura sulla superficie S del dominio V sul quale andare ad integrare l'equazione della conduzione, cioè:

$$T = f(\vec{r}, t) \quad \vec{r} \in A \quad 9.12$$

dove la prescritta temperatura superficiale $f(\vec{r}, t)$ è in generale una funzione della posizione all'interno del dominio e del tempo. Nel caso particolare in cui

$$T = 0 \quad \vec{r} \in A \quad 9.13$$

si parla di condizione al contorno del primo tipo *omogenea*.

Condizione al contorno del secondo tipo (o condizione di Neumann)

Questo è il caso in cui è specificato il valore del flusso termico sulla superficie, cioè:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = f(\vec{r}, t) \quad \vec{r} \in A \quad 9.14$$

dove con $\partial T / \partial n$ si è indicato il gradiente di temperatura valutato nella direzione normale (uscente) alla superficie. Nel caso particolare di flusso termico nullo sul contorno, ovvero di una superficie adiabatica, si ha:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \vec{r} \in A \quad 9.15$$

e si parla di condizione al contorno del secondo tipo *omogenea*.

Condizione al contorno del terzo tipo (o condizione di Robin o mista)

In questo caso si uguaglia sulla superficie del solido il flusso conduttivo proveniente dall'interno con quello asportato per convezione dal fluido che lo lambisce, ovvero

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = h_c [T_\infty(\vec{r}, t) - T_0] \quad \vec{r} \in A \quad 9.16$$

L'eventuale termine dovuto all'irraggiamento viene trascurato o linearizzato (ovvero, inglobato nel coefficiente convettivo).

Ovviamente, le condizioni al contorno del primo e del secondo tipo possono essere ottenute come casi particolari della condizione al contorno del terzo tipo. Per esempio, ponendo in prossimità del contorno $k=0$, e $T_\infty(\vec{r},t) = f(\vec{r},t)$ si ottiene (per $h_c \neq 0$) una condizione del primo tipo. Similmente, ponendo $h_c T_\infty(\vec{r},t) = f(\vec{r},t)$ e $T_0=0$ al secondo membro si ottiene una condizione del secondo tipo.

Appendice 9-2 – La conduzione in regime stazionario in strutture multidimensionali

In ogni sistema bidimensionale, nel quale del calore viene trasmesso da una superficie a temperatura costante T_1 ad un'altra superficie a temperatura costante T_2 di un corpo solido, la potenza termica scambiata dipende solo dalla differenza di temperatura ($T_1 - T_2$), dalla conducibilità termica k del mezzo attraverso il quale avviene lo scambio termico e dalla forma geometrica del sistema. In particolare, la potenza termica scambiata tra queste due superfici può essere espressa come:

$$W_T = k S (T_1 - T_2) \quad (\text{a2-1})$$

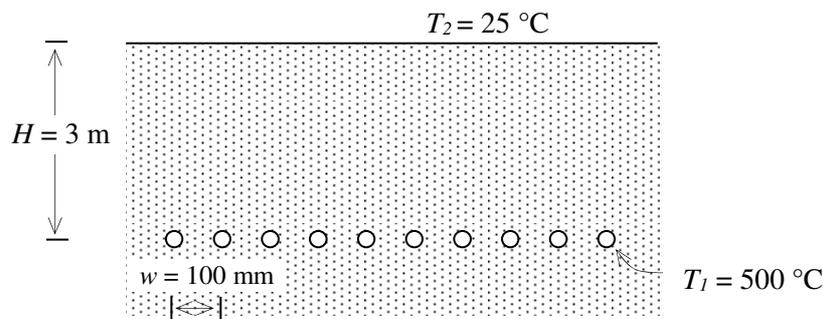
dove S , detto *fattore di forma conduttivo*, dipende solo dalla geometria del corpo. Esso ha le dimensioni di una lunghezza e la sua espressione analitica è generalmente riportata nei testi di trasmissione del calore per differenti configurazioni geometriche che possono incontrarsi nella pratica. Alcuni esempi sono riportati nella Tab.A2, tratta dal testo di Y.A. Cengel.

In questo caso la *resistenza termica*, è data da:

$$R_T = \frac{T_1 - T_2}{W_T} = \frac{1}{k S} \quad (\text{a2-2})$$

ESEMPIO

Un dittatore mediorientale ribelle alle disposizioni internazionali ha nascosto nel sottosuolo un fascio di barrette radioattive di lunghezza $L = 1$ m e di diametro $D = 10$ mm. Esse sono interrate nel suolo parallelamente una all'altra ad una profondità $H = 3$ m, come mostrato in figura, ed il passo è $w = 100$ mm. La conducibilità termica del suolo $k = 0.9$ W/(m K). Se la temperatura superficiale delle barrette e del suolo valgono rispettivamente $T_1 = 500$ °C e $T_2 = 25$ °C, determinare la potenza termica scambiata da ciascuna di esse.



La potenza termica scambiata può essere determinata sfruttando l'eq.(a2-1) dove S è l'appropriato fattore di forma conduttivo che in questo caso vale:

$$S = \frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{2w}{\pi D} \sinh\frac{2\pi H}{w}\right)} = 0.076 \text{ m}$$

La potenza termica persa da ogni singola barretta vale quindi: $W_i = k S (T_1 - T_2) = 32.5$ W

□

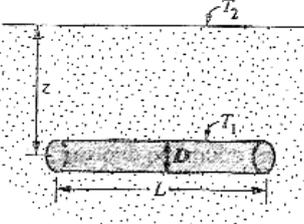
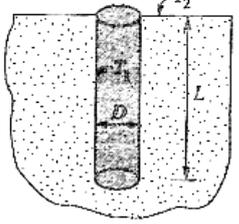
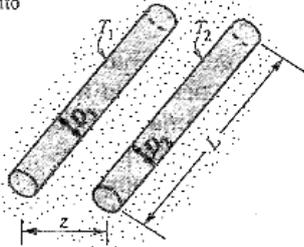
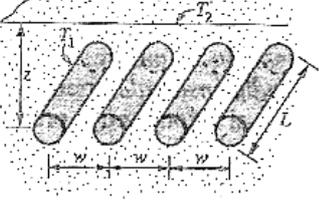
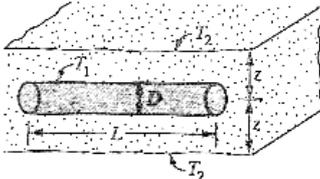
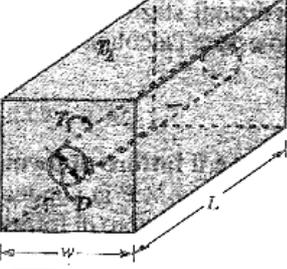
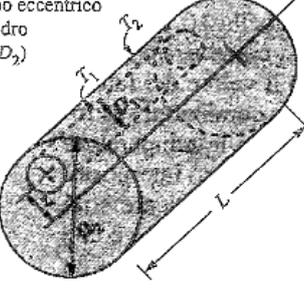
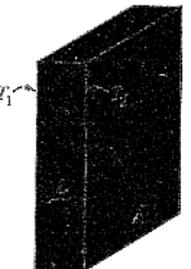
<p>(1) Cilindro isoterma di lunghezza L interrato in un mezzo semi-infinito ($L \gg D$ e $z > 1.5D$)</p> $S = \frac{2\pi L}{\ln(4z/D)}$ 	<p>(2) Cilindro verticale isoterma di lunghezza L interrato in un mezzo semi-infinito ($L \gg D$)</p> $S = \frac{2\pi L}{\ln(4L/D)}$ 
<p>(3) Due cilindri paralleli isotermi immersi in un mezzo infinito ($L \gg D_1, D_2, z$)</p> $S = \frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{4z^2 - D_1^2 - D_2^2}{2D_1 D_2}\right)}$ 	<p>(4) Una fila di cilindri paralleli equidistanti isotermi interrati in un mezzo semi-infinito ($L \gg D, z$ e $w > 1.5D$)</p> $S = \frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{2w}{\pi D} \sinh \frac{2z}{w}\right)}$ <p>(per cilindro)</p> 
<p>(5) Cilindro circolare isoterma di lunghezza L nel piano medio di una parete infinita ($z > 0.5D$)</p> $S = \frac{2\pi L}{\ln(8z/\pi D)}$ 	<p>(6) Cilindro circolare isoterma di lunghezza L al centro di una barra quadra solida della stessa lunghezza</p> $S = \frac{2\pi L}{\ln(1.08w/D)}$ 
<p>(7) Cilindro circolare isoterma eccentrico di lunghezza L in un cilindro di uguale lunghezza ($L > D_2$)</p> $S = \frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{D_1^2 + D_2^2 - 4z^2}{2D_1 D_2}\right)}$ 	<p>(8) Ampia parete piana</p> $S = \frac{A}{L}$ 

Tabella A2: Fattori di forma conduttivi, (tratto da Y.A. Cengel, cap. 10, Tab. 10.7).

Appendice 9-3 – Lo scambio termico attraverso superfici alettate

Se il gradiente di temperatura in un solido è molto alto lungo la direzione x , rispetto al gradiente lungo le altre due direzioni, e se ci si trova in condizioni stazionarie è possibile considerare la temperatura funzione della sola coordinata x . Questo caso si presenta in genere nelle *alette* che rivestono le superfici al fine di aumentare lo scambio termico.

Consideriamo quindi l'aletta mostrata in Fig.A2-1, ovvero un solido prismatico (a sezione costante A , il cui perimetro è P): in essa il calore entrante per conduzione attraverso la sua base (ad $x = 0$), che è in contatto con la superficie riscaldata, viene dissipato per convezione dalla superficie laterale verso l'ambiente a temperatura T_a con un coefficiente di scambio termico α .

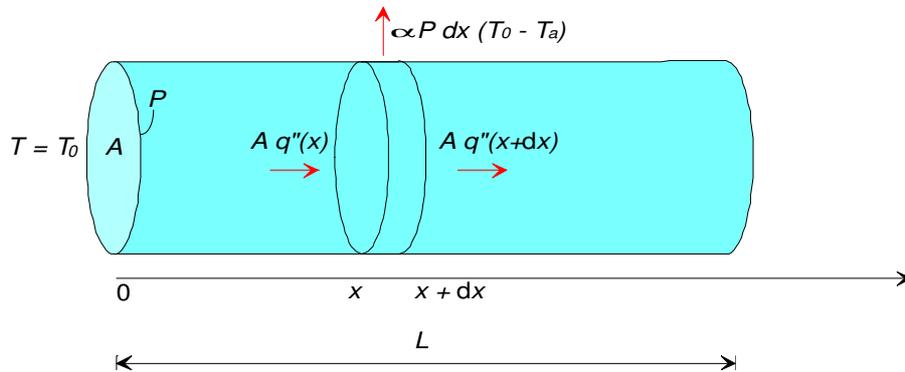


Figura A3-1: schematizzazione di un'aletta sottile a sezione costante

Dal bilancio di energia per il disco di spessore dx in corrispondenza alla posizione assiale x si ottiene la seguente espressione

$$A q''(x) - A q''(x+dx) = h_c P dx [T(x) - T_a] \quad (\text{a3-1})$$

che indica come la differenza tra il calore che entra dalla faccia di destra per conduzione e quello che esce, sempre per conduzione, dalla faccia di sinistra del disco è pari al calore smaltito per convezione dalla superficie laterale. Il flusso termico conduttivo q'' è dato da

$$q'' = -k \left. \frac{dT}{dx} \right|_x \quad (\text{a3-2})$$

e quindi sviluppando in serie di Taylor

$$q''(x+\Delta x) - q''(x) = -k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x+\Delta x} + k \left. \frac{dT}{dx} \right|_x = -k \left. \frac{d^2 T}{dx^2} \right|_x dx \quad (\text{a3-3})$$

Da cui sostituendo nell'eq.(a3-1) si ottiene

$$k \frac{d^2 T(x)}{dx^2} dx = h_c P dx [T(x) - T_\infty] \quad (\text{a3-4})$$

Se si introduce la nuova variabile $\theta(x) \equiv T(x) - T_a$ e si elimina dx si ottiene:

$$\frac{d^2 \theta(x)}{d x^2} = \frac{h_c P}{A k} \theta(x) \quad (\text{a3-5})$$

ovvero

$$\frac{d^2 \theta(x)}{d x^2} - m^2 \theta(x) = 0, \quad m^2 \equiv \frac{h_c P}{k A} \quad (\text{a3-6})$$

che rappresenta la tipica equazione differenziale per alette di sezione trasversale costante. Si tratta di una equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui soluzione generale ha, come è noto, la forma

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \quad (\text{a3-7})$$

Per ottenere la soluzione particolare sono necessarie due condizioni al contorno. La prima, abbastanza ovviamente, consiste nell'imporre la temperatura alla base dell'aletta

$$\theta(x=0) = \theta_0 = T_0 - T_a \quad (\text{a3-8})$$

Per la seconda condizione sono possibili diverse alternative (v. ad es. Incropera, cap.3). Ci limiteremo a considerare il caso in cui la superficie estrema dell'aletta, a $x = L$, scambia una quantità di calore trascurabile, per cui può ritenersi adiabatica e quindi

$$\left. \frac{d \theta}{d x} \right|_{x=L} = 0 \quad (\text{a3-9})$$

Con l'ipotesi aggiuntiva di aletta molto lunga (si può dimostrare che essa si verifica quando $mL > 3$, v. Incropera) la soluzione particolare cercata si semplifica in

$$\theta(x) = \theta_0 e^{-mx}; \quad T(x) = T_0 + (T_0 - T_a) e^{-mx} \quad (\text{a3-10})$$

e la potenza termica asportata dall'aletta, pari a quella che attraversa la sua base a $x = 0$, è

$$W_T = q'' A = -k A \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = k A m (T_0 - T_a) = \sqrt{k A P \alpha} (T_0 - T_a) \quad (\text{a3-11})$$

Si definisce *efficacia dell'aletta*, ε_a , il rapporto tra la potenza termica asportata dall'aletta e quella che fluirebbe per convezione dalla base in sua assenza, ovvero

$$\varepsilon_a = \frac{q'' A}{\alpha A (T_0 - T_a)} \quad (\text{a3-12})$$

Nel nostro caso si ha

$$\varepsilon_a = \frac{\sqrt{k A P \alpha} (T_0 - T_a)}{h_c A (T_0 - T_a)} = \sqrt{\frac{k P}{h_c A}} \quad (\text{a3-13})$$

Affinché sia conveniente installare un'aletta, l'efficacia deve essere notevolmente superiore ad uno. Si vede chiaramente che, a parità di altri fattori, l'efficacia aumenta al diminuire di α : per questa ragione le superfici esposte all'aria (basso α) sono frequentemente allettate, mentre quelle esposte all'acqua non lo sono quasi mai.

Si definisce *efficienza dell'aletta*, η_a , il rapporto tra la potenza termica asportata dall'aletta e quella massima asportabile, che si avrebbe nel caso in cui tutta la superficie *laterale* dell'aletta si trovasse alla stessa temperatura della base, T_0 . Essa è pertanto data da

$$\eta_a = \frac{W_T}{W_{T,\max}} = \frac{-k A \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0}}{h_c A_{al} (T_0 - T_a)} = \frac{-k A \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0}}{h_c P L (T_0 - T_a)} \quad (\text{a3-14})$$

Dove $A_{al} = PL$ rappresenta l'area *laterale* dell'aletta. Nel nostro caso

$$\eta_a = \frac{\sqrt{k A P h_c} (T_0 - T_a)}{P L h_c (T_0 - T_a)} = \sqrt{\frac{k A}{P h_c}} \frac{1}{L} = \frac{m}{L} \quad (\text{a3-15})$$

La eq.(a3-15) mostra quali sono i limiti della superficie alettata: via via che ci si allontana dalla base, la temperatura dell'aletta deve diminuire perché il calore possa fluire per conduzione all'interno di essa; ma tale diminuzione di temperatura implica anche una riduzione dello scambio termico per convezione e quindi una riduzione di efficienza dell'aletta.

E' evidente che per funzionare bene un'aletta deve essere fatta di un materiale che sia *un buon conduttore termico* e deve essere *sottile*, in modo che il rapporto P/A diminuisca. L'eq.(a3-15) mostra anche che a parità di altri fattori le alette hanno maggiore efficienza quando il coefficiente di scambio è basso. Anche per tale ragione vengono frequentemente alettate le superfici esposte all'aria e non quelle esposte a fluidi che consentono alti coefficienti di scambio termico convettivo visto che, in quest'ultimo caso, raramente si raggiungono condizioni di buona efficienza; in ogni caso le alette per liquidi sono molto tozze e per esse l'approssimazione unidimensionale da noi fatta non sempre è valida.

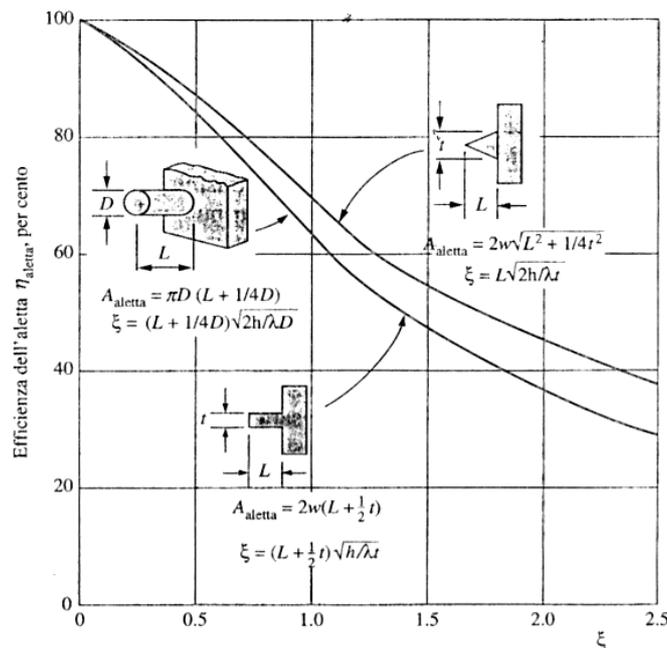


Figura A3-2: Efficienza di un'aletta (tratto da Y.A. Cengel, cap. 10)

L'eq.(a3-15) fornisce anche una semplice ed importante relazione per calcolare il calore smaltito da un'aletta

$$W_T = \eta_a h_c P L (T_0 - T_a) = \eta_a h_c A_{al} (T_0 - T_a) \quad (\text{a3-16})$$

Nei casi più complessi (condizioni al contorno diverse da quelle da noi adottate, alette di sezione non costante) la eq.(a3-16) rimane comunque applicabile e l'efficienza dell'aletta è riportata in diagrammi in funzione di un opportuno parametro adimensionale ξ (v. Fig.A3-2). A questo punto siamo in grado di calcolare l'*efficienza termica di una superficie alettata*, che supponiamo divisa in due parti: una parte A_{con} ricoperta da alette di efficienza η_a , ed una A_{senza} (che include gli interstizi tra un'aletta e l'altra) non ricoperta da esse. Supponendo che il coefficiente convettivo α si mantenga costante su tutta la superficie si ha pertanto

$$W_T = \eta_a A_{con} h_c (T_0 - T_\infty) + A_{senza} h_c (T_0 - T_\infty)$$

e la resistenza termica risulta data da

$$R_T = \frac{T_0 - T_\infty}{W_T} = \frac{1}{\eta_a A_{con} h_c + A_{senza} h_c} \quad (\text{a3-17})$$

Nella pratica, spesso il secondo termine a denominatore è trascurabile e la resistenza termica si riduce a

$$R_T \cong \frac{1}{\eta_a A_{con} h_c} \quad (\text{a3-18})$$

Appendice 9-4 – Il raggio critico di isolamento

Consideriamo un guscio cilindrico di lunghezza L molto maggiore del raggio, e di raggio interno R_i ed esterno R_e e di conducibilità termica k . Al raggio interno è specificato il valore della temperatura T_i . Al raggio esterno imponiamo invece una condizione di scambio convettiva (coefficiente di scambio α) con un fluido a temperatura T_a .

Determiniamo la resistenza termica del sistema, secondo l'espressione classica

$$R_T = \frac{T_i - T_a}{W_T} \quad (a4-9.1)$$

Tenuto conto che abbiamo due resistenze termiche (una conduttiva ed una convettiva) in serie, e facendo riferimento ai valori della resistenza termica riportati in Tab.12-5, abbiamo che la resistenza termica equivalente è data da

$$R_T = \frac{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}{2\pi k L} + \frac{1}{A_e h_c} = \frac{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}{2\pi k L} + \frac{1}{2\pi R_e L h_c} \quad (a4-9.2)$$

Andiamo ora ad analizzare come varia questa resistenza al variare di R_e . Risulta chiaro che il primo termine (quello conduttivo) aumenta al crescere di R_e , mentre il secondo invece è decrescente. La resistenza termica (v. Fig.A4-1) presenterà quindi un *minimo* per un valore di R_e (che può essere facilmente determinato derivando la precedente espressione rispetto ad R_e e eguagliando a zero) pari a

$$R_{crit} = \frac{k}{\alpha} \quad (a4-9.3)$$

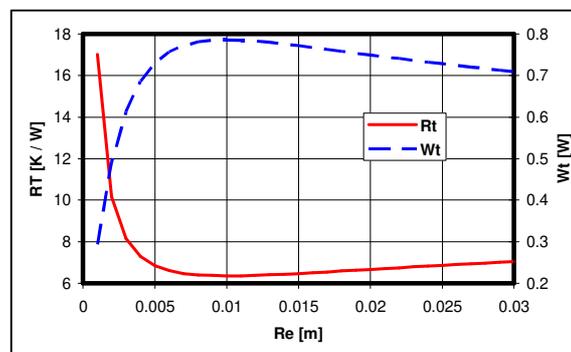


Fig.A4-1

In corrispondenza di tale valore del raggio esterno, la potenza termica scambiata, a parità di temperature imposte agli estremi del sistema, avrà un *massimo*.

Quando si vuole isolare termicamente un cilindro, può quindi succedere paradossalmente che, aumentando lo spessore del guscio di isolante, lo scambio termico aumenti invece di diminuire. La spiegazione fisica è facilmente intuibile: se da un lato l'aumento di spessore dell'isolante fa aumentare la resistenza termica conduttiva, dall'altro aumenta anche la superficie di scambio esposta all'azione convettiva del fluido esterno. Nella pratica, dato che h_c al minimo vale circa $10 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ e k per materiali isolanti è generalmente minore di 1, R_{crit} vale al massimo circa 10 cm, quindi il problema si pone unicamente per isolamenti di raggio

molto piccolo, quali appunto quelli dei cavi elettrici. Per isolanti di raggio *interno* maggiore, la resistenza termica aumenta monotonamente al crescere del raggio esterno.

Appendice 9-5 – Trasmissione del calore in condizioni non stazionarie.

Fino a questo momento, abbiamo considerato la trasmissione del calore in *condizioni stazionarie*. Il concetto di resistenza termica, o del suo reciproco, la conduttanza di parete, permette di risolvere agevolmente tali problemi. Nell'esempio che segue, affronteremo invece un semplice caso di *transitorio termico*.

ESEMPIO 9.11 - Studio semplificato della tempra di un cilindro metallico.

Un cilindro di acciaio al carbonio ($c_p = 434 \text{ J/kg K}$, $\rho = 7830 \text{ kg/m}^3$) di diametro $D = 10 \text{ mm}$ e lunghezza $L = 40 \text{ mm}$, inizialmente alla temperatura uniforme $T_0 = 1200 \text{ }^\circ\text{C}$, viene gettato in un bagno di tempra alla temperatura $T_a = 25 \text{ }^\circ\text{C}$. Si può considerare che il bagno si mantenga a temperatura costante (capacità termica infinita) e che il coefficiente di convezione, anch'esso costante, valga $h_c = 20\,000 \text{ W/m}^2 \text{ K}$. Determinare dopo quanto tempo il cilindro raggiunge la temperatura di $300 \text{ }^\circ\text{C}$.

 La soluzione è riportata nel file C2TEMPRA.XLS

In questo caso dobbiamo trattare un problema di transitorio. Il cilindro può essere considerato un sistema chiuso, e possiamo adottare le seguenti ipotesi:

- il lavoro scambiato con l'esterno (dovuto unicamente alla variazione di volume del cilindro) può decisamente essere trascurato (in altri termini, il materiale può essere considerato indilatabile);
- se il materiale è indilatabile, $c_p = c_v = c$;
- la temperatura all'interno del cilindro può essere ritenuta uniforme (ovvero indipendente da z ed r): una giustificazione accurata di tale ipotesi esula dagli scopi del corso, ma si può intuire che la elevata differenza di temperatura tra interno ed esterno (dovuta alla elevata "resistenza termica" alla superficie) rende trascurabili le disuniformità di temperatura all'interno del corpo (dove la corrispondente "resistenza termica" è minore).

In tali condizioni l'equazione di bilancio dell'energia (I principio della t.d.) può essere scritta come

$$\frac{dU}{dt} = W_T$$

ricordando che

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= M \frac{du}{dt} = \rho V \frac{du}{dt} \\ \frac{du}{dt} &= c \frac{dT}{dt} \quad (\text{materiale indilatabile}) \\ W_T &= -h_c A (T(t) - T_a) \end{aligned}$$

si ottiene infine il problema differenziale del primo ordine

$$\begin{cases} \rho V c \frac{dT}{dt} = -h_c A (T(t) - T_a) \\ T(t=0) = T_0 \end{cases}$$

Il problema può essere riarrangiato in una forma più generale introducendo le due grandezze ausiliarie Θ (theta) e τ (tau)

$$\begin{cases} \tau = -\frac{\rho V c}{h_c A} \\ \Theta = T(t) - T_a \end{cases}$$

τ [s] è detta costante di tempo, per motivi che appariranno evidenti nel seguito. Sostituendo si ottiene

$$\begin{cases} \frac{d\Theta}{dt} = -\frac{\Theta}{\tau} \\ \Theta(t=0) = \Theta_0 = T_0 - T_a \end{cases}$$

la cui soluzione è data da

$$\Theta(t) = \Theta_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Nel caso in esame si ha quindi

$$V = \frac{\pi D^2}{4} L = 3.14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$A = \pi D L + 2 \frac{\pi D^2}{4} = 0.00141 \text{ m}^2$$

$$\tau = \frac{\rho c V}{h_c A} = \frac{7830 \cdot 434}{20000} 0.0022 = 0.378 \text{ s}$$

$$t = \tau \ln\left(\frac{\Theta_0}{\Theta}\right) = 0.378 \ln\left(\frac{1200 - 25}{300 - 25}\right) = 0.55 \text{ s}$$

L'esempio trattato costituisce un caso di *sistema dinamico del primo ordine* (in quanto governato da una equazione differenziale del primo ordine). Molti altri sistemi fisici si comportano secondo questo modello: ad esempio, la carica e scarica di un condensatore in un circuito RC (v. Fig.5), od il riempimento di una vasca che ha una perdita proporzionale al livello di liquido in essa. Non è difficile verificare che, sebbene in teoria il transitorio si estingua in un tempo infinito (il cilindro impiega un tempo infinito a raggiungere la temperatura del bagno) in pratica esso può essere considerato concluso dopo un intervallo pari a 4-5 costanti di tempo. Questo è ben visibile anche nel grafico di Fig.6 che rappresenta l'andamento di Θ/Θ_0 (che varia dal valore iniziale 1 a quello asintotico finale 0) in funzione di t/τ .

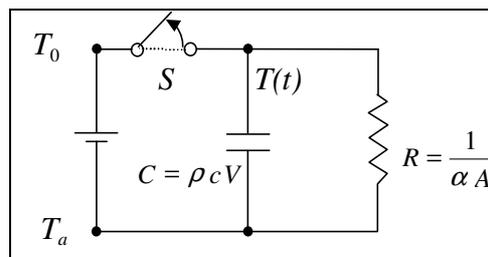


Figura A5-1: Rete elettrica equivalente al fenomeno di tempra di un cilindro metallico. al tempo $t = 0$ viene aperto l'interruttore S.

E' noto che affinché il pezzo si tempri il transitorio deve essere il più veloce possibile; dall'esame dell'espressione della costante di tempo τ si vede che essa diviene più piccola (e quindi il transitorio si accorcia) se

- h_c aumenta: per questo spesso si ricorre a fluidi che scambiano più efficacemente o all'agitazione del bagno (convezione forzata);
- il rapporto V/A diminuisce: tale rapporto è minore per pezzi sottili rispetto a quelli tozzi (è massimo nella sfera, che ha la minor superficie a parità di volume) e non è difficile verificare che per corpi geometricamente simili cresce all'aumentare di V .
- Inoltre si vede ovviamente che il transitorio è tanto più rapido quanto è minore la capacità termica $\rho c V$ del corpo

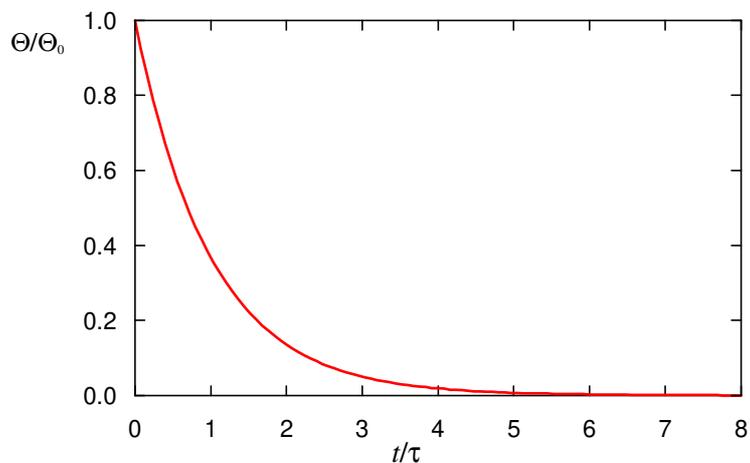


Figura A5-2. Andamento della temperatura adimensionalizzata in funzione del tempo adimensionalizzato.



Appendice 9-6 – Determinazione più accurata del coefficiente di scambio convettivo.

Raccolta di correlazioni di scambio termico

E' inutile imparare a memoria le correlazioni di scambio termico: esse si trovano in gran numero sui manuali ed hanno tutte una forma grossomodo analoga a quella della successiva Eq. a6.1 (anche se un po' più complessa, e talvolta contengono ulteriori gruppi adimensionali). In Tab. A6.1 è riportato un sommario delle principali correlazioni di scambio termico per convezione. Ogni correlazione si riferisce ad un particolare tipo di convezione (es. convezione naturale, o forzata) e a determinate geometrie (es. tubazioni). Utilizzare le correlazioni al di fuori del loro campo di validità in genere porta ad errori molto gravi. L'uso delle correlazioni di scambio termico è illustrato negli esempi seguenti.

Convezione forzata – determinazione di h_c

Come già detto, la determinazione di h_c è nella maggior parte dei casi affidata all'esecuzione di esperimenti. Tali esperimenti hanno come risultato delle espressioni matematiche, dette *correlazioni di scambio termico*, che danno (generalmente in forma di gruppi adimensionali) il valore del coefficiente di convezione per determinate classi di fluidi, condizioni di moto e configurazioni geometriche. A solo titolo di esempio, si riporta una correlazione abbastanza famosa che fornisce il valore di h_c per convezione forzata nel caso di moto a velocità relativamente elevata (moto turbolento) di fluidi (tutti ad eccezione dei metalli liquidi) all'interno di condotti

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.4}$$

dove

$$Nu = \frac{h_c D}{k} \tag{a6.1}$$

$$Re = \frac{\rho w D}{\mu}$$

$$Pr = \frac{c_p \mu}{k}$$

e:

D diametro idraulico del condotto;

k conducibilità termica del fluido;

w velocità del fluido;

c_p calore specifico del fluido;

ρ densità del fluido;

μ viscosità dinamica (una proprietà che esprime la resistenza del fluido allo scorrimento, misurata in Pa s).

Si può notare che i tre gruppi (Nu , Re , Pr) che appaiono nell'Eq a6.1 sono *adimensionali*: essi sono detti rispettivamente *numeri di Nusselt*, *Reynolds* e *Prandtl* (rispettivamente da Willelm Nusselt, 1882-1957, Osborne Reynolds, 1842-1912, e Ludwig Prandtl, 1875-1953). Il numero di Reynolds viene considerato anche quando si trattano il moto e le perdite di carico nei condotti. Altre correlazioni di scambio termico sono riportate in Tab. A6.1.

ESEMPIO a6.1 - Calcolo del coefficiente di scambio convettivo in convezione forzata.

In una tubazione di uno scambiatore di calore, di diametro interno 12 mm, scorre una portata $G = 0.2$ kg/s di acqua alla temperatura di 20°C. Determinare il coefficiente di scambio convettivo utilizzando la correlazione a6.1.

☒ *La soluzione è riportata nel file C9DITTUS.XLS*

Le proprietà termofisiche dell'acqua a 20 °C sono ricavabili da un manuale $k = 0.6$ W/m K; $c_p = 4180$ J/kg K; $\rho = 997$ kg/m³; $\mu = 0.000978$ Pa s. mentre la velocità va ricavata dalla portata

$$w = \frac{G}{\rho A} = \frac{G}{\rho \frac{\pi D^2}{4}} = \frac{0.2 \cdot 4}{997 \cdot \pi \cdot (0.012)^2} = 1.77 \text{ m/s}$$

A questo punto non resta che valutare i gruppi adimensionali Re e Pr ,

$$Re = \frac{\rho w D}{\mu} = \frac{997 \cdot 1.77 \cdot 0.012}{0.000978} = 21698$$

$$Pr = \frac{c_p \mu}{k} = \frac{4180 \cdot 0.000978}{0.6} = 6.81$$

da cui si ottiene il valore di Nu

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.4} = 146$$

ed infine

$$h_c = Nu \frac{k}{D} = \frac{146 \cdot 0.6}{0.012} = 7298 \text{ W/m}^2\text{K}$$

Cambiando i dati, si può notare come il coefficiente di scambio aumenti con la portata del fluido e diminuisca con il diametro: tuttavia, come vedremo nei prossimi capitoli, agendo in questo modo si ottiene anche un notevole aumento delle perdite per attrito (perdite di carico) nella tubazione.

☐

Convezione naturale – determinazione di h_c

In regime di convezione naturale, la velocità del fluido dipende dai moti indotti dalle differenze di densità e pertanto non è ben definita. Non ha quindi senso definire il numero di Reynolds, che viene sostituito dal *numero di Grashof* (da Franz Grashof, 1826-1893)

$$Gr = \frac{g \beta (T_s - T_\infty) \rho^2 L^3}{\mu^2} \quad \text{a6.2}$$

Dove, oltre alle grandezze definite in precedenza, compaiono

- β coefficiente di dilatazione termica del fluido,
- g accelerazione di gravità;
- T_s temperatura della parete;
- T_∞ temperatura del fluido imperturbato (a sufficiente distanza dalla parete);
- L dimensione lineare caratteristica della superficie (in genere, area/diametro).

E' da notare che $Gr = 0$, quindi non si ha convezione naturale, nel caso di fluido che non si dilata termicamente ($\beta=0$) o in caso di assenza di gravità ($g=0$). In entrambi i casi infatti viene a mancare la forza di galleggiamento che è responsabile del moto del fluido.

Per la natura stessa della convezione naturale, il coefficiente di scambio dipende quindi anche dalla temperatura della parete, il che rende il fenomeno non più linearmente dipendente da ΔT e obbliga in molti casi ad una soluzione iterativa del problema. Una tipica correlazione di scambio termico in convezione naturale, valida per piastre orizzontali, ha la forma

$$Nu = 0.54(Pr Gr)^{1/4} \quad 9.4$$

ed è valida per $10^4 < Pr Gr < 10^7$. Altre correlazioni sono riportate in Tab. A6.1.

ESEMPIO 9.8 – Convezione naturale.

Il processore di un personal computer ha la superficie superiore quadrata di lato $a = 80$ mm; detta superficie deve mantenersi ad una temperatura massima di 60°C . Trascurando il contributo dell'irraggiamento, determinare la potenza termica massima che può essere smaltita attraverso tale superficie se il fluido circostante (aria) si trova alla temperatura di 30°C .

Le proprietà termofisiche dell'aria a 30°C sono ricavabili da un manuale:

$$k = 0.026 \text{ W/m K}; \rho = 1.165 \text{ kg/m}^3; \mu = 1.86 \times 10^{-5} \text{ Pa s}, \beta = 0.0033 \text{ K}^{-1}.$$

Inoltre, per tutti i gas si può ritenere con buona approssimazione $Pr = 0.7$

Il numero di Grashof, avendo assunto $L = A/P = a/4 = 0.02$ m, vale quindi

$$Gr = \frac{g \beta (T_s - T_\infty) \rho^2 L^3}{\mu^2} = \frac{9.81 \cdot 0.0033 \cdot (60 - 30) \cdot 1.165^2 \cdot 0.02^3}{(1.86 \cdot 10^{-5})^2} = 30480$$

essendo $10^4 < Pr Gr < 10^7$, si può utilizzare la Eq.9.4, da cui si ottiene il valore di Nu

$$Nu = 0.54(Pr Gr)^{1/4} = 0.54(21336)^{1/4} = 6.5$$

ed infine

$$h_c = Nu \frac{k}{D} = \frac{6.5 \cdot 0.026}{0.02} = 8.5 \text{ W/m}^2\text{K}$$

La potenza termica scambiata è data da

$$W_T = h_c S (T_p - T_\infty) = 8.5 \cdot (0.08)^2 (60 - 30) = 1.63 \text{ W}$$

In caso che il chip debba dissipare una potenza maggiore è necessario aumentare la superficie di scambio dotandolo di alette (v. app.9-2) oppure passare alla convezione forzata aggiungendo una ventola. Da notare anche che è stato trascurato il contributo dell'irraggiamento, che in queste condizioni (in dipendenza dalla geometria del sistema) potrebbe superare il 30%.

□

CONFIGURAZIONE	LIMITI	CORRELAZIONE	RIFERIMENTI - NOTE
Convezione forzata interna Moto laminare Moto pienamente sviluppato	$Re < 2100$ $Pr > 0.7$ $L/D \gg 0.05 Re Pr$	$Nu = 3.66 \quad (T_s = const)$ $Nu = 4.36 \quad (q = const)$	Valore locale di Nu per moto pienamente sviluppato. Possono essere usate se il tubo e' molto lungo rispetto alla zona di imbocco e la viscosita' non varia molto con la temperatura. V. Incropera p.460.
Convezione forzata interna Moto laminare T parete costante	$Re < 2100$ $Pr > 0.7$	$Nu = 1.86 \left(\frac{Re Pr}{L/D} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_s} \right)^{0.14}$	Incropera p.460 μ viscosita' a T miscela (T_m) μ_s viscosita' a T parete (T_s) Raccomandata se: $(Re Pr D / L)^{1/3} (\mu / \mu_s)^{0.14} > 2$
Convezione forzata interna Moto turbolento Condotti lunghi	$Re > 6000$ $Pr > 0.7$ $L/D > 10$	$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.33}$ (Precisione del 25%)	Incropera p.445, Lienhard p.323. Esistono correlazioni piu' complesse con precisioni migliori del 10%.
Convezione forzata interna Moto turbolento Condotti lunghi	$Re > 10000$ $0.6 < Pr < 160$ $L/D > 10$	$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^n$ $n = 0.4$ per $T_s > T_m$ $n = 0.3$ per $T_s < T_m$	Incropera p.445.
Convezione forzata interna Metalli liquidi	$Pr < 0.1$	$Nu = 4.0 + 0.025(Re Pr)^{0.8} \quad (T_s = const)$ $Nu = 5.0 + 0.025(Re Pr)^{0.8} \quad (q = const)$	
Convezione forzata esterna Cilindro in "crossflow" (ovvero investito da una corrente infinita perpendicolare al suo asse)	$2 \cdot 10^4 < Re < 4 \cdot 10^5$ $Re Pr > 0.2$	$Nu = 0.3 + \left\{ 0.62 Re^{1/2} Pr^{1/3} \left[1 + (0.4/Pr)^{2/3} \right]^{-1/4} \right\} \left[1 + (Re/282000)^{5/8} \right]^{4/5}$ (Precisione del 20%)	Incropera p.395, Lienhard p.329. Precisione migliore se divisa in piu' parti.
Convezione naturale Piastra verticale	$Gr_L > 10^9$	$Nu = 0.13 (Pr Gr_L)^{1/3}$	Kreith p.394.
Convezione naturale Piastra verticale	$Pr Gr_L < 10^4$	$Nu = \left\{ 0.825 + \frac{0.387(Pr Gr_L)^{1/6}}{\left[1 + (0.492/Pr)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2$	Incropera p.493.
Convezione naturale Piastra orizzontale Moto laminare Superficie superiore di piastra calda o inferiore di piastra fredda	$10^4 < Pr Gr_L < 10^7$	$Nu = 0.54 (Pr Gr_L)^{1/4}$	Incropera p.498 $Gr_L \equiv \frac{g \beta (T_s - T_\infty) L^3}{\nu^2}$ β = coeff. di dilatazione termica L = area / perimetro
Convezione naturale Piastra orizzontale Moto turbolento Superficie superiore di piastra calda o inferiore di piastra fredda	$10^7 < Pr Gr_L < 10^{11}$	$Nu = 0.15 (Pr Gr_L)^{1/3}$	v. sopra
Convezione naturale Piastra orizzontale Superficie inferiore di piastra calda o superiore di piastra fredda	$10^5 < Pr Gr_L < 10^{10}$	$Nu = 0.27 (Pr Gr_L)^{1/4}$	v. sopra
Convezione naturale Cilindro orizzontale	$10^{-5} < Pr Gr_D < 10^{12}$	$Nu = \left\{ 0.60 + \frac{0.387(Pr Gr_D)^{1/6}}{\left[1 + (0.559/Pr)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2$	Incropera p.502. Per $10^3 < Gr_D < 10^9$ si puo' usare: $Nu = 0.53 (Pr Gr_D)^{1/4}$ (v. Kreith p.396)
Convezione naturale Cilindro verticale	$D/L \geq (35/Gr_L^{1/4})$	Usare la correlazione per piastre verticali	Incropera p.494. Correlazioni piu' accurate, V. Lienhard p.360.

NOTE: Se non specificato altrimenti, le proprieta' fisiche devono essere valutate alla temperatura del $T_f = (T_r + T_s) / 2$. La T_r e' la temperatura all'infinito per flussi esterni, mentre per flussi interni e' la temperatura di miscela.

Tabella A6.1: principali correlazioni di scambio termico per convezione.

ESERCIZI

ESERCIZIO 9.1

Consideriamo una parete di laterizio di spessore $s=0.25$ m. Il laterizio ha una conducibilità pari a 0.5 W/mK. Tale parete separa due ambienti, a temperatura T_i e T_e pari rispettivamente a 20 °C e 0 °C. Supposto che i coefficiente di scambio termico lato esterno e lato interno siano $h_{c,i}= 10$ W/m² K e $h_{c,e} = 25$ W/m² K, calcolare:

- la conduttanza della parete
 - il flusso termico scambiato
 - le temperature delle due estremità della parete
- [a) 1.56 W/m² K; b) 31.25 W/m²; c) 16.9 °C, 1.25 °C]

ESERCIZIO 9.2

L'involucro di un frigorifero si può considerare un parallelepipedo di dimensioni $L \times P \times H = 0.6 \times 0.6 \times 1.5$ m. La parete è costituita da uno strato di schiuma espansa di spessore $s_1 = 3$ cm e di conducibilità termica $k_1 = 0.05$ W/m K, ricoperto da una lamiera in acciaio di spessore $s_2 = 0.5$ mm e di conducibilità termica $k_2 = 40$ W/m K. La base del frigorifero si può considerare adiabatica. Le altre pareti hanno un coefficiente di convezione interno $h_{c,i} = 3$ W/m² K e uno esterno $h_{c,e} = 10$ W/m² K. La temperatura interna all'ambiente vale $T_A = 20$ °C e quella interna vale $T_i = -25$ °C. Trascurando l'effetto degli spigoli, valutare la potenza termica che è necessario asportare tramite la macchina frigorifera in condizioni di regime per compensare l'afflusso di calore attraverso le pareti stesse

[171 W] (NOTA: questa costituisce solo un'aliquota della potenza del frigorifero, dato che ulteriore potenza è necessaria per refrigerare i cibi introdotti a temperatura ambiente e per compensare gli afflussi di aria calda dovuti alle aperture dello sportello).

ESERCIZIO 9.3

Una parete in muratura di dimensioni 4×3 m reca al centro una finestra di 1.5×1 m. Il materiale della parete, che si può considerare omogeneo, ha uno spessore $s_1 = 12$ cm ed una conducibilità termica $k_1 = 0.5$ W/m K. La finestra, in vetro, ha uno spessore $s_2 = 2$ mm ed una conducibilità termica $k_2 = 1.1$ W/m K. Il coefficiente di convezione interno vale $h_{c,i} = 5$ W/m² K e quello esterno vale $h_{c,e} = 15$ W/m² K. Entrambi i coefficienti sono stati già corretti per tenere conto dell'irraggiamento. La temperatura interna all'ambiente vale $T_i = 20$ °C e quella esterna vale $T_e = 5$ °C. Nell'ipotesi che la parete si possa considerare piana ed infinita, in modo che la temperatura in essa vari solo con lo spessore, determinare la potenza termica scambiata attraverso la medesima e le percentuali di detta potenza scambiate attraverso il muro ed attraverso la finestra.

[395 W, di cui il 21 % attraverso la finestra]

ESERCIZIO 9.4

La superficie di sabbia di una spiaggia riceve dal sole in una giornata estiva una potenza $W_{irr} = 400$ W/m², che viene integralmente assorbita da essa. Il coefficiente di scambio termico con l'aria soprastante (corretto per tener conto dell'irraggiamento) vale $h_c = 15$ W/m² K e la temperatura dell'aria esterna vale $T_A = 35$ °C. Calcolare la temperatura a cui si porta la sabbia in condizioni di regime. Ripetere il calcolo per una superficie che, essendo opportunamente verniciata, rinvia senza assorbire il 90% della potenza solare incidente.

NOTA: Trascurare lo scambio termico conduttivo tra la superficie ed il sottosuolo.

[61 °C; 38 °C]

ESERCIZIO 9.5

Il tetto di una baracca in lamiera, di dimensioni $P \times L = 4 \times 3.5$ m, è costituito da un lamierino di acciaio di spessore $s_1 = 1.5$ mm e di conducibilità termica $k_1 = 40$ W/m K. Il coefficiente di convezione interno vale $h_{cI} = 5$ W/m² K e quello esterno vale $h_{cE} = 15$ W/m² K (entrambi i coefficienti sono stati già corretti per tenere conto dell'irraggiamento). La temperatura interna all'ambiente vale $T_I = 20$ °C e quella esterna vale $T_E = 5$ °C. Valutare la potenza termica scambiata attraverso il tetto. Determinare quale spessore, s_2 , di conducibilità termica $k_2 = 0.05$ W/m K debba essere posto sul tetto per ridurre del 90% tale potenza.

[787 W; 12 mm]

ESERCIZIO 9.6

Si calcoli la spessore di lana di vetro isolante ($k = 0,03$ W/m K) necessario affinché la temperatura della superficie esterna di un forno da cucina non sia maggiore di 50 °C. Un termostato garantisce che la temperatura dell'aria interna del forno non superi $T_I = 300$ °C, la temperatura dell'ambiente esterno vale $T_E = 14$ °C e il coefficiente di convezione tra la parete del forno e l'ambiente circostante (sia interno che esterno) è $h_{cE} = h_{cI} = 10$ W/m² K. (Sugg. Si può trascurare il contributo delle pareti metalliche del forno stesso).

[17.8 mm]

ESERCIZIO 9.7

In una barra cilindrica di un materiale metallico del diametro di 3 cm è presente una generazione volumetrica di calore pari a $q_s = 10^6$ W/m³ che supponiamo uniformemente distribuita. La barra è lambita da un gas alla temperatura $T_a = 30$ °C con coefficiente di scambio termico $h_c = 100$ W/m²K (convezione forzata). Calcolare:

- la temperatura superficiale T_p della barra;
- la potenza termica ceduta dal gas per unità di lunghezza.

[a) 105 °C; b) 707 W/m]

ESERCIZIO 9.8

Una barra di rame di un conduttore elettrico, di spessore $t = 1$ cm, di altezza H e di lunghezza L molto maggiore delle due dimensioni precedenti, è percorsa da una corrente in bassa tensione di 5000 A. La potenza dissipata in essa è data, come è noto, da $W = RI^2$, dove $R = \rho L / t H$ è la resistenza elettrica della barra e la resistività elettrica del rame vale $\rho = 0.017$ μOhm m. Il coefficiente di scambio termico con l'aria circostante (corretto per tener conto dell'irraggiamento) vale $h_c = 10$ W/m² K e la temperatura dell'aria esterna vale $T_A = 20$ °C. Calcolare quale altezza deve avere la barra affinché la sua temperatura superficiale non superi i 40 °C.

[0.32 m]

ESERCIZIO 9.9

Una certa quantità di carbone giace disposta in posizione orizzontale su una superficie. Lo spessore dello strato di carbone è di 2 metri. Tale letto genera una quantità volumetrica di calore pari a 20 W/m³. La temperatura del carbone è uniforme.

La temperatura dell'ambiente T_∞ è pari a 25 °C e il coefficiente di scambio termico tra la massa di carbone e il gas è pari a 5 W/m² K. Calcolare la temperatura della superficie superiore della massa di carbone. Si consideri la superficie inferiore isolata.

[33 °C]

ESERCIZIO 9.10

Una resistenza da scaldabagno ha la forma di un cilindro di lunghezza $L = 600$ mm e diametro $D = 20$ mm. In condizioni normali essa dissipa una potenza $W = 1$ kW, stando sommersa in acqua alla temperatura $t_l = 20$ °C, avente un coefficiente di scambio convettivo di $h_w = 800$ W/m² K.

- a) Quale è la temperatura a regime della superficie esterna della resistenza? (Si trascuri il calore dissipato dalle basi del cilindro).
b) Quale è il valore della temperatura della superficie esterna a regime se viene a mancare l'acqua e la resistenza viene a trovarsi in aria a 20 °C con coefficiente di convezione $h_a = 20$ W/m² K? (Si supponga di poter trascurare anche l'effetto dell'irraggiamento).

[a) $T = 53.2$ °C, b) $T = 1346$ °C] (NOTA: in questo secondo caso il risultato abbastanza irrealistico è indice del fatto che in realtà la resistenza brucia).

ESERCIZIO 9.11 (adatto alla soluzione tramite calcolatore)

Con riferimento all'esercizio precedente, se la resistenza ha una massa $M = 100$ g e un calore specifico $c = 700$ J/kg K

- a) stimare la durata del transitorio, ovvero il tempo che trascorre da quando viene a mancare l'acqua a quando la resistenza raggiunge una temperatura molto vicina al valore di regime. (Sugg.: porla uguale a cinque costanti di tempo).

Supponendo che la resistenza bruci alla temperatura di 700 °C, valutare il tempo necessario a raggiungere tale temperatura nei seguenti casi:

1. $h_a = 20$ W/m² K
2. $h_a = 40$ W/m² K
3. $h_a = 100$ W/m² K

[1) ~ 450 s]

Appunti ed Esercizi di *Fisica Tecnica*

Cap. 10. Elementi di psicrometria

Nicola Forgione

Paolo Di Marco

Versione 2016.00 – 02.10.2016.

La presente dispensa è redatta ad esclusivo uso didattico per gli allievi dei corsi di studi universitari dell'Università di Pisa. Gli autori se ne riservano tutti i diritti. Essa può essere riprodotta solo totalmente ed al fine summenzionato, non può essere alterata in alcuna maniera o essere rivenduta ad un costo superiore a quello netto della riproduzione. Ogni altra forma di uso e riproduzione deve essere autorizzata per scritto dall'autore. Gli autori saranno grati a chiunque segnali loro errori, inesattezze o possibili miglioramenti.

1. Definizione

La psicrometria è la scienza che studia le proprietà termodinamiche delle miscele aria-vapore e gli effetti di queste miscele sui materiali e sul comfort umano.

2. Miscela aria-vapore

L'aria è una miscela di azoto (78 % in volume), ossigeno (21 % in volume) e di piccoli quantitativi di altri gas. **L'aria atmosferica** contiene anche vapore d'acqua (o umidità). Nel caso che l'aria non contenga vapore viene detta **aria secca** mentre nel caso opposto viene detta **aria umida**.

Lo studio dell'aria atmosferica come miscela gas-vapore è alla base delle applicazioni di condizionamento dell'aria. Infatti, sebbene la quantità di acqua contenuta nell'aria ambiente sia piccola essa riveste un'importanza fondamentale per il benessere dell'uomo.

La temperatura dell'aria nelle applicazioni di condizionamento varia tra circa $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ e $50\text{ }^{\circ}\text{C}$. Essa risulta quindi sempre più alta della temperatura critica dell'aria secca ($-141\text{ }^{\circ}\text{C}$) per cui l'aria è in fase gassosa. Inoltre sia l'aria che il vapore si trovano ad una pressione molto minore di quella critica ($p_{a,cr} = 37.7 \cdot 10^5\text{ Pa}$, $p_{v,cr} = 221 \cdot 10^5\text{ Pa}$). L'aria atmosferica può quindi essere trattata come una miscela di gas perfetti la cui pressione è, per la legge di Dalton, la somma delle pressioni parziali dell'aria secca e di quella del vapore.

$$p = p_a + p_v, \dots \begin{cases} p_a V = m_a R_a T, & R_a = 287.06\text{ J/(kg K)} \\ p_v V = m_v R_v T, & R_v = 461.52\text{ J/(kg K)} \end{cases}$$

Dal momento che sia l'aria che il vapore si considerano dei gas perfetti, la loro entalpia sarà funzione solo della temperatura. Se si prende $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ come temperatura di riferimento, con l'acqua allo stato liquido, si ha

$$h_a = c_{pa} T = 1.005 T, \quad h_v = h_{iv} + c_{pv} T = 2501.3 + 1.820 T \quad -10 \leq t \leq 50\text{ }^{\circ}\text{C}$$

le entalpie sono in kJ/kg, mentre le temperature sono in $^{\circ}\text{C}$. Nel seguito verranno definiti per punti le principali proprietà utilizzate per caratterizzare lo stato termodinamico dell'aria umida.

- Il **titolo** dell'aria umida o **umidità specifica**, ω , è la massa di vapore d'acqua contenuta nell'unità di massa d'aria secca:

$$\omega \equiv \frac{m_v}{m_a} = \frac{R_a p_v}{R_v p_a} = 0.622 \frac{p_v}{p - p_v} \Rightarrow \begin{cases} p_a = \frac{0.622}{0.622 + \omega} p \\ p_v = \frac{\omega}{0.622 + \omega} p \end{cases}$$

In una trasformazione a pressione (totale) costante (trasformazioni più comuni) p_a e p_v rimangono separatamente costanti finché rimane costante il titolo ω .

L'umidità specifica è una quantità adimensionale (kg vapore/kg aria secca) ma in taluni casi viene espressa in (g vapore/kg aria secca); in tal caso il suo valore deve essere diviso per 1000 prima di utilizzarlo nei calcoli.

- Il **volume specifico** dell'aria umida, v , viene valutato con riferimento all'unità di massa dell'aria secca:

$$v \equiv \frac{V}{m_a} = \frac{R_a T}{p_a} = \frac{R_a T}{p - p_v} = \frac{R_a T}{0.622 p} (0.622 + \omega) \quad [\text{m}^3/(\text{kg aria secca})]$$

Nella formula precedente T è in gradi Kelvin.

- La **densità** dell'aria umida, ρ , è definita come la massa d'aria umida contenuta nell'unità di volume:

$$\rho \equiv \frac{m_a + m_v}{V} = \frac{m_a}{V} (1 + \omega) = \frac{(1 + \omega)}{v} = \frac{0.622 p}{R_a T} \left(\frac{1 + \omega}{0.622 + \omega} \right) \quad [\text{kg/m}^3]$$

Dalla formula precedente si vede che, a parità di temperatura e di pressione totale della miscela aria-vapore, la densità è una funzione decrescente di ω e, quindi, che l'aria più umida è anche più leggera. Questo comportamento è importante per mantenere le condizioni di flusso nelle torri di raffreddamento a circolazione naturale, come si vedrà nel seguito.

E', inoltre, importante notare come, in base alle precedenti definizioni, deriva che la densità dell'aria umida *non* risulta uguale al reciproco del volume specifico dell'aria umida.

- L'**entalpia** dell'aria umida, h , per unità di massa dell'aria secca è data dalla somma dell'entalpia dell'aria secca e dell'entalpia del vapor d'acqua:

$$h \equiv \frac{H_a + H_v}{m_a} = h_a + h_v \omega = 1.005T + \omega (2501.3 + 1.82T) \quad [\text{kJ}/(\text{kg aria secca})]$$

- Se ad 1 kg d'aria secca si aggiunge del vapore la pressione parziale del vapore tende ad aumentare fino ad arrivare alla pressione di saturazione corrispondente alla temperatura della miscela. In queste condizioni qualunque altra quantità di vapore aggiunta all'aria condenserà (nebbia). Quando l'aria non sarà più in grado di contenere altro vapore si dirà **satura**. L'**umidità relativa** dell'aria umida, ϕ , è la quantità di vapore che l'aria effettivamente contiene diviso la quantità massima che essa potrebbe contenere alla stessa temperatura:

$$\phi \equiv \frac{m_v}{m_{v,sat}} = \frac{p_v}{p_{v,sat}} \Rightarrow \omega = 0.622 \frac{\phi p_{v,sat}}{p - \phi p_{v,sat}} \quad [\text{adim.}]$$

La pressione di saturazione dell'acqua può essere determinata mediante la seguente formula approssimata: $p_{v,sat} \cong 1000 \cdot \exp[16.6536 - 4030.183/(T + 235)]$, con T espresso in °C.

- La **temperatura di rugiada**, T_r , è definita come quella temperatura alla quale inizia la condensazione quando si impone all'aria un raffreddamento isobaro (temperatura di saturazione alla pressione parziale del vapore):

$$T_r \equiv T_{sat}(p_v)$$

- La **temperatura di bulbo umido**, T_{bu} , è la temperatura misurata con un termometro il cui bulbo sia stato ricoperto con una garza bagnata con acqua pura ed esposto ad una corrente d'aria. Si ha: $T_r \leq T_{bu} \leq T$. Per l'aria satura risulta: $T_{bu} = T_r = T$.

3. I diagrammi psicometrici

L'aria umida è un fluido termodinamico *trivariante*, ovvero sono necessarie tre variabili per determinarne lo stato (la terza variabile può essere ad esempio la quantità di vapore presente nell'unità di massa di aria). Tuttavia, *se si fissa la pressione totale della miscela* rimangono da precisare due sole variabili di stato e si può rappresentare lo stato del sistema su diagrammi piani.

Nello studio dei problemi relativi al condizionamento dell'aria si ricorre ai cosiddetti diagrammi psicometrici (riferiti normalmente alla pressione di 1 atm = 101325 Pa) che consentono una risoluzione grafica dei problemi stessi. Questi diagrammi permettono, note due grandezze tra T , T_{bu} , T_r , ϕ , ω , v , h del miscuglio aria-vapore, di identificare tutte le altre grandezze.

I diagrammi psicometrici più comunemente usati sono tre. Il diagramma psicometrico **di Mollier** è un diagramma ad assi obliqui le cui coordinate sono umidità specifica ed entalpia (v. figura 1), generalmente noto nel formato dovuto all'**ASHRAE** (v. figura 2). Il **diagramma psicometrico Carrier** (v. figura 3) è l'unico che usa le coordinate rettangolari (temperatura di bulbo secco ed umidità specifica).

La differenza tra i diagrammi suddetti è quasi impercettibile: nel diagramma di Mollier, le linee isoentalpiche sono parallele e quelle a temperatura di bulbo asciutto lievemente divergenti; nel diagramma Carrier avviene l'opposto.

Nel diagramma Carrier sull'asse delle ascisse è riportata la temperatura di bulbo secco e sull'asse delle ordinate l'umidità specifica; all'interno sono disegnate diverse famiglie di linee, facilmente distinguibili, il cui significato è riportato nello schema semplificato di figura 4.

Su questo diagramma, oltre alle linee a temperatura e ad umidità specifica costante vengono riportate le linee ad umidità relativa costante, quelle a temperatura di bulbo umido costante e le linee a volume specifico costante. In diagrammi dettagliati vengono pure riportate le linee di deviazione dell'entalpia rispetto ai valori di saturazione (su scale disegnate perpendicolarmente alle linee a temperatura di bulbo umido costante): si tiene così conto del fatto che le isoentalpiche non sono parallele, come precedentemente esposto.

Sul diagramma Carrier è disegnato un **punto di riferimento** o **polo** (in corrispondenza di una temperatura di bulbo secco $t = 24$ °C e di un'umidità relativa $\phi = 50$ %) che, una volta noto il fattore termico (che sarà definito in seguito), consente di rappresentare l'evoluzione dell'aria nei vari processi di condizionamento.

Esistono anche programmi di calcolo, come ad esempio CATT e REFPROP, in grado di calcolare le proprietà dell'aria umida.

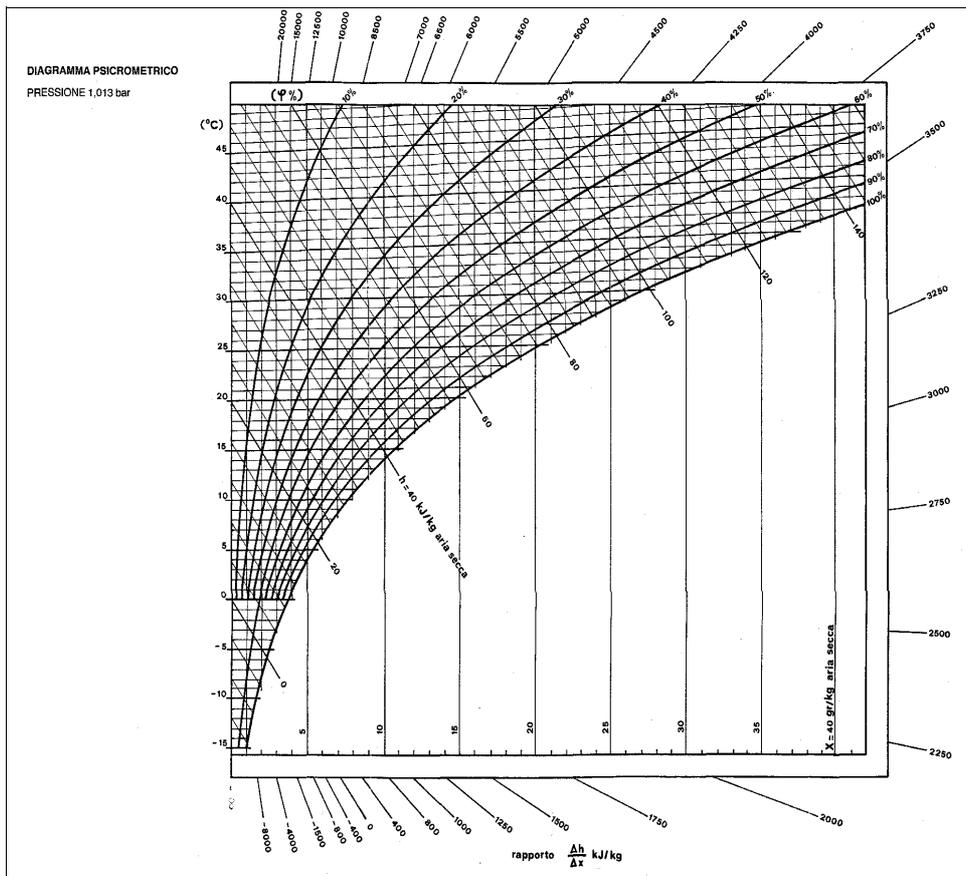


Figura 1: Diagramma psicrometrico di Mollier.

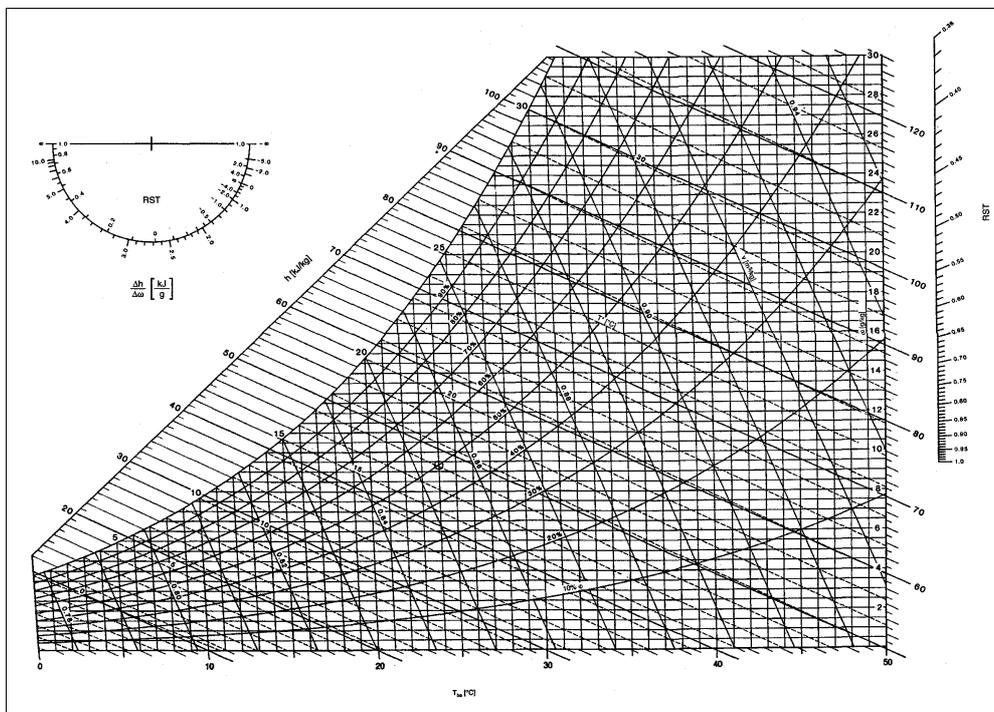


Figura 2: Diagramma psicrometrico di Mollier, versione ASHRAE.

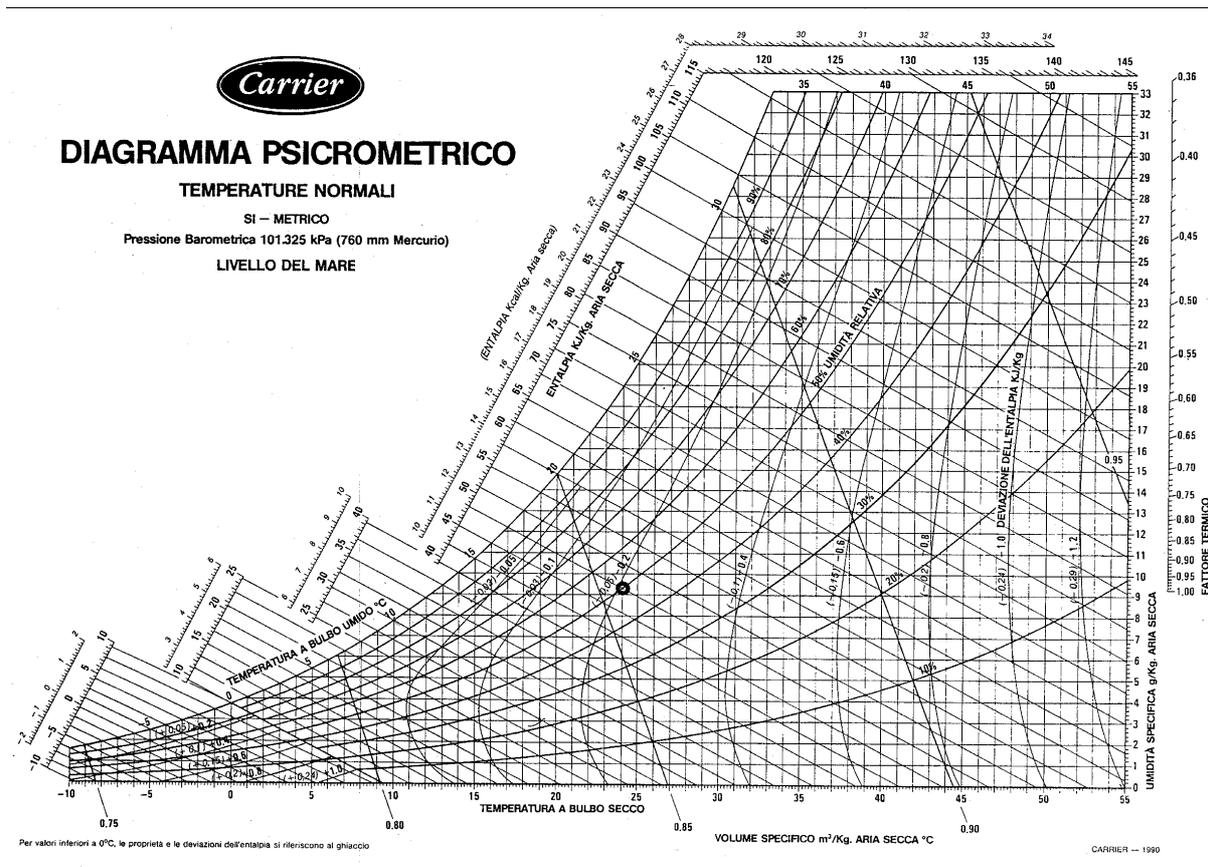


Figura 3: Diagramma psicrometrico Carrier.

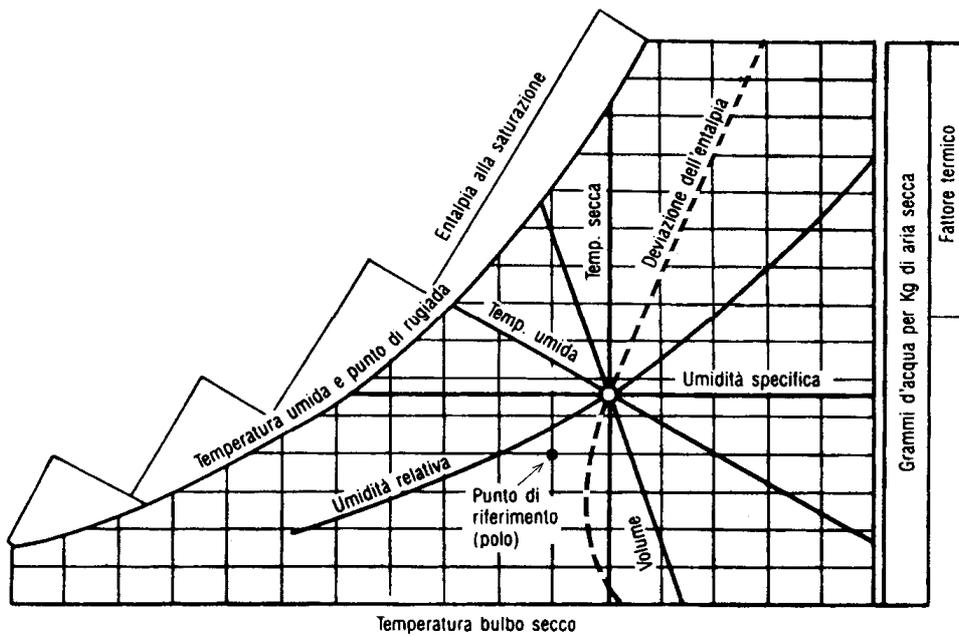


Figura 4: Significato delle linee sul diagramma psicrometrico Carrier.

4. Equazioni di bilancio delle trasformazioni per il condizionamento dell'aria

Si consideri un sistema aperto a regime in cui entrano delle portate G_i ed escono delle portate G_u d'aria. Inoltre nel sistema entrano (o escono) delle portate G_l di acqua (allo stato liquido o vapore). Il sistema scambia con l'ambiente una potenza termica W_t ed una potenza meccanica W'_m . In queste condizioni, possiamo scrivere i bilanci di massa (aria secca ed acqua) ed energia come segue.

Bilancio di massa dell'aria secca

$$\sum_i G_i - \sum_u G_u = 0$$

Bilancio di massa dell'acqua

$$\sum_i G_i \omega_i - \sum_u G_u \omega_u \pm \sum G_l = 0$$

Bilancio di energia dell'aria umida

$$\sum_i G_i h_i - \sum_u G_u h_u \pm \sum G_l h_l + W_t - W'_m = 0$$

Le portate massiche di aria, G , sono espresse in (kg di aria secca / s) e quindi per una corrente di aria umida non rappresenta la portata massica totale. Questa scelta risiede nel fatto che la portata massica espressa in termini della sola aria secca rimane costante in presenza di umidificazione o deumidificazione della corrente di aria umida.

La temperatura di saturazione adiabatica

Un metodo pratico per determinare l'umidità specifica e l'umidità relativa dell'aria umida che si trovi in certe condizioni termoigrometriche (stato 1) è quello di far subire all'aria una trasformazione di saturazione adiabatica (vedi figura 5).

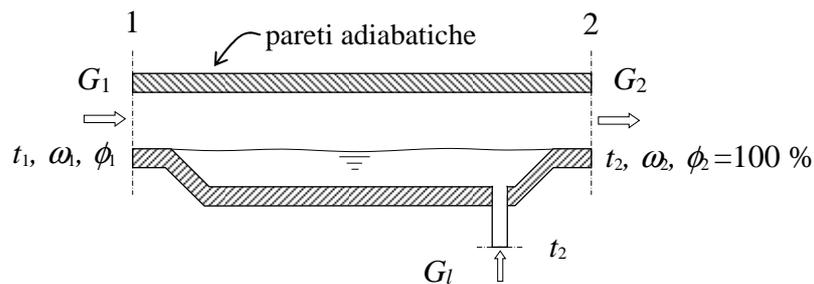


Figura 5: Saturatore adiabatico.

Risolvendo infatti le equazioni di bilancio per un saturatore adiabatico:

$$\begin{cases} G_1 - G_2 = 0 & \text{(bilancio in massa dell'aria secca)} \\ G_1 \omega_1 - G_2 \omega_2 + G_l = 0 & \text{(bilancio in massa dell'acqua)} \\ G_1 h_1 - G_2 h_2 - G_l h_{l,2} = 0 & \text{(bilancio di energia dell'aria umida)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G_2 = G_1 = G \\ G_l = G(\omega_2 - \omega_1) \\ h_2 - h_1 = h_{l,2}(\omega_2 - \omega_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \omega_2 - \frac{(h_2 - h_1)}{h_{l,2}}$$

Se si ipotizza che l'aria in uscita sia satura ($\phi=100\%$) e che l'acqua di reintegro si trovi alla temperatura t_2 , l'unica incognita nelle precedenti equazioni è ω_1 (si noti che h_1 può essere scritta in funzione di ω_1). L'umidità specifica e quella relativa per lo stato 1 possono quindi essere determinate, in modo indiretto, misurando la pressione e la temperatura dell'aria all'ingresso ed all'uscita di un sistema che realizza una trasformazione di saturazione adiabatica.

La temperatura di uscita del saturatore adiabatico, detta **temperatura di saturazione adiabatica**, è una proprietà termodinamica dell'aria umida nello stato di ingresso. La temperatura di saturazione adiabatica è compresa tra la temperatura di bulbo secco e la temperatura di rugiada (vedi figura 6). Per miscele aria-vapore alla pressione atmosferica la temperatura di saturazione adiabatica è molto vicina alla temperatura di bulbo umido (misurabile ad esempio con uno psicrometro a fionda).

Notare che dal punto di vista teorico la temperatura di saturazione adiabatica e quella di bulbo umido sono due concetti differenti, anche se nella pratica i due valori coincidono. Dato il piccolo valore della $h_{l,2}$, in pratica una trasformazione di saturazione adiabatica è anche pressoché isoentalpica.

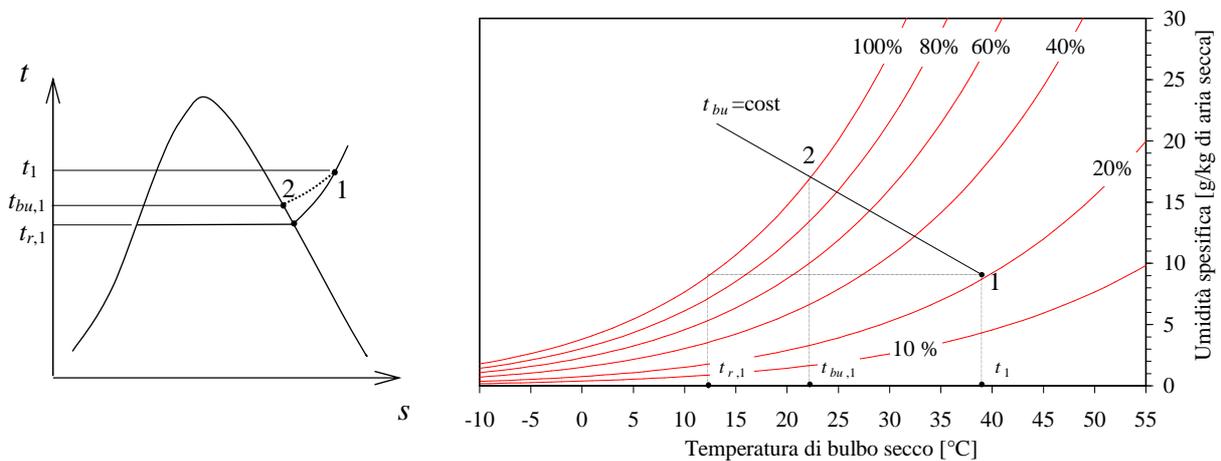


Figura 6: Temperature di bulbo secco, di bulbo umido e di rugiada.

5. Principali processi di trasformazione dell'aria umida

Processo di riscaldamento sensibile (o raffreddamento sensibile) dell'aria umida

Questi processi avvengono senza sottrazione o addizione di acqua ($G_l = 0$). Il processo è analogo a quello che avviene in uno scambiatore di calore a superficie. L'elemento scaldante può essere costituito da una serpentina in cui scorre acqua calda o da una resistenza elettrica, mentre quello refrigerante può essere costituito da una serpentina in cui scorre acqua fredda, o dall'evaporatore di un impianto frigorifero.

Bilancio di massa dell'aria secca

$$G_1 - G_2 = 0 \Rightarrow G_1 = G_2 = G$$

Bilancio di massa dell'acqua

$$G_1 \omega_1 - G_2 \omega_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_1 = \omega_2}$$

Bilancio di energia dell'aria umida

$$G_1 h_1 - G_2 h_2 + W_t = 0 \Rightarrow \boxed{W_t = G(h_2 - h_1)}$$

Durante il riscaldamento l'umidità relativa dell'aria diminuisce anche se l'umidità specifica rimane costante (il contrario si verifica nel caso di raffreddamento). E' questo il motivo per il quale, generalmente, un processo di riscaldamento è sempre accompagnato da un processo di umidificazione, mentre un processo di raffreddamento è sempre associato ad un processo di deumidificazione.

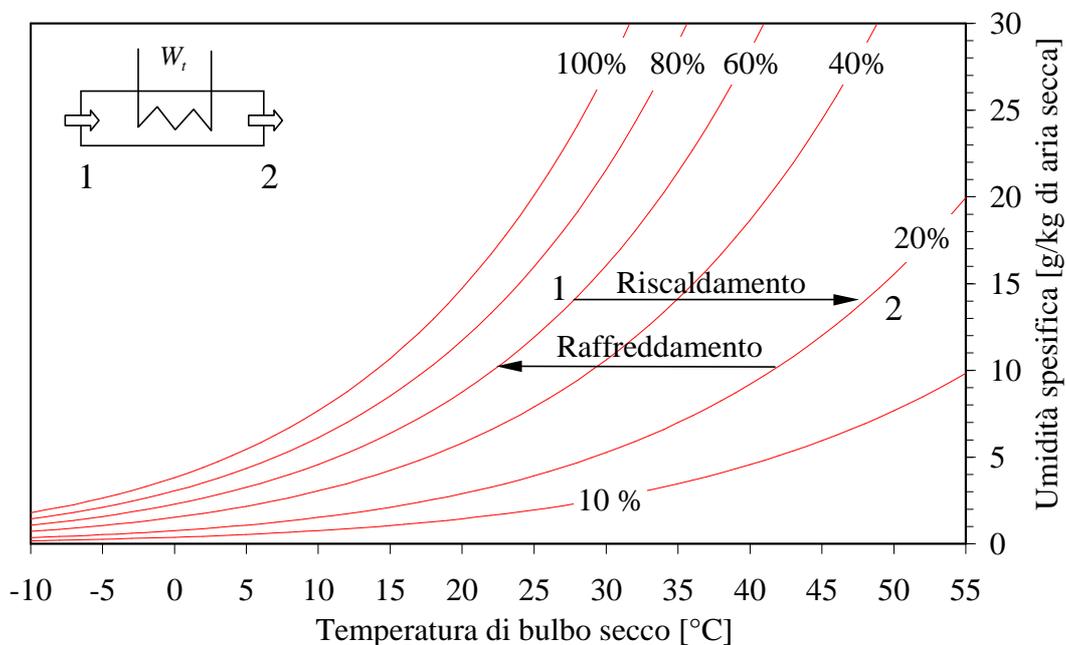


Figura 7: Processi di riscaldamento e raffreddamento sensibile.

ESEMPIO 14.1 – Riscaldamento sensibile

Si abbia una portata di d'aria di 0.5 kg/s a 24 °C e 50 % di umidità relativa. Determinare la potenza termica sensibile che bisogna fornire alla corrente d'aria per aumentare la sua temperatura di bulbo secco di 10 °C. Disegnare, inoltre, la trasformazione termoigrometrica sul diagramma Carrier.

L'umidità specifica e l'entalpia dell'aria umida in ingresso ed in uscita dall'unità di riscaldamento possono essere determinate facendo uso delle seguenti formule (o mediante il programma CATT, oppure in maniera approssimata mediante un diagramma psicrometrico):

$$p_{v,sat} \cong 1000 \cdot \exp\left(16.6536 - \frac{4030.183}{t + 235}\right) \text{ [Pa]}$$

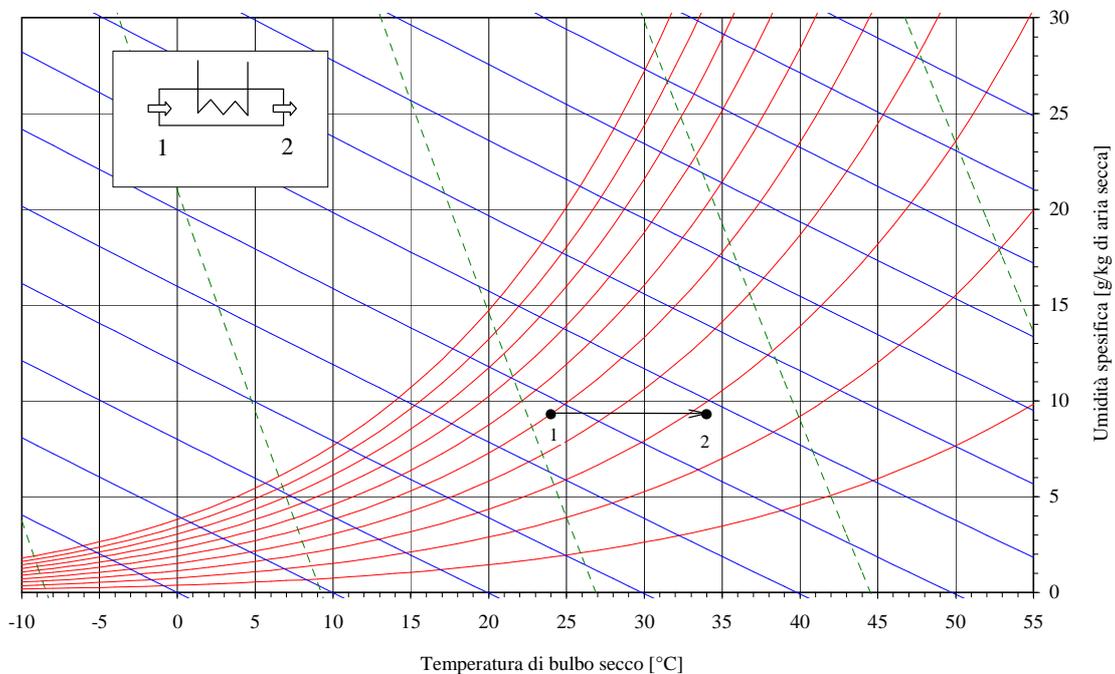
$$\omega = 0.622 \frac{\phi p_{v,sat}}{p - \phi p_{v,sat}}$$

$$h = h_a + h_v \omega = 1.005t + 2501.3\omega + 1.820t\omega \text{ [kJ/kg]}$$

	t [°C]	ϕ [%]	$p_{v,sat}$ [Pa]	ω [-]	h [kJ/kg]
stato 1	24	50	2983	0.00929	47.77
stato 2	34	28	5320	0.00929	57.99

La potenza termica sensibile che bisogna fornire alla corrente d'aria umida si ricava dalle equazioni di bilancio e vale:

$$W_t = G(h_2 - h_1) = 5.1 \text{ kW}$$



Processo di mescolamento adiabatico di due correnti d'aria umida

In questo processo si mescolano due correnti d'aria umida senza apporto di energia dall'esterno. Il processo è analogo a quello che avviene in uno scambiatore di calore a miscelamento.

Bilancio di massa dell'aria secca

$$G_1 + G_2 - G_3 = 0 \Rightarrow G_3 = G_1 + G_2$$

Bilancio di massa dell'acqua

$$G_1 \omega_1 + G_2 \omega_2 - G_3 \omega_3 = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\omega_2 - \omega_3}{\omega_3 - \omega_1} = \frac{G_1}{G_2}}$$

Bilancio di energia dell'aria umida

$$G_1 h_1 + G_2 h_2 - G_3 h_3 = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{h_2 - h_3}{h_3 - h_1} = \frac{G_1}{G_2}}$$

Quando due differenti flussi d'aria vengono miscelati adiabaticamente, il punto rappresentativo della miscela (punto 3) sul diagramma psicrometrico (v. figura 8) si trova sulla retta congiungente i due punti originari 1 e 2 ed il rapporto tra le distanze 2-3 su 3-1 è pari al rapporto tra le portate G_1 e G_2 .

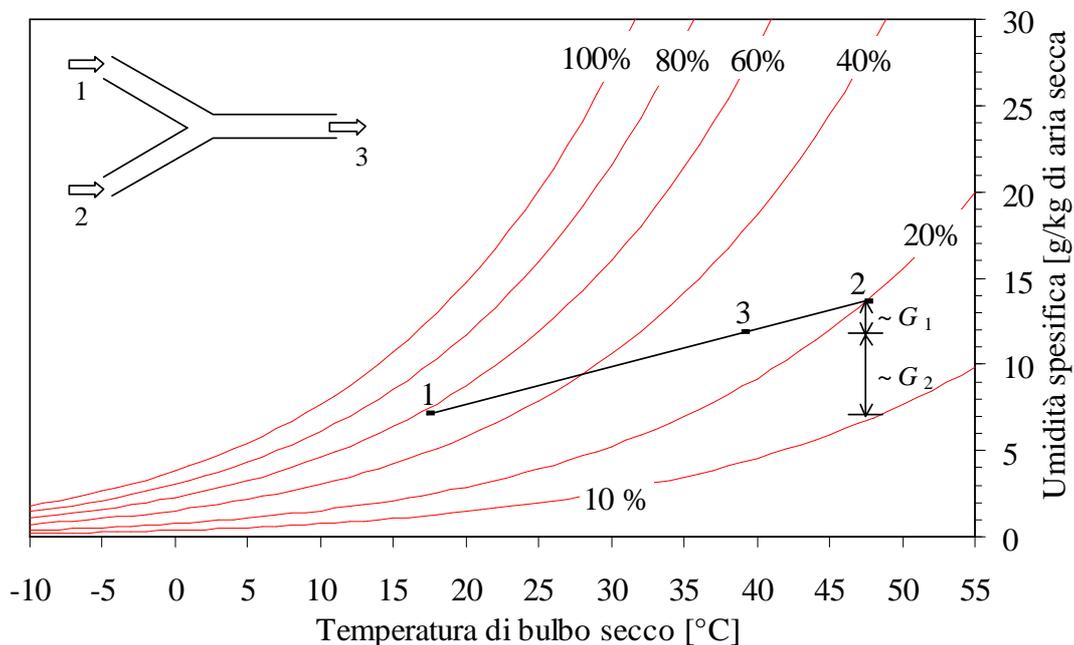


Figura 8: Processo di mescolamento adiabatico.

ESEMPIO 14.2 – Mescolamento adiabatico

Si mescolino una portata di 0.5 kg/s d'aria a 24 °C e 50 % di umidità relativa con 0.1 kg/s a 34 °C e 70 % di umidità relativa.

Determinare le condizioni termoigrometriche dell'aria umida in uscita dall'unità di miscelamento. Disegnare, inoltre, la trasformazione termoigrometrica sul diagramma Carrier.

L'umidità specifica e l'entalpia delle due correnti d'aria umida in ingresso al miscelatore possono essere determinate facendo uso delle seguenti formule (o mediante il programma CATT, oppure in maniera approssimata mediante un diagramma psicrometrico):

$$p_{v,sat} \cong 1000 \cdot \exp\left(16.6536 - \frac{4030.183}{t + 235}\right) \text{ [Pa]}$$

$$\omega = 0.622 \frac{\phi p_{v,sat}}{p - \phi p_{v,sat}}$$

$$h = h_a + h_v \omega = 1.005t + 2501.3\omega + 1.820t\omega \text{ [kJ/kg]}$$

	t [°C]	ϕ [%]	$p_{v,sat}$ [Pa]	ω [-]	h [kJ/kg]
stato 1	24	50	2983	0.00929	47.77
stato 2	34	70	5320	0.02373	94.99

Il titolo e l'entalpia della corrente d'aria umida in uscita dal miscelatore possono essere determinati mediante le equazioni di bilancio e valgono, rispettivamente:

$$\omega_3 = \frac{G_1 \omega_1 + G_2 \omega_2}{G_1 + G_2} = 0.0117$$

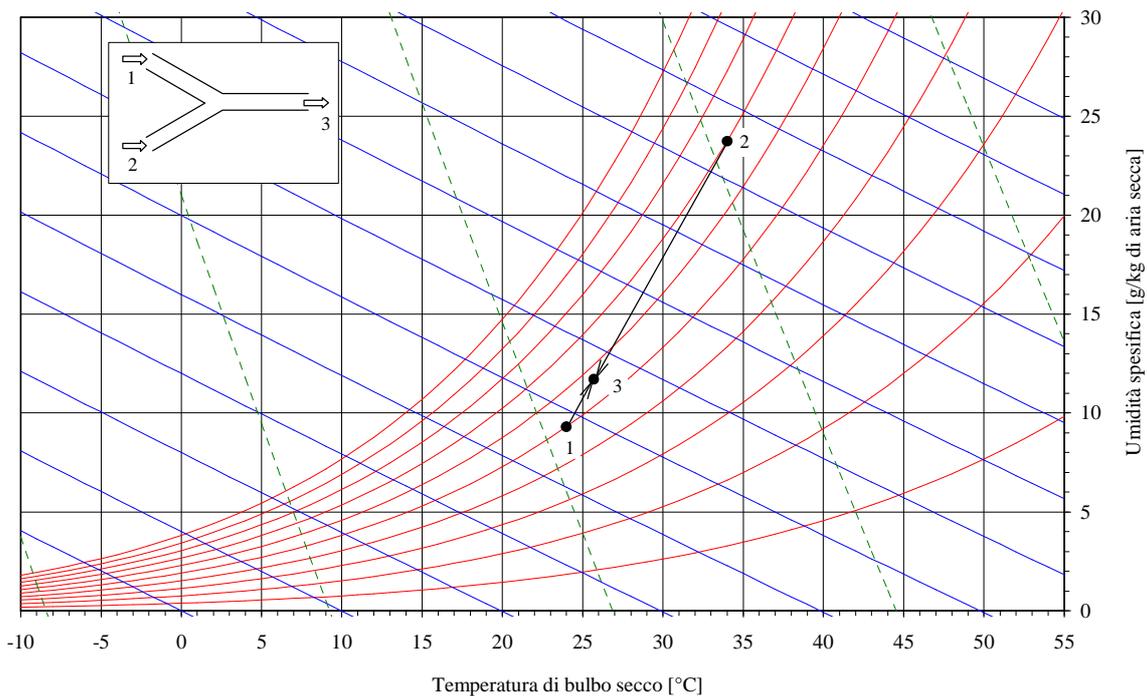
$$h_3 = \frac{G_1 h_1 + G_2 h_2}{G_1 + G_2} = 55.64 \text{ kJ/kg}$$

Noti il titolo e l'entalpia dell'aria umida nello stato 3, è possibile calcolare la temperatura di bulbo secco e l'umidità specifica facendo uso delle seguenti relazioni:

$$t_3 = \frac{h_3 - 2501.3\omega_3}{1.005 + 1.820\omega_3} = 25.7 \text{ °C}$$

$$\phi_3 = \frac{\omega_3}{\omega_3 + 0.622 \frac{p}{p_{v,sat}(t_3)}}$$

	t [°C]	ϕ [%]	$p_{v,sat}$ [Pa]	ω [-]	h [kJ/kg]
stato 3	25.7	56.7	3302	0.0117	55.64



Processo di raffreddamento con deumidificazione dell'aria umida

Nella maggior parte degli impianti di condizionamento estivo dell'aria si richiedono, contemporaneamente, il raffreddamento e la deumidificazione dell'aria trattata.

Bilancio di massa dell'aria secca

$$G_1 - G_2 = 0 \Rightarrow G_1 = G_2 = G$$

Bilancio di massa dell'acqua

$$G_1 \omega_1 - G_2 \omega_2 - G_l = 0 \Rightarrow \boxed{G_l = G (\omega_1 - \omega_2)}$$

Bilancio di energia dell'aria umida

$$G_1 h_1 - G_2 h_2 - G_l h_l + W_t = 0 \Rightarrow \boxed{h_2 = h_1 - (\omega_1 - \omega_2) h_l + W_t / G}$$

Per il calcolo dell'entalpia del liquido (h_l) si assume che esso sia estratto alla temperatura t_2 (in realtà esso viene estratto a temperature comprese tra quelle del punto 2' e del punto 2). Il contributo dell'entalpia del liquido al bilancio energetico è comunque quasi sempre trascurabile.

L'aria in uscita (condizioni 2) è satura e occorre generalmente un successivo processo di riscaldamento sensibile per riportarla in condizioni di umidità relativa gradevoli.

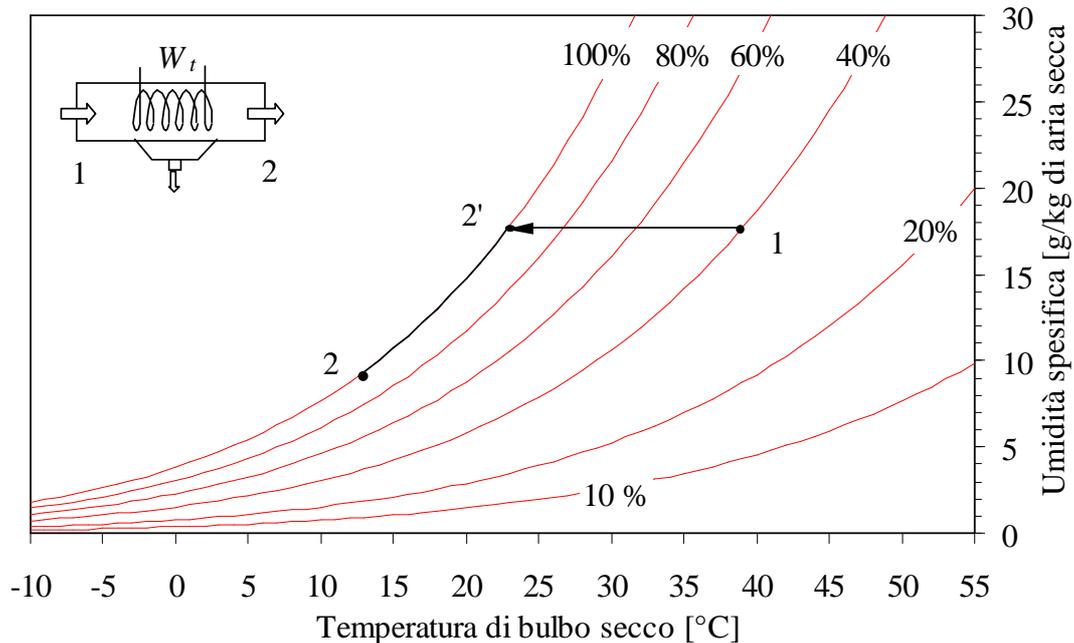


Figura 9: Processo di raffreddamento con deumidificazione.

Processo di deumidificazione con by-pass

In realtà nel processo di raffreddamento con deumidificazione solo una parte d'aria viene in contatto con la superficie raffreddante subendo il processo 1-2 (linea in grassetto del grafico precedente). La rimanente parte dell'aria (aria by-passata) non subisce alcuna trasformazione (rimane cioè nello stato 1). Inoltre, alcune volte si può introdurre intenzionalmente un circuito di by-pass esterno per evitare il successivo processo di riscaldamento sensibile.

All'uscita della batteria di raffreddamento si avrà quindi un mescolamento tra l'aria nelle condizioni S (la temperatura t_s è la temperatura media della superficie della batteria) e l'aria nelle condizioni 1 che risulta in una miscela nelle condizioni 2 (vedi secondo grafico).

Si definisce **fattore di bypass**, F , il rapporto tra la portata d'aria by-passata e quella totale:

$$F \equiv G_{bp} / G$$

Il calore sottratto all'aria umida serve in parte per raffreddarla (calore sensibile) ed in parte per deumidificarla (calore latente). Se si trascura il flusso convettivo d'energia del condensato dal bilancio d'energia discende che:

$$W_{t,tot} \cong G(h_2 - h_1) = W_{t,sens} + W_{t,lat} = G(h_2 - h_3) + G(h_3 - h_1)$$

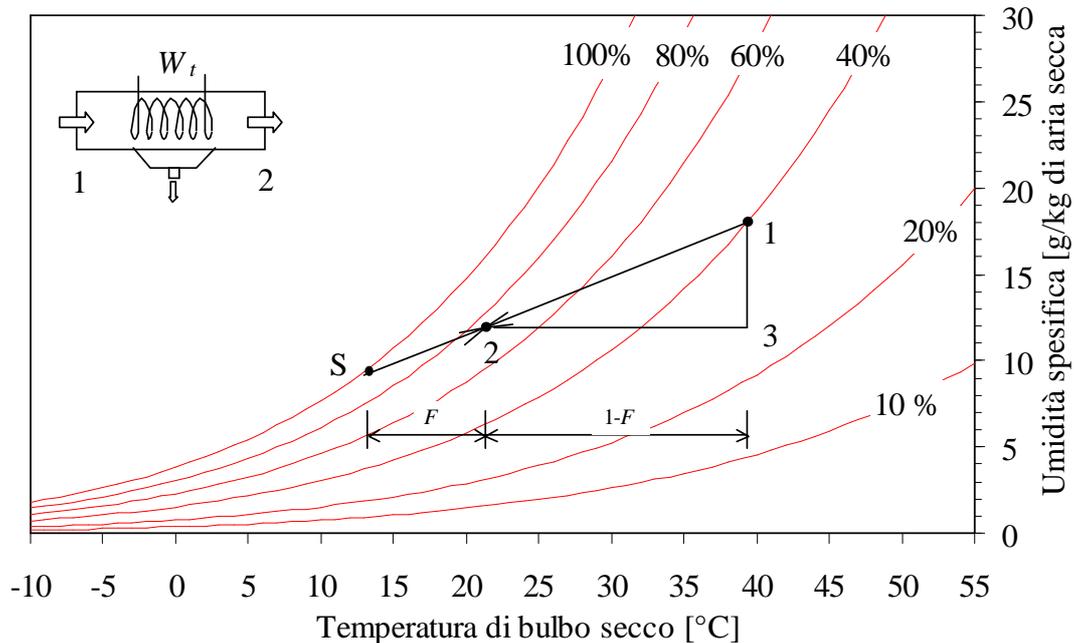


Figura 10: Processo di raffreddamento con deumidificazione.

ESEMPIO 14.3 – Raffreddamento con deumidificazione

Una corrente di 0.1 kg/s d'aria umida passa attraverso un deumidificatore avente una batteria di raffreddamento con una temperatura media della superficie esterna di 12 °C e con un fattore di bypass di 0.1. L'aria umida esterna ha una temperatura di 24 °C ed un'umidità relativa del 70 %.

Determinare le condizioni termoigrometriche dell'aria umida in uscita dal deumidificatore e la potenza termica scambiata con la corrente d'aria. Disegnare la trasformazione termoigrometrica sul diagramma Carrier.

L'umidità specifica e l'entalpia della corrente d'aria umida in ingresso al deumidificatore possono essere determinate facendo uso delle seguenti formule (o mediante il programma CATT, oppure in maniera approssimata mediante un diagramma psicrometrico):

$$p_{v,sat} \cong 1000 \cdot \exp\left(16.6536 - \frac{4030.183}{t + 235}\right) \text{ [Pa]}$$

$$\omega = 0.622 \frac{\phi p_{v,sat}}{p - \phi p_{v,sat}}$$

$$h = h_a + h_v \omega = 1.005t + 2501.3\omega + 1.820t\omega \text{ [kJ/kg]}$$

	t [°C]	ϕ [%]	$p_{v,sat}$ [Pa]	ω [-]	h [kJ/kg]
stato 1	24	70	2983	0.0131	57.46

La frazione $(1 - F_{bp})$ di portata non bypassata esce dal gruppo di raffreddamento ad una temperatura di 12 °C e con un'umidità relativa del 100 %. Se indichiamo con S lo stato

corrispondente a questa frazione di corrente di aria umida, le variabili di stato corrispondenti sono:

	t [°C]	ϕ [%]	$p_{v,sat}$ [Pa]	ω [-]	h [kJ/kg]
stato S	12	100	1401	0.0087	34.13

Il titolo e l'entalpia della corrente totale d'aria umida in uscita dall'umidificatore possono essere determinati considerando che in uscita dal gruppo di refrigerazione avviene un miscelamento tra una portata $(1-F)G$ con proprietà uguali a quelle dello stato S ed una portata $F G$ che si trova nelle condizioni 1:

$$\omega_2 = F \omega_1 + (1-F)\omega_S = 0.0091$$

$$h_2 = F h_1 + (1-F)h_S = 36.46 \text{ kJ/kg}$$

La temperatura e l'umidità specifica dello stato 2 valgono:

$$t_2 = \frac{h_2 - 2501.3\omega_2}{1.005 + 1.820\omega_2} = 13.4 \text{ °C}$$

$$\phi_2 = \frac{\omega_2}{\omega_2 + 0.622} \frac{p}{p_{v,sat}(t_2)} = 95.1 \%$$

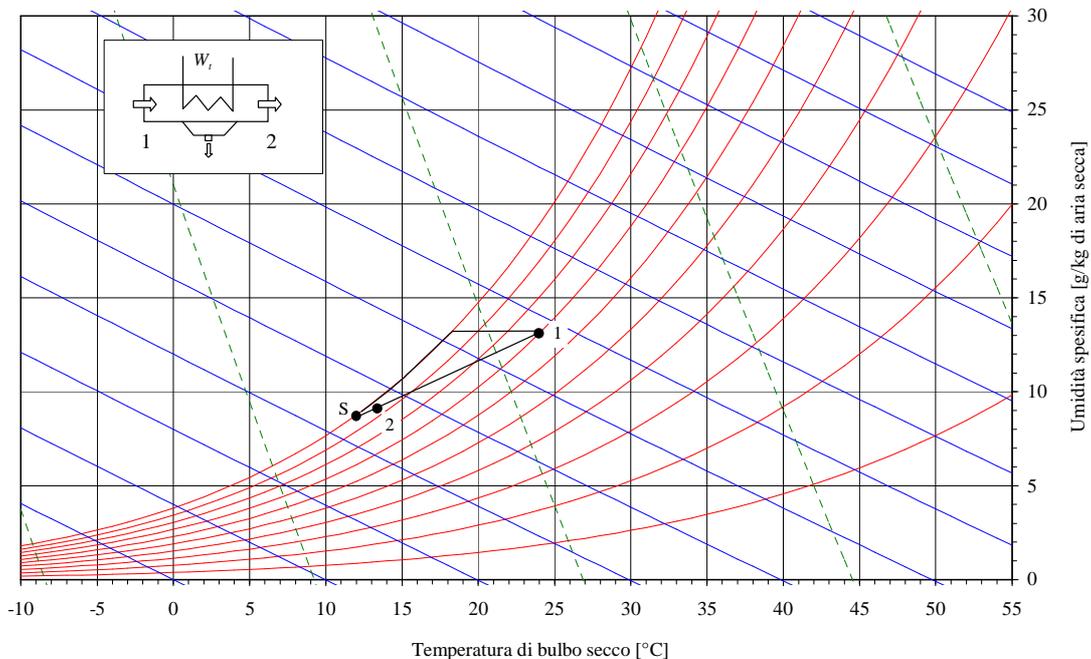
	t [°C]	ϕ [%]	$p_{v,sat}$ [Pa]	ω [-]	h [kJ/kg]
stato 2	13.4	95.1	1535	0.0091	36.46

La potenza termica scambiata con la corrente d'aria umida vale:

$$W_{t,tot} \cong G(h_2 - h_1) = -2.1 \text{ kW}$$

mentre la portata di vapore estratto per condensazione è:

$$G_1 = G(\omega_1 - \omega_2) = 0.4 \text{ g/s}$$



Processo di raffreddamento per evaporazione diretta

Il solo raffreddamento dell'aria umida si può ottenere anche mediante evaporazione di acqua in fase liquida. L'acqua per evaporare deve assorbire calore latente di evaporazione dall'acqua stessa o dall'aria circostante. Sia l'aria che l'acqua possono raffreddarsi durante il processo di evaporazione. Il raffreddamento per evaporazione è un processo identico alla trasformazione di saturazione adiabatica, eccetto per il fatto che non è detto che l'aria in uscita sia satura. Per questo motivo il processo di raffreddamento per evaporazione viene rappresentato sul diagramma psicrometrico come una linea a temperatura di bulbo umido costante (ciò non è esatto se l'acqua viene spruzzata ad una temperatura diversa da quella di uscita dell'aria). Dal momento che le linee a temperatura di bulbo umido costante sono praticamente coincidenti con quelle ad entalpia costante, si può assumere che anche l'entalpia durante questo processo rimanga costante.

Processo di riscaldamento con umidificazione

Nella maggior parte degli impianti di condizionamento invernale dell'aria si richiedono, contemporaneamente, il riscaldamento e l'umidificazione dell'aria trattata. I bilanci della sez. 1-2 sono già stati visti (vedi riscaldamento sensibile) per cui le equazioni di bilancio riportate di seguito sono relative alla sola sezione di umidificazione (2-3)

Bilancio di massa dell'aria secca nella sezione di umidificazione

$$G_2 - G_3 = 0 \Rightarrow G_2 = G_3 = G_1 = G$$

Bilancio di massa dell'acqua nella sezione di umidificazione

$$G_2 \omega_2 - G_3 \omega_3 + G_v = 0 \Rightarrow \boxed{G_v = G(\omega_3 - \omega_2) = G(\omega_3 - \omega_1)}$$

Bilancio di energia dell'aria umida nella sezione di umidificazione

$$G_2 h_2 - G_3 h_3 + G_v h_v = 0 \Rightarrow \boxed{h_3 = h_2 + (\omega_3 - \omega_2)h_v = h_1 + W_{t,sens} / G + (\omega_3 - \omega_1)h_v}$$

Questo processo è caratterizzato da un aumento di entalpia e di umidità specifica dell'aria trattata. La temperatura finale di bulbo secco (T_3) può essere minore, uguale o maggiore di quella iniziale, a seconda del processo di umidificazione. Se si introduce vapore surriscaldato nella sezione di umidificazione, come nell'esempio considerato, si avrà umidificazione (crescita dell'umidità) con contemporaneo riscaldamento. Se l'umidificazione viene realizzata spruzzando acqua nella corrente d'aria, parte del calore latente di evaporazione sarà sottratto all'aria che quindi si raffredda (vedi trasformazione 2-3 riportata in figura 11).

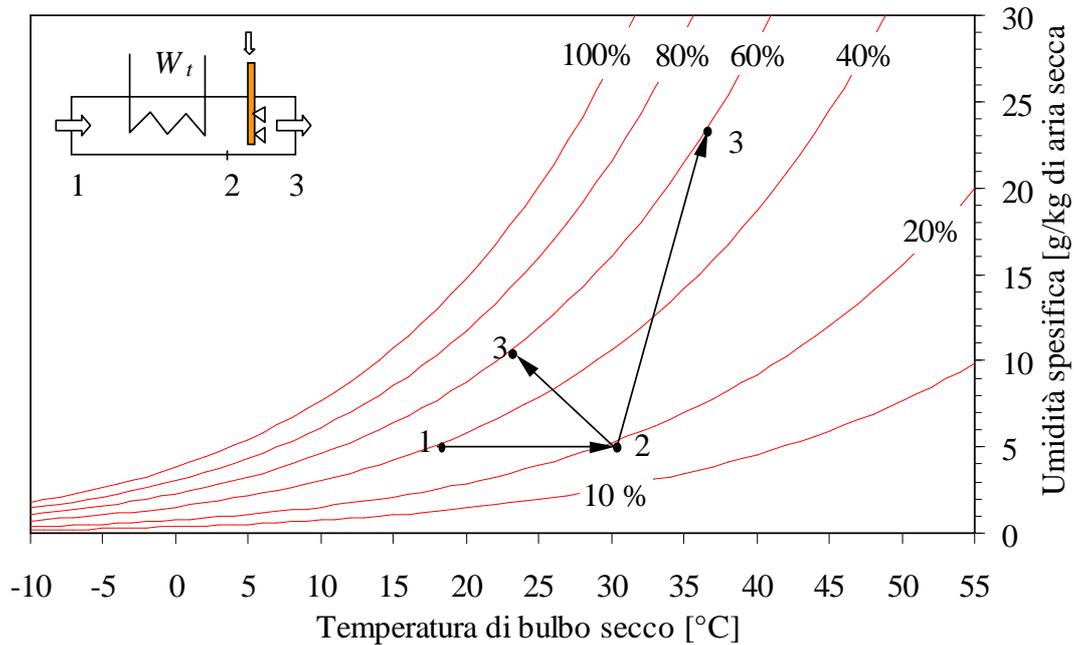


Figura 11: Processo di riscaldamento con umidificazione.

ESEMPIO 14.4 – Riscaldamento con umidificazione

Una corrente di 0.1 kg/s d'aria umida esterna entra in un condizionatore a 15 °C e al 30 % di umidità relativa ed esce a 24 °C e al 50 % di umidità relativa. Il riscaldamento avviene mediante una resistenza elettrica, mentre l'umidificazione avviene con acqua in fase liquida nebulizzata all'interno della corrente d'aria.

Determinare la potenza termica necessaria per il riscaldamento e la portata massica di liquido necessaria per l'umidificazione. Disegnare, inoltre, la trasformazione termoigrometrica sul diagramma Carrier.

L'umidità specifica e l'entalpia della corrente d'aria umida in ingresso ed in uscita dal condizionatore possono essere determinate facendo uso delle seguenti formule (o mediante il programma CATT, oppure in maniera approssimata mediante un diagramma psicrometrico):

$$p_{v,sat} \cong 1000 \cdot \exp\left(16.6536 - \frac{4030.183}{t + 235}\right) \text{ [Pa]}$$

$$\omega = 0.622 \frac{\phi p_{v,sat}}{p - \phi p_{v,sat}}$$

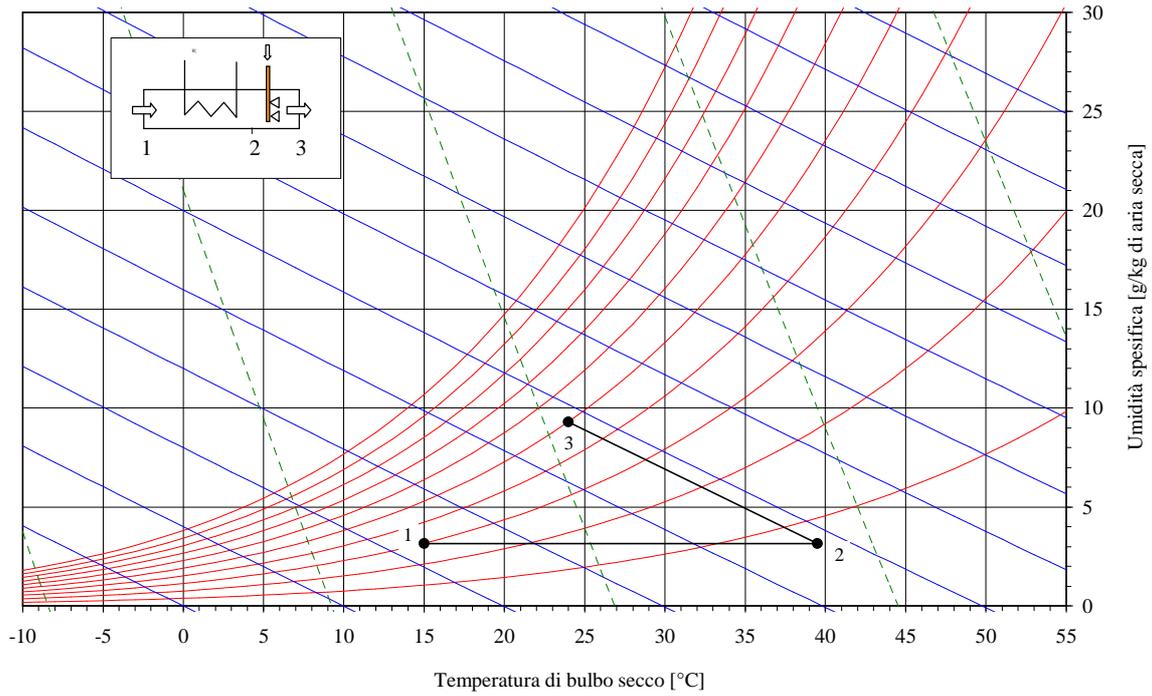
$$h = h_a + h_v \omega = 1.005t + 2501.3\omega + 1.820t\omega \text{ [kJ/kg]}$$

	t [°C]	ϕ [%]	$p_{v,sat}$ [Pa]	ω [-]	H [kJ/kg]
stato 1	15	30	1703	0.00315	23.0
stato 3	24	50	2983	0.00929	47.77
stato 2	39.5	7.1	7183	0.00315	47.77

La potenza termica necessaria per il riscaldamento e la portata massica di liquido necessaria per l'umidificazione valgono, rispettivamente:

$$W_t = G(h_2 - h_1) = 2.5 \text{ kW}$$

$$G_l = G(\omega_3 - \omega_2) = 0.61 \text{ g/s}$$



6. Torri di raffreddamento

Nel processo di conversione dell'energia termica in energia meccanica degli impianti termoelettrici o nel processo di condizionamento, può risultare necessario smaltire una grande quantità di calore verso l'ambiente esterno. Un metodo per trasferire questo calore all'ambiente esterno è quello di far uso delle **torri di raffreddamento**.

Esistono torri di **raffreddamento a secco** (cioè senza contatto tra il fluido motore dell'impianto e la corrente d'aria esterna, ovvero veri e propri scambiatori a superficie) e torri di **raffreddamento ad umido** (o evaporative) nelle quali il fluido motore dell'impianto (acqua calda) viene in intimo contatto con l'aria esterna. In quest'ultimo caso lo scambio di calore tra l'acqua e l'aria avviene per *evaporazione* di una piccola quantità di acqua e, in misura minore, per *convezione*.

Nelle torri di raffreddamento l'aria circola o per **tiraggio naturale** (in questo caso le torri sono a profilo iperbolico e di grande altezza) o per **tiraggio forzato** (in questo caso le torri sono normalmente di forma cilindrica). L'acqua calda generalmente è immessa dall'alto in controcorrente e atomizzata con spruzzatori oppure distribuita per gravità su di una serie di graticci per favorirne il contatto con l'aria immessa dal basso.

Bilancio di massa dell'aria secca

$$G_1 - G_2 = 0 \Rightarrow G_1 = G_2 = G$$

Bilancio di massa dell'acqua

$$G_1 \omega_1 - G_2 \omega_2 + G_3 - G_4 = 0 \Rightarrow \boxed{G_4 = G_3 - G(\omega_2 - \omega_1)}$$

Bilancio di energia dell'aria umida + goccioline di liquido

$$G_1 h_1 - G_2 h_2 + G_3 h_3 - G_4 h_4 = 0 \Rightarrow \boxed{G = \frac{G_3 (h_4 - h_3)}{(h_1 - h_2) + (\omega_2 - \omega_1) h_4}}$$

Il consumo di acqua dovuto all'evaporazione in seno all'aria è dato da:

$$\boxed{G_3 - G_4 = G(\omega_2 - \omega_1)}$$

E' importante notare che la temperatura minima alla quale si può avere l'acqua in uscita dalla torre evaporativa è la temperatura *di bulbo umido* dell'aria umida in ingresso (la torre in questo caso si comporterebbe come un saturatore adiabatico). In una torre a secco la temperatura minima di uscita dell'acqua è invece uguale a quella *di bulbo asciutto* dell'aria in ingresso e quindi (tranne nel caso d'aria satura) superiore alla precedente.

E' possibile definire l'*efficienza* (\mathcal{E}) di una torre di raffreddamento ad umido come il rapporto tra la potenza termica effettivamente sottratta all'acqua e quella massima sottraibile teoricamente:

$$\boxed{\mathcal{E} \equiv \frac{W_t}{W_{t,\max}} \cong \frac{t_3 - t_4}{t_3 - t_{bu,1}}}$$

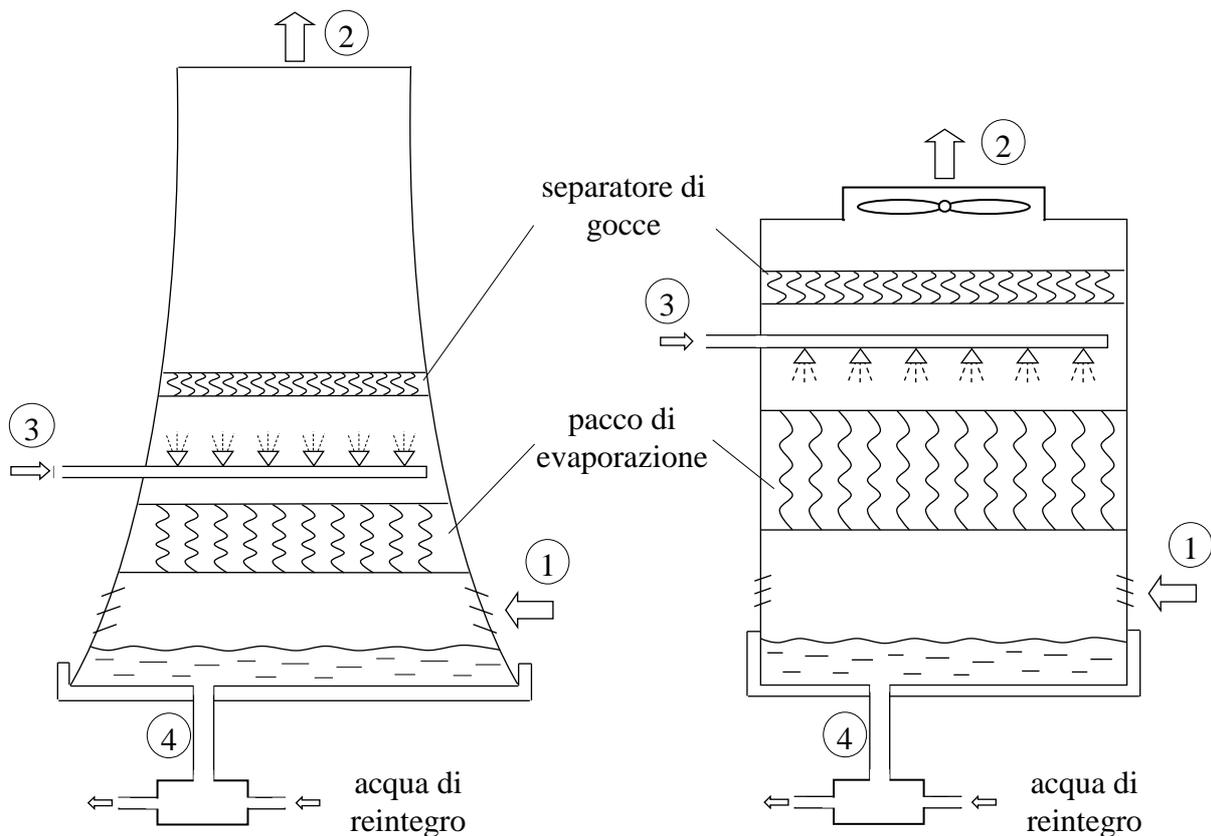


Figura 12: Torre di raffreddamento a circolazione naturale (a sinistra) ed a circolazione forzata (a destra).

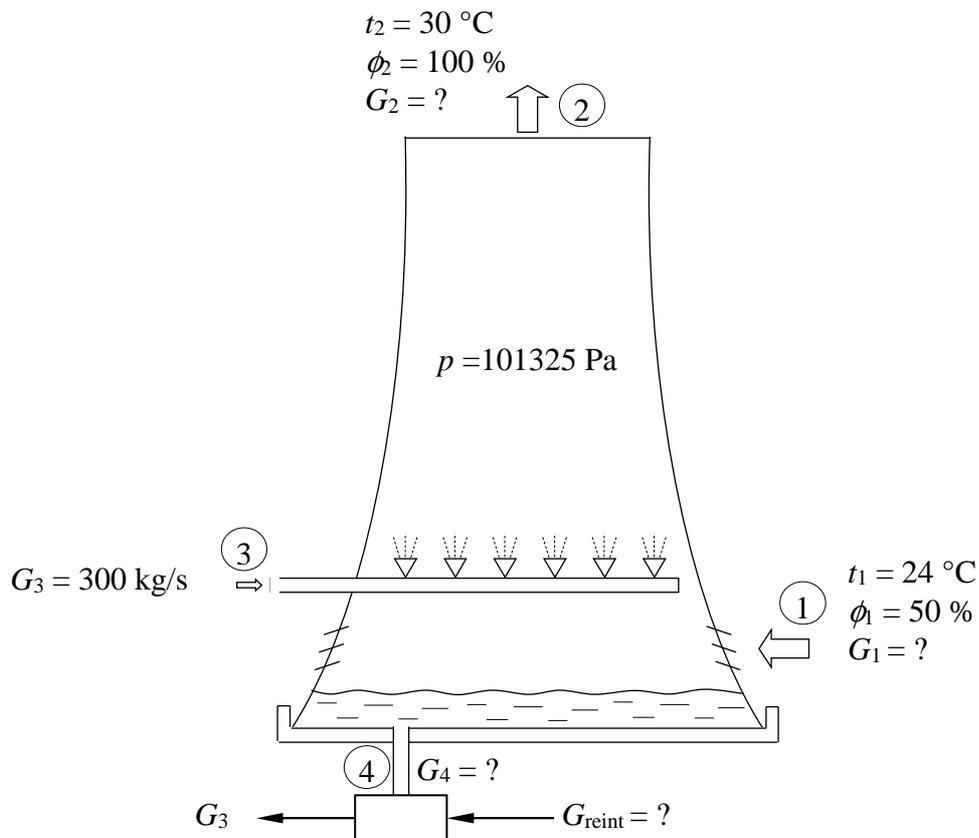
ESEMPIO 14.5 – Torre di raffreddamento

L'acqua uscente dal condensatore di una centrale termoelettrica è inviata ad una serie di torri refrigerative a circolazione naturale. L'aria entra in ciascuna torre con temperatura di bulbo secco e con umidità relativa di 24 °C e 50 %, rispettivamente, e fuoriesce in condizioni di saturazione alla temperatura di 30 °C (vedi figura). La portata massica dell'acqua inviata a ciascuna torre evaporativa è pari a 300 kg/s.

Nell'ipotesi che il processo sia stazionario e che la pressione dell'aria umida nella torre sia 101325 Pa, si calcoli la portata massica d'aria che attraversa la torre e la portata massica di acqua necessaria per il reintegro nei seguenti tre casi:

- l'acqua viene inviata a ciascuna torre con temperatura di 35 °C e fuoriesce con temperatura pari a 23 °C;
- l'acqua viene inviata a ciascuna torre con temperatura di 32 °C e fuoriesce con una temperatura pari a 23 °C;
- l'acqua viene inviata a ciascuna torre con temperatura di 35 °C e fuoriesce con una temperatura pari a 18 °C.

Si valuti inoltre l'efficienza della torre di refrigerazione nei tre casi suddetti.



- a) L'umidità specifica e l'entalpia dell'aria umida in ingresso ed in uscita dalla torre di raffreddamento può essere determinata mediante le seguenti formule (o mediante il programma CATT, oppure in maniera approssimata mediante un diagramma psicrometrico):

$$\omega = 0.622 \frac{\phi p_{v,sat}}{p - \phi p_{v,sat}}$$

$$h = h_a + h_v \omega = 1.005t + 2501.3\omega + 1.820t\omega \quad [\text{kJ/kg}]$$

	t [°C]	ϕ [%]	$p_{v,sat}$ [Pa]	ω [-]	h [kJ/kg]
stato 1	24	50	2983	0.00929	47.77
stato 2	30	100	4246	0.02720	99.7

Le entalpie specifiche dell'acqua in ingresso ed in uscita dalla torre di refrigerazione valgono rispettivamente:

$$h_3 = 4.186 t_3 = 146.5 \text{ kJ/kg}$$

$$h_4 = 4.186 t_4 = 96.3 \text{ kJ/kg}$$

La portata d'aria in ingresso alla torre può essere determinata mediante la seguente formula:

$$G = \frac{G_3 (h_4 - h_3)}{(h_1 - h_2) + (\omega_2 - \omega_1) h_4} = 300 \text{ kg/s}$$

La portata di liquido da reintegrare

$$G_3 - G_4 = G(\omega_2 - \omega_1) = 5.4 \text{ kg/s}$$

Come si può notare bisogna reintegrare solo il 2 % circa della portata di liquido inviata alla torre.

L'efficienza della torre di refrigerazione ad umido può essere valutata con la seguente formula approssimata:

$$\varepsilon \equiv \frac{W_t}{W_{t,\max}} \cong \frac{t_3 - t_4}{t_3 - t_{bu,1}} = \frac{35 - 23}{35 - 17.1} = 67 \%$$

Per il caso b) ed il caso c) si procede in modo analogo a quanto visto precedentemente.

ESEMPIO 14.6 – Torre di raffreddamento

L'acqua uscente dal condensatore di una piccola centrale termoelettrica è inviata ad una serie di torri refrigerative a circolazione forzata. L'aria entra in ciascuna torre con temperatura di bulbo secco e con umidità relativa di 25 °C e 50 %, rispettivamente, e fuoriesce alla temperatura di 30 °C e con un'umidità relativa del 98 %.

La portata massica dell'acqua inviata a ciascuna torre evaporativa è pari a 50 kg/s, mentre la sua temperatura è di 35 °C. La temperatura di uscita dell'acqua dalla torre è uguale a quella di ingresso dell'aria.

Si calcoli:

1. la portata massica d'aria che attraversa la torre;
2. la portata massica di acqua necessaria per il reintegro nell'ipotesi che la temperatura dell'acqua in uscita dalla torre sia uguale alla temperatura dell'aria in ingresso alla torre;
3. l'efficienza della torre di refrigerazione;
4. la potenza termica che l'aria umida scambia con per sola convezione con le goccioline di liquido durante la loro discesa.

(Si supponga il processo stazionario e si assuma la pressione dell'aria umida nella torre uguale a 101325 Pa; inoltre, nel bilancio energetico si trascuri la potenza meccanica del ventilatore)

L'umidità specifica e l'entalpia dell'aria umida in ingresso ed in uscita dalla torre di raffreddamento possono essere determinate mediante le seguenti formule (o mediante il programma CATT, oppure in maniera approssimata mediante un diagramma psicrometrico):

$$\omega = 0.622 \frac{\phi p_{v,\text{sat}}}{p - \phi p_{v,\text{sat}}}$$

$$h = h_a + h_v \omega = 1.005t + 2501.3\omega + 1.820t\omega \quad [\text{kJ/kg}]$$

	t [°C]	ϕ [%]	p_{vsat} [Pa]	ω [-]	h [kJ/kg]
stato 1	25	50	3167	0.009876	50.3
stato 2	30	98	4243	0.026620	98.2

Le entalpie specifiche dell'acqua in ingresso ed in uscita dalla torre di refrigerazione valgono rispettivamente:

$$h_3 = 4.186 t_3 = 146.5 \text{ kJ/kg}$$

$$h_4 = 4.186 t_4 = 104.7 \text{ kJ/kg}$$

La portata d'aria in ingresso alla torre può essere determinata mediante la seguente formula:

$$G = \frac{G_3 (h_4 - h_3)}{(h_1 - h_2) + (\omega_2 - \omega_1) h_4} = 45.3 \text{ kg/s}$$

La portata di liquido da reintegrare

$$G_3 - G_4 = G(\omega_2 - \omega_1) = 0.76 \text{ kg/s}$$

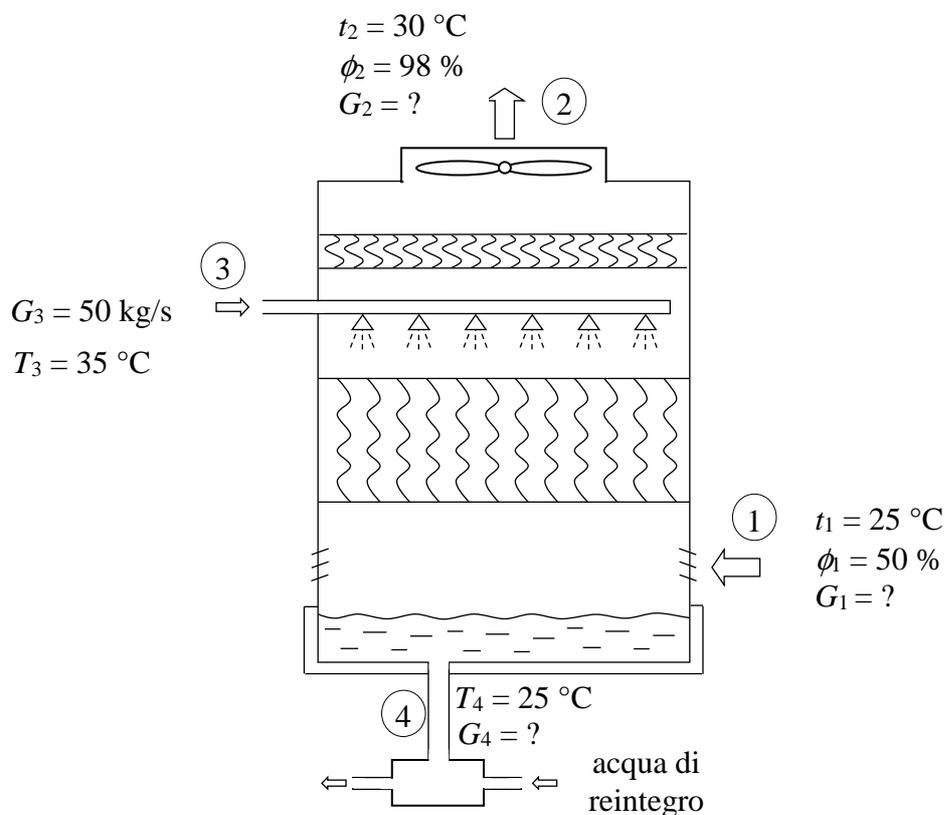
Come si può notare bisogna reintegrare solo il 1.5 % circa della portata di liquido inviata alla torre.

L'efficienza della torre di refrigerazione ad umido può essere valutata con la seguente formula approssimata:

$$\varepsilon \equiv \frac{W_t}{W_{t,\max}} \cong \frac{t_3 - t_4}{t_3 - t_{bu,1}} = \frac{35 - 25}{35 - 17.89} = 58.4 \%$$

Eseguendo il bilancio dell'energia per le sole goccioline di liquido in caduta all'interno della torre si ricava:

$$W_{t,\text{conv}} = G_3 h_3 - G_4 h_4 - (G_3 - G_4) h_v = 231.6 \text{ kW}$$



□

BIBLIOGRAFIA

- Moran, Shapiro, Munson, DeWitt., Elementi di Fisica Tecnica per l'Ingegneria, trad. M. Corticelli, *McGraw-Hill*, 2011, Cap.10.
- Y. A. Cengel, "Termodinamica e trasmissione del calore", *McGraw-Hill*, New York, 1998, Cap.9.
- P. Anglesio, "Elementi di Impianti Termotecnici", *Pitagora Editrice*, Bologna, 1998, Capp. 7-9.
- R. Mastrullo, P. Mazzei e R. Vanoli, "Termodinamica per ingegneri", *Liguori editore*, Napoli, 1996, Cap.4.
-