

Appunti ed Esercizi di *Termofluidodinamica Applicata*

Capitolo 2. Le proprietà termofisiche dei fluidi

Paolo Di Marco

Versione 2009.01 – 30.09.09.

La presente dispensa è redatta ad esclusivo uso didattico per gli allievi dei corsi di studi universitari dell'Università di Pisa tenuti dall'autore.

L'autore se ne riserva tutti i diritti. Essa può essere riprodotta solo totalmente ed al fine suddetto, non può essere alterata in alcuna maniera o essere rivenduta ad un costo superiore a quello netto della riproduzione.

Ogni altra forma di uso e riproduzione deve essere autorizzata per scritto dall'autore.

L'autore sarà grato a chiunque gli segnali errori, inesattezze o possibili miglioramenti.

INTRODUZIONE

Abbiamo stabilito che nella meccanica dei continui si definiscono all'interno di un volume V un certo numero di campi (scalari, vettoriali o tensoriali), ovvero grandezze che sono funzione della posizione \underline{r} . Tra queste grandezze si identificano in particolare i cosiddetti *campi fondamentali*, ovvero la densità, la velocità e la temperatura. Gli altri campi (es il tensore di Cauchy, la pressione, il flusso termico etc.) si dicono *campi derivati*. Si dice poi *relazione di chiusura* ogni relazione che lega i campi fondamentali a quelli derivati. In particolare, le *equazioni di stato* sono le relazioni di chiusura che legano tra loro le proprietà termodinamiche di un fluido, mentre le equazioni costitutive ne modellano la reazione a stimoli esterni (gradienti di temperatura, forze etc.). La soluzione di un problema termofluidodinamico si origina dalla combinazione delle equazioni di bilancio della massa, della quantità di moto e della energia, ovvero dei principi della fisica, con un adeguato numero di relazioni di chiusura. Dette relazioni contengono un certo numero di coefficienti che sono caratteristici del materiale, e variano da un materiale all'altro: tali coefficienti sono misurabili in laboratorio e fanno parte delle *proprietà termofisiche*; ne sono esempi la viscosità, la conducibilità termica, il coefficiente di dilatazione termica, etc. In questo capitolo vengono descritte le proprietà termofisiche che hanno interesse in termofluidodinamica.

Definizione di fluido

Per quanto a tutti noi la distinzione tra solidi e fluidi appaia a prima vista chiara, ad un esame più approfondito ci si rende rapidamente conto che molte delle nostre definizioni sono insufficienti. In chimica, un solido è caratterizzato dalla presenza di un reticolo cristallino, quindi alcuni materiali amorfi (privi di reticolo) quali il vetro e l'asfalto, andrebbero classificati tra i liquidi. Anche l'affermazione che un solido mantiene una forma propria ed un liquido no è insoddisfacente, in quanto ogni solido subisce deformazioni, seppur piccole, sotto l'azione di uno sforzo. La distinzione più sensibile tra un solido ed un fluido è che *un fluido si deforma indefinitamente sotto l'azione delle forze esterne*, mentre *in un solido tale deformazione si arresta* quando le reazioni interne al materiale (che possono essere elastiche o meno) equilibrano le forze esterne. Dato che le deformazioni sono contrastate dalle forze di taglio, in termini equivalenti possiamo dire che *un solido è in grado di esercitare tensioni di taglio statiche*, mentre un fluido no.

I fluidi sono ulteriormente distinti in gas e liquidi a seconda della loro *comprimibilità*, ovvero della variazione di volume che subiscono sotto sforzo: per quanto un liquido sia generalmente considerato *incomprimibile*, misurazioni più accurate ci dimostrano che anche un liquido sotto sforzo subisce variazioni di volume, seppur piccole.

In definitiva, possiamo affermare che un solido subisce sotto sforzo piccole *deformazioni e dilatazioni*, un liquido subisce *piccole dilatazioni ma grandi deformazioni*, ed infine un aeriforme subisce *sia grandi dilatazioni che grandi deformazioni*, e che la caratteristica principale di un fluido è di non essere in grado di esercitare tensioni di taglio statiche.

Bisogna tuttavia aver presenti i limiti di questa definizione. Sull'entità di ciò che consideriamo piccolo o grande rimane ancora una componente soggettiva: infatti la differenza di comportamento tra liquido e vapore a pressione ambiente è notevole, mentre in prossimità del punto critico della sostanza il liquido e l'aeriforme sono molto più simili. Inoltre alcuni materiali, come le colle e le gelatine, si comportano da solidi o da liquidi a seconda dell'entità delle forze applicate, mentre in altri (es. i cosiddetti fluidi *tissotropici*) il comportamento può dipendere anche dalla durata dell'applicazione dello sforzo.

Densità, volume specifico e peso specifico

Il concetto di *volume* è un concetto primitivo e non verrà definito. Il *volume specifico* (v)¹ rappresenta il volume dell'unità di massa ed è definito rigorosamente come:

$$v = \lim_{dV \rightarrow dV'} \frac{dV}{dM} \quad \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right] \quad (2.1)$$

Il limite dV' rappresenta il valore al di sotto del quale il sistema non può essere considerato continuo. La *densità* è il reciproco del volume specifico e rappresenta la *massa* dell'unità di volume e pertanto:

$$\rho = \frac{1}{v} = \lim_{dV \rightarrow dV'} \frac{dM}{dV} \quad \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \quad (2.2)$$

La relazione $\rho v = 1$ permette di definire un utile legame tra i differenziali della densità e del volume specifico

$$d(\rho v) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{d\rho}{\rho} \quad (2.3)$$

La densità dell'acqua (a 4°C e 1 atm) vale 1000 kg/m³; quella dell'aria e del vapore a pressione atmosferica circa 1 kg/m³; quella del mercurio circa 13000 kg/m³.

Molto spesso si usa anche la densità relativa (adimensionale) ovvero il rapporto tra la densità del fluido e quella dell'acqua in condizioni standard. La densità relativa dell'acqua è quindi 1, quella del mercurio 13.

Attenzione a non confondere la densità con il *peso specifico* (*peso* dell'unità di volume) che si indica in genere con γ . La relazione tra le due quantità è ovviamente la stessa che c'è tra massa e peso, ovvero $\gamma = g \rho$. Il peso specifico dell'acqua in condizioni standard di temperatura, pressione e gravità è quindi 9806.6 N/m³.

Coefficienti termodinamici

Verranno prese in considerazione unicamente di *sostanze pure*, ovvero sostanze la cui composizione è *omogenea ed invariabile nel tempo*. I sistemi contenenti sostanze pure sono *bivarianti*, ovvero, una volta assegnato il valore di due proprietà di stato indipendenti, anche le rimanenti hanno valore assegnato.

Due proprietà di stato non sono indipendenti se il valore di una dipende esclusivamente dal valore dell'altra. E' questo il caso della pressione e della temperatura per una sostanza bifase, o dell'entalpia e della temperatura per un gas ideale.

Più precisamente, due sole proprietà di stato sono sufficienti a determinare il cosiddetto *stato intensivo* di una sostanza pura, ovvero il valore delle sue proprietà intensive e specifiche: è

¹ Sfortunatamente il simbolo del volume specifico coincide con quello adottato per la velocità. Per tale ragione, se ne farà il minore uso possibile, utilizzando invece la densità ρ . L'analisi dimensionale dovrebbe chiarire comunque ogni possibile ambiguità nelle formule.

ovvio che per determinare l'energia totale del sistema è necessario conoscere anche la massa del sistema stesso.

Non occorre che una sostanza pura abbia una precisa formula chimica: anche le miscele di due componenti chimici, purché di composizione omogenea, si possono considerare sostanze pure. Possono dunque essere considerate sostanze pure l'acqua, l'ossigeno, ma anche l'aria (miscela di gas) o l'acqua salata (finché il sale non cristallizza). Tuttavia in alcuni testi la definizione di sostanza pura è ristretta alle sole specie chimiche (ovvero, le sostanze costituite da molecole tutte identiche tra loro). Un sistema sede di combustione invece, ancorché omogeneo, non si può considerare comunque una sostanza pura perché la sua composizione varia nel tempo (spariscono i reagenti e compaiono i prodotti della combustione).

Come è noto dalla Fisica Tecnica, in un sistema *bivariante*, se X, Y, Z sono funzioni di stato e Y e Z sono *indipendenti*, vale la seguente espressione

$$dX = AdY + BdZ \quad (2.4)$$

dove A e B sono le derivate parziali della funzione X rispetto ad Y e Z

$$A = \left(\frac{\partial X}{\partial Y} \right)_Z ; B = \left(\frac{\partial X}{\partial Z} \right)_Y \quad (2.5)$$

e

$$\left(\frac{\partial A}{\partial Z} \right) = \left(\frac{\partial B}{\partial Y} \right) \quad (2.6)$$

in matematica, la Eq.(2.4) viene detta *forma differenziale esatta* o semplicemente *differenziale esatto*)

Legami tra coefficienti termodinamici- Caratterizzazione termodinamica di una sostanza

E' evidente che, combinando tra loro le proprietà di stato a tre a tre, si possono scrivere un gran numero di espressioni del tipo della Eq.(2.4), ciascuna delle quali contiene due coefficienti termodinamici. Non tutte queste espressioni hanno rilevanza pratica, e nel seguito ne considereremo il minimo indispensabile, definendo un certo numero di coefficienti che variano da sostanza a sostanza e la caratterizzano dal punto di vista termodinamico. Dato che tali coefficienti devono essere determinati sperimentalmente, sembrerebbe che per caratterizzare termodinamicamente una sostanza occorra fare un gran numero di esperimenti. Fortunatamente, le proprietà dei differenziali esatti ci vengono in aiuto: si può infatti dimostrare che *tutti i coefficienti termodinamici sono esprimibili in funzione di tre soli*: in genere (seguendo un approccio dovuto originariamente a Bridgman, 1914) si fa riferimento a c_p, β, κ , che sono i più facili da determinare sperimentalmente, e che verranno definiti successivamente, vedi Eqs.(2.9) e (2.13). In sostanza, si conclude che per caratterizzare termodinamicamente un fluido bivariante è *necessario conoscere il valore di tre soli coefficienti termodinamici* in funzione, ad esempio, di pressione e temperatura.

Legame tra volume, pressione, e temperatura

Il legame tra variazioni di volume, temperatura e pressione si esprime spesso nella forma

$$\frac{dv}{v} = \beta dT - \kappa dp \quad (2.7)$$

oppure, in termini di densità

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\beta dT + \kappa dp \quad (2.8)$$

dove

$$\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad [K^{-1}]$$

$$\kappa = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \quad [Pa^{-1}] \quad (2.9)$$

Il coefficiente β è detto *coefficiente di dilatazione isobara*, in quanto rappresenta la variazione di volume dovuta a quella di temperatura a pressione costante (ciò che ordinariamente viene detto dilatazione termica); β è generalmente maggiore di zero, ovvero le sostanze aumentano di volume al crescere della temperatura, con alcune rimarchevoli eccezioni (es. l’acqua ad 1 bar tra 0 e 4 °C).

Il coefficiente κ è detto invece *coefficiente di comprimibilità isoterma* e rappresenta la variazione di volume dovuta alle variazioni di pressione a temperatura costante (ovvero, la comprimibilità meccanica del corpo). Dato che, per ragioni di stabilità meccanica, ogni corpo deve contrarsi a seguito di un aumento della pressione esterna, κ è sempre maggiore di zero.

Notare che β e κ , come gli altri coefficienti termodinamici che introdurremo in seguito, non sono in generale costanti ma variano al variare, ad es., di temperatura e pressione. La Tab.2-1 riporta i valori di tali coefficienti per l’acqua a pressione atmosferica.

Temperatura, °C	β, K^{-1}	κ, Pa^{-1}
0	-68.14×10^{-6}	50.89×10^{-11}
10	87.90×10^{-6}	47.81×10^{-11}
20	206.6×10^{-6}	45.90×10^{-11}
30	303.1×10^{-6}	44.77×10^{-11}
40	385.4×10^{-6}	44.24×10^{-11}
50	457.8×10^{-6}	44.18×10^{-11}
60	523.4×10^{-6}	44.32×10^{-11}
70	585.3×10^{-6}	44.97×10^{-11}

Tabella 2-1: coefficienti β e κ per l’acqua a pressione $p = 1\text{bar}$.

Un fluido la cui densità è costante in ogni condizione si dice *incomprimibile*. Nessun fluido reale è perfettamente incomprimibile, tuttavia tale modello si adatta molto bene ad un liquido

(se le variazioni di temperatura non sono molto elevate) ed anche ad un aeriforme (se le variazioni di temperatura e pressione sono molto piccole rispetto al valore medio). Per un fluido incomprimibile, ovviamente, si ha $\rho = \text{cost}$, $\beta = \kappa = 0$.

ESEMPIO 2.1 - Dilatazione termica del liquido in un impianto di riscaldamento

Un impianto di riscaldamento domestico contiene un volume $V = 50$ L di acqua alla pressione $p_1=1$ bar e alla temperatura iniziale $T_1=20$ °C. Il sistema è dotato di un vaso di espansione, in contatto con l'atmosfera, che fa sì che la pressione al suo interno si mantenga costante, e viene riscaldato fino alla temperatura finale di esercizio $T_2 = 70$ °C. Sapendo che per l'acqua $\beta = 400 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, (che si può considerare un valore medio nell'intervallo considerato) trovare l'incremento di volume dell'acqua.

Applicando la Eq.(46), tenuto conto che $dp=0$, si ha

$$\frac{dv}{v} = \beta dT$$

Ovvero anche, moltiplicando numeratore e denominatore per la massa del sistema

$$\frac{dV}{V} = \beta dT$$

Integrando tra i due stati estremi, supponendo, $\beta = \text{cost}$ nell'intervallo di integrazione

$$\ln \frac{V_2}{V_1} = \beta (T_2 - T_1)$$

Dato che ipotizziamo che le variazioni di volume siano piccole, si può considerare il rapporto $V_2/V_1 \cong 1$ e quindi, approssimando $\ln(1+x) \cong x$ (la verifica è lasciata al lettore)

$$\frac{V_2 - V_1}{V_1} = \beta (T_2 - T_1)$$

da cui infine

$$V_2 - V_1 = V_1 \beta (T_2 - T_1) = 50 \cdot 400 \cdot 10^{-6} (70 - 20) = 1.0 \text{ L}$$

Dalla Tab.2-1, si nota che in effetti β varia fortemente nell'intervallo di temperature considerato. Una valutazione più accurata si può avere dividendo l'integrale in 5 intervalli di 10 °C ciascuno entro i quali assumere i valori di β più accurati: la sua esecuzione è lasciata per esercizio al lettore.

□

Calori specifici

Relazione tra energia interna, temperatura e volume

La relazione tra energia interna, temperatura e volume si esprime in genere nella forma

$$du = c_v dT + B_u dv \tag{2.10}$$

dove

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{kg K}} \right]$$

$$B_u = \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T = \frac{\beta T}{\kappa} - p \quad [\text{Pa}] \tag{2.11}$$

c_v è detto *calore specifico a volume costante*, ed il significato di tale nome è spiegato dal seguente esempio.

ESEMPIO 2.2 - Riscaldamento a volume costante

Un recipiente rigido contiene una massa $M = 5$ kg di azoto alla pressione iniziale $p_1=2$ bar e alla temperatura iniziale $T_1=20$ °C. Il sistema viene riscaldato a volume costante con una quantità di calore $Q_{12} = 5000$ J. Sapendo che per l'azoto $c_v = 743$ J/kg K, trovare l'incremento di temperatura del gas.

Dato che le pareti del sistema sono rigide, il lavoro scambiato nella trasformazione è nullo. Il primo principio si riduce pertanto a

$$du = dq$$

e tenendo conto della Eq.(48), considerando anche che $dv = 0$

$$c_v dT = dq$$

da cui si vede che c_v può essere interpretato fisicamente come il rapporto tra il calore fornito a volume costante ed il corrispondente incremento di temperatura.

Integrando tra i due stati estremi, supponendo $c_v = \text{cost}$ nell'intervallo di integrazione

$$c_v (T_2 - T_1) = q_{12}$$

e moltiplicando entrambi i membri per la massa del sistema

$$M c_v (T_2 - T_1) = Q_{12}$$

da cui infine

$$T_2 - T_1 = \frac{Q_{12}}{M c_v} = \frac{5000}{5 \cdot 743} = 1.35 \text{ K}$$

□

Relazione tra entalpia, temperatura e pressione

La relazione tra entalpia, temperatura e pressione si esprime in genere nella forma

$$dh = c_p dT + B_h dp \tag{2.12}$$

dove

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{kg K}} \right] \tag{2.13}$$

$$B_h = \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T = \frac{(1 - \beta T)}{\rho} \quad \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right]$$

Da notare che tale relazione cade in difetto nel caso che il nostro sistema sia una sostanza bifase in condizioni di saturazione: in tal caso infatti pressione e temperatura *non sono variabili indipendenti*.

c_p è detto *calore specifico a pressione costante*, ed il significato di tale nome è spiegato dal seguente esempio.

ESEMPIO 2.3 - Riscaldamento a pressione costante

Un recipiente contiene una massa $M = 5$ kg di azoto alla pressione iniziale $p_1=2$ bar e alla temperatura iniziale $T_1=20$ °C. Il sistema viene riscaldato a pressione costante con una quantità di calore $Q_{12} = 5000$ J. Sapendo che per l'azoto $c_p = 1040$ J/kg K, trovare l'incremento di temperatura del gas.

Supponendo che la trasformazione sia reversibile e che l'unica forma di scambio di lavoro sia il lavoro di dilatazione, possiamo scrivere il primo principio come

$$du = dq - pdv$$

ovvero

$$du + pdv = dq$$

possiamo sommare al primo membro il prodotto vdv , che, essendo la pressione costante, è nullo, ottenendo

$$du + pdv + vdv = dq$$

$$d(u + pv) = dq$$

$$dh = dq$$

Tenendo conto della Eq.(50), considerando anche che $dp = 0$

$$c_p dT = dq$$

da cui si vede che c_p può essere interpretato fisicamente come il rapporto tra il calore fornito a pressione costante ed il corrispondente incremento di temperatura.

Integrando tra i due stati estremi, supponendo $c_p = \text{cost}$ nell'intervallo di integrazione

$$c_p(T_2 - T_1) = q_{12}$$

e moltiplicando entrambi i membri per la massa del sistema

$$M c_p(T_2 - T_1) = Q_{12}$$

da cui infine

$$T_2 - T_1 = \frac{Q_{12}}{M c_p} = \frac{5000}{5 \cdot 1040} = 0.96 \text{ K}$$

□

Legame tra c_p e c_v

I coefficienti c_p e c_v sono legati tra loro dalla relazione

$$c_v = c_p - \frac{T \beta^2}{\rho \kappa} \tag{2.14}$$

Da cui si evince che è sempre $c_p > c_v$. Non è difficile dimostrare che per i gas ideali si ha

$$\beta = \frac{1}{T}, \quad \kappa = \frac{1}{p}, \quad \frac{T \beta^2}{\rho \kappa} = R, \quad \text{dove } R = \frac{p}{\rho T} \tag{2.15}$$

la verifica è lasciata per esercizio al lettore.

Per un gas ideale (v. app. 2.3), la differenza fra c_p e c_v è sempre costante e pari ad R , anche quando c_p e c_v dipendono dalla temperatura. Si ricorda anche che per i gas ideali la dipendenza di dalla pressione è comunque esclusa.

Comprimibilità

La variazione di volume di una sostanza per effetto della pressione applicata varia in funzione della variabile che viene mantenuta costante durante la trasformazione stessa. Si definisce generalmente la comprimibilità come

$$k_i = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_i = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_i \quad [\text{Pa}^{-1}] \quad (2.16)$$

Dove i rappresenta la generica variabile mantenuta costante durante il processo. Nella seconda delle Eqs.(2.9) abbiamo definito la comprimibilità *isoterma*, indicandola con κ . Definiamo ora la comprimibilità *isoentropica* come

$$k_s = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_s = \kappa - \frac{\beta^2 T}{\rho c_p} \quad (2.17)$$

in particolare, k_s rappresenta la variazione di volume per effetto della pressione applicata per una sostanza che subisce una trasformazione adiabatica reversibile, e quindi isoentropica.

E' evidente dalla Eq.(2.17) che la comprimibilità isoentropica è sempre minore della comprimibilità isoterma, e pertanto, a parità di pressione applicata. le variazioni di volume saranno minori in una isoentropica rispetto ad una isoterma.

Velocità del suono

La velocità del suono in un mezzo rappresenta la velocità di propagazione delle perturbazioni elastiche al suo interno, e si può dimostrare che è data da

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho k_i}} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad (2.18)$$

generalmente tale propagazione avviene senza scambio di calore e si può considerare reversibile, per cui bisogna considerare la comprimibilità isoentropica

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho k_s}} = \sqrt{\frac{v}{k_s}} \quad (2.19)$$

per un gas ideale si dimostra facilmente che la velocità del suono è data da

$$c = \sqrt{\gamma RT} \quad \text{dove} \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (2.20)$$

e quindi non dipende dalla pressione e decresce con la temperatura.

ESEMPIO 2.4 – Calcolo della velocità del suono

Determinare la velocità del suono in aria, acqua e rame alla temperatura di 20 °C.

Per l'aria a 20 °C, che si può considerare un gas ideale con $R = 287 \text{ J/kg K}$ e $\gamma = 1.4$, si ha

$$c = \sqrt{\gamma RT} = \sqrt{1.4 \cdot 287 \cdot 293.15} = 343 \text{ m/s}$$

Per l'acqua a 20°C si ha (vedi tab.2-1) $\beta = 206.6 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $\kappa = 45.90 \times 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$, $c_p = 4186 \text{ J/kg K}$, $v = 0.001 \text{ m}^3/\text{kg}$, e quindi

$$k_s = \kappa - \frac{\beta^2 T}{\rho c_p} = 4.5 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1},$$

$$c = \sqrt{\frac{v}{k_s}} = 1483 \text{ m/s}$$

Infine per il rame si trova direttamente il valore di $\kappa_s = 0.79 \times 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$, $\rho = 8940 \text{ kg/m}^3$ da cui segue

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho k_s}} = 3760 \text{ m/s}$$

In generale, il suono si propaga più velocemente nei solidi e nei liquidi rispetto ai gas.



Legame tra entropia, temperatura e densità

Le cosiddette *equazioni del Tds o di Gibbs*² permettono, ad esempio, di calcolare le variazioni di entropia note quelle di energia interna e di volume

$$du = Tds - pdv \quad (2.21)$$

$$dh = Tds + vdp \quad (2.22)$$

Le relazioni suddette esprimono un legame tra funzioni di stato, e sono quindi indipendenti dal tipo di trasformazione: sono applicabili ad ogni trasformazione, sia essa reversibile o meno. È importante notare anche che, come sempre, la loro validità è comunque ristretta al caso in cui gli stati iniziale e finale sono *stati di equilibrio*. Ad esempio, se il sistema è costituito inizialmente da due masse di acqua di diversa temperatura a contatto ma non mescolate, questo non è uno stato di equilibrio (dato che il sistema evolve *spontaneamente* fino a quando la temperatura non diviene uniforme) e le relazioni di Gibbs non sono applicabili nella forma sopra esposta.

Dalle equazioni di Gibbs, tenuto sempre conto della relazione generale Eq.(2.4), discende una definizione rigorosa di temperatura e di pressione (una volta definite entalpia ed entropia, come accade in certe trattazioni di termodinamica razionale) ovvero

$$T = \left(\frac{\partial h}{\partial s} \right)_p \quad (2.23)$$

$$p_e = - \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_s \quad (2.24)$$

² Josiah Willard Gibbs, 1839-1903, chimico-fisico americano, docente a Yale. Scrisse il famoso trattato *On the Equilibrium of Heterogeneous Substances* e introdusse l'uso dei diagrammi di stato (in particolare la superficie p-v-T) in termodinamica.

A priori, non c'è nessuna relazione tra la *pressione termodinamica* viene definita dalla (2.24) (detta talvolta anche *pressione di equilibrio*, p_e , in quanto è il valore desumibile dall'equazione di stato del fluido) e la *pressione meccanica* che compare all'interno del tensore di Cauchy, e ne rappresenta la componente idrostatica. In particolare, si nota che la definizione (2.24) cade in difetto per i fluidi incompressibili (per i quali v è costante, e si può quindi considerare unicamente la pressione meccanica). La questione è delicata, e discussa con rigore nel par.3.4 del Batchelor: fortunatamente per noi, la conclusione è che si può assumere che i due valori coincidano tranne che in caso di onde d'urto o di onde sonore ad alta frequenza.

Combinando le Eqq.(2.21) e (2.10), tenuto conto della (2.11), si ottiene facilmente

$$ds = \frac{c_v}{T} dT + \frac{B_u + p}{T} dv = \frac{c_v}{T} dT + \frac{\beta}{\kappa} dv \quad (2.25)$$

ed in maniera analoga, combinando le (2.22), (2.12) e (2.13)

$$ds = \frac{c_p}{T} dT + \frac{B_h - v}{T} dp = \frac{c_p}{T} dT - \frac{\beta}{\rho} dp \quad (2.26)$$

le relazioni suddette permettono di calcolare le variazioni di entropia note quelle di volume e temperatura o di pressione e temperatura. Specialmente la (2.26) ci sarà utile in seguito.

Proprietà di trasporto

Fenomeni di trasporto

Quando, per effetto di una perturbazione esterna o delle condizioni iniziali, un sistema viene a trovarsi in condizioni di disequilibrio, esso reagisce trasferendo “qualcosa” da una parte all’altra del sistema fino a riportarsi in una condizione di equilibrio. Questo “qualcosa”, una grandezza estensiva, assoggettabile quindi ad una equazione di bilancio (esempio: massa, energia, quantità di moto...) si sposta da una parte all’altra del sistema sotto l’effetto di differenze di distribuzione. I fenomeni connessi prendono il nome di *fenomeni di trasporto*. Il trasporto può essere *diffusivo* (quando la grandezza si trasferisce da sola) o *convettivo* quando il suo trasferimento è associato a un movimento di massa.

Diffusione del calore: postulato di Fourier, conducibilità termica, equazione di Fourier

In accordo all’ipotesi formulata da Fourier³, e da lui stesso verificata sperimentalmente, il *flusso termico* (quantità di energia termica per unità di superficie e di tempo, W/m²) che diffonde per conduzione in un mezzo solido, omogeneo ed isotropo, è dato da

$$\underline{q}'' = -\lambda \text{grad } T \quad (2.27)$$

La relazione (2.27) prende il nome di *postulato di Fourier*. Il fattore di proporzionalità λ [W/m K] è detto *conducibilità termica* ed è una proprietà fisica della sostanza. Notare che in accordo a questa definizione il flusso termico è a tutti gli effetti un vettore, caratterizzato da modulo, direzione e verso. Il flusso termico in una direzione qualunque individuata dal versore \underline{n} sarà dunque dato da

$$q''_n = -\lambda \text{grad } T \cdot \underline{n} \quad (2.28)$$

In un caso monodimensionale, in cui la temperatura dipende solo da x , la relazione (2.27) si riduce alla più nota

$$q''_x = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad (2.29)$$

All’interno del mezzo, in cui è definito un campo di temperatura, possiamo identificare delle *superfici isoterme*, ovvero superfici sulle quali il valore della temperatura è costante. Dette superfici non si intersecano (un punto non può avere contemporaneamente due diverse temperature!) e variano in genere col tempo. Essendo il gradiente della temperatura perpendicolare a tali superfici, come mostrato nel Cap.1, la (2.27) afferma che il calore si propaga in direzione perpendicolare alle superfici isoterme e con una intensità che varia in ragione inversa alla loro distanza.

Per i *mezzi anisotropi* (materiali fibrosi come il legno o i compositi, o con cristalli orientati come la grafite), la diffusione del calore cambia a seconda della direzione e la costante

³ Joseph Baptiste Fourier, 1768-1830, matematico illustre, è famoso soprattutto per aver derivato per primo l’equazione della diffusione del calore, scrivendo *Sulla Propagazione del Calore nei Corpi Solidi*, introducendo poi la serie di Fourier per risolverla (*Teoria Analitica del Calore*). Come molti scienziati francesi del tempo, ebbe anche un ruolo politico: seguì Napoleone nella campagna di Egitto e fu anche prefetto della città di Grenoble, riuscendo abilmente a destreggiarsi tra rivoluzione e restaurazione.

scalare λ è sostituita da un *tensore di conducibilità* . La trattazione di tali materiali esula dai nostri scopi, ed il lettore interessato può fare riferimento ad es. al testo di Ozisik, Cap.15.

La conducibilità termica λ varia con la temperatura e, molto più blandamente, con la pressione (quest'ultima dipendenza è sensibile solo in prossimità del punto critico e può generalmente essere tranquillamente trascurata anche nei gas). La dipendenza dalla temperatura è piuttosto complessa: mentre nei gas si ha generalmente un aumento di λ con T , nei liquidi e nei solidi si può avere sia un aumento che una diminuzione, e non raramente anche la presenza di massimi o minimi.

E' noto che i materiali con alto valore di λ sono buoni *conduttori termici* (ovvero trasmettono elevati flussi termici con piccoli gradienti di temperatura) e quelli con basso λ sono al contrario detti *isolanti termici* e sono usati per coibentare termicamente le strutture. Il valore di λ è in generale funzione della temperatura, ma tale dipendenza può essere trascurata nella maggior parte dei casi. Alcuni valori della conducibilità per i materiali più comuni sono riportati in Tab.2-2.

Generalmente i buoni conduttori elettrici, ovvero i metalli, sono anche buoni conduttori termici e viceversa. Fanno eccezione alcuni materiali ceramici ed il diamante, che hanno buona conducibilità termica ma bassa conducibilità elettrica, che si usano quindi per ottenere un buon isolamento elettrico senza pregiudicare lo smaltimento termico.

Materiale	k [W/m K]	a [m ² /s]
Diamante	2300	1.3×10^{-3}
Rame	400	11.2×10^{-5}
Alluminio	240	8.4×10^{-5}
Acciaio al C	40 - 60	1.2×10^{-5}
Sodio liquido	60	6.1×10^{-5}
Acciaio inox	15	0.4×10^{-5}
Nitruro di boro	15	
Mercurio	8	0.43×10^{-5}
Vetro	1 - 1.5	1×10^{-7}
Mattoni	0.7	3×10^{-7}
Acqua	0.6	1.2×10^{-7}
Olio motore	0.1	0.9×10^{-7}
Lana di vetro	0.04	1×10^{-6}
Gas	0.02 - 0.2	$0.22-4 \times 10^{-4}$

Tabella 2-2: valori indicativi della conducibilità termica k e della diffusività termica a – v. eq (2.37) per alcuni materiali.

La conduzione è uno dei meccanismi fondamentali di scambio termico, e la sua legge costitutiva è appunto il postulato di Fourier, Eq.(2.27). E' noto dal corso di Fisica Tecnica che

l'altro meccanismo fondamentale di scambio termico è l'irraggiamento, regolato principalmente dalla legge di Stefan-Boltzmann. Vedremo chiaramente in questo corso che la convezione non costituisce un terzo meccanismo fondamentale, in quanto il calore asportato per convezione è ricavabile dalle altre leggi fisiche e non necessita di una propria equazione costitutiva. Infatti la cosiddetta legge di Newton, introdotta nel corso di Fisica Tecnica, che esprime il flusso termico convettivo nella forma

$$q'' = \alpha (T_p - T_{rif}) \quad (2.30)$$

(dove T_p è la temperatura della parete e T_{rif} una temperatura di riferimento del fluido) concettualmente non è altro che la definizione del coefficiente di convezione, α [W/m² K].

Equazione di Fourier

Consideriamo il bilancio di energia per un volume solido indilatabile, omogeneo ed isotropo, V . In accordo con il primo principio della termodinamica, e come vedremo meglio nel Cap.3, si ha:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho u dV = - \oint_A \underline{q}'' \cdot \underline{n} dA + \iiint_V q''' dV \quad (2.31)$$

dove il lavoro di dilatazione è nullo essendo il volume indilatabile, altre forma di lavoro generalizzato sono state escluse e q''' rappresenta la "generazione" di energia per unità di volume all'interno del volume stesso a causa, ad esempio, di reazioni chimiche, nucleari o effetto Joule. Il segno negativo del termine contenente \underline{q}'' è giustificato dal fatto che, in conformità alla convenzione termodinamica, il flusso di calore è considerato positivo quando entra nel volume (e quindi quando ha verso contrario ad \underline{n}).

Sappiamo bene che l'energia si conserva e non può essere "generata": l'introduzione di un termine di generazione di energia deriva dal fatto che alcune forme di energia (chimica, elettrica e nucleare) sono state escluse dal bilancio.

Tenuto conto del teorema di Green, l'integrale di superficie a secondo membro si può trasformare in uno di volume

$$\iiint_V \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV = - \iiint_V \text{div } \underline{q}'' dV + \iiint_V q''' dV \quad (2.32)$$

In cui, essendo il volume V fisso (e conseguentemente, essendo esso chiuso, anche $\rho =$ costante), si è anche potuta anche trasportare la derivata a primo membro all'interno del segno di integrale.

Data l'arbitrarietà del volume V , si ha

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \text{div } \underline{q}'' + q''' \quad (2.33)$$

Per un materiale solido la variazione di energia interna può essere espressa come

$$du = c dT \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.34)$$

Il flusso termico, è dato dal postulato di Fourier, Eq.(2.27), per cui la (2.31) diviene (per un materiale omogeneo ed isotropo)

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + q''' \quad (2.35)$$

Come è noto per un materiale indilatabile (v. app.2.3) i valori del calore specifico a pressione e volume costante coincidono, per cui non c'è bisogno di dettagliare quale dei due stiamo usando. Vedremo in seguito che la (2.35) non è altro che un caso particolare, in cui vengono annullati i termini di moto, di una più generale equazione di bilancio di energia per un fluido, ed in questo caso il valore appropriato del calore specifico da introdurre in essa è c_p .

La (2.35) prende il nome di *equazione di Fourier*, o anche *equazione della conduzione*. Nel caso in cui anche λ sia costante, ed in particolare indipendente dalla temperatura, si ha infine

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T + q''' \quad (2.36)$$

Bisogna notare la differenza concettuale tra la (2.33) e la (2.35): mentre la prima è un principio fisico, ed è valida (nell' ipotesi di lavoro meccanico nullo) qualunque sia il meccanismo con cui il calore fluisce fuori dal volume (incluso eventualmente l'irraggiamento), la (2.35) è valida solo nei limiti di applicabilità delle (2.34) e (2.27), ovvero di particolari relazioni di chiusura.

In particolare, il postulato di Fourier è stato estesamente verificato sperimentalmente nella maggior parte dei casi pratici, e si è trovato che esso, presupponendo una velocità di propagazione infinita per le perturbazioni termiche, perde di validità unicamente quando i gradienti di temperatura sono molto elevati e i tempi molto brevi: in questo caso si adotta una differente equazione costitutiva e l'equazione di Fourier viene sostituita da una equazione differenziale più complessa, che prende generalmente il nome di equazione di Cattaneo⁴-Luikov⁵ (v. App.2.4).

In altri termini, l'equazione di Fourier non rappresenta una legge fisica indipendente: è semplicemente il risultato dell'applicazione, con alcune altre restrizioni, del *postulato di Fourier* (quest'ultimo è veramente una equazione costitutiva indipendente) al bilancio energetico di un volume arbitrario V .

La (2.36) può anche essere riformulata dividendo entrambi i membri per ρc

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T + \frac{q'''}{\rho c}, \quad a = \frac{\lambda}{\rho c} \quad (2.37)$$

La costante a (m^2/s) prende il nome di *diffusività termica*, in quanto tanto più essa è alta tanto più facilmente l'energia termica si propaga nel mezzo⁶. Alcuni valori tipici sono riportati in Tab.2-2.

⁴ Carlo Cattaneo (1911 - 1979), fisico matematico italiano contemporaneo, è stato uno dei personaggi di spicco dell'ambiente accademico matematico italiano negli anni 50-70.

⁵ Aleksei Vasilevich Luikov (1910 - 1992), insigne fisico matematico russo, si è occupato di fenomeni di capillarità, scambi di massa e di calore.

⁶ Infatti, moltiplicando e dividendo per ρc , la (2.27) diviene $\underline{q}'' = -a \text{grad} u$

Diffusione della quantità di moto: viscosità cinematica e dinamica

Confrontiamo la (2.33) con le equazioni indefinite di Cauchy, introdotte nel Cap.1 e che qui riportiamo per comodità, dopo aver sostituito $\underline{a} = D\underline{v}/Dt$

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = \text{div } \underline{\underline{S}} + \underline{f} \quad (2.38)$$

si nota subito una certa analogia tra le due equazioni. In particolare, come la (2.33) rappresenta la variazione di *energia interna per unità di massa*, che viene fatta dipendere dal flusso di calore e dalla produzione volumetrica di energia, si può pensare che la (2.38) esprima la variazione della *quantità di moto per unità di massa* (una grandezza vettoriale, espressa appunto da \underline{v}) legandola alle forze volumetriche ed alla divergenza del tensore di Cauchy. In questo contesto possiamo quindi pensare che il tensore di Cauchy sia correlato al *flusso di quantità di moto* attraverso la superficie del sistema, in analogia al flusso di energia termica, \underline{q}'' ⁷. Ci chiediamo quindi se, sotto particolari condizioni, non sia possibile trovare anche un'equazione costitutiva che descriva la diffusione della quantità di moto nel mezzo.

In condizioni *dinamiche*, un fluido è in grado di trasmettere anche tensioni di taglio. Supponiamo infatti di considerare, a titolo di semplice esempio, uno strato sottile di fluido (meato) di altezza h , delimitato da due pareti piane, di cui la superiore si muove con velocità w (vedi Fig.2-1). Il moto relativo tra il fluido e la parete nel punto di contatto è nullo, e di conseguenza nel meato si stabilisce un campo di velocità triangolare come indicato nella Fig.2-1: i piani di fluido perpendicolari ad y scorrono l'uno sull'altro come farebbero dei fogli di carta. Questo genera una forza resistente tra gli strati di fluido che si traduce in una forza resistente sulla superficie superiore in moto, e viene detta *resistenza viscosa*.

A differenza dell'attrito coulombiano, che si genera per lo scorrimento di un corpo solido su una parete, la resistenza viscosa non è originata dallo scorrimento del liquido su una parete solida, ma dallo *scorrimento dei filetti fluidi uno sull'altro*.

Vale anche la pena di ricordare che se il meato fosse riempito da un solido elastico, come la gomma, la piastra superiore subirebbe uno spostamento finito (e molto piccolo) proporzionale alla tensione di taglio applicata al solido. Per un fluido invece, lo spostamento è illimitato.

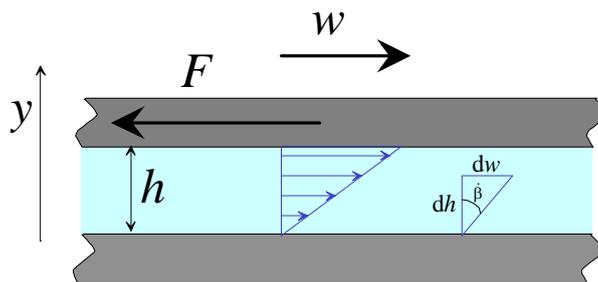


Figura 2-1: Azioni esercitate da un fluido tra due superfici in moto relativo.

⁷ Più precisamente, come il flusso termico attraverso una superficie è dato da $\underline{q}'' \cdot \underline{n}$, il flusso di quantità di moto sarà dato da $\underline{\underline{S}} \cdot \underline{n}$

Fluidi newtoniani

Già nel 1686 Sir Isaac Newton⁸ notava che:

“la resistenza che si genera tra porzioni di fluido è, a parità di altri fattori, proporzionale alla velocità con cui le due porzioni vengono separate.”

Per una classe abbastanza vasta di fluidi, si constata infatti sperimentalmente che la tensione di taglio τ agente sul fluido nella situazione di Fig.2-1 è data da

$$\tau = \mu \frac{w}{h} \quad (2.39)$$

dove μ (mi) è una proprietà del fluido detta *viscosità dinamica*, o semplicemente *viscosità*. Sulla parete agisce ovviamente una forza di segno opposto, che si oppone al moto come indicato in figura. In altre parole, come mostrato in Fig.2-1 w/h rappresenta la velocità $\dot{\beta}$ con cui ruota un segmento verticale nel fluido, ovvero la velocità di deformazione del fluido stesso: la (2.39) pertanto stabilisce, come intuito da Newton, che il fluido reagisce in proporzione alla sua *velocità di deformazione*.

La *viscosità* è dunque la proprietà fisica che caratterizza la capacità di un fluido di trasmettere tensioni di taglio *dinamiche*. Le sue unità di misura nel sistema SI sono ricavabili invertendo la relazione precedente

$$\mu = \frac{\tau h}{w} \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \text{s} = \text{Pa} \cdot \text{s} \right] \quad (2.40)$$

L'entità della tensione di taglio è quindi tanto maggiore quanto maggiori sono la viscosità e i gradienti di velocità.

La viscosità è sempre positiva: la forza viscosa si oppone sempre al moto della parete superiore e rappresenta pertanto una *forza dissipativa*. Un fluido è quindi tanto più viscoso quanto più si “opponne al moto”: l'olio è più viscoso dell'acqua, che a sua volta è più viscosa della benzina. La *tensione* di taglio, tuttavia, è una proprietà non solo del fluido ma anche del campo di moto.

Come mostrato in App.2.1, la relazione (2.40) può essere generalizzata fino a supporre che esista una relazione lineare tra il *tensore deviatorico delle tensioni* \underline{T} , definito poco più oltre dalla (2.43), ed il *tensore di velocità deformazione* $\underline{\dot{D}}$; la stessa appendice mostra chiaramente che tale ipotesi ricorda molto da vicino quella del materiale elastico lineare adottata in Scienza delle Costruzioni, in cui si ipotizza una dipendenza lineare tra stato di tensione e quello di deformazione (e non di *velocità* di deformazione, come in questo caso).

Fatte le dovute semplificazioni (v. App 2.1), tale relazione assume la forma

$$\tau_{ij} = 2\mu d_{ij} - \frac{2}{3}\mu \delta_{ij} \text{div } \underline{v} \quad (2.41)$$

Dove δ_{ij} è il cosiddetto delta di Kronecker⁹, tale che $\delta_{ij}=1$ se $i = j$ e $\delta_{ij}=0$ se $i \neq j$.

⁸ Non si può parlare di Isaac Newton (1642-1752) in una nota a piè di pagina!

⁹ Leopold Kronecker, 1823-1891, matematico, professore a Berlino, lavorò soprattutto sulla teoria delle equazioni e l'algebra superiore.

Nella (2.41), d_{ij} è la generica componente del tensore velocità di deformazione, ovvero, in coordinate cartesiane

$$\dot{d}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.42)$$

e τ_{ij} è la generica componente del *tensore deviatorico delle tensioni*, $\underline{\underline{T}}$ (detto anche talvolta *tensore viscoso delle tensioni*¹⁰) ottenuto a partire dal tensore di Cauchy, $\underline{\underline{S}}$, depurandolo della componente idrostatica della tensione, p

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{S}} + p \underline{\underline{I}} \quad , \quad p = -\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} \quad (2.43)$$

La (2.41) è valida in qualunque sistema di riferimento utilizzando le appropriate espressioni per d_{ij} ; in particolare, le espressioni di σ_{ij} in coordinate cilindriche e sferiche sono riportate in App.2.2.

E' banale verificare che nel caso del moto unidimensionale di Fig.2-1 la (2.41) si riduce alla (2.39).

Un fluido conforme a tale modello costitutivo è detto *fluido newtoniano*, in omaggio alla intuizione originale di Newton. Il modello è stato poi ripreso da Navier¹¹ nel 1822, e da Poisson¹² nel 1829. La sua derivazione formale è dovuta a De Saint Venant¹³ (1843) e a Stokes¹⁴ (1845).

La accettabilità del modello di fluido newtoniano si estende nella pratica in un campo superiore a quello del solido elastico lineare. Tuttavia, come vedremo in dettaglio in seguito, nel caso di moto turbolento la tensione apparente di taglio ha anche una componente convettiva turbolenta che molto spesso supera quella diffusiva.

Talvolta si fa riferimento alla *viscosità cinematica* del fluido, indicata generalmente con la lettera ν (ni) e definita come il rapporto tra viscosità dinamica e densità:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right] \quad (2.44)$$

¹⁰ Più propriamente, il tensore deviatorico e quello viscoso sono differenti in quanto quest'ultimo può avere una residua componente idrostatica, il che in genere non si verifica, come chiarito (si spera!) nell'App.2.1.

¹¹ Claude Louis Marie Henry Navier, 1785-1836, allievo di Fourier e successore di Cauchy all'École Polytechnique di Parigi, fu costruttore di ponti e strade. Derivò le equazioni di N.-S. senza peraltro chiarire completamente il concetto di tensione di taglio in un fluido.

¹² Simeon Denis Poisson, 1781-1840, matematico, allievo di Lagrange e Laplace e professore all'École Polytechnique, studiò soprattutto le equazioni differenziali ordinarie ed alle derivate parziali. Tuttavia, si occupò anche di meccanica, astronomia ed elettrologia.

¹³ Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant, 1797-1886, fu probabilmente il primo ad identificare correttamente il coefficiente di viscosità, sebbene questo merito non gli sia riconosciuto nei testi. La sua attività riguarda principalmente la teoria dell'elasticità e l'idrodinamica.

¹⁴ George Gabriel Stokes, 1819-1903, diede contributi analitici importanti nel campo dell'ottica, della meccanica delle onde e della resistenza viscosa. Arrivò allo stesso risultato di de Saint Venant, indipendentemente, due anni più tardi.

La viscosità dinamica ha le stesse unità di misura della diffusività termica e rappresenta quindi la facilità con cui la quantità di moto diffonde nel mezzo.

E' utile menzionare le unità c.g.s., purtroppo ancora molto in uso, della viscosità cinematica, lo *stoke* ($1 \text{ St} = 1 \text{ cm}^2/\text{s} = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$) e della viscosità dinamica, il *poise* ($1 \text{ P} = 1 \text{ dyn s/cm}^2 = 0.1 \text{ Pa s}$).

I valori della viscosità di alcuni fluidi sono riportati in Tab.2-3: da notare come la viscosità di un fluido vari fortemente con la temperatura. Le Figg. 2-2 e 2-3 riportano la viscosità cinematica e dinamica per diversi tipi di fluidi in funzione della temperatura. In generale, la viscosità dei liquidi diminuisce al crescere della temperatura per i liquidi, mentre per i gas avviene il contrario. Si noti in anche come, al contrario della viscosità dinamica, la viscosità cinematica dei gas è superiore a quella dell'acqua.

L'effetto della temperatura sulla viscosità dei gas può essere approssimato con una relazione dovuta a *Sutherland*

$$\mu = \frac{AT[\text{K}]^{1.5}}{B+T[\text{K}]} \quad (2.45)$$

mentre per i liquidi si può usare la relazione di *Andrade*

$$\mu = A \exp(B/T[\text{K}]) \quad (2.46)$$

Le relazioni suddette contengono ciascuna due costanti empiriche, *A* e *B*, che possono essere reperite sui manuali o determinate una volta nota la viscosità per due valori di temperatura. Altrimenti il testo di Bird (Cap.1) fornisce una carta adimensionale (riprodotta in Fig.2-4) che mette in relazione il rapporto tra il valore della viscosità sulla viscosità al punto critico (μ/μ_{crit}) con la pressione ridotta e la temperatura ridotta

$$p_r = \frac{p}{p_{crit}} \quad , \quad T_r = \frac{T}{T_{crit}} \quad (2.47)$$

da tale diagramma si può ovviamente ricavare la viscosità ad ogni temperatura una volta note pressione e temperatura critica ed un valore qualunque della densità. Lo stesso Bird (Cap.1) fornisce metodi ancora più sofisticati per il calcolo più accurato della viscosità dei fluidi.

FLUIDO								
Acqua,	T (°C)	4	21	66	93	149	232	288
	ρ (kg/m ³)	1000	997	979	962	917	826	735
	μ (mPa s)	1.55	0.978	0.434	0.305	0.187	0.118	.0095
Olio leggero	T (°C)	16	27	38	66	93	121	149
	ρ (kg/m ³)	913	910	895	870	865	848	830
	μ (mPa s)	86.6	41.4	22.8	7.88	3.72	2.07	1.24
Aria,	T (°C)	0	38	93	204	427	816	1650
(p=1bar)	ρ (kg/m ³)	1.296	1.136	0.96	0.735	0.503	0.323	0.183
	μ (μPa s)	17.32	19.1	21.4	26.02	33.4	44.6	57.4

Tabella 2-3: Viscosità e densità di alcuni fluidi in funzione della temperatura.

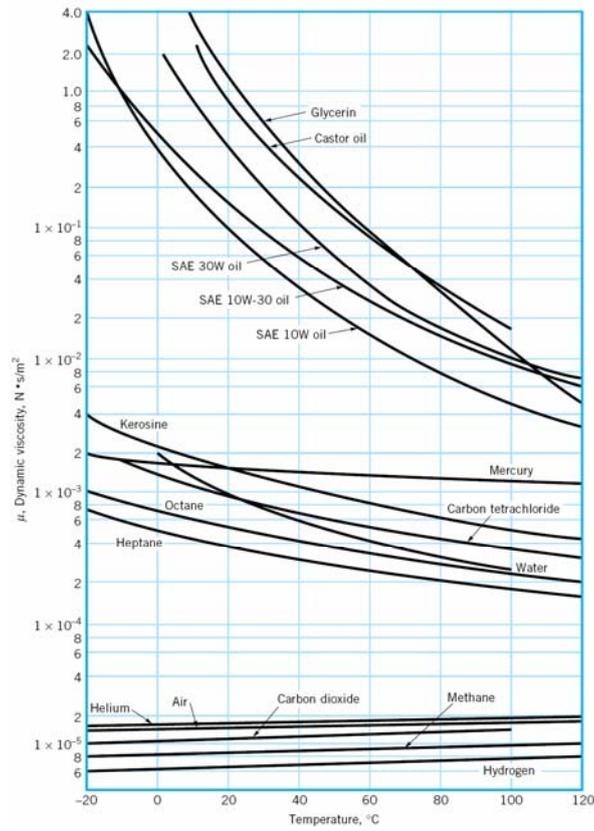


Figura 2-2: Andamento della viscosità dinamica con la temperatura (da Munson).

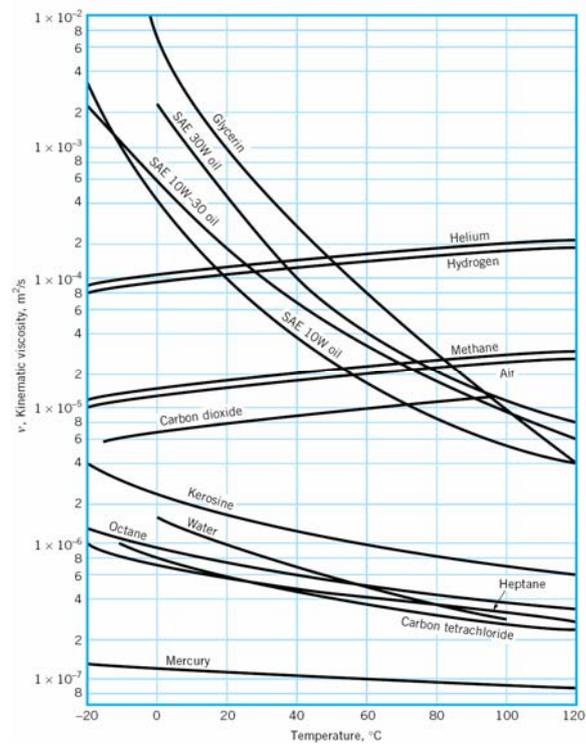


Figura 2-3: Andamento della viscosità cinematica con la temperatura (da Munson).

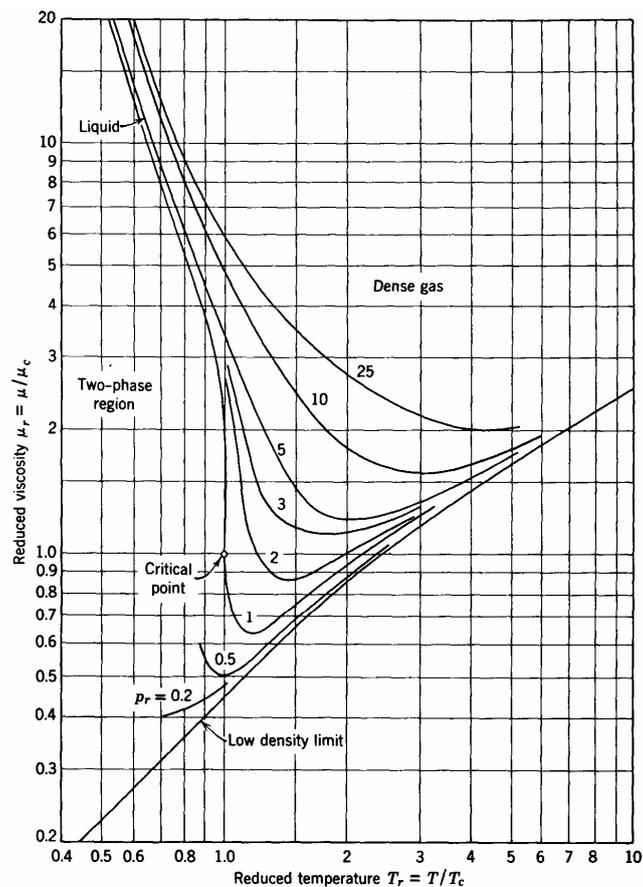


Figura 2-4: Viscosità ridotta in funzione di temperatura e pressione ridotta (da Bird).

ESEMPIO 2.5 – Calcolo della tensione di taglio alla parete.

La distribuzione di velocità nel moto laminare di un fluido newtoniano tra due piastre parallele indefinite poste a distanza $2h$ (v. figura e2.5) è data, come potremo dimostrare in seguito, da:

$$u = v_z = \frac{3m_v}{4h} \left[1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right]$$

dove z è la direzione del moto e m_v è la portata volumetrica di fluido per unità di larghezza delle piastre. Le componenti di velocità lungo x e y sono nulle. Noti $h = 5$ mm, $m_v = 0.002$ m²/s e $\mu = 2 \times 10^{-2}$ Pa s, determinare le componenti del tensore di taglio alla parete e sul piano centrale.

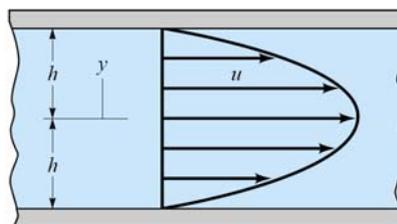


Figura e2.5

Si nota che, dato che $v_x=v_y=0$ e $v_z=f(y)$, l'unica derivata delle velocità diversa da zero è la

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} = -\frac{6m_v y}{4h^3}$$

Pertanto, dalla (2.41) si deduce che le uniche componenti di tensione non nulle sono τ_{yz} e la sua simmetrica τ_{zy} che alla parete ($y = 5 \text{ mm}$) valgono

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \frac{\partial v_z}{\partial y} = -\frac{6\mu m_v y}{4h^3} = 2.4 \text{ Pa}$$

mentre sul piano centrale ($y = 0$) sono nulle.

Si nota anche che nella pratica le tensioni di taglio viscosi hanno valori relativamente bassi rispetto alle corrispondenti nei solidi elastici (dove, come è noto, sono dell'ordine del MPa), e che, a parità di portata, la tensione di taglio alla parete è inversamente proporzionale al cubo dell'altezza del meato.

□

ESEMPIO 2.6 - Coppia tra due cilindri coassiali rotanti.

Due cilindri coassiali di lunghezza 0.3 m hanno diametri rispettivamente di 50 e 52 mm. Il cilindro interno ruota ad una velocità di 40 giri al minuto (rpm). Il meato (intercapedine) tra i due cilindri è riempito di un olio di viscosità dinamica pari a 900 mPa s. Assumendo che il profilo di velocità nel meato tra i due cilindri sia lineare e trascurando le forze agenti sulle basi dei cilindri, calcolare la coppia necessaria a mantenere il cilindro interno in rotazione.

La velocità del fluido in corrispondenza del cilindro esterno è nulla. In corrispondenza del cilindro interno, di raggio R_i , essa è pari alla velocità periferica del cilindro stesso, ovvero

$$w = \omega R_i = \frac{2\pi n}{60} R_i = \frac{2\pi \cdot 40}{60} \cdot 0.025 = 0.11 \text{ m/s}$$

Si può supporre che il meato sia piano, in forza del suo ridotto spessore $t = R_e - R_i$ rispetto al raggio. La tensione di taglio alla parete vale pertanto

$$\tau = \mu \frac{w}{t}$$

La risultante di tale tensione su un elementino di superficie dS vale τdS , e il suo momento rispetto all'asse del cilindro vale $M = \tau R_i dS$. Il momento risultante si otterrà integrando l'espressione precedente su tutta la superficie laterale S del cilindro

$$M = \iint_S \tau R_i dS$$

Considerato che τ ed R sono costanti, si ha

$$M = \tau R_i \iint_S dS$$

dove l'integrale rappresenta semplicemente la superficie laterale del cilindro interno ($2\pi R_i L$). Quindi

$$M = \tau R_i \cdot 2\pi R_i L = 2\pi \mu \frac{w}{t} R_i^2 L = 2\pi \cdot 10^{-3} \frac{0.11}{0.001} \cdot 0.025^2 \cdot 0.3 = 1.3 \cdot 10^{-4} \text{ Nm}$$

Un dispositivo simile viene usato per misurare la viscosità dei fluidi, anche se come si vede dà luogo a coppie molto basse. La stessa formula dà la coppia resistente che si sviluppa nel perno di un cuscinetto a sostentamento oleodinamico.

□

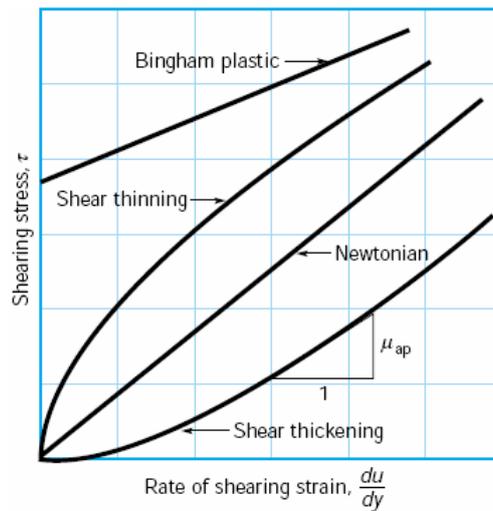


Figura 2-3: Andamento della viscosità per fluidi non newtoniani (da Munson).

Fluidi non newtoniani

Il modello di fluido newtoniano non si adatta molto bene ai fluidi molto viscosi o gelatinosi, quali grasso, dentifricio e paste in generale. Questi fluidi, in cui la tensione di taglio *non* varia linearmente con la velocità di deformazione sono detti *non-newtoniani*. Il grafico di τ in funzione di du/dy assume la forma di Fig.2-5 in cui si possono distinguere tre tipi di comportamento:

- nei fluidi *pseudoplastici* (*shear thinning*) la viscosità apparente diminuisce al crescere della velocità di deformazione; alcune vernici seguono questo comportamento;
- nei fluidi *dilatanti* (*shear thickening*) la viscosità apparente aumenta al crescere della velocità di deformazione; ne sono un buon esempio le sabbie mobili.
- infine i fluidi cosiddetti *di Bingham* si comportano come solidi fino ad un certo valore della tensione di taglio applicata per comportarsi poi come fluidi (newtoniani o meno) al di sopra di tale valore: ad esempio il dentifricio segue questo comportamento.

Meritano un cenno anche alcune classi di fluidi in cui la viscosità varia con il tempo di manipolazione: essa aumenta col tempo nei fluidi cosiddetti *reopettici* e diminuisce nei fluidi detti *tissotropici*: alcune vernici gelatinose e il “sangue di S. Gennaro” conservato a Napoli sono esempi di questa ultima categoria.

Numero di Prandtl

Il numero di Prandtl¹⁵ è definito come

$$Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda} = \frac{\nu}{a} \quad (2.48)$$

dove la seconda espressione è ottenibile dalla prima moltiplicando e dividendo per ρ . Si nota quindi che Pr rappresenta il rapporto tra la diffusività della quantità di moto (o viscosità cinematica, ν) e la diffusività termica a . Gli oli e gli altri mezzi molto viscosi che conducono male il calore hanno elevato numero di Prandtl (anche superiore a 1000), il che vuol dire che

¹⁵ Ludwig Prandtl (1875-1953) cattedratico all'Università di Monaco di Baviera, diede contributi fondamentali in aerodinamica, introducendo in particolare il concetto di *strato limite*.

la quantità di moto diffonde bene in essi, al contrario del calore. I metalli liquidi invece, poco viscosi e buoni conduttori termici, hanno valori di Pr bassissimi. Inoltre, Pr non contiene grandezze di moto ed è pertanto una proprietà fisica del materiale, che varia con la temperatura. Alcuni valori sono riportati in Tab. 2-4.

Fluido	Pr
Acqua	7
Kerosene	25.7
Mercurio	0.0248
Sodio liquido (500 K)	0.007
Olio motore	6400
Gas, in generale	0.7
Glicerina	0.012
Vapore acqueo (300°C)	1

Tabella 2-4: Valori del numero di Prandtl a 20°C (se non altrimenti specificato) per alcuni fluidi.

BIBLIOGRAFIA

- B.R. Munson, D.F. Young, T.H. Okiishi, *Fundamentals of Fluid Mechanics*, 4th ed., Wiley, 2002.
- R.B. Bird, W.E. Stewart, E.N. Lightfoot, *Transport Phenomena*, Wiley, 1960
- M.N. Ozisik, *Heat Conduction*, 2nd ed., Wiley, NY, 1993.
- S. Whitaker, *Introduction to Fluid Mechanics*, Krieger, 1992.
- G.K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge, 1973.
- E.R.G Eckert, R.M. Drake, *Analysis of Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill, 1972

APPENDICE 2.1 – Legame tra tensione e velocità di deformazione in un fluido newtoniano.

Supporremo innanzitutto che lo stato di pressione termodinamica nel fluido sia indipendente dalla sua deformazione; come è noto la pressione è esprimibile in forma tensoriale come

$$-p_t \underline{\underline{I}} = \begin{vmatrix} -p_t & 0 & 0 \\ 0 & -p_t & 0 \\ 0 & 0 & -p_t \end{vmatrix} \quad (\text{A21.1})$$

Tale pressione, in linea di principio, non coincide con la pressione meccanica che rappresenta la intera componente idrostatica del tensore di Cauchy, ovvero il valor medio delle tensioni normali (cambiato di segno, in accordo al fatto che consideriamo la pressione positiva quando è di compressione e non di trazione)

$$p_m = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (\text{A21.2})$$

Dove le σ_{ii} sono le componenti diagonali del tensore di Cauchy. In altri termini, si ammette che il tensore viscoso possa avere una residua componente idrostatica di tensione dovuta alla viscosità del fluido. Eliminata dunque la pressione termodinamica, andremo a cercare un legame tra il cosiddetto *tensore viscoso delle tensioni*, ovvero il tensore

$$\underline{\underline{T}}_v = \underline{\underline{S}} + p_t \underline{\underline{I}} \quad (\text{A21.3})$$

ed, in prima istanza, il *tensore jacobiano* che caratterizza il moto della particella, definito come (v. app 1.3)

$$\underline{\underline{J}} \quad | \quad j_{kl} = \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \quad (\text{A21.4})$$

Ipotizzando un legame lineare tra le 9 componenti di $\underline{\underline{T}}$ e le 9 componenti di $\underline{\underline{J}}$ sono necessarie $9 \times 9 = 81$ costanti e si ottiene una relazione del tipo

$$\underline{\underline{T}}_v = \underline{\underline{L}} \underline{\underline{J}} \quad (\text{A21.5})$$

dove $\underline{\underline{L}}$ è un tensore quadruplo, avente per l'appunto $3^4 = 81$ componenti. Tuttavia questo legame, che implicherebbe la necessità di 81 costanti per definire il comportamento del fluido, può essere notevolmente semplificato tenendo conto delle considerazioni che seguono. Innanzitutto notiamo che il tensore jacobiano può essere scomposto nella somma di due tensori (v. ancora app. 1.3)

$$\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{\dot{D}}} + \underline{\underline{\Omega}} \quad (\text{A21.6})$$

dove

$$\underline{\underline{\dot{D}}} \quad | \quad d_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right) \quad (\text{A21.7})$$

è appunto il tensore di velocità di deformazione, già definito nel Cap.1; il secondo tensore è dato da

$$\underline{\underline{\Omega}} \quad | \quad \omega_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} - \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right) \quad (\text{A21.8})$$

ed è un tensore antisimmetrico a diagonale nulla detto tensore di vorticità, in quanto contiene le componenti del rotore e rappresenta la rotazione rigida della particella. Si può dimostrare (vedi ad es. Whitaker par.5.2, oppure App. 1.3) che esso dà luogo ad un moto rigido di rotazione e non influisce sulla velocità di deformazione.

Una volta eliminata la rotazione rigida, la relazione (A21.5) assume la forma

$$\underline{\underline{T}}_v = \underline{\underline{L}}' \underline{\underline{\dot{D}}} \quad (\text{A21.9})$$

dove, essendo entrambi i tensori simmetrici sono sufficienti $6 \times 6 = 36$ costanti indipendenti. Dobbiamo inoltre tenere conto che il materiale è isotropo¹⁶, quindi la relazione cercata deve essere invariante ad un cambio del sistema di riferimento; imponendo questa condizione si può vedere con calcoli abbastanza laboriosi e riportati da Whitaker (par.5.2) che le 36 costanti si riducono a due sole indipendenti e la relazione tra $\underline{\underline{T}}$ e $\underline{\underline{\dot{D}}}$ può essere espressa nella forma

$$\underline{\underline{T}}_v = 2\mu \underline{\underline{\dot{D}}} + \left[\left(k - \frac{2}{3}\mu \right) \text{div } \underline{\underline{v}} \right] \underline{\underline{I}} \quad (\text{A21.10})$$

Dove le costanti μ e k si misurano in Pa s e prendono il nome rispettivamente di *viscosità dinamica*¹⁷ e *viscosità di massa*¹⁸. Queste due costanti caratterizzano completamente il fluido newtoniano.

La (A21.10) può anche essere esplicitata per ogni singola componente

$$\tau_{ij} = 2\mu d_{ij} + \delta_{ij} \left(k - \frac{2}{3}\mu \right) \text{div } \underline{\underline{v}} \quad (\text{A21.11})$$

Bisogna sottolineare che la (A21.10) è valida solo in un sistema cartesiano di assi. In coordinate cilindriche e sferiche le relazioni sono più complesse e vengono riportate in App. 2.1.

Infine, si nota in accordo alla (A21.11) la tensione viscosa ha una componente normale media data da

$$p = -\frac{1}{3} (\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}) = -\frac{1}{3} \left[2\mu \text{div } \underline{\underline{v}} + 3 \left(k - \frac{2}{3}\mu \right) \text{div } \underline{\underline{v}} \right] = -k \text{div } \underline{\underline{v}} \quad (\text{A21.12})$$

Supporremo ora che la tensione viscosa non influenzi in nessun modo la pressione *media* (o meccanica) nel fluido, ovvero la pressione idrostatica: ciò porta ad imporre $k = 0$: tale ipotesi viene detta *assunzione di Stokes*. Nella pratica, in effetti, tale componente è nulla praticamente per tutti i materiali, tranne che in casi per noi non rilevanti, es. di onde d'urto. Si

¹⁶ I fluidi sono generalmente isotropi, con l'eccezione dei fluidi organici con catene molecolari molto lunghe.

¹⁷ anche semplicemente *viscosità*, e più raramente *viscosità di taglio*; (*dynamic*) *viscosity* o *shear viscosity* in inglese.

¹⁸ *bulk viscosity* in inglese.

nota infine che per i fluidi incomprimibili, in cui come vedremo si ha sempre $\text{div } \underline{v} = 0$, il secondo addendo della (A21.12) è comunque nullo.

A questo punto, possiamo tranquillamente concludere il fluido newtoniano è per noi caratterizzato dal valore di una sola costante, ovvero della viscosità dinamica μ , che il tensore deviatorico delle tensioni coincide con quello viscoso e le sue componenti sono date da:

$$\tau_{ij} = 2\mu d_{ij} - \frac{2}{3}\mu \delta_{ij} \text{div } \underline{v} \quad (\text{A21.13})$$

Si deve infine porre attenzione sul fatto che, sebbene la componente *idrostatica* della tensioni sia nulla, in generale le singole componenti normali τ_{ii} non lo sono affatto, come risulta chiaramente dalla relazione precedente. Le componenti normali dello sforzo viscoso sono responsabili, ad esempio, della resistenza opposta alla dilatazione di una bolla in un liquido e del fatto che la accelerazione di caduta di un getto viscoso è minore di quella di gravità: in quest'ultimo caso, se si “tagliasse” il getto, la parte inferiore cadrebbe ad una velocità maggiore.

Analogie tra fluido newtoniano e materiale elastico lineare

Si ricorda che per il materiale elastico lineare viene supposta una relazione lineare tra il tensore di Cauchy e il tensore di deformazione, definito come

$$\underline{D} \quad | \quad \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (\text{A21.14})$$

dove \underline{u} rappresenta lo spostamento del punto generico P , e che per effetto delle medesime ipotesi di materiale isotropo, indipendenza dal sistema di riferimento e dai moti rigidi enunciate in precedenza il materiale viene completamente caratterizzato da due costanti, ovvero il modulo di Young¹⁹ E ed il modulo di taglio G , cui si può aggiungere una terza costante, ovvero il modulo di Poisson ν , che dipende unicamente dalle prime due

$$\nu = \frac{E}{2G} - 1 \quad (\text{A21.15})$$

Le relazioni costitutive che otteniamo sono generalmente espresse come

$$\begin{cases} E\varepsilon_{xx} = \sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \sigma_{xx}(1 + \nu) - 3\nu p \\ G\gamma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} = \tau_{xy} \end{cases} \quad (\text{A21.16})$$

Con un po' di lavoro di algebra, tenuto conto anche che $\text{div } \underline{u} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$, le (A21.16) possono essere riarrangiate nella forma generica

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \delta_{ij} \frac{2G\nu}{1 - 2\nu} \text{div } \underline{u} \quad (\text{A21.17})$$

¹⁹ Thomas Young, 1773-1829, matematico e medico inglese. Sebbene il modulo prenda il nome da lui, il concetto era già stato sviluppato da Eulero e sperimentalmente dall'italiano Giordano Riccati (*Delle vibrazioni sonore dei cilindri*, Mem. mat. fis. soc. Italiana, vol. 1, pp 444-525, 1782). Il modulo formalizza la legge dell'elasticità, enunciata già nel 1678 da Robert Hooke (1635 – 1703) nella forma “*Ut tensio, sic vis*”.

Dalle due relazioni precedenti si vede tra l'altro che $-1 \leq \nu \leq 0.5$ se si vuole che una tensione di compressione generi una contrazione e viceversa.

La (A21.17) ha una notevole somiglianza con la (A21.11). Dal confronto con la suddetta, risultano immediate le seguenti analogie tra le costanti caratteristiche

$$k - \frac{2}{3}\mu \equiv \frac{2G\nu}{1-2\nu} \quad (\text{A21.18})$$

$$\mu \equiv G$$

In particolare, la *shear viscosity* è analoga allo *shear modulus*. Per quanto riguarda il coefficiente di dilatazione cubica (*bulk modulus*) del solido elastico lineare, si ha, sommando le tre delle (A21.17) corrispondenti alle tre tensioni normali, che è analogo alla *bulk viscosity*:

$$k_s = -\frac{p}{\text{div } \underline{u}} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3 \text{ div } \underline{u}} = \frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)} = \frac{E}{3(1-2\nu)} \equiv k \quad (\text{A21.19})$$

La ulteriore semplificazione che consideriamo consiste nell'ipotizzare che nel fluido newtoniano la dilatazione cubica non genera stress viscoso aggiuntivo, ovvero $k = 0$.

APPENDICE 2.2 – Tensori di Cauchy e di velocità di deformazione in coordinate cilindriche e sferiche.

Coordinate cilindriche (r, θ, z)

Tensore viscoso di Cauchy (fluidi Newtoniani)

$$\begin{aligned}
 \tau_{rr} &= 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} + \left(k - \frac{2}{3}\mu\right) \operatorname{div} \underline{v} \\
 \tau_{\theta\theta} &= 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right) + \left(k - \frac{2}{3}\mu\right) \operatorname{div} \underline{v} \\
 \tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \left(k - \frac{2}{3}\mu\right) \operatorname{div} \underline{v} \\
 \tau_{r\theta} &= \tau_{\theta r} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \\
 \tau_{\theta z} &= \tau_{z\theta} = \mu \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right] \\
 \tau_{zr} &= \tau_{rz} = \mu \left[\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right]
 \end{aligned} \tag{A22.1}$$

Tensore di velocità di deformazione

$$\begin{aligned}
 d_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r} \\
 d_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \\
 d_{zz} &= \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
 d_{r\theta} &= d_{\theta r} = \frac{1}{2} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \\
 d_{\theta z} &= d_{z\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right] \\
 d_{zr} &= d_{rz} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right]
 \end{aligned} \tag{A22.2}$$

dove
$$\operatorname{div} \underline{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Coordinate sferiche (r, ϑ, φ)

Tensore viscoso di Cauchy (fluidi Newtoniani)

$$\begin{aligned}
 \tau_{rr} &= 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} + \left(k - \frac{2}{3}\mu\right) \operatorname{div} \underline{v} \\
 \tau_{\vartheta\vartheta} &= 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{v_r}{r} \right) + \left(k - \frac{2}{3}\mu\right) \operatorname{div} \underline{v} \\
 \tau_{\varphi\varphi} &= 2\mu \left(\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\vartheta \cot \vartheta}{r} \right) + \left(k - \frac{2}{3}\mu\right) \operatorname{div} \underline{v} \\
 \tau_{r\vartheta} &= \tau_{\vartheta r} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\vartheta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} \right] \\
 \tau_{\vartheta\varphi} &= \tau_{\varphi\vartheta} = \mu \left[\frac{\sin \vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{v_\varphi}{\sin \vartheta} \right) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \\
 \tau_{\varphi r} &= \tau_{r\varphi} = \mu \left[\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{A22.3}$$

Tensore di velocità di deformazione

$$\begin{aligned}
 d_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r} \\
 d_{\vartheta\vartheta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{v_r}{r} \\
 d_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\vartheta \cot \vartheta}{r} \\
 d_{r\vartheta} &= d_{\vartheta r} = \frac{1}{2} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\vartheta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} \right] \\
 d_{\vartheta\varphi} &= d_{\varphi\vartheta} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{v_\varphi}{\sin \vartheta} \right) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \\
 d_{\varphi r} &= d_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{A22.4}$$

dove
$$\operatorname{div} \underline{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (v_\vartheta \sin \vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$$

APPENDICE 2.3 – Modelli di fluido: fluido incompressibile e gas ideale.

Il modello di gas ideale (o perfetto)

Equazione di stato

Osservazioni sperimentali su sostanze in fase gassosa consentono di asserire che in condizioni particolari (che esamineremo in dettaglio in seguito) l'equazione di stato $f(p, v, T) = 0$ assume una forma relativamente semplice:

$$pV = n \mathfrak{R} T \quad (\text{A23.1})$$

dove n è il numero di moli della sostanza ed \mathfrak{R} è una costante, il cui valore è pari a 8315 J/kmol K e non dipende dal tipo di gas considerato, per cui essa viene detta *costante universale dei gas*. Questo vuol dire che il comportamento di questa sostanza dipende solo dal numero di moli presenti e non dalla natura delle molecole. Tale fluido viene detto *gas ideale* o anche *gas perfetto*.

E' stato dimostrato che un comportamento del tipo indicato dall'equazione precedente è predicibile teoricamente considerando il gas come un insieme di punti materiali (che rappresentano le singole molecole) che interagiscono tra di loro e con le pareti unicamente tramite urti elastici.

Dato che di solito facciamo riferimento, anziché ad una mole, ad una massa unitaria di fluido, è opportuno riarrangiare l'equazione precedente facendovi comparire il volume specifico. Riferendosi ad una mole di sostanza e dividendo ambo i membri per la massa molecolare, $\mu = M/n$, si ottiene:

$$\begin{aligned} p \frac{V}{M} &= \frac{n}{M} \mathfrak{R} T \\ p v &= \frac{\mathfrak{R}}{\mu} T = RT \end{aligned} \quad (\text{A23.2})$$

dove è evidente che la costante R (detta talvolta *costante caratteristica* del gas) assume un valore diverso per ciascun gas. I valori di μ ed R sono riportati, per alcune sostanze, in Tab.a3.1. Ovviamente, la relazione precedente può essere riscritta in termini del volume totale e della massa

$$pV = MRT \quad (\text{A23.3})$$

Calcolo delle variazioni di energia interna, entalpia ed entropia per un gas ideale.

Per un gas ideale, l'energia interna e l'entalpia *dipendono unicamente dalla temperatura*. Ne segue anche che per un gas ideale u , h e T *non sono variabili di stato indipendenti* e assegnare un valore determinato ad una coppia tra loro non consente di determinare univocamente lo stato del sistema.

Ciò fu mostrato come risultato sperimentale da Joule e Thompson, che idearono un celebre esperimento per dimostrare che l'espansione isoentalpica di un gas, in condizioni prossime a quelle ideali, è anche isoterma. Il fatto che nel diagramma $h-s$ (illustrato in precedenza) le isoterme tendano a diventare isoentalpiche per bassi valori della pressione conferma ulteriormente quanto affermato.

In altri termini, i coefficienti B_u e B_h nelle Eq.(2.10) e (2.12) sono *identicamente nulli* per un gas ideale e tali relazioni possono essere riscritte nella forma

$$\begin{aligned} du &= c_v(T) dT \\ dh &= c_p(T) dT \end{aligned} \quad (A23.4)$$

dove i calori specifici a pressione e volume costante dipendono al più dalla temperatura, come illustrato in Fig.a3.1.

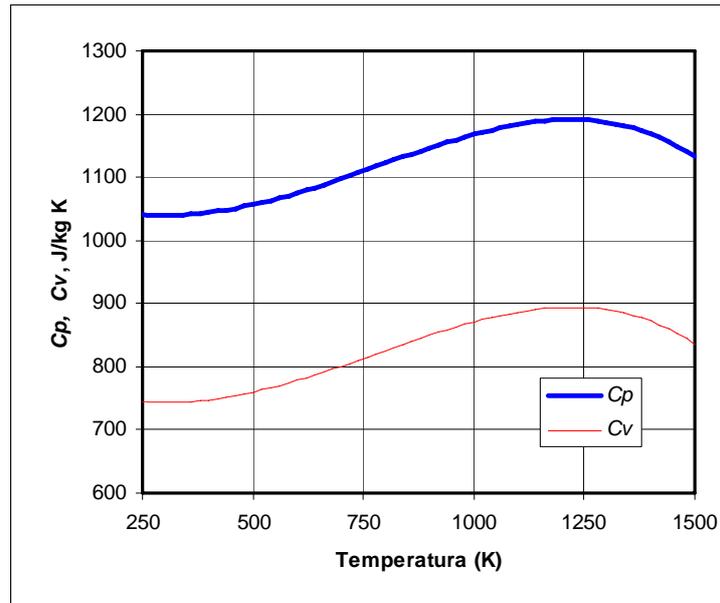


Figura a3.1. Variazione di c_p e c_v con la temperatura per l'azoto. La differenza tra i due valori vale comunque $c_p - c_v = R$.

Le variazioni di entropia sono quindi esprimibili nella forma

$$\begin{aligned} ds &= c_v \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dv \\ ds &= c_p \frac{dT}{T} - \frac{v}{T} dp \end{aligned} \quad (A23.5)$$

che, ricavando p/T e v/T dalla equazione, di stato possono essere espresse anche come

$$\begin{aligned} ds &= c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v} \\ ds &= c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} \end{aligned} \quad (A23.6)$$

Infine, combinando opportunamente le Eq.(A23.3) e (A23.4) è possibile verificare che

$$R = c_p - c_v \quad (\text{detta relazione di Mayer}) \quad (A23.7)$$

introducendo il rapporto tra c_p e c_v , indicato generalmente con γ (talvolta detto esponente dell'adiabatica, e indicato in taluni testi anche con k) si ottengono ancora le relazioni

$$c_p = \frac{R\gamma}{\gamma-1} \quad c_v = \frac{R}{\gamma-1} \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (\text{A23.8})$$

da cui risulta che *tutte le proprietà del gas ideale sono calcolabili una volta nota una coppia qualsiasi* tra i coefficienti γ ²⁰, c_p , c_v ed R .

Per integrare le equazioni presentate tra due generici stati di equilibrio occorre esplicitare il legame funzionale tra i calori specifici e la temperatura. Fortunatamente, è stato sperimentalmente osservato che, per le sostanze di più comune impiego, la variazione di dei calori specifici, relativa ad intervalli di temperatura non molto ampi, è sufficientemente limitata. E' pertanto possibile, con buona approssimazione, ritenere costanti i calori specifici in tali intervalli della temperatura. In Tab.a3.1 sono riportati, per alcuni gas, i valori medi di c_p e c_v , impiegabili nell'intervallo di temperatura 0-100°C.

Per il caso di calori specifici variabili con la temperatura, o di gas che deviano dal comportamento ideale, si veda Di Marco, *Appunti di Fisica Tecnica e Macchine Termiche*, Cap.3.

²⁰ Il simbolo della costante γ coincide con quello adottato in precedenza per il peso specifico, con cui non ha nulla a che vedere.

Il modello di fluido incomprimibile

L'equazione di stato $f(p, v, T) = 0$ per una sostanza pura in fase liquida si fonda usualmente sull'ipotesi di *comportamento incomprimibile*, ovvero sull'ipotesi di ritenere il volume specifico costante lungo una qualunque trasformazione.

E' bene precisare che nessuna sostanza reale è incomprimibile e che il modello di liquido incomprimibile, a differenza del modello di gas ideale che verrà esposto in seguito, non rappresenta un comportamento asintotico, ma un'idealizzazione che consente di semplificare notevolmente la metodologia per il calcolo delle proprietà. L'assunzione fatta risulta comunque soddisfacentemente verificata negli stati termodinamici del liquido lontani dallo stato critico. Per tale ragione, porre costante il volume specifico non corrisponde ad assegnarli un determinato valore numerico (come accade ad es. nel caso della costante dei gas). Nella pratica si sceglie come costante un idoneo valor medio nel campo di pressione e temperatura di interesse.

Nell'ipotesi di comportamento incomprimibile, l'equazione di stato per una sostanza pura in fase liquida è semplicemente:

$$v = \text{cost} \quad , \quad \rho = \text{cost} \quad (A23.9)$$

E' evidente quindi che una sostanza a comportamento incomprimibile non ha possibilità di scambiare lavoro reversibile di dilatazione con l'ambiente.

Il calcolo della variazione di energia interna risulta immediato, semplificando la relazione generale per $dv=0$

$$du = c_v dT \quad (A23.10)$$

dato che ovviamente per un fluido incomprimibile i coefficienti di β e k sono nulli, dalle relazioni generali (v.eq.(2.14)) segue che i calori specifici a pressione costante e a volume costante sono uguali: usualmente il pedice viene quindi soppresso.

La variazione di entalpia è data quindi da

$$dh = d(u + pv) = du + pdv + vdp = c dT + vdp \quad (A23.11)$$

Infine, nell'ipotesi di $v = \text{cost.}$, la prima equazione di Gibbs diventa:

$$ds = \frac{c}{T} dT \quad (A23.12)$$

La quale mostra che per un fluido incomprimibile temperatura ed entropia *non sono variabili indipendenti*. Le relazioni presentate, consentono di valutare le variazioni delle proprietà u , h s per una sostanza pura in fase liquida, ovviamente nell'ambito dell'approssimazione di tale modello idealizzato.

SOSTANZA	μ	$R = \mathcal{R}/\mu$	c_p	c_v	γ
	kg/kmol	J/kgK	J/kgK	J/kgK	
Acetilene, C ₂ H ₂	26,039	319,43			
Acqua, H ₂ O	18,016	461,70	1872.3	1410.8	1.327
Alcool etilico C ₂ H ₅ OH	46.069	180.48	2496.3	2315.8	1.078
Alcool metilico, C ₃ H ₃ OH	32.04	259.5			
Ammoniaca, NH ₃	17,032	488,38	2130.0	1641.8	1.297
Anidride carbonica, CO ₂	44,012	188,99	841.8	652.9	1.289
Anidride solforosa, SO ₂	64,066	129,83			
Argon, Ar	39,950	208,21	520.3	312.2	1.667
Aria	28,968	287,13	1003.5	716.5	1.400
Azoto, N ₂	28,014	296,91	1041.6	744.8	1.400
<i>n</i> -Butano, C ₄ H ₁₀	58,124	143,04	1716.4	1573.4	1.091
Cloro, Cl	70.91	117.3			
Cloroformio, C H Cl ₃	119.38	69.64			
Elio, He	4,0028	2078,0	5192.6	3115.6	1.667
<i>n</i> -Esano, C ₆ H ₁₄	507.9	3.03			
Etano, C ₂ H ₆	30,071	276,60	1766.2	1489.7	1.186
Etilene, C ₂ H ₄	28,055	296,48	1548.2	1251.8	1.237
Freon 12 CCl ₂ F ₂	120,914	68,77			
Idrogeno, H ₂	2,0158	4126,4	14209.1	10084.9	1.409
Kripton, Kr	83.8	99.21			1.667
Metano, CH ₄	16,044	518,46	2253.7	1735.4	1.299
Metanolo CH ₃ OH	32.042	259.48	1405.0	1145.5	1.227
Monoss. di carbonio, CO	28,012	296,93	1041.3	744.5	1.400
Neon, Ne	20,184	412,10	1029.9	617.9	1.667
Ossido di azoto, NO	30,007	277,19			
Ossigeno, O ₂	31,891	260,83	921.6	661.8	1.393
Ottano, C ₈ H ₁₈	114.23	72.79	1711.3	1638.5	1.044
Propano, C ₃ H ₈	44,097	188,55	1679.4	1490.9	1.126
R134a, C F ₃ C H ₂ F	102.03	81.49			
Xenon, Xe	131.3	63.32			1.667

 Tab. a3.1: Proprietà di vari gas ideali (c_p , c_v e γ valutati a 300 K)

APPENDICE 2.4 – L’equazione di Cattaneo-Luikov.

L’assunzione del postulato di Fourier, eq.(2.27), implica che le perturbazioni termiche si propagano ad una velocità infinita nel mezzo, ovvero che gli effetti di un disturbo si risentano istantaneamente (sia pure a livello infinitesimo) a distanza infinita dalla sua localizzazione. Questo si riflette nel carattere parabolico dell’equazione di Fourier. Molti ricercatori, a partire dagli anni ’40, hanno fatto notare che, se le perturbazioni termiche si propagano invece con velocità finita, questo può avere importanza per tempi piccoli. In analogia con la velocità del suono, che rappresenta la velocità di propagazione delle perturbazioni elastiche, questo fenomeno è stato anche definito *second sound* in inglese.

Come puntualizzato da Cattaneo²¹ nel 1948, il fenomeno può essere rappresentato adottando per la conduzione termica un’equazione costitutiva del tipo

$$\frac{a}{C^2} \frac{\partial \underline{q}''}{\partial t} + \underline{q}'' = -\lambda \text{grad} T \quad (\text{A.24.1})$$

dove la costante C rappresenta la velocità di propagazione delle onde termiche, ed è dello stesso ordine di grandezza della velocità del suono nel mezzo. Si vede quindi che al flusso termico \underline{q}'' è stata attribuita una certa “inerzia” rappresentata dalla derivata temporale.

Riprendendo il bilancio di energia, eq.(2.33), dopo avere supposto per semplicità $\underline{q}''' = 0$,

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\text{div} \underline{q}'' \quad (\text{A.24.2})$$

assumendo nuovamente il legame tra energia interna e temperatura dato dalla (2.34) e le proprietà termofisiche costanti

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div} \underline{q}'' \quad (\text{A.24.3})$$

sostituendo a \underline{q}'' il valore ricavato dalla (A.24.1)

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div} (\lambda \text{grad} T) + \text{div} \left(\frac{a}{C^2} \frac{\partial \underline{q}''}{\partial t} \right) \quad (\text{A.24.4})$$

ed invertendo le derivate nello spazio e nel tempo nell’ultimo termine, e portando fuori dalle derivate le proprietà termofisiche costanti, si ottiene

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T + \frac{a}{C^2} \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \underline{q}'') \quad (\text{A.24.5})$$

Infine, sostituendo a $\text{div} \underline{q}''$ il valore ricavato dalla (A.24.3) e riarrangiando

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T \quad (\text{A.24.6})$$

Questa nuova equazione di propagazione del calore è di tipo *iperbolico* (contrariamente alla (2.36) che è di tipo *parabolico*²²) ed è detta *equazione di Cattaneo-Luikov*. Più in generale, in

²¹ C.Cattaneo, Sulla conduzione del calore, Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena 3 (1948), pp.83 –101.

fisica matematica, un'equazione differenziale della forma della (A.24.6) è detta *equazione dei telegrafisti* in quanto può essere usata per rappresentare la propagazione di un impulso di corrente lungo una linea elettrica.

Rilevanza pratica

Questa trattazione è stata qui riportata a titolo di esempio, per mostrare come l'adozione di un diverso modello costitutivo per la propagazione del calore nel mezzo possa portare ad una forma completamente differente dell'equazione di bilancio dell'energia. Nella pratica, facendo un'analisi sugli ordini di grandezza, la differenza tra la (A.24.1) e la classica forma del postulato di Fourier, eq.(2.27) diviene sensibile quando le due derivate a primo membro della (A.24.6) sono dello stesso ordine, ovvero

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \sim \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{A.24.7})$$

che si traduce in

$$\frac{1}{C^2} \frac{\delta T}{\delta t^2} \sim \frac{1}{a} \frac{\delta T}{\delta t} \quad \Rightarrow \quad \delta t \sim \frac{a}{C^2} \text{ [s]} \quad (\text{A.24.8})$$

Dato che, alle normali condizioni ambiente, a/C^2 è dell'ordine di 10^{-11} s per il rame, 10^{-9} s per l'aria, 10^{-14} s per l'acqua, si deduce che la differenza tra la (A.24.6) e la più classica (2.36) è trascurabile nella maggior parte dei problemi pratici, e può diventare apprezzabile solo per tempi molto piccoli o temperature molto basse. Si potrebbe anche dimostrare che il termine aggiuntivo è rilevante in caso di variazioni a gradino della temperatura: in particolare, si può mostrare (ed anche intuire dalla forma della (A.24.1)) che il flusso termico in risposta ad una perturbazione a gradino della temperatura si mantiene finito.

²² Le equazioni differenziali paraboliche rappresentano fenomeni diffusivi, quelle iperboliche la propagazione di fronti d'onda.