

Appunti ed Esercizi di *Termofluidodinamica Applicata*

Capitolo 1. Nozioni preliminari

Paolo Di Marco

Versione 11.02 – 12.10.11.

La presente dispensa è redatta ad esclusivo uso didattico per gli allievi dei corsi di studi universitari dell'Università di Pisa tenuti dall'autore.

L'autore se ne riserva tutti i diritti. Essa può essere riprodotta solo totalmente ed al fine suddetto, non può essere alterata in alcuna maniera o essere rivenduta ad un costo superiore a quello netto della riproduzione.

Ogni altra forma di uso e riproduzione deve essere autorizzata per scritto dall'autore.

L'autore sarà grato a chiunque gli segnali errori, inesattezze o possibili miglioramenti.

Introduzione

Nel presente capitolo vengono esposti (in maniera necessariamente sintetica) alcuni richiami delle principali nozioni pregresse che sono necessarie per affrontare lo studio della termofluidodinamica: in particolare, vengono richiamate le principali nozioni matematiche necessarie, ed i concetti fondamentali riguardo ai sistemi continui. Tali nozioni sono state per la maggior parte già esposte in maniera più rigorosa nei corsi di Matematica, Algebra, Fisica, Tecnica delle Costruzioni e Fisica Tecnica, per cui non dovrebbero risultare del tutto nuove. Qui si è scelta la strada di privilegiare la compressione intuitiva e “panoramica” di tali concetti, a spese talvolta del rigore matematico. Per citare l’introduzione di Einstein alla “Teoria della Relatività”, bisogna “evitare che al lettore accada come al viandante, che passando fra gli alberi non riesce a vedere la foresta”¹.

Le parti di testo scritte in questo carattere rappresentano un'estensione od una riformulazione di concetti precedentemente esposti: esse possono essere tralasciate in una prima lettura e non sono strettamente necessarie alla comprensione del contesto.

1.1 GRANDEZZE SCALARI, VETTORIALI, TENSORIALI E RELATIVE OPERAZIONI

Nel seguito, considereremo fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano $S(0, x, y, z)$ in cui \underline{i} , \underline{j} , \underline{k} (indicati genericamente come \underline{i}_k , dove $k = x, y, z$, oppure $k = 1, 2, 3$) rappresentano i versori degli assi.

Grandezze intensive ed estensive

Una variabile di stato si dice *estensiva* se il suo valore dipende dalla massa del sistema; tali variabili sono dette anche *additive* perché il loro valore totale può essere ricavato come somma (o integrale) dei valori delle varie parti del sistema. Una variabile si dice invece *intensiva* se il suo valore è una funzione locale, ovvero di un particolare punto del sistema.

Ad esempio, la pressione è una variabile intensiva: può essere diversa in ogni punto del sistema, il suo valore totale nel sistema non si ottiene sommando il valore delle pressioni nelle varie parti. Al contrario, il volume è una variabile estensiva: non è definibile localmente, e se si divide il sistema in parti il volume totale è la somma dei volumi parziali.

Per ogni variabile estensiva è possibile definire una corrispondente *variabile specifica* (o più propriamente *massica*), vale a dire il rapporto tra la variabile in questione e la massa del sistema. In genere le variabili estensive sono indicate con una lettera maiuscola, le corrispondenti variabili specifiche con la corrispondente lettera minuscola. Come primo esempio, il volume del sistema si indica con V , e si misura in m^3 ; la corrispondente variabile specifica (volume specifico) si indica con $v = V/M$, si misura in m^3/kg , e rappresenta il volume della unità di massa. Sono intensive pressione, velocità e temperatura. Sono estensive ad esempio energia, entropia, volume e massa.

¹ Albert Einstein, *Relatività: Esposizione Divulgativa*, Bollati Boringhieri, 1967

Grandezze scalari

Si definisce *scalare* una grandezza m caratterizzata da un solo valore che non cambia al variare del sistema di riferimento. Sono scalari la maggior parte delle proprietà di stato di un sistema, ad es massa, densità, energia, entropia, pressione, temperatura ...

Grandezze vettoriali

Si definisce *vettore* un ente individuato in un particolare sistema di riferimento cartesiano² da tre scalari v_j , che rappresentano le sue tre componenti nel sistema suddetto. Tale vettore è esprimibile come

$$\underline{v} = v_x \underline{i} + v_y \underline{j} + v_z \underline{k} \quad (1.1)$$

Si definisce modulo o intensità del vettore la grandezza scalare v

$$|\underline{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (1.2)$$

Prodotto scalare (dot product, inner product)

Dati due vettori \underline{u} e \underline{v} , le cui direzioni formano un angolo ϑ , si definisce il loro *prodotto scalare* come

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = u v \cos \vartheta = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z \quad (1.3)$$

in particolare, il prodotto scalare di due vettori ortogonali è nullo.

Prodotto vettoriale (vector product, cross product)

Il *prodotto vettoriale* di due vettori è un vettore definito dal determinante simbolico

$$\underline{u} \times \underline{v} = \det \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = (u_y v_z - u_z v_y) \underline{i} + (u_z v_x - u_x v_z) \underline{j} + (u_x v_y - u_y v_x) \underline{k} \quad (1.4)$$

la sua direzione è ortogonale ad entrambi i vettori ed il suo verso è definito dalla regola della mano destra. Il modulo del prodotto vettoriale vale,

$$|\underline{u} \times \underline{v}| = u v \sin \vartheta \quad (1.5)$$

Quindi il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è nullo.

E' importante ricordare che mentre per il prodotto scalare valgono le proprietà associativa e commutativa queste ultime non valgono per il prodotto vettoriale (vedi App.1.1).

Altri simboli comunemente adottati per il prodotto vettoriale sono \wedge .

Doppio prodotto misto

Il *doppio prodotto misto* di tre vettori è uno scalare definito come

² Renè Descartes (Cartesio), 1596-1650, filosofo e matematico. Nel suo trattato *La Géométrie* applicò per primo l'algebra alla geometria, fondando la geometria cartesiana. In *Principia Philosophiae* tentò di porre l'intero universo su fondamenti matematici, riducendo il suo studio a quello puramente meccanico.

$$\underline{u} \cdot \underline{v} \times \underline{w} = \det \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \quad (1.6)$$

si vede facilmente che esso rappresenta in valore assoluto il volume di un parallelepipedo i cui spigoli sono i tre vettori e gode quindi (a meno del segno) della proprietà commutativa. Ovviamente, esso si annulla se i tre vettori sono complanari.

Coseni direttori – definizione più accurata di vettore

Si definiscono *coseni direttori* di un vettore i coseni degli angoli che esso forma con gli assi

$$\alpha_k = \cos(\underline{v}, \underline{i}_k) = \frac{\underline{v} \cdot \underline{i}_k}{v} \quad (1.7)$$

Il coseno direttore può anche essere visto come la componente su \underline{i} del versore di \underline{v} .

A differenza degli scalari, le componenti di un vettore variano al variare del sistema di riferimento. Sia S' una seconda terna di versori cartesiani, caratterizzata dai suoi coseni direttori α_{jk} , definiti come

$$\alpha_{jk} = \underline{i}_j \cdot \underline{i}'_k \quad (1.8)$$

I coseni direttori α_{jk} sono in pratica le tre componenti del versore nel nuovo sistema di assi, pertanto non sono indipendenti: la somma dei loro quadrati deve essere pari ad 1, e i tre versori devono essere ortogonali e formare una terna destra; in pratica, è quindi sufficiente precisarne tre.

Si ha che la componente k-ma di \underline{v} nel sistema di riferimento S' è data da

$$v'_k = \underline{v} \cdot \underline{i}'_k = \sum_{j=1}^3 v_j \underline{i}_j \cdot \underline{i}'_k \quad (k=1,2,3) \quad (1.9)$$

ovvero

$$v'_k = \sum_{j=1}^3 \alpha_{jk} v_j \quad (k=1,2,3) \quad (1.10)$$

da questa regola di trasformazione deriva una definizione più accurata di vettore, secondo la quale un vettore è una entità caratterizzata in ogni sistema di riferimento da tre componenti scalari, che si trasformano secondo la Eq.(1-10) al variare del sistema di riferimento stesso.

Tensori doppi

Estendendo la precedente definizione di vettore, è possibile definire un *tensore doppio*, $\underline{\underline{S}}_{ij}$ come una entità individuata in ogni sistema di riferimento cartesiano da nove scalari σ_{ij} che si trasformano con la legge, analoga alla Eq.(1-9)

$$\sigma'_{hk} = \sum_{i,j=1}^3 \alpha_{ih} \alpha_{jk} \sigma_{ij} \quad (h,k=1,2,3, \quad \alpha_{ij} = \underline{i}_i \cdot \underline{i}'_j) \quad (1.11)$$

Estendendo ulteriormente il concetto, si può definire anche un *tensore triplo* caratterizzato da 27 componenti e un tensore di ordine n caratterizzato da 3^n componenti. In tale contesto, i vettori e gli scalari sono tensori di ordine rispettivamente 1 e 0.

E' evidente che se due tensori sono uguali (ovvero hanno le stesse componenti) in un particolare riferimento lo sono anche in tutti gli altri (*proprietà di invarianza delle relazioni tensoriali*).

Un tensore doppio si dice *simmetrico* se $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, *antisimmetrico* se $\sigma_{ij} = -\sigma_{ji}$, *diagonale* se solo gli elementi diagonali sono non nulli, *isotropo* se è diagonale con tutti gli elementi uguali. Ovviamente, gli elementi diagonali di un tensore antisimmetrico sono nulli. Qualunque tensore è esprimibile come somma di un tensore simmetrico e uno antisimmetrico. E' anche noto che, ruotando la terna degli assi, un tensore *simmetrico* del secondo ordine può essere ridotto alla forma diagonale. Gli assi di tale terna sono detti *assi* (o *direzioni*) *principali* del tensore ed i valori diagonali *valori principali* od anche *autovalori*. I coseni direttori di ciascun asse di tale terna, α_i , sono dati dalla soluzione del sistema

$$\begin{cases} \sigma_{11} \alpha_1 + \sigma_{21} \alpha_2 + \sigma_{31} \alpha_3 \\ \sigma_{12} \alpha_1 + \sigma_{22} \alpha_2 + \sigma_{32} \alpha_3 \\ \sigma_{13} \alpha_1 + \sigma_{23} \alpha_2 + \sigma_{33} \alpha_3 \end{cases} = \lambda \begin{cases} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{cases} \quad (1.12)$$

che, come è noto, ammette soluzione non banale solo se

$$\det(\underline{\underline{S}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0 \quad (1.13)$$

La soluzione di quest'ultima equazione (equazione caratteristica) fornisce i tre valori principali, che sostituiti nella (1.12) danno i coseni direttori delle tre direzioni principali (con la condizione aggiuntiva che $\sum_i \alpha_i^2 = 1$). I tre autovalori di un tensore isotropo sono coincidenti, ed in tal caso tutte le direzioni sono principali.

Vi sono diverse definizioni di prodotto che coinvolgono scalari, tensori e vettori. Le principali sono riportate nel seguito.

Prodotto di uno scalare per un tensore

In tale prodotto, si moltiplica ogni elemento del tensore per lo scalare ottenendo un tensore

$$\underline{\underline{S}} \cdot a = \begin{vmatrix} \sigma_{11} a & \sigma_{12} a & \sigma_{13} a \\ \sigma_{21} a & \sigma_{22} a & \sigma_{23} a \\ \sigma_{31} a & \sigma_{32} a & \sigma_{33} a \end{vmatrix} \quad (1.14)$$

La stessa definizione vale per un tensore di qualunque ordine, inclusi come è noto i vettori.

Prodotto interno

Si definisce *prodotto interno* di un vettore per un tensore il vettore

$$\underline{\underline{S}} \cdot \underline{v} = \sum_j \sigma_{ij} v_j = \begin{vmatrix} \sigma_{11} v_x + \sigma_{12} v_y + \sigma_{13} v_z \\ \sigma_{21} v_x + \sigma_{22} v_y + \sigma_{23} v_z \\ \sigma_{31} v_x + \sigma_{32} v_y + \sigma_{33} v_z \end{vmatrix} \quad (1.15)$$

Anche in questo caso la proprietà commutativa non è in genere verificata a meno che il tensore non sia simmetrico ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$). Infatti

$$\underline{v} \cdot \underline{\underline{S}} = \sum_i v_i \sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} v_x + \sigma_{21} v_y + \sigma_{31} v_z \\ \sigma_{12} v_x + \sigma_{22} v_y + \sigma_{32} v_z \\ \sigma_{13} v_x + \sigma_{23} v_y + \sigma_{33} v_z \end{vmatrix} \quad (1.16)$$

E' utile notare che mentre la moltiplicazione per uno scalare altera solo il modulo di un vettore, la moltiplicazione per un tensore ne altera sia il modulo che la direzione. Solo gli autovettori del tensore non cambiano direzione, ma eventualmente solo modulo e verso.

Prodotto diadico

Si definisce *prodotto diadico* di due vettori il tensore

$$\underline{u} \underline{w} = \begin{vmatrix} u_x w_x & u_x w_y & u_x w_z \\ u_y w_x & u_y w_y & u_y w_z \\ u_z w_x & u_z w_y & u_z w_z \end{vmatrix} \quad (\text{indicato anche come } \underline{u} \otimes \underline{w}) \quad (1.17)$$

Prodotto scalare (double dot product)

Si definisce *prodotto scalare (double dot product)* di due tensori lo scalare

$$\underline{\underline{S}} : \underline{\underline{T}} = \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \tau_{ji} = \sigma_{11} \tau_{11} + \sigma_{12} \tau_{21} + \sigma_{13} \tau_{31} + \dots + \sigma_{33} \tau_{33} \quad (1.18)$$

Prodotto tensoriale (single dot product)

Si definisce infine anche il *prodotto tensoriale (single dot product)* di due tensori il tensore

$$\underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{T}} = \begin{vmatrix} \sum_j \sigma_{1j} \tau_{j1} & \sum_j \sigma_{1j} \tau_{j2} & \sum_j \sigma_{1j} \tau_{j3} \\ \sum_j \sigma_{2j} \tau_{j1} & \sum_j \sigma_{2j} \tau_{j2} & \sum_j \sigma_{2j} \tau_{j3} \\ \sum_j \sigma_{3j} \tau_{j1} & \sum_j \sigma_{3j} \tau_{j2} & \sum_j \sigma_{3j} \tau_{j3} \end{vmatrix} \quad (1.19)$$

In pratica, ogni elemento del tensore risultante è il prodotto scalare di una riga di $\underline{\underline{S}}$ per una colonna di $\underline{\underline{T}}$. Tale prodotto è nullo se i due tensori sono uno simmetrico e l'altro antisimmetrico.

1.2 CAMPI SCALARI E VETTORIALI – OPERATORI DIFFERENZIALI

Si dice *campo* (scalare, vettoriale o tensoriale) la relazione che associa ad ogni punto di un dominio il valore rispettivamente di uno scalare, un vettore o un tensore.

Ad esempio, il campo di temperatura in un corpo associa ad ogni punto del corpo il valore dello scalare temperatura. Il campo di velocità vi associa un valore del vettore velocità e quello di tensione un valore del tensore di Cauchy.

Operatori differenziali: gradiente, divergenza, rotore e laplaciano

Si definisce ∇ (*nabla*, o meno frequentemente *del*) l'operatore simbolico costituito dalle tre derivate parziali rispetto agli assi

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial}{\partial z} \underline{k} \quad (1.20)$$

Questa espressione di *nabla* è valida solo in coordinate cartesiane. In coordinate cilindriche o sferiche l'espressione è diversa, v. App.1.2.

Il *gradiente* associa ad un campo scalare f il campo vettoriale \underline{v} definito da

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \underline{k} \quad (1.21)$$

Lo scalare f si dice *potenziale* di \underline{v} . Le superfici $f = \text{cost.}$ sono dette *superfici equipotenziali*. Se dP (dx, dy, dz) è un vettore elementare tangente alla superficie equipotenziale, per definizione la variazione di f in tale direzione è nulla, per cui si verifica che

$$0 = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \underline{dP} \cdot \text{grad } f \quad (1.22)$$

essendo nullo il prodotto scalare, il vettore gradiente è diretto ortogonalmente a \underline{dP} e quindi alle superfici equipotenziali.

Più in generale, la variazione di f in una direzione generica il cui versore è \underline{n} è data da

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \underline{n} \cdot \text{grad } f \quad (1.23)$$

Dalla quale, dato che il prodotto scalare è massimo quando i vettori sono paralleli, si deduce facilmente che il gradiente punta nella direzione in cui si ha la massima variazione di f , ed il suo modulo fornisce l'entità di tale variazione massima.

Un campo il cui gradiente è ovunque nullo si dice *uniforme*.

Al contrario, la terminologia *campo costante* viene di solito utilizzata con riferimento alle variazioni temporali anziché spaziali.

La *divergenza* associa ad un campo vettoriale \underline{v} uno scalare definito da

$$\text{div } \underline{v} = \nabla \cdot \underline{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (1.24)$$

è importante notare che la divergenza, essendo uno scalare, è invariante rispetto al sistema di riferimento. Un campo vettoriale per cui identicamente $\text{div } \underline{v} = 0$ si dice *solenoidale*.

Vedremo meglio in seguito che la divergenza del vettore velocità è associata alla *velocità di dilatazione* di un volumetto che circonda un determinato punto.

Il *rotore* (in inglese *curl*) associa ad un vettore un altro vettore definito come

$$\underline{w} = \text{rot } \underline{v} = \nabla \times \underline{v} = \det \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad (1.25)$$

\underline{v} si dice anche *potenziale vettore* di \underline{w} . Un campo vettoriale per cui identicamente $\text{rot } \underline{v} = 0$ si dice *irrotazionale*.

Vedremo meglio in seguito che il rotore del vettore velocità è proporzionale alla *velocità di rotazione rigida* di un volumetto che circonda un determinato punto.

Infine il *laplaciano* di un campo scalare è dato dalla divergenza del suo gradiente

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \text{div}(\text{grad } f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (1.26)$$

una funzione scalare per cui identicamente $\nabla^2 f = 0$ si dice *armonica*. La precedente equazione è nota appunto come *equazione di Laplace*³. Talvolta il laplaciano è indicato anche con il simbolo Δf .

Il laplaciano è, in sostanza, l'equivalente tridimensionale della derivata seconda: potremmo quindi dire che se in un punto il laplaciano è maggiore di zero, la funzione è "concava", ovvero il suo valore nel punto è inferiore alla media dei valori nell'intorno del punto stesso, e viceversa.

In particolare valgono le seguenti regole di differenziazione dei prodotti:

$$\text{grad}(f g) = f \text{grad } g + g \cdot \text{grad } f \quad (1.27)$$

$$\text{div}(f \underline{v}) = f \text{div } \underline{v} + \underline{v} \cdot \text{grad } f \quad (1.28)$$

$$\text{rot}(f \underline{v}) = f \text{rot } \underline{v} + \text{grad } f \times \underline{v} \quad (1.29)$$

$$\text{div}(\underline{u} \times \underline{v}) = \underline{v} \cdot \text{rot } \underline{u} - \underline{u} \cdot \text{rot } \underline{v} \quad (1.30)$$

$$\text{rot}(\underline{u} \times \underline{v}) = \underline{u} \text{div } \underline{v} - \underline{v} \text{div } \underline{u} + \underline{v} \cdot \text{grad } \underline{u} - \underline{u} \cdot \text{grad } \underline{v} \quad (1.31)$$

e le seguenti proprietà notevoli

³ Pierre-Simon Laplace, 1749 – 1827, matematico francese, diede grandi contributi nella teoria delle equazioni differenziali e nella loro applicazione all'astronomia ed alla teoria della probabilità. Il suo lavoro più famoso è il *Traité de Mécanique Céleste*, dove appare l'equazione che adesso porta il suo nome, che peraltro era già nota in precedenza. Partecipò con Lavoisier, durante la rivoluzione francese, all'elaborazione del sistema metrico decimale, e al contrario di quest'ultimo, che fu ghigliottinato durante il Terrore, riuscì a salvare la testa.

$$\text{rot}(\text{grad } f) = 0 \quad (1.32)$$

$$\text{div}(\text{rot } \underline{v}) = 0 \quad (1.33)$$

ovvero il *gradiente* è sempre irrotazionale e il *rotore* è sempre solenoidale.

Estensione dei concetti di gradiente, divergenza e laplaciano

Si può estendere l'uso dell'operatore gradiente anche ad un vettore. In questo caso il *gradiente di un vettore* è un tensore le cui colonne sono i gradienti delle tre componenti di \underline{v}

$$\underline{T} = \text{grad } \underline{v} = \nabla \underline{v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{vmatrix} = \left| \text{grad } v_x, \text{grad } v_y, \text{grad } v_z \right| \quad (1.34)$$

Si può anche definire il *gradiente di un tensore*, che è un tensore del terzo ordine che si ottiene applicando il gradiente a ciascuna delle componenti del tensore originario: il gradiente innalza sempre di un ordine il rango dell'oggetto cui viene applicato.

Queste definizioni del gradiente permettono inoltre di estendere l'espressione della derivata direzionale (1.23) anche ai campi vettoriali e tensoriali, ovvero

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \underline{n} \cdot \text{grad } \underline{v} \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial n} = \underline{n} \cdot \text{grad } \underline{T} \quad (1.35)$$

Nella stessa logica, si definisce inoltre *divergenza di un tensore* il vettore le cui componenti sono le divergenze delle colonne del tensore

$$\underline{w} = \text{div } \underline{S} = \nabla \cdot \underline{S} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (1.36)$$

Ovviamente, non è possibile definire la divergenza di uno scalare.

Infine il *laplaciano di un vettore* è dato da un vettore ottenuto come la divergenza del gradiente del vettore originario

$$\nabla^2 \underline{v} = \text{div}(\text{grad } \underline{v}) = \nabla^2 v_x \underline{i} + \nabla^2 v_y \underline{j} + \nabla^2 v_z \underline{k} \quad (1.37)$$

In coordinate cartesiane, esso coincide con un vettore le cui componenti sono i laplaciani delle componenti del tensore, ovvero vale anche la seconda delle (1.37), mentre questo non è vero in coordinate cilindriche e sferiche.

Vale comunque l'identità (che il lettore può verificare)

$$\nabla^2 \underline{v} = \text{grad}(\text{div } \underline{v}) - \text{rot}(\text{rot } \underline{v}) \quad (1.38)$$

La tabella 1 riassume i vari tipi di operatori introdotti e le loro caratteristiche

In App.1.2 sono riportate le espressioni degli operatori differenziali in sistemi di coordinate cilindriche e sferiche.

Operatore		espr. simbolica	da > a	se nullo, il campo è ...
gradiente	grad f grad \underline{v} grad $\underline{\underline{T}}$	∇f $\nabla \underline{v}$ $\nabla \underline{\underline{T}}$	scalare > vettore vettore > tensore tensore > t. triplo	uniforme
divergenza	div \underline{v} div $\underline{\underline{T}}$	$\nabla \cdot \underline{v}$ $\nabla \cdot \underline{\underline{T}}$	vettore > scalare tensore > vettore	solenoidale
rotore	rot \underline{v} o curl \underline{v}	$\nabla \times \underline{v}$	vettore > vettore	irrotazionale
laplaciano	div (grad f) div (grad \underline{v})	$\nabla^2 f$ $\nabla^2 \underline{v}$	scalare > scalare vettore > vettore	armonico

Tabella 1: Principali operatori differenziali.

1.3 DEFINIZIONI E TEOREMI RELATIVI AI CAMPI

Flusso e circuitazione

Consideriamo un campo vettoriale \underline{v} definito in un dominio D ed al suo interno una superficie orientata S il cui versore normale in ogni punto sia \underline{n} : si definisce *flusso* del vettore \underline{v} attraverso S lo scalare

$$\varphi = \iint_S \underline{v} \cdot \underline{n} \, dS \quad (1.39)$$

Sia L una linea chiusa nel dominio D , il cui elemento orientato sia \underline{dP} : si definisce *circuitazione* (o meno frequentemente *circolazione*) del vettore \underline{v} su L lo scalare

$$\Gamma = \oint_L \underline{v} \cdot \underline{dP} \quad (1.40)$$

Un campo vettoriale \underline{v} la cui circuitazione è nulla su qualunque linea chiusa interna a D si dice *conservativo* in D . In tal caso il campo ammette una funzione Φ (detta come già accennato *funzione potenziale*) tale che

$$\underline{v} = \text{grad } \Phi \quad (1.41)$$

Inoltre, se \underline{v} è conservativo, l'integrale di \underline{v} lungo una qualunque linea aperta AB interna a D è indipendente dal percorso della linea ma dipende solo dagli estremi, e si ha

$$\int_A^B \underline{v} \cdot \underline{dP} = \Phi(B) - \Phi(A) \quad (1.42)$$

In particolare, se \underline{v} è una forza, essa si dice *conservativa*. Si ricorda dal corso di Fisica che sono conservative ad es. la forza peso, la forza gravitazionale, le forze elastiche ed elettrostatiche.

Teorema della divergenza

Sia \underline{v} un campo vettoriale definito e regolare su un volume V la cui frontiera è la superficie S di normale esterna \underline{n} , allora sussiste la relazione scalare (detta *teorema della divergenza*, e variamente intitolata a Gauss⁴, Green⁵ e Ostrogradskii⁶)

$$\iiint_V \text{div } \underline{v} \, dV = \iint_S \underline{v} \cdot \underline{n} \, dS \quad (1.43)$$

Il teorema può essere esteso anche a campi scalari e tensoriali, ed in tali casi la relazione diviene vettoriale, rispettivamente

⁴ Carl Friedrich Gauss, 1777 – 1855, ha dato importantissimi contributi in matematica, geometria e fisica. Ricavò il teorema nell'ambito dell'elettrostatica.

⁵ George Green, 1793 – 1841, mugnaio e autodidatta, scrisse un importante trattato sulla teoria analitica dell'elettricità e del magnetismo, introducendo per primo il termine "potenziale", dove il teorema compare per la prima volta nella sua forma attuale.

⁶ Mikhail Vasilievic Ostrogradski, 1801 – 1862, ha dato importanti contributi nella teoria delle equazioni differenziali e in algebra.

$$\iiint_V \text{grad } f \, dV = \oint_S f \, \underline{n} \, dS \quad (1.44)$$

$$\iiint_V \text{div } \underline{T} \, dV = \oint_S \underline{n} \cdot \underline{T} \, dS \quad (1.45)$$

Il teorema della divergenza è utilissimo nel convertire integrali di superficie in integrali di volume e viceversa.

Teorema di Stokes

Data una superficie S di normale esterna \underline{n} , che ha per contorno la linea L , sotto opportune ipotesi di regolarità si ha che (teorema di Stokes⁷)

$$\oint_L \underline{v} \cdot dP = \iint_S \text{rot } \underline{v} \cdot \underline{n} \, dS \quad (1.46)$$

Perché il teorema sia verificato, occorre che la superficie S sia semplicemente connessa (ovvero, "priva di buchi") e che la normale della superficie sia legata al verso positivo della linea L dalla "regola del cavatappi" (vale a dire, se un cavatappi ruotato nel verso positivo di L si muove nella direzione di \underline{n}).

Il teorema di Stokes afferma in sostanza che la circuitazione di un vettore lungo una linea chiusa è pari al flusso del rotore di tale vettore attraverso una superficie circondata da tale linea. Una conseguenza importante è che se un campo è *irrotazionale*, la sua circuitazione è nulla lungo qualunque linea, quindi il campo è *conservativo*.

⁷ George Gabriel Stokes, 1819 –1903, diede contributi analitici importanti nel campo della resistenza viscosa, dell'ottica e della meccanica delle onde.

1.4 SISTEMI DI RIFERIMENTO E DERIVATE TEMPORALI. TEOREMI DI LEIBNITZ E DEL TRASPORTO

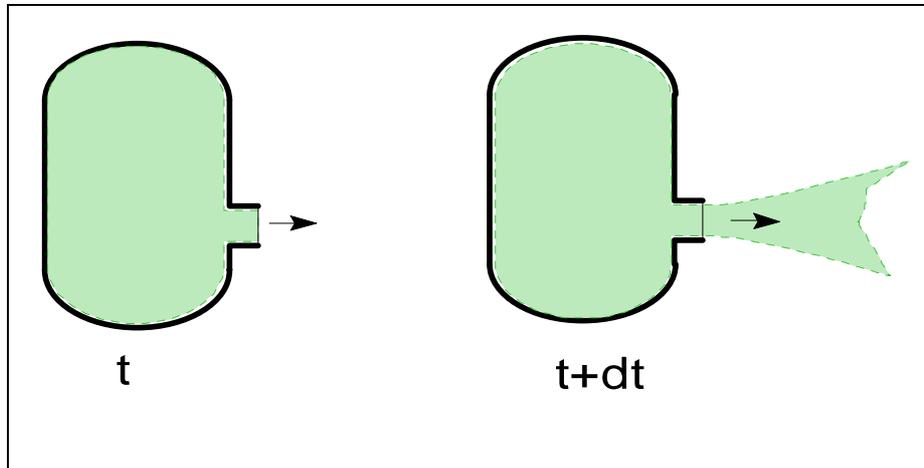


Figura 1.1: Volume di controllo (bordo in nero con porzione del bocchello permeabile alla massa) e massa di controllo (evidenziata in colore). All'istante t i due sistemi coincidono, mentre all'istante $t+dt$ hanno una porzione non in comune. Si ipotizza che l'espansione avvenga nel vuoto o che non ci sia comunque mescolamento col gas esterno all'uscita.

Volume di controllo e massa di controllo

Nel seguito considereremo spesso una regione di spazio che faremo oggetto delle nostre osservazioni. Tale regione di spazio V , delimitata da una superficie S che può essere fissa o variabile nel tempo, viene detto *volume di controllo (control volume)*. Un tipo particolare di volume di controllo ha le pareti impermeabili alla massa: la massa contenuta in tale volume V_m rimane per definizione costante nel tempo e per tale ragione esso viene detto *volume materiale o massa di controllo (control mass)*. La differenza è illustrata con un esempio in Fig.1.1.

Lo schema continuo

Si definisce sistema continuo un qualsiasi corpo le cui proprietà (ad esempio la densità) possono variare da punto a punto, ma sono ovunque definite. In altre parole il continuo riempie completamente lo spazio. L'*ipotesi del continuo* ci assicura che è possibile associare a ciascun punto di un dominio un valore delle proprietà, ed in particolare dei cosiddetti *campi fondamentali*: densità, velocità e temperatura.

Le proprietà in un continuo sono in genere funzioni continue; tuttavia la continuità può cadere in difetto in presenza di interfacce tra le fasi, ad esempio all'interfaccia liquido vapore la densità subisce una brusca variazione.

Un continuo è quindi (in parole molto povere) un materiale "senza buchi". Tale definizione prescinde quindi dalla struttura atomica o molecolare dei materiali reali: in tal caso, al ridursi del volume considerato, si incontra un'alternanza di zone "piene" e "vuote". Il modello continuo si contrappone al modello *particellare* o *atomico*, adatto alla descrizione di sistemi discreti come i gas rarefatti, ma anche i pianeti.

Il modello del continuo, anche se non corrispondente alla realtà fisica, viene adottato con successo per rappresentare i corpi estesi nello spazio, ad es. nello studio delle deformazioni dei corpi elastici e dei fluidi, in cui la struttura molecolare gioca un ruolo trascurabile. Un corpo non viene pertanto descritto come un insieme enorme ma finito di punti materiali (come accade ad esempio nella descrizione maxwelliana dei gas) ma piuttosto come una *infinità continua di punti* (detti anche *particelle materiali*): con questa dizione si intende una porzione del corpo sufficientemente piccola rispetto alle dimensioni del corpo, ma sufficientemente grande da contenere un numero elevatissimo di molecole: tali particelle vengono di fatto assimilate a punti nella trattazione analitica.⁸

Un possibile criterio di accettabilità dello schema continuo è che il libero cammino medio delle molecole (ovvero, la distanza media percorsa da una molecola nel moto di agitazione termica prima di urtarne un'altra) rimanga trascurabile rispetto alle dimensioni del sistema. Di questo tiene conto il numero di Knudsen ($Kn =$ libero cammino medio delle molecole/dimensione caratteristica del sistema); perché l'ipotesi del continuo sia accettabile, deve essere $Kn < 10^{-3}$. Dato che, ad esempio, il libero cammino medio di una molecola di gas in aria è dell'ordine di $1 \mu\text{m}$, e nei liquidi è dell'ordine del nm, si vede che di solito non ci sono problemi ad adottare lo schema del continuo nella maggior parte delle applicazioni ingegneristiche, con la esclusione della dinamica dei gas rarefatti (in cui il libero cammino medio aumenta notevolmente) o dei sistemi microscopici (microfluidica).

Il moto dei continui

Dato un continuo che occupa inizialmente un certo volume C^* in uno spazio euclideo tridimensionale, il suo moto può essere rappresentato matematicamente dalla trasformazione (dipendente dal parametro reale t , ovvero il tempo) del dominio C^* in un altro dominio C del medesimo spazio. La configurazione C^* è detta *configurazione iniziale o di riferimento* ed in essa ogni punto P è identificato dalle sue coordinate iniziali $\underline{R} = (X, Y, Z)$, che la individuano anche durante il moto successivo. Durante il moto, il punto P assumerà le coordinate $\underline{r} = (x, y, z)$. Quindi il moto del continuo è rappresentato dalla funzione

$$\underline{r} = \underline{m}(\underline{R}, t) \quad (1.47)$$

Supporremo di studiare solo i *moti regolari* del continuo, ovvero quelli che non ne provocano lacerazioni o sovrapposizione di punti. Supporremo inoltre che \underline{m} sia invertibile, ovvero che particelle inizialmente distinte rimangano tali durante il moto. In altri termini, un intorno di P deve trasformarsi in un intorno di P' . Questo costituisce il cosiddetto *assioma di permanenza della materia o della corrispondenza biunivoca locale*.

Varie forme delle derivate temporali: derivata locale e materiale

Durante lo studio del moto del continuo esprimeremo anche la variazione nel tempo di una sua generica proprietà, scalare, vettoriale o tensoriale, dipendente dallo spazio e dal tempo $c(\underline{r}, t)$ (ad esempio la densità, la temperatura, la velocità, lo tensione, etc.).

Supponiamo allora di avere una proprietà scalare c : ad esempio (seguendo il testo di Bird) la concentrazione dei microorganismi in un fiume, le cui acque si muovono con velocità uniforme \underline{v} . Derivare tale quantità vuol dire come è noto fare

⁸ Il concetto di continuo si è sviluppato lentamente a partire dalla fine del '600, ed il primo ad adottarlo è stato Eulero. Successivamente, Cauchy lo ha formalizzato più compiutamente.

$$\frac{d c}{d t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{c(t + \Delta t) - c(t)}{\Delta t} \quad (1.48)$$

ma questa operazione è ambigua fin quando non si specifica la posizione ed il sistema di riferimento in cui viene valutata c al tempo t e al tempo $t + \Delta t$.

In particolare, possiamo osservare il fiume da un sistema di riferimento fisso, ovvero da un ponte o da una barca all'ancora: tale sistema di riferimento (fisso) viene detto *euleriano*. In questo caso la derivata di c nel tempo sarà data da

$$\left(\frac{d c}{d t} \right)_r = \frac{\partial c(r, t)}{\partial t} \quad (1.49)$$

dove con questa notazione intendiamo: la derivata parziale rispetto al tempo di c tenendo costante \underline{r} , ovvero in un punto fissato del fiume rispetto al ponte. Tale derivata prende il nome di *derivata locale* o *euleriana*.

Supponiamo ora di muoverci arbitrariamente sul fiume con una barca (cui sarà solidale il nostro sistema di riferimento): le coordinate della barca x, y, z , nel sistema fisso, sono funzioni di t e la barca si muove a velocità \underline{v}_0 (le cui componenti sono dx_i/dt). In tal caso la derivata di c nel tempo dovrà tener conto anche del moto della barca, quindi avremo

$$\frac{d c}{d t} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x} \frac{d x}{d t} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{d y}{d t} + \frac{\partial c}{\partial z} \frac{d z}{d t} = \frac{\partial c}{\partial t} + \underline{v}_0 \cdot \text{grad } c \quad (1.50)$$

questa derivata prende il nome di *derivata totale*.

Infine, supponiamo che la barca sia trascinata dal fiume, e si muova esattamente alla velocità della corrente \underline{v} : questo sistema di riferimento viene detto *lagrangiano*, ed in esso osserviamo le variazioni di c muovendoci *solidalmente* con il fluido. In tal modo quello che manteniamo costante è la posizione iniziale \underline{R} della particella. La derivata in questione è un caso particolare di derivata totale e viene indicata con un simbolo particolare

$$\left(\frac{d c}{d t} \right)_R = \frac{D c}{D t} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x} v_x + \frac{\partial c}{\partial y} v_y + \frac{\partial c}{\partial z} v_z = \frac{\partial c}{\partial t} + \underline{v} \cdot \text{grad } c \quad (1.51)$$

essa prende il nome di *derivata sostanziale* o *materiale*. Il secondo termine, dovuto al moto della particella, è detto *termine convettivo*.

E' interessante notare come, detto \underline{n} il versore di \underline{v} , facendo uso della (1.23), la (1.51) può essere riformulata come

$$\left(\frac{d c}{d t} \right)_R = \frac{\partial c}{\partial t} + \underline{v} \cdot \text{grad } c = \frac{\partial c}{\partial t} + v \underline{n} \cdot \text{grad } c = \frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial n} \quad (1.52)$$

vale a dire, la grandezza del termine convettivo dipende dal modulo della velocità e dal valore della derivata nella direzione del moto, il che ha un notevole senso fisico.

Notare che per un sistema in stato stazionario si ha $\frac{\partial c(r, t)}{\partial t} = 0$

Per grandezze vettoriali e tensoriali, i vari tipi di derivata temporale si applicano a ciascuna delle componenti.

ESEMPIO 1-1 – Paracadutista.

Un paracadutista si getta da un aereo e raggiunge la velocità terminale $w = 120$ miglia all'ora. La temperatura dell'atmosfera varia con la quota z secondo la legge $T = T_0 - \alpha z$, con $\alpha = 5 \times 10^{-3}$ °F/ft. Determinare la variazione di temperatura per unità di tempo che sente il paracadutista.

Essendo la temperatura dell'atmosfera stazionaria, si ha $\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = 0$

La variazione di temperatura nel sistema di riferimento del paracadutista è data da

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{w} \cdot \text{grad} T = 0 + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{dz}{dt} = (-\alpha)(-w) = \alpha w$$

Le conversioni di unità di misura danno

$$\alpha = 5 \cdot 10^{-3} \frac{^\circ\text{F}}{\text{ft}} = 5 \cdot 10^{-3} \frac{5/9 \text{ K}}{0.3048 \text{ m}} = 9 \cdot 10^{-3} \frac{\text{K}}{\text{m}}, \quad w = 120 \frac{\text{mi}}{\text{h}} = 120 \frac{1610 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 53.7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

per cui si ha infine

$$\frac{dT}{dt} = \alpha w = 0.48 \text{ K/s}$$

□

ESEMPIO 1-2 – Derivata locale e materiale.

Supponiamo che la concentrazione di pesci in un fiume (la cui corrente si muove lungo \underline{x} con velocità v_x) vari linearmente con la legge

$$c = c_0 \left(1 + \frac{x}{L} \right)$$

e che i pesci nuotino in modo da mantenersi fermi rispetto al ponte. Valutare le derivate locale e materiale. Ripetere il calcolo nel caso che i pesci si lascino trascinare dalla corrente.

Nel primo caso, la concentrazione di pesci non varia rispetto al ponte per cui si ha

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \underline{v} \cdot \text{grad} c = 0 + v_x \frac{dc}{dx} = v_x \frac{c_0}{L}$$

Questo rende conto del fatto che un osservatore “mobile” (lagrangiano) vede variare la concentrazione dei pesci per effetto del moto della barca trascinata dalla corrente.

Nel secondo caso invece la concentrazione di pesci rimane costante nel riferimento lagrangiano, per cui

$$\frac{Dc}{Dt} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{Dc}{Dt} - \underline{v} \cdot \text{grad} c = -v_x \frac{c_0}{L}$$

In questo caso, l'osservatore euleriano percepisce dal ponte una diminuzione della concentrazione di pesci dovuti al fatto che essi sono trascinati a valle dalla corrente.

Al lettore è lasciato per esercizio di determinare le due derivate nel caso che i pesci risalcano la corrente con velocità (rispetto al ponte) $-2 v_x$.

□

Regola di Leibnitz – Teoremi del trasporto e di Reynolds

Consideriamo ora la derivata temporale del “contenuto” di un volume finito V . Sia data una funzione $f(x,t)$. Secondo la regola di Leibnitz, la derivata temporale del suo integrale definito tra due estremi $a(t)$ e $b(t)$ vale

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} dx + f(b,t) \frac{db}{dt} - f(a,t) \frac{da}{dt} \quad (1.53)$$

Gli ultimi due termini della Eq.(1.53) hanno una semplice interpretazione fisica (v. Fig.1.2): supponiamo di avere una porzione di spazio delimitata dai due piani tratteggiati che si muovono con velocità v_a e v_b ed in cui la funzione f si mantiene costante nel tempo (pur potendo variare con x). La derivata temporale dell’integrale di f nello spazio delimitato dai due piani vale pertanto secondo la regola di Leibnitz

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t) dx = 0 + f(b,t) \frac{db}{dt} - f(a,t) \frac{da}{dt} = v_b f(b,t) - v_a f(a,t) \quad (1.54)$$

questo riflette il fatto che, pur essendo f costante, il suo contenuto nel volume varia perché confini del volume suddetto, muovendosi, “espellono” o “ingoiano” delle “porzioni” dell’integrale di f (evidenziate in grigio in figura) che ne fanno variare l’integrale sul volume stesso.

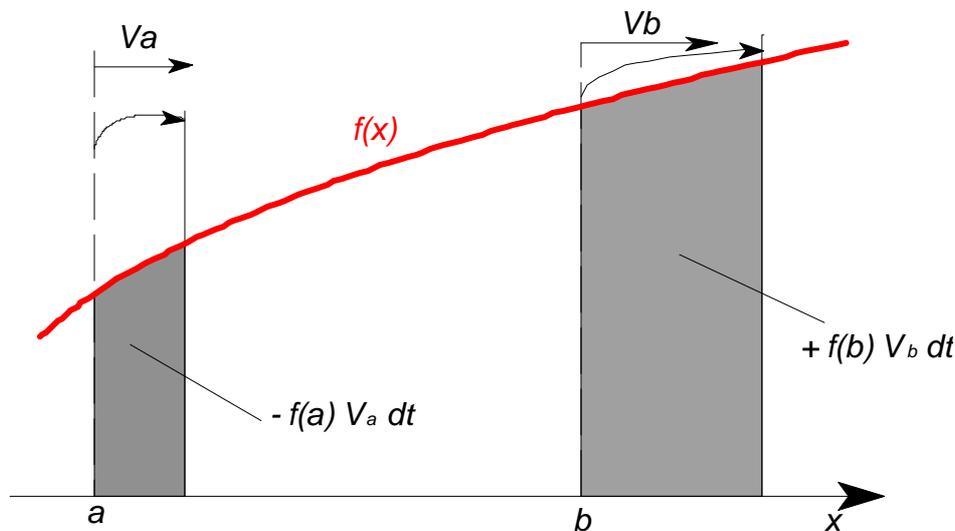


Figura 1.2: Interpretazione fisica della regola di Leibnitz.

L’estensione della Eq.(1.54) ad un volume V (detto *volume di controllo*) delimitato da una superficie S che si muove con velocità \underline{v}_s porta al *teorema generale del trasporto*

$$\frac{d}{dt} \iiint_V f(\underline{r},t) dV = \iiint_V \frac{\partial f(\underline{r},t)}{\partial t} dV + \iint_S f(\underline{r},t) (\underline{v}_s \cdot \underline{n}) dS \quad (1.55)$$

Naturalmente se il volume è fisso nel tempo, ovvero $\underline{v}_s = 0$, il secondo termine a destra si annulla e la derivata può essere portata indifferentemente fuori o dentro il segno di integrale.

Nel caso particolare in cui V_m sia un *volume materiale* (ovvero un volume le cui pareti sono impermeabili alla massa), dette pareti devono per forza muoversi alla stessa velocità del fluido contenuto \underline{v} (altrimenti il fluido le attraverserebbe). Pertanto l'equazione (1.55) si trasforma in quello che viene detto il *teorema di trasporto di Reynolds*⁹

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V_m} f(\underline{r}, t) dV = \iiint_V \frac{\partial f(\underline{r}, t)}{\partial t} dV + \iint_{S_m} f(\underline{r}, t) (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS \quad (1.56)$$

Questa espressione permette di trasformare le derivate di funzioni integrali dal sistema lagrangiano a quello euleriano. La necessità del secondo addendo è illustrata nell'esempio 1.3. Infine, un'ultima utile espressione si può ottenere applicando le Eqq. (1.55) e (1.56) ad un volume materiale V_m che all'istante iniziale t coincide con un volume di controllo V_0 . Sottraendo le due equazioni membro a membro ed eliminando il termine comune si ottiene

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_0} f(\underline{r}, t) dV = \frac{D}{Dt} \iiint_{V_m} f(\underline{r}, t) dV - \iint_S f(\underline{r}, t) (\underline{v} - \underline{v}_s) \cdot \underline{n} dS \quad (1.57)$$

Dato che $\underline{v}_r = \underline{v} - \underline{v}_s$ rappresenta la velocità relativa del fluido rispetto alla superficie del volume di controllo, l'ultimo termine a destra rappresenta il flusso di f uscente dal volume di controllo stesso (dato che la normale \underline{n} è orientata verso l'esterno). La (1.57) esprime pertanto il fatto che la variazione totale di f nel volume di controllo è dovuta alla variazione di f all'interno del volume materiale meno il flusso di f attraverso le pareti del volume di controllo: tale flusso infatti abbandona il volume di controllo, ma rimane a far parte del volume materiale (vedi il successivo esempio 1-4).

Le espressioni del teorema del trasporto possono essere generalizzate ad un vettore od un tensore applicandole a ciascuna delle loro componenti.

ESEMPIO 1-3–Teorema del trasporto di Reynolds.

Si abbia una bolla di gas di raggio R che si dilata all'interno di un fluido senza che vi sia scambio di massa (per evaporazione o dissoluzione del gas) all'interfaccia. Verificare il teorema di Reynolds.

In tali condizioni la massa della bolla è costante e la sua interfaccia delimita un volume materiale, V_m , cui applicheremo il teorema di Reynolds. Supponiamo che durante la dilatazione la densità si mantenga uniforme, il suo valore sarà

$$\rho V_m = \text{cost} \quad \rightarrow \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV_m}{V_m} \quad \rightarrow \quad d\rho = -\frac{\rho}{V_m} dV_m$$

e la sua derivata rispetto al tempo

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho}{V_m} \frac{dV_m}{dt} = -\frac{\rho}{V} 4\pi R^2 \frac{dR}{dt} = -\frac{3\rho}{R} \frac{dR}{dt} = -\frac{3\rho}{R} v_R$$

⁹ Osborne Reynolds, 1842-1912, è famoso soprattutto per avere individuato sperimentalmente la transizione dal moto laminare a quello turbolento. I suoi contributi più importanti in fluidodinamica riguardano la teoria del moto turbolento e della lubrificazione idrodinamica.

Dove v_R rappresenta la velocità dell'interfaccia. Applicando a questo punto il teorema di Reynolds alla derivata della massa totale del sistema si ottiene, detto V_0 il volume di controllo che inizialmente coincide con V_m :

$$0 = \frac{DM}{Dt} = \frac{D}{Dt} \iiint_{V_m} \rho(t) dV = \iiint_{V_0} \frac{d\rho(t)}{dt} dV + \oiint_{S_m} \rho(t) (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS$$

verifichiamo che il secondo membro sia nullo, ricordando che la derivata della densità è funzione solo del tempo e può quindi essere trasportata fuori dall'integrale

$$\iiint_{V_m} \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} dV + \oiint_{S_m} \rho(t) (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS = -\frac{3\rho(t)}{R} v_R V_0 + \rho(t) v_R S = 0$$

si vede chiaramente che tale somma non si annullerebbe in assenza dell'ultimo termine, e che quindi il semplice trasporto della operazione di derivazione all'interno dell'integrale è illecito anche nel caso di un volume di controllo.

□

ESEMPIO 1-4—Applicazione del teorema del trasporto.

Si abbia una bombola di gas con un'apertura da cui fuoriesce del gas, come in Fig.1-1. Valutare variazione di massa nel volume di controllo, applicando la Eq. (1.57).

Come illustrato in Fig.1-1, in questo caso possiamo definire un volume di controllo delimitato dalle pareti della bombola (permeabili alla massa nella zona dell'apertura, A), ed una massa di controllo che inizialmente coincide col volume suddetto. Con l'eccezione dell'apertura A , le pareti del volume di controllo sono impermeabili alla massa e si ha quindi

$$\underline{v}_r \cdot \underline{n} = 0$$

La massa contenuta in un volume è data dall'integrale della densità nel volume

$$m = \iiint_V \rho(\underline{r}, t) dV$$

Per definizione abbiamo $Dm/Dt = 0$ e vale quindi la relazione

$$0 = \frac{D}{Dt} \iiint_{V_m} \rho(\underline{r}, t) dV = \frac{d}{dt} \iiint_{V_0} \rho(\underline{r}, t) dV + \iint_A \rho(\underline{r}, t) \underline{v}_r \cdot \underline{n} dA$$

che è stata ottenuta dalla Eq.(1.57) sostituendo f con ρ e valutando l'integrale di superficie solo sull'apertura (essendo nullo l'integrando altrove). In definitiva si ottiene

$$\frac{dm}{dt} = - \iint_A \rho(\underline{r}, t) \underline{v}_r \cdot \underline{n} dA$$

La precedente relazione esprime il fatto che variazione di massa per unità di tempo all'interno della bombola è data dalla grandezza a secondo membro, che rappresenta quindi la massa che attraversa l'apertura (nel verso di \underline{n}), ed è detta portata massica

$$G_u = \iint_A \rho(\underline{r}, t) \underline{v}_r \cdot \underline{n} dA$$

Si noti che sia ρ che \underline{v}_r sono valutate localmente nei punti della superficie dell'apertura e possono anche non essere uniformi. □

1.5 ELEMENTI DI CINEMATICA DEI CONTINUI

In questa sezione, ci proponiamo di studiare il moto di un sistema continuo indipendentemente dalle cause che lo provocano. Supponiamo di avere un continuo in movimento ed il suo moto sia caratterizzato funzione $\underline{r}(\underline{R}, t)$ definita precedentemente, Eq.(1.47). Si avrà allora come è noto

$$\underline{r}(\underline{R}, t) \equiv \underline{R} + \int_0^t \frac{d \underline{r}(\underline{R}, t)}{dt} dt \quad (1.58)$$

la grandezza $d\underline{r}/dt$ è detta *velocità di una particella*; poiché è valutata mantenendo costanti le coordinate materiali \underline{R} della particella è una *derivata materiale*

$$\underline{v} \equiv \left(\frac{d \underline{r}}{dt} \right)_R = \frac{D \underline{r}}{Dt} \quad (1.59)$$

Nella termofluidodinamica, è spesso sufficiente la conoscenza del campo di velocità \underline{v} al posto della funzione $\underline{r}(\underline{R}, t)$.

L'accelerazione di una particella è data dalla variazione della sua velocità per unità di tempo e pertanto

$$\underline{a} \equiv \left(\frac{d \underline{v}}{dt} \right)_R = \frac{D \underline{v}}{Dt} \quad (1.60)$$

l'accelerazione può anche essere anche espressa da un punto di vista euleriano come

$$\underline{a} = \frac{D \underline{v}}{Dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \text{grad } \underline{v} \quad (1.61)$$

Bisogna fare attenzione che a secondo membro compare il gradiente di un vettore, per cui le componenti a_x, a_y, a_z valgono rispettivamente

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + \underline{v} \cdot \text{grad } v_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ a_y &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + \underline{v} \cdot \text{grad } v_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ a_z &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + \underline{v} \cdot \text{grad } v_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.62)$$

Nella Eq.(1.62) il primo addendo rappresenta l'*accelerazione locale* (dovuta alla variazione nel tempo della velocità in un punto fisso dello spazio) mentre il secondo addendo è detto *accelerazione convettiva* e dipende dalle variazioni del campo di velocità nello spazio. La differenza è chiarita meglio dall'esempio che segue.

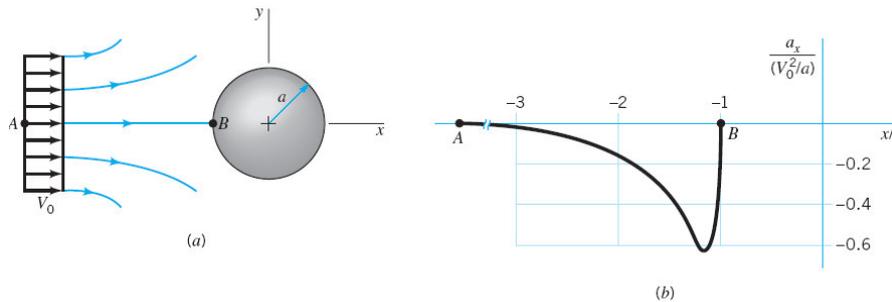
E' significativo notare quindi che anche una particella che si muove in un campo di velocità *stazionario* (ovvero in cui $\partial v/\partial t = 0$) può essere soggetta ad un'accelerazione dovuta al fatto che essa si muove in un campo di velocità *variabile nello spazio*. Naturalmente se il campo

di velocità oltre che essere *stazionario* è anche *uniforme*, si ha $\text{grad } \underline{v} = 0$, e la particella non è soggetta ad alcuna accelerazione.

ESEMPIO 1-5–Accelerazione convettiva¹⁰.

Si abbia una palla da tennis di raggio $a = 34 \text{ mm}$ che si muove alla velocità costante $V_0 = 120 \text{ km/h}$ (vedi figura a). L'andamento della velocità, in un sistema solidale con la palla¹¹, sulla linea di flusso diretta come il moto relativo e che passa per il centro della palla è dato

da $\underline{v} = V_0 \left(1 + \frac{a^3}{x^3} \right) \underline{i}$, dove x è la distanza dal centro della palla. Determinare la massima accelerazione cui è soggetta l'aria sulla linea suddetta.



Per considerazioni di simmetria, possiamo escludere componenti di accelerazione su y e z . Inoltre il moto è stazionario e non ci sono componenti di velocità lungo y e z , per cui dalla prima delle Eqq.(1.62) si ha

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

da cui

$$a_x = V_0 \left(1 + \frac{a^3}{x^3} \right) V_0 \left(\frac{-3a^3}{x^4} \right) = \frac{-3V_0^2 a^3}{x^4} \left(1 + \frac{a^3}{x^3} \right) = -3 \frac{V_0^2}{a} \left(\frac{1 + a^3/x^3}{x^4/a^4} \right)$$

la accelerazione è negativa, ovvero la velocità decresce dal suo valore asintotico V_0 al valore nullo sul “naso” della palla B (detto punto di ristagno) per cui si ha $x = -a$. Si può verificare, derivando rispetto ad x la precedente espressione (vedi anche figura b), che a_x ha un minimo (in valore e segno) di accelerazione per

$$x = -1.205a = -41 \text{ mm} \quad ; \quad a_x = -0.610 \frac{V_0^2}{a} = -19930 \text{ m/s}^2$$

Il fluido subisce pertanto la massima decelerazione ad una distanza dalla superficie della palla pari a circa il 20% del raggio ed il suo valore è notevole (dell'ordine di 2000 g!!).

□

¹⁰ Tratto da Munson, esempio 4.4.

¹¹ Attenzione! Si tratta sempre di un riferimento euleriano riguardo alla descrizione del fluido. Un riferimento lagrangiano dovrebbe muoversi solidalmente alla particella fluida, e non alla palla.

Moti elementari di una particella fluida – tensore di velocità di deformazione

Consideriamo i movimenti cui può andare soggetta una particella fluida. Allo scopo di rendere la trattazione intuitiva, ci limiteremo a trattare i movimenti cui può essere soggetta una faccia piana di un cubetto elementare, facendo presente che la trattazione può essere estesa al caso tridimensionale a spese unicamente di un formalismo matematico più pesante.

I movimenti elementari sono i quattro rappresentati in basso in Fig.1-3 ovvero: *traslazione*, *rotazione*, *dilatazione* e *distorsione*.

La traslazione, come si vede in Fig. 1.3, è data da $v_x dt + v_y dt$, (ovviamente, in genere, sarà presente anche una traslazione su z) ed è quindi rappresentata dal modulo della velocità, v . Ovviamente, il moto è puramente traslatorio solo se la velocità è uniforme, ovvero non ci sono gradienti delle sue tre componenti.

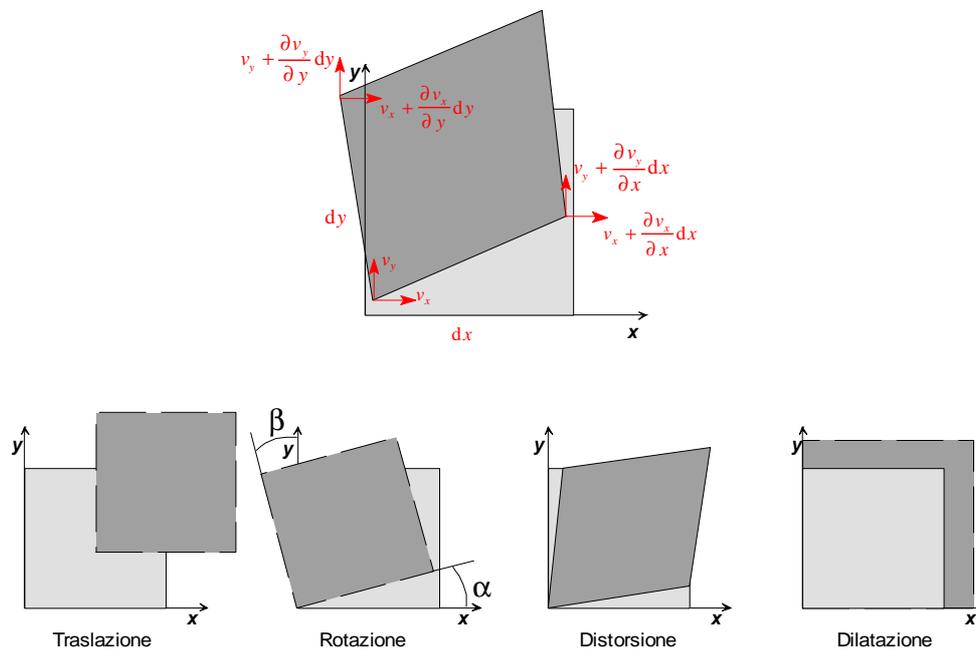


Figura 1.3: Moto di una particella fluida e sua suddivisione in moti elementari.

La rotazione della faccia in direzione di z (positiva se in senso antiorario) può essere espressa come la media delle rotazioni dei due lati; ciò equivale ad esprimere la rotazione della bisettrice dei due lati e permette di eliminare la distorsione della particella, che verrà introdotta in seguito.

$$\omega_z = \frac{1}{2} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\delta \alpha}{\delta t} + \frac{\delta \beta}{\delta t} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) k \quad (1.63)$$

dove il segno negativo al secondo termine deriva dal fatto che se tale derivata è positiva la rotazione è negativa. Espressioni analoghe si possono scrivere per ω_x e ω_y , per cui, combinando, si ha

$$\underline{\omega} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \underline{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \underline{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \underline{k} \right] = \frac{1}{2} \text{rot } \underline{v} \quad (1.64)$$

quindi il rotore rappresenta il doppio della velocità di rotazione dell'elementino fluido che circonda il punto considerato. Notare che si tratta di una eguaglianza vettoriale, ovvero direzione e verso di $\underline{\omega}$ e $\text{rot } \underline{v}$ coincidono. Infine, vale la pena di anticipare che l'angolo tra i due assi del cubetto rimane retto (ovvero l'elemento non si deforma) solo se $\partial v_j / \partial y_i = -\partial v_i / \partial y_j$, il che sarà chiarito tra poche righe.

La dilatazione della faccia può essere espressa come

$$\begin{aligned} dA &= \{dx + [v_x(x+dx) - v_x(x)]dt\} \{dy + [v_y(y+dy) - v_y(y)]dt\} - dx dy = \\ &= \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) dx dy dt \end{aligned} \quad (1.65)$$

generalizzando, la variazione (relativa) di volume per unità di tempo è data da

$$\begin{aligned} \frac{dV}{V(t)dt} &= \frac{V(t+dt) - V(t)}{V(t)dt} = \\ &= \frac{\left(dx + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dt \right) \left(dy + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy dt \right) \left(dz + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz dt \right) - dx dy dz}{dx dy dz dt} = \text{div } \underline{v} \end{aligned} \quad (1.66)$$

ove si sono trascurati gli infinitesimi di ordine superiore. Quindi è chiaro, come anticipato, che la divergenza rappresenta la variazione di volume per unità di tempo della particella.

Infine la distorsione della faccia per unità di tempo può essere espressa come la semisomma degli angoli di cui ruotano i due lati (presi con segno positivo se riducono l'angolo retto), quindi

$$\dot{\epsilon}_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (1.67)$$

Gli spostamenti dei primi due tipi (traslazione, rotazione) sono *compatibili con il moto rigido* dell'elementino, ossia non implicano dilatazione o cambio di forma dello stesso. Si nota inoltre che per provocare rotazioni e distorsioni occorre che le derivate incrociate della velocità (es. $\partial v_x / \partial y$) siano non nulle. La dilatazione e la distorsione implicano deformazione (inglese *strain*) del volumetto.

Questi ultimi due spostamenti elementari sono conglobati nel *tensore velocità di deformazione* (*strain rate tensor* in inglese)

$$\dot{d}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.68)$$

che è analogo al tensore di deformazione introdotto in Scienza delle Costruzioni, ma a differenza di quest'ultimo riporta le deformazioni per unità di tempo. In particolare, la somma degli elementi diagonali di tale tensore (detta traccia) è data dalla divergenza della velocità, ovvero dalla velocità di dilatazione, ed è (come è ovvio dal punto di vista fisico) invariante rispetto ad un cambio del sistema di assi.

Le considerazioni precedenti sono esposte in maniera più formale nell'appendice 1.3, in cui viene introdotto anche il tensore jacobiano.

Linee di flusso e di corrente. Streaklines

Si dice *linea di flusso* (o meno frequentemente *linea di forza*, in inglese *streamline*) di un campo vettoriale \underline{v} definito in D una qualunque linea ovunque tangente a \underline{v} . Tale linea può essere identificata dalle sue equazioni parametriche $x_i = x_i(t)$ che devono pertanto soddisfare le equazioni differenziali

$$\frac{dx_j}{dt} = v_j, \quad j=1,2,3 \tag{1.69}$$

Dette equazioni costituiscono un sistema normale di equazioni differenziali, e se le v_j soddisfano i requisiti del teorema di esistenza ed unicità, per ogni punto di D in cui \underline{v} non sia nullo passa una sola linea di flusso. Inoltre, se \underline{v} dipende dal tempo, il sistema di linee di flusso varia istante per istante.

Un modo alternativo di ottenere le equazioni di una linea di flusso è osservare che essendo \underline{v} e $d\underline{P}$ paralleli, il loro prodotto vettoriale deve essere nullo

$$\underline{v} \times d\underline{P} = 0 \tag{1.70}$$

quindi espandendo il prodotto in accordo alla Eq.(1.4) si ha

$$(v_y dz - v_z dy)\underline{i} + (v_z dx - v_x dz)\underline{j} + (v_x dy - v_y dx)\underline{k} = 0 \tag{1.71}$$

che è verificata se

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \tag{1.72}$$

Una *superficie di flusso* di \underline{v} in D è una superficie ovunque tangente a \underline{v} (formata quindi da linee di flusso). Se L è una linea chiusa nel dominio D , la superficie di flusso formata da tutte le linee di flusso che passano per L si dice *tubo di flusso*.

Si dice che Faraday morì pazzo perché si sentiva circondato da linee di flusso, ed a questo punto ci sarebbe da crederci ...

Possiamo definire altre famiglie di linee all'interno del campo di velocità.

Le *linee di corrente* (*pathlines* in inglese) rappresentano traiettoria di ogni singola particella. Matematicamente, si possono ottenere fissando il punto, vale a dire il valore di \underline{R} nella funzione \underline{m} nella Eq.(1.47), ovvero utilizzando i normali metodi della cinematica per individuare una traiettoria. Notare che a punti diversi sulla pathline corrispondono tempi diversi.

Infine una *linea di fumo* (*streakline* in inglese) è il luogo di tutte le particelle fluide che sono passate per un medesimo punto, ovvero la linea che si può visualizzare iniettando con continuità inchiostro o fumo in un punto fissato del dominio (v. Fig.1.4)

Se il moto è stazionario, le linee di flusso, di corrente e le streaklines coincidono. Quindi se il moto è stazionario si possono visualizzare le streamlines iniettando con continuità inchiostro in un punto (anche se propriamente quelle che si visualizzano sono streaklines). In caso

contrario, le tre famiglie di linee sono in genere distinte e variano nel tempo, come chiarito (almeno speriamo!) dal seguente esempio.

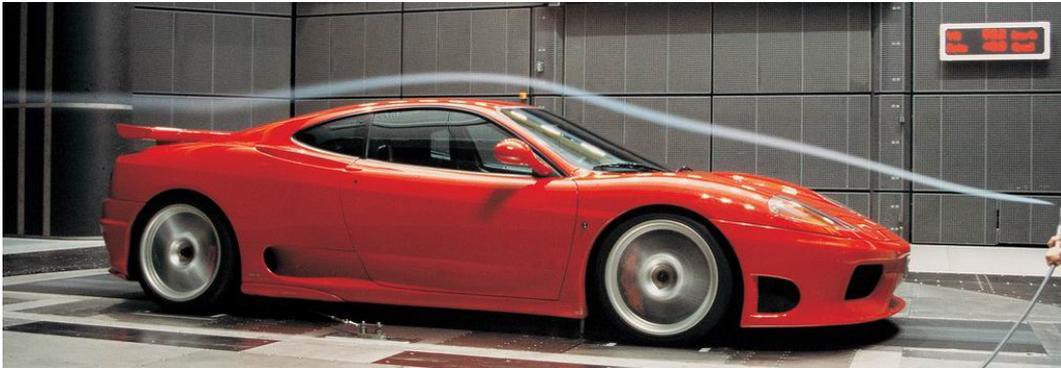


Figura 1.4: Visualizzazione di una linea di fumo durante la prova di un autoveicolo in galleria del vento. Essendo il moto stazionario, la linea di fumo è anche una linea di flusso e di corrente.

ESEMPIO 1-6– Streamlines, pathlines, streaklines.

Consideriamo il flusso da un ugello oscillante, che produce un campo di velocità piano $\underline{v} = u_0 \sin[\omega(t - y/v_0)]\underline{i} + v_0 \underline{j}$, con u_0 , v_0 , ω costanti, in modo tale che la componente verticale (y) è costante e quella orizzontale coincide con quella di oscillazione dell'ugello a $y = 0$. Determinare l'equazione della streamline e della pathline uscenti dall'origine al variare del tempo t e discutere la forma delle streaklines.

Non essendoci moto su z , l'equazione della streamline è data da (v. par.1.3)

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

Da cui si ha quindi, separando le variabili ed integrando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0}{u_0 \sin[\omega(t - y/v_0)]}$$

$$\int_0^y u_0 \sin[\omega(t - y/v_0)] dy = \int_0^x v_0 dx + C(t)$$

$$\frac{u_0}{\omega v_0} \cos[\omega(t - y/v_0)] = v_0 x + C(t)$$

dove la costante C dipende dal tempo: quindi le streamlines variano nel tempo, come era da aspettarsi essendo il moto non stazionario.

Imponendo che la streamline passi dall'origine per $t = 0$ ($x = 0$, $y = 0$ per $t = 0$)

si ha $C(0) = u_0 v_0/\omega$ e quindi

$$x = \frac{u_0}{\omega} \cos(\omega y/v_0) - 1$$

e la streamline è una cosinusoide di ampiezza u_0/ω . Invece per $t = \pi/2$ si ha $C(\pi/2) = 0$ e

$$x = \frac{u_0}{\omega} \cos(\omega y/v_0)$$

Notare che per identificare una streamline abbiamo dovuto fissare il tempo, quindi “fare una fotografia” del campo di velocità.

Per le pathlines bisogna trovare le coordinate della particella che al tempo dato t_0 occupava l’origine, ovvero la sua traiettoria, il che come è noto dalla cinematica si può ottenere integrando *nel tempo* le componenti della velocità

$$\frac{dx}{dt} = u_0 \sin[\omega(t - y(t)/v_0)] \quad , \quad \frac{dy}{dt} = v_0$$

integrando la seconda si ottiene

$$y(t) = v_0 t + C_1$$

e sostituendo tale valore nella prima ed integrando

Le costanti C_1 e C_2 si possono ricavare dal valore del tempo in cui la particella occupava l’origine, ovvero da

$$x(t_0) = 0 \quad , \quad y(t_0) = 0$$

da cui si ottiene

$$C_1 = -v_0 t_0 \quad , \quad C_2 = -u_0 t_0 \sin(\omega t_0)$$

e sostituendo

$$x(t) = u_0 \sin(\omega t_0)(t - t_0) \quad , \quad y(t) = v_0(t - t_0)$$

si può eliminare il tempo dividendo membro a membro

$$\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{u_0 \sin(\omega t_0)}{v_0}$$

Quindi le pathlines sono pertanto linee rette uscenti dall’origine con inclinazione compresa tra v_0/u_0 (dato che il valore della funzione seno oscilla tra ± 1). Notare che anche ogni pathline si riferisce ad un particolare valore del tempo t_0 , ma questo è solo il *valore iniziale* del tempo, vale a dire il valore del tempo in cui la particella di cui tracciamo la traiettoria occupava l’origine.

Infine per identificare le streaklines bisogna ricostruire *ad un determinato istante di tempo* t_0 (facendo quindi di nuovo una fotografia) la posizione occupata dalle particelle che sono uscite dall’origine per un tempo generico $t_1 < t_0$. Ognuna di queste particelle si trova su una differente pathline (quindi, come visto in precedenza, su una differente retta uscente dall’origine con inclinazione con inclinazione compresa tra $\pm v_0/u_0$) ed ad una differente distanza dall’origine. La streakline sarà pertanto una linea sinuosa che “spazza” le pathlines allontanandosi dall’origine: una linea simile è quella che si vede appunto quando si annaffia il giardino facendo oscillare la punta della canna.

□

Vorticità e circuitazione

Si definisce *vorticità* il rotore della velocità

$$\underline{\zeta} = \text{rot } \underline{v} \tag{1.73}$$

quindi, per quanto detto nel precedente paragrafo, la vorticità in un punto è pari in modulo a due volte la velocità di rotazione rigida dell’elementino fluido.

Analogamente alle linee di flusso, si possono definire nel fluido *linee di vorticità* che sono linee ovunque tangenti al vettore $\underline{\zeta}$. Si può anche definire un *tubo di vorticità* come l'insieme di tutte le linee di vorticità che passano per una curva chiusa: un anello di fumo ne è un esempio fisico.

Non è difficile dimostrare, sfruttando il teorema della divergenza e il fatto che la vorticità è sempre solenoidale, che il flusso della vorticità attraverso ogni superficie che ha per bordo il tubo di vorticità è costante. D'altra parte, per il teorema di Stokes, detto flusso è uguale alla circuitazione del vettore \underline{v} lungo il bordo di detta superficie, il quale bordo appartiene anche alla superficie del tubo di vorticità. Anche detta circuitazione si mantiene quindi costante su una qualunque linea chiusa che giaccia sulla superficie di un tubo di vorticità.

Sempre per il teorema di Stokes, se il moto è irrotazionale (ossia se la vorticità è nulla), anche la circuitazione della velocità lungo qualunque linea chiusa è nulla e quindi il campo di velocità è conservativo e ammette potenziale: ma su questo torneremo in seguito.

1.6 FORZE AGENTI SU UN CONTINUO, TENSORE DI CAUCHY ED EQUAZIONI DI EQUILIBRIO

Le forze agenti su una generica porzione V di un continuo possono essere classificate in *forze di volume* e *forze di superficie*.

Le *forze di volume* (dette talvolta anche *forze di massa*) sono quelle la cui risultante e momento risultante possono essere espresse tramite integrali di volume su V

$$\underline{R}^V = \iiint_V \underline{f} \, dV \quad , \quad \underline{M}_A^V = \iiint_V \underline{AP} \times \underline{f} \, dV \quad (1.74)$$

ne fanno parte ad esempio la forza peso, la forza elettrostatica, etc. Anche la forza centrifuga e le altre forze d'inerzia possono essere considerate forze di volume. Il vettore \underline{f} è detto *forza specifica di volume* (si esprime quindi in N/m^3) e può essere funzione della posizione e del tempo. Alternativamente si può usare la *forza specifica di massa* (N/kg) \underline{f}' data da

$$\underline{f}' = \frac{\underline{f}}{\rho} \quad (1.75)$$

Le *forze di superficie* o *di contatto* sono quelle la cui risultante e momento risultante possono essere espresse tramite integrali di superficie estesi alla frontiera S del volume V

$$\underline{R}^S = \iint_S \underline{s} \, dS \quad , \quad \underline{M}_A^S = \iint_S \underline{AP} \times \underline{s} \, dS \quad (1.76)$$

il vettore \underline{s} è definito in ogni punto della superficie ad ogni istante t ed è detto *tensione* (o talora impropriamente *sforzo specifico* o *sforzo*) e ha le dimensioni di forza per unità di superficie (N/m^2 o Pa). In particolare, detta \underline{n} la normale all'elementino dS in P , la componente di \underline{s} parallela ad \underline{n} si dice *tensione normale* e la componente perpendicolare ad \underline{n} *tensione di taglio*.

A. L. Cauchy¹² ha messo in luce che \underline{s} può essere interpretata come la forza che la parte di continuo esterna al volume V esercita su V stesso.

In realtà il fatto che la parte di continuo esterna al volume possa essere sostituita dalle tensioni che esercita sul volume stesso costituisce un'assunzione aprioristica della meccanica dei continui, detta *assioma di Eulero* o *assioma di separazione*.

La distinzione tra forze di volume e di superficie non è così netta come sembra, potendosi passare dagli integrali di volume a quelli di superficie tramite il teorema della divergenza. Ad esempio, la forza di galleggiamento (di Archimede), come esposto nell'esempio 1-7, può essere vista alternativamente sia come forza di superficie (risultante delle pressioni idrostatiche agenti su un corpo) sia come integrale sul volume del peso del liquido spostato. L'importante, come vedremo in seguito, è evitare di conteggiarla due volte!

¹² Augustin Louis de Cauchy, 1789 – 1857, francese, ha dato contributi fondamentali in matematica e meccanica dei continui.

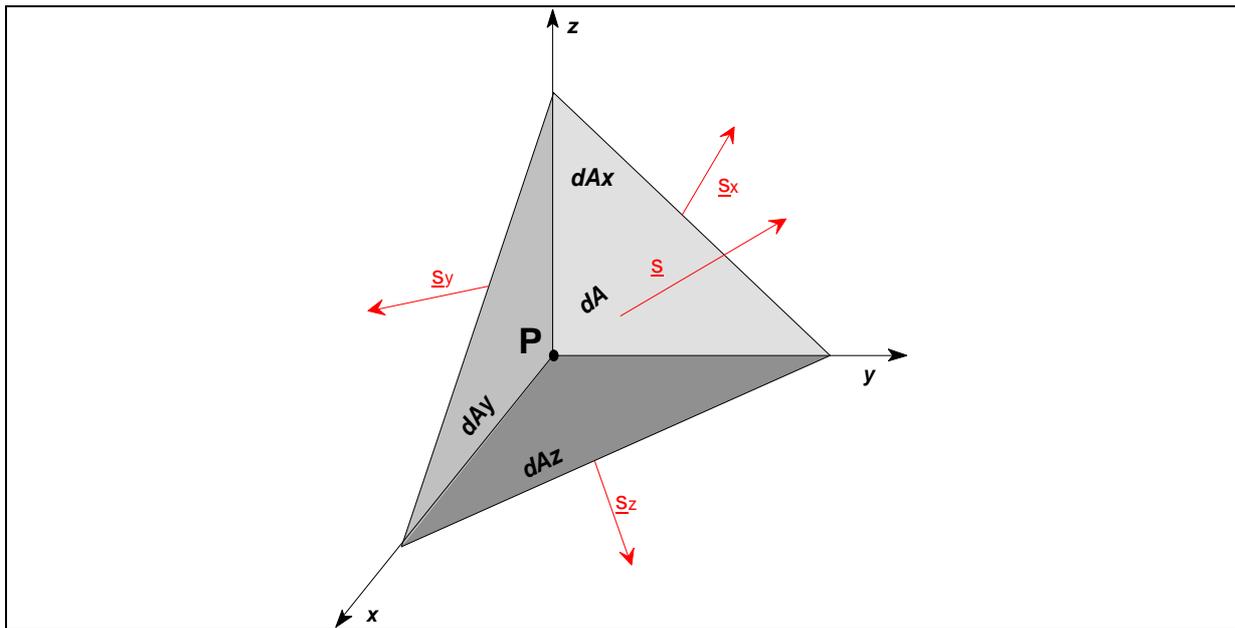


Figura 1.5: Tetraedro di Cauchy.

Bisogna notare che, a differenza della forza di volume \underline{f} , in generale \underline{s} dipende non solo dalla posizione e dal tempo ma anche dall'orientamento della superficie S , rappresentata dal suo versore normale esterno, \underline{n} . La dipendenza di \underline{s} da \underline{n} è stata derivata per la prima volta da Cauchy considerando l'equilibrio alla traslazione di un particolare tetraedro infinitesimo (detto *tetraedro di Cauchy*) di volume infinitesimo costruito intorno al punto P (v. Fig.1.5) in cui tre facce sono perpendicolari ai tre assi (ovvero con versori normali rispettivamente \underline{i} , \underline{j} e \underline{k}) e hanno superfici rispettivamente dA_x , dA_y e dA_z , e la quarta ha orientazione arbitraria con normale \underline{n} e superficie dA . Considerando tale volume infinitesimo soggetto solo a forze di superficie¹³ si ha, per l'equilibrio alla traslazione

$$\underline{s}_n dA - \underline{s}_x dA_x - \underline{s}_y dA_y - \underline{s}_z dA_z = 0 \quad (1.77)$$

dove gli ultimi tre termini hanno segno negativo in quanto i versori degli assi sono orientati internamente al tetraedro¹⁴. Con semplici considerazioni geometriche si ha

$$dA_x = dA \cos(\underline{i}, \underline{n}) = dA (\underline{i} \cdot \underline{n}) \quad (1.78)$$

ed analoghe per dA_y , dA_z ; eliminando dA si ottiene

¹³ La dimostrazione qui fornita pecca intenzionalmente di rigore matematico, volendo solo stimolare l'intuizione del lettore. Una dimostrazione più rigorosa, che tiene conto anche delle forze di massa e dell'arbitrarietà del volume V , è riportata nelle dispense di Mattei. Inoltre, si ipotizza che *il momento risultante delle azioni su ciascuna faccia sia nullo* (tale assunzione viene detta *lemma di Cauchy*): considerare anche quest'ultimo fattore porterebbe ad una dipendenza della tensione non solo dalla normale alla superficie, ma anche dalla sua curvatura.

¹⁴ Potremmo anche considerare i versori orientati nella direzione opposta; in tal caso non ci sarebbero segni negativi nelle (1.77), ma anche i prodotti scalari della successiva (1.78) cambierebbero segno.

$$\underline{s}_n - \underline{s}_x (\underline{i} \cdot \underline{n}) - \underline{s}_y (\underline{j} \cdot \underline{n}) - \underline{s}_z (\underline{k} \cdot \underline{n}) = 0 \quad (1.79)$$

ovvero

$$\underline{s}_n = \underline{s}_x n_x + \underline{s}_y n_y + \underline{s}_z n_z \quad (1.80)$$

A sua volta, ciascuna delle tensioni \underline{s}_i può essere espressa nelle sue componenti lungo gli assi

$$\begin{aligned} \underline{s}_x &= \sigma_{xx} \underline{i} + \sigma_{xy} \underline{j} + \sigma_{xz} \underline{k} \\ \underline{s}_y &= \sigma_{yx} \underline{i} + \sigma_{yy} \underline{j} + \sigma_{yz} \underline{k} \\ \underline{s}_z &= \sigma_{zx} \underline{i} + \sigma_{zy} \underline{j} + \sigma_{zz} \underline{k} \end{aligned} \quad (1.81)$$

dove con σ_{ij} indichiamo la componente che agisce sulla faccia la cui normale è l'asse i nella direzione dell'asse j . Il valore di \underline{s}_n dato dalla (1.80) può essere scomposto nelle sue componenti sugli assi sfruttando la (1.81), e le due relazioni possono quindi essere compattate nella ben nota relazione tensoriale (*teorema di Cauchy*)

$$\underline{s}_n = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} n_x + \sigma_{yx} n_y + \sigma_{zx} n_z \\ \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{zy} n_z \\ \sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z \end{pmatrix} = \underline{n} \cdot \underline{\underline{S}} \quad (1.82)$$

dove $\underline{\underline{S}}$

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.83)$$

è detto *tensore delle tensioni* o *tensore di Cauchy* (o talvolta *tensore degli sforzi*) nel punto P . In definitiva, il teorema di Cauchy afferma che *lo stato di tensione in un punto è rappresentato completamente da un campo tensoriale $\underline{\underline{S}}$* .

In altri termini, per conoscere lo stato di tensione in un punto P di coordinate \underline{r} non occorre che siano noti indipendentemente tutti i vettori $\underline{s}(\underline{r}, t, \underline{n})$, ovvero ∞^2 vettori, tanti quanti le direzioni uscenti da P , ma è sufficiente che sia determinato il tensore di Cauchy $\underline{\underline{S}}(\underline{r}, t)$.

Nel paragrafo successivo vedremo, come è già noto dal corso di Scienza delle Costruzioni, che il tensore di Cauchy è necessariamente simmetrico, e quindi le componenti del tensore si riducono a sei (tre tensioni normali e tre di taglio). In considerazione di tale simmetria, il prodotto interno vettore-tensore nella Eq.(1.82) gode della proprietà commutativa e si può quindi scrivere, come di nuovo è noto dal corso di Scienza delle Costruzioni, che la forza $d\underline{F}$ agente sopra un elemento infinitesimo di superficie dA vale

$$d\underline{F} = \underline{\underline{S}} \cdot \underline{n} \, dA \quad (1.84)$$

ESEMPIO 1-7– Principio di Archimede.

Derivare la forza risultante dalla pressione idrostatica su un corpo immerso in un fluido a riposo (espressa, come noto, dal principio di Archimede¹⁵).

Vedremo meglio in seguito che un fluido in quiete non esercita tensioni di taglio e la tensione normale viene indicata con il termine *pressione*, p , e considerata positiva se è di compressione, ovvero quando agisce in direzione opposta alla normale esterna alla superficie, \underline{n} .

Il valore della pressione in un fluido in quiete è regolata dalle due leggi fondamentali dell'idrostatica: la *legge di Pascal*¹⁶ afferma che il suo valore in un punto è indipendente dall'orientazione della superficie su cui si esercita, e quindi dalla direzione di \underline{n} , in altre parole che in questo caso il tensore di Cauchy è *idrostatico* e si può scrivere come

$$\underline{\underline{S}} = \begin{vmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{vmatrix} = -p \underline{\underline{I}}$$

la *legge di Stevin*¹⁷ asserisce che in un fluido pesante a riposo la pressione varia con la profondità secondo la legge (notare che l'asse z è orientato verso il basso)

$$p(z) = \rho_f g z$$

dove ρ_f è la densità del fluido, g è l'accelerazione di gravità e l'asse z è l'asse verticale orientato verso il basso.

La risultante delle forze di superficie su un volume arbitrario V di superficie A è data, secondo la prima delle (1.76), la legge di Stevin, e la (1.84) (dove si deve porre la pressione negativa, come appare nel tensore di Cauchy)

$$\underline{\underline{R}}^S = \oint\!\!\!\oint_A \underline{n} \cdot \underline{\underline{S}} dA = \oint\!\!\!\oint_A \underline{n} \cdot (-p \underline{\underline{I}}) dA = \oint\!\!\!\oint_A -p(z) \underline{n} dA = \oint\!\!\!\oint_A -\rho_f g z \underline{n} dA$$

D'altra parte, secondo il teorema di Green Eq.(1.44), la precedente relazione può essere convertita in un integrale di volume

$$-\oint\!\!\!\oint_A (\rho_f g z) \underline{n} dA = -\iiint_V \text{grad}(\rho_f g z) dV = -\rho_f g \underline{k} \iiint_V dV = -\rho_f g V \underline{k}$$

L'ultima espressione ci dice che la forza risultante è diretta in direzione opposta all'asse z (ovvero verso l'alto) ed è pari in modulo al peso del fluido spostato (come è noto appunto dal principio di Archimede!). Notare anche che il gradiente non ha componenti su x ed y (dato che il suo argomento dipende solo da z) e quindi le risultanti della pressione idrostatica su detti assi sono, come del resto noto dall'esperienza, autoequilibrate.

□

¹⁵ Archimede, 287-212 a.c., siracusano, matematico e inventore, fu ucciso dai Romani durante la presa di Siracusa. Scrisse, tra numerosi altri, un trattato sui corpi galleggianti, diversi trattati di matematica e geometria, mostrò per primo l'esistenza del baricentro.

¹⁶ Blaise Pascal, 1623-1662, filosofo e matematico, morì di tumore in giovane età. Dimostrò sperimentalmente l'esistenza del vuoto, polemizzando con Cartesio (che scrisse di lui che il vuoto lo aveva nella testa!), e scrisse uno dei primi trattati di idrostatica.

¹⁷ Simon Stevin, 1548-1620, olandese, valente ingegnere idraulico e militare, è considerato uno dei fondatori della scienza dell'idrostatica. Si occupò anche di matematica, introducendo in Europa il sistema decimale, di meccanica (introducendo il parallelogramma delle forze) e di teoria della musica.

Equilibrio di un volume materiale – Equazioni indefinite di Cauchy

Consideriamo un volume materiale V arbitrario ed applichiamo le equazioni cardinali della dinamica, che postuliamo valide

$$\begin{aligned} \underline{R} &= \iiint_V (\underline{f} - \rho \underline{a}) dV + \iint_S \underline{s} dS = 0 \\ \underline{M}_A &= \iiint_V \underline{AP} \times (\underline{f} - \rho \underline{a}) dV + \iint_S \underline{AP} \times \underline{s} dS = 0 \end{aligned} \tag{1.85}$$

in esse abbiamo esplicitato la forza d'inerzia per unità di volume, $\rho \underline{a}$. L'equazione di equilibrio alla traslazione, tenuto conto del teorema di Cauchy, diviene

$$\iiint_V \rho \underline{a} dV = \iiint_V \underline{f} dV + \iint_S \underline{n} \cdot \underline{\underline{S}} dS \tag{1.86}$$

ed applicando il teorema della divergenza all'integrale di superficie - Eq.(1.45) - si ha

$$\iiint_V \rho \underline{a} dV = \iiint_V \underline{f} dV + \iiint_V \text{div} \underline{\underline{S}} dV \tag{1.87}$$

da cui, essendo gli integrandi regolari ed il volume V arbitrario, si ha infine

$$\rho \underline{a} = \underline{f} + \text{div} \underline{\underline{S}} \tag{1.88}$$

che viene detta *prima equazione indefinita di Cauchy*.

L'equilibrio alla rotazione si riduce, dopo una serie abbastanza laboriosa di passaggi riportati sul testo di Mattei, a

$$(\sigma_{yz} - \sigma_{zy}) \underline{i} + (\sigma_{xz} - \sigma_{zx}) \underline{j} + (\sigma_{xy} - \sigma_{yx}) \underline{k} = 0 \tag{1.89}$$

detta anche *seconda equazione indefinita di Cauchy*. Da essa si evince che $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, ovvero che *il tensore di Cauchy è simmetrico*.

In definitiva, l'equilibrio alla rotazione del volume arbitrario ha come conseguenza la *simmetria del tensore di Cauchy*. L'equilibrio alla traslazione si esprime nella *prima equazione indefinita di Cauchy* (detta anche semplicemente *equazione indefinita di Cauchy* – oppure *equazioni indefinite di Cauchy*, considerando individualmente le tre componenti scalari). Detta equazione verrà ampiamente applicata in seguito.

1.7 DETERMINAZIONE DEL PROBLEMA - RELAZIONI DI CHIUSURA

Generalmente nei problemi di termofluidodinamica il numero di equazioni è inferiore al numero di variabili. Ad esempio, in un problema fluidodinamico (escludendo quindi la componente termica) abbiamo a che fare con l'equazione di conservazione della massa (una equazione scalare, che verrà introdotta in seguito) e con le equazioni indefinite di Cauchy (due equazioni vettoriali, corrispondenti a sei equazioni scalari). Le incognite sono tre componenti della velocità, la densità e le nove componenti del tensore di Cauchy, che possono essere ridotte a sei a spese della seconda equazione indefinita di Cauchy. In totale abbiamo quindi di quattro equazioni in dieci incognite, che danno luogo ad un problema largamente indeterminato. L'estensione ai problemi termici porterebbe all'introduzione di una nuova

equazione (il bilancio di energia) ed una nuova variabile termodinamica, in genere la temperatura.

Quindi, una volta fissate le equazioni con le appropriate condizioni iniziali ed al contorno, il problema rimane spesso *indeterminato*, e per risolverlo analiticamente abbiamo bisogno di relazioni supplementari sul comportamento del materiale che vengono generalmente indicate col nome di *relazioni di chiusura*.

Più in precisamente si definisce *relazione di chiusura* una relazione tra uno dei cosiddetti *campi fondamentali* (densità, velocità e temperatura) ed i *campi derivati* (es. energia interna, flusso termico, energia interna, componenti del tensore di Cauchy ...).

Le relazioni di chiusura sono in genere distinte in *equazioni costitutive* ed *equazioni di stato*. (altri invece considerano i termini "relazioni di chiusura" ed "equazioni costitutive" come sinonimi). Le equazioni costitutive descrivono la risposta di un materiale agli stimoli applicati (ad es. la legge di Hooke descrive la risposta di un solido elastico lineare alle forze, la legge di Fourier lega il flusso termico al gradiente di temperatura e così via). In tali leggi compaiono costanti (come la costante elastica) il cui valore è diverso per differenti materiali e che vengono in genere determinate sperimentalmente. Le equazioni di stato invece legano tra loro le variabili di stato (pressione, temperatura, entalpia, entropia etc.), come accade per esempio per l'equazione di stato dei gas ideali, ed anch'esse possono contenere costanti il cui valore varia a seconda della sostanza considerata.

Ne segue che in genere materiali diversi, sottoposti alle medesime leggi fisiche ma aventi differenti equazioni costitutive o di stato, daranno luogo a diverse soluzioni del problema, e queste soluzioni sono valide nei *limiti* in cui lo sono i modelli costitutivi adottati, che riguardano sia il *campo di validità delle ipotesi* che la loro *accuratezza*. Di questo i lettori hanno avuto già un esempio in Scienza delle Costruzioni, dove le reazioni vincolari in un sistema iperstatico dipendono non solo dalle equazioni di equilibrio, ma anche dal materiale (solido elastico, solido plastico ...) da cui è costituito il sistema oggetto di studio.

La soluzione di un problema ingegneristico nasce quindi quasi sempre dalla combinazione dei *principi della fisica* con le appropriate *relazioni di chiusura*.

RINGRAZIAMENTI

L'autore ringrazia i suoi insegnanti, e in particolare i professori Mario Poli, Giulio Mattei e Piero Villaggio, cui deve la conoscenza di buona parte delle nozioni qui esposte.

BIBLIOGRAFIA

G. Mattei, *Lezioni di Meccanica Razionale*, Mencarini, Pisa, 1977, Parte VII, Meccanica dei Continui.

R.B. Bird, W.E. Stewart, E.N. Lightfoot, *Transport Phenomena*, Wiley, 1960, App.A.

N.E. Todreas, M.S. Kazimi, *Nuclear Systems I – Thermalhydraulic Fundamentals*, Taylor & Francis, 1989, cap.4.

R.L. Panton, *Incompressible Flow*, 3rd ed., Wiley, 2005.

R.B. Bird, W.E. Stewart, E.N. Lightfoot, *Transport Phenomena*, Wiley, 1960

APPENDICE 1.1 – Operazioni sui vettori

Proprietà anticommutativa del prodotto vettoriale

$$\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a} \quad (1.90)$$

Per il prodotto vettoriale non vale la proprietà associativa

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} \neq \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) \quad (1.91)$$

ad esempio $(\underline{i} \times \underline{i}) \times \underline{j} = 0 \neq \underline{i} \times (\underline{i} \times \underline{j}) = -\underline{j}$

Per il prodotto vettoriale vale invece la proprietà distributiva

$$(\underline{a} + \underline{b}) \times \underline{c} = \underline{a} \times \underline{c} - \underline{b} \times \underline{c} \quad (1.92)$$

Nel *doppio prodotto misto* se si commutano due vettori si ha un cambio di segno

$$\underline{a} \times \underline{b} \cdot \underline{c} = -\underline{a} \times \underline{c} \cdot \underline{b} \quad (1.93)$$

mentre invece i vettori possono essere permutati ciclicamente

$$\underline{a} \times \underline{b} \cdot \underline{c} = \underline{c} \cdot \underline{a} \times \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{c} \times \underline{a} \dots \quad (1.94)$$

Infine per il *doppio prodotto vettoriale* si ha

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = (\underline{a} \cdot \underline{b}) \underline{c} - (\underline{b} \cdot \underline{c}) \underline{a} \quad (1.95)$$

APPENDICE 1.2 – Operatori differenziali in coordinate sferiche e cilindriche

Per maggiori dettagli vedi Bird, app. A-7.

Coordinate cilindriche (r, θ, z)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \underline{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \underline{i}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \underline{i}_z \quad (1.96)$$

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial r} \underline{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \underline{i}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \underline{i}_z \quad (1.97)$$

$$\text{div } \underline{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (1.98)$$

$$\text{rot } \underline{v} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \underline{i}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \underline{i}_\theta + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \underline{i}_z \quad (1.99)$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (1.100)$$

Coordinate sferiche (r, θ, φ)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \underline{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \underline{i}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \underline{i}_\varphi \quad (1.101)$$

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial r} \underline{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \underline{i}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \underline{i}_\varphi \quad (1.102)$$

$$\text{div } \underline{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \quad (1.103)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \underline{v} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial (v_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right] \underline{i}_r + \\ & \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_\varphi)}{\partial r} \right] \underline{i}_\theta + \\ & \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \underline{i}_\varphi \end{aligned} \quad (1.104)$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad (1.105)$$

APPENDICE 1.3 – Il tensore jacobiano ed il suo significato

Si definisce *tensore (o matrice) jacobiano*¹⁸ della velocità il tensore

$$\underline{\underline{J}} = (\text{grad } \underline{v})^T = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (1.106)$$

mentre generalmente, con il termine *jacobiano* si indica il suo determinante.

La derivata direzionale della velocità, tenendo conto della (1.35) e del fatto che il tensore grad \underline{v} è stato trasposto, può essere espressa come

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial n} = \underline{\underline{J}} \cdot \underline{n} \quad (1.107)$$

Tale derivata è ovviamente nulla per i moti di traslazione, mentre invece è diversa da zero sia per le deformazioni che per le rotazioni rigide del continuo.

Il tensore jacobiano, come tutti i tensori, può essere scomposto in un tensore simmetrico $\underline{\underline{D}}$ ed uno antisimmetrico $\underline{\underline{\Omega}}$, dove

$$\begin{aligned} \underline{\underline{D}} &= \frac{1}{2} (\underline{\underline{J}} + \underline{\underline{J}}^T) & , & & d_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\ \underline{\underline{\Omega}} &= \frac{1}{2} (\underline{\underline{J}} - \underline{\underline{J}}^T) & , & & \omega_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (1.108)$$

Non è difficile vedere che la parte simmetrica del tensore coincide con il *tensore di deformazione*, definito dalla(1.68); nel seguito mostreremo invece che la parte antisimmetrica, detta *tensore di rotazione o di spin*, caratterizza la rotazione rigida del volumetto. Infatti per ogni tensore antisimmetrico vale la relazione, facilmente verificabile (v. ad esempio Pantoni, cap.3.6)

$$\underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{r} = \underline{\omega} \times \underline{r} \quad (1.109)$$

dove $\underline{\omega}$ è detto *vettore duale* del tensore $\underline{\underline{\Omega}}$ ed è dato da

$$\underline{\omega} = \omega_{23} \underline{i} - \omega_{13} \underline{j} + \omega_{12} \underline{k} = \frac{1}{2} \text{rot } \underline{v} \quad (1.110)$$

¹⁸ Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804-1851, matematico tedesco, entrò all'università a soli 16 anni; dette importanti contributi sulle equazioni differenziali alle derivate parziali e la loro applicazione alla meccanica. Scrisse un trattato, *De determinantibus functionalibus*, dedicato al determinante che ora porta il suo nome. Morì relativamente giovane di vaiolo.

Se adesso torniamo alla (1.107), possiamo definire la variazione di velocità in una qualunque direzione come

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{n}} = \underline{J} \cdot \underline{n} = \underline{\dot{D}} \cdot \underline{n} + \underline{\Omega} \cdot \underline{n} = \underline{\dot{D}} \cdot \underline{n} + \underline{\omega} \times \underline{n} \quad (1.111)$$

La seconda parte dell'ultimo membro ha la classica struttura $\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r}$ ed è quindi una rotazione rigida¹⁹. Si vede così formalmente, tra l'altro, che il rotore della velocità (ovvero la vorticità) è il doppio della velocità angolare di rotazione rigida della particella.

A prescindere dunque dalla traslazione (che non compare in questa analisi differenziale, ma potrebbe essere aggiunta sotto forma di una costante a tutti i valori), il campo di moto di un continuo (inizialmente definito dal tensore jacobiano) è comunque scomponibile in una *rotazione rigida*, caratterizzata indifferentemente dal tensore di rotazione, dal vettore $\underline{\omega}$ o dalla vorticità, ed una *deformazione* (che include sia la distorsione che la dilatazione) caratterizzata dal tensore di deformazione. A differenza di un corpo rigido, tuttavia, in un continuo deformabile il valore di $\underline{\omega}$ può in generale variare da punto a punto.

Una trattazione più formale di quanto esposto può essere reperita, ad esempio, sul Panton, cap.4.4.

¹⁹ Questa struttura appare qui solo in forma differenziale; tuttavia se la applichiamo tra un punto la cui velocità è zero ed uno – molto vicino, la cui velocità vale $d\underline{v}$, otteniamo $d\underline{v} = \underline{\omega} \times d\underline{n}$, ovvero la legge della rotazione rigida.

APPENDICE 1.4 – Cenni sulla notazione einsteiniana

La cosiddetta *notazione einsteiniana* (*Einstein notation* or *Einstein summation convention*) venne introdotta appunto da Einstein nel 1916²⁰ allo scopo di semplificare e velocizzare la scrittura delle formule con indici, in particolare, essa consente di sopprimere i simboli delle sommatorie. Attualmente è adottata in numerosi testi di fluidodinamica, per cui è indispensabile conoscerla per affrontarne la lettura.

Gli indici che appaiono in una formula vengono distinti in due categorie: *indici liberi* (free indexes) e *indici ripetuti* (dummy or summation indexes). Consideriamo ad esempio l'espressione:

$$x'_j = \alpha_{ij} x_i \quad (1.112)$$

In essa, l'indice j è un indice libero in quanto appare *una ed una sola volta* in ogni monomio dell'equazione. Al contrario, l'indice i è un indice ripetuto in quanto appare *due volte* nel monomio a secondo membro (ovvero, come indice di α e come indice di x). In questo caso, la convenzione stabilisce che (in uno spazio euclideo, a tre dimensioni) si debba eseguire la sommatoria per i valori dell'indice ripetuto che vanno da 1 a 3; le seguenti espressioni sono quindi equivalenti

$$\begin{aligned} x'_i &= \alpha_{ij} x_j \\ x'_i &= \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} x_j \\ x'_i &= \alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \alpha_{i3} x_3 \end{aligned} \quad (1.113)$$

A sua volta, l'indice libero j può essere sostituito con un altro indice (ad esempio k o l) purchè esso non compaia già nella formula come indice ripetuto, ed in genere assume anche lui i valori da 1 a 3. Vale a dire, nel suo complesso la relazione (1.112) rappresenta tutte le relazioni seguenti

$$\begin{aligned} x'_1 &= \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3 \\ x'_2 &= \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \alpha_{23} x_3 \\ x'_3 &= \alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2 + \alpha_{33} x_3 \end{aligned} \quad (1.114)$$

La medesima formula può contenere più di un indice doppio. Ad esempio la relazione

²⁰ Albert Einstein (1879-1955). Fisico e matematico di origine tedesca. Oltre a essere uno dei più celebri fisici e matematici della storia della scienza, fu un grande pensatore e attivista in molti altri ambiti (dalla filosofia alla politica). Per il suo complesso e variegato apporto alle scienze e alla fisica in particolare, con la Teoria della Relatività, è considerato uno dei maggiori geni dell'umanità.

Nel suo "The Foundation of the General Theory of Relativity", pubblicato su Annalen der Physik nel 1916, si legge (trad.): "Uno sguardo alle equazioni di questo paragrafo mostra che è sempre presente una somma rispetto agli indici che appaiono due volte dentro un segno di sommatoria, e solo rispetto agli indici che appaiono due volte. E' quindi possibile, senza perdita di chiarezza, omettere il simbolo di sommatoria. Al suo posto introduciamo la convenzione: - se un indice appare due volte in un termine di un'espressione, esso deve sempre essere sommato a meno che non si stabilisca espressamente il contrario."

$$t'_{ij} = \alpha_{ki} \alpha_{lj} t_{kl} \quad (1.115)$$

Indica una doppia sommatoria (sugli indici k ed l) nel monomio a secondo membro e si espande come

$$t'_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 \alpha_{ki} \alpha_{lj} t_{kl}$$

$$t'_{ij} = \alpha_{1i} \alpha_{1j} t_{11} + \alpha_{1i} \alpha_{2j} t_{12} + \alpha_{1i} \alpha_{3j} t_{13} + \alpha_{2i} \alpha_{1j} t_{21} + \alpha_{2i} \alpha_{2j} t_{22} + \alpha_{2i} \alpha_{3j} t_{23} +$$

$$+ \alpha_{3i} \alpha_{1j} t_{31} + \alpha_{3i} \alpha_{2j} t_{32} + \alpha_{3i} \alpha_{3j} t_{33} \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad , \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.116)$$

Il prodotto scalare di due vettori si può quindi esprimere come

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \quad (1.117)$$

Altri esempi si possono ottenere utilizzando il delta di Kronecker, definito come

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{se } i = j \quad , \quad \delta_{ij} = 0 \quad \text{se } i \neq j \quad (1.118)$$

Per esempio

$$\delta_{ki} = \alpha_{kj} \alpha_{ij} \quad (1.119)$$

deve essere sommata sull'indice j e ha come indici liberi k ed i ; per $i = k = 1$ si espande in

$$1 = \alpha_{11} \alpha_{11} + \alpha_{12} \alpha_{12} + \alpha_{13} \alpha_{13} \quad (1.120)$$

mentre per $i = 1$ e $k = 2$ dà

$$0 = \alpha_{21} \alpha_{11} + \alpha_{22} \alpha_{12} + \alpha_{23} \alpha_{13} \quad (1.121)$$

Infine la relazione

$$x_k = \delta_{ki} x_i \quad (1.122)$$

esprime semplicemente l'identità

$$x_k = x_k \quad , \quad k = 1, 2, 3 \quad (1.123)$$