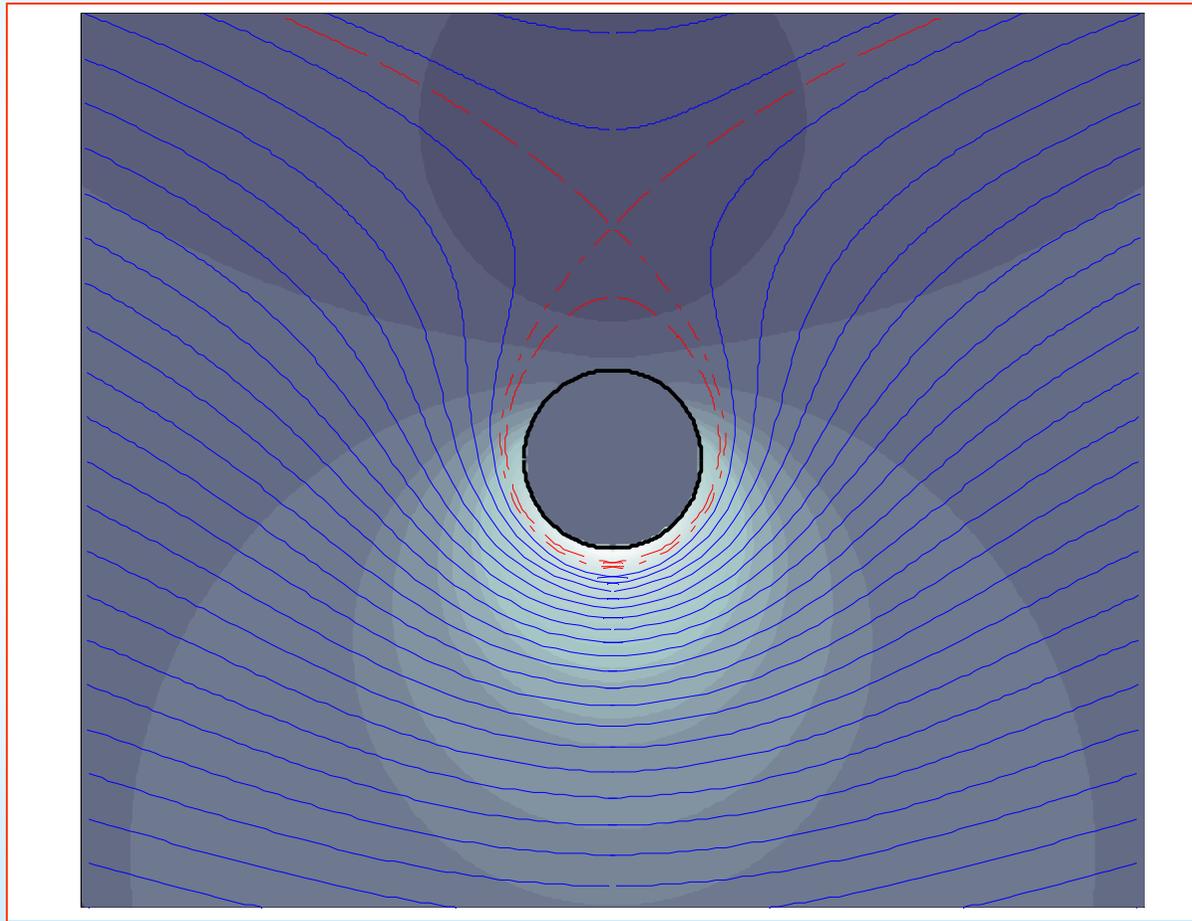


# IL MOTO POTENZIALE



# CONDIZIONI PER IL MOTO INCOMPRESSIBILE

Il moto del fluido si definisce *incompressibile* quando

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

ovvero la densità delle particelle non cambia dal punto di vista lagrangiano. Dall'equazione locale di continuità questo implica anche

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\operatorname{div} v \quad \rightarrow \quad \operatorname{div} v = 0$$

vale a dire che la particella non subisce variazioni di volume.

Dalla definizione di numero di Mach

$$Ma^2 = \frac{v_0^2}{c^2} = v_0^2 \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s = \frac{\rho_0 v_0^2}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s$$

E passando agli ordini di grandezza

$$Ma^2 \approx \Delta p \frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta \rho}{\Delta p} = \frac{\Delta \rho}{\rho_0}$$

Da cui si vede che la condizione vale a basso numero di Mach.

In genere il limite è posto a  $Ma = 0.3$ .

Vedi anche Panton, cap 10 o Munson, sez. 3.8.

oppure Buresti p. 121 per un'analisi molto più accurata.

# SEMPLIFICAZIONE DEL PROBLEMA DEL MOTO - 1

Le equazioni che regolano il moto di un fluido newtoniano incomprimibile sono

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{v} = 0 \\ \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho \underline{v} \cdot \operatorname{grad} \underline{v} = \mu \nabla^2 \underline{v} - \operatorname{grad} p + \rho \underline{f}' \end{cases}$$

Cui vanno associate le opportune condizioni al contorno ed iniziali. Limitandoci, senza perdere troppo in generalità, a considerare il moto stazionario senza forze di massa, le equazioni di N-S possono essere adimensionalizzate in base ad una lunghezza ed una velocità caratteristiche,  $U$  e  $L$

$$\underbrace{\underline{v}^* \cdot \operatorname{grad} \underline{v}^*}_{\text{inerzia}} - \underbrace{\frac{1}{Re} \nabla^2 \underline{v}^*}_{\text{forze viscosse}} = - \underbrace{\operatorname{grad} p^*}_{\text{gradiente di pressione}}$$

Dove compaiono il numero di Reynolds e la pressione adimensionale  $p^*$

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu}, \quad p^* = \frac{p}{\rho U^2}$$

A basso  $Re$  si può trascurare il termine inerziale, ad alto  $Re$  diviene trascurabile il termine viscoso.

# SEMPLIFICAZIONE DEL PROBLEMA DEL MOTO - 1

Si hanno quindi due possibili approcci.

A basso  $Re$  si ha il cosiddetto *creeping flow*, ("flusso strisciante") in cui scompaiono i termini inerziali e la dipendenza dalla densità

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{v} = 0 \\ \mu \nabla^2 \underline{v} = \operatorname{grad} p \end{cases}$$

Questo approccio è utile nei problemi di lubrificazione e sedimentazione.

Ad alto  $Re$  si il termine viscoso scompare e si ottengono equazioni analoghe a quelle del fluido ideale (equazioni di Eulero)

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{v} = 0 \\ \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \operatorname{grad} \underline{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \end{cases}$$

In caso di moto stazionario, se si riesce a determinare il campo di velocità dalla prima equazione (es. trovando la funzione di corrente  $\Psi$ ) si può trovare la pressione tramite l'equazione di Bernoulli senza risolvere N-S.

# IL MOTO IRROTAZIONALE O POTENZIALE - 1

Un'altra importante condizione si ha quando il moto è *irrotazionale* ovvero la vorticità è nulla

$$\underline{\zeta} = \text{rot } \underline{v} = 0$$

Nel caso di moto incomprimibile si può verificare allora che

$$\nabla^2 \underline{v} = \text{rot}(\text{rot } \underline{v}) = \text{rot } \underline{\zeta} = 0$$

Per in cui il termine viscoso nelle equazioni di N-S si annulla.

**ATTENZIONE:** questo non vuol dire che le tensioni viscosose sono nulle, ma solo che sono *autoequilibrate*.

Inoltre il teorema di Stokes ci permette di affermare che la velocità *ammette potenziale*.

$$\text{rot } \underline{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{v} = \text{grad } \varphi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{array} \right.$$

Sostituendo nella equazione di continuità si ha

$$\text{div } \underline{v} = \text{div}(\text{grad } \varphi) = \nabla^2 \varphi = 0$$

Questa equazione è una delle più famose della fisica matematica ed è detta *equazione di Laplace*. Il moto risultante è detto *moto potenziale*.

## IL MOTO IRROTAZIONALE O POTENZIALE - 2

L'equazione di Laplace deve essere associata a opportune condizioni al contorno; per una generica superficie di contorno che si muove con velocità  $\underline{v}_s$  si ha

$$\underline{n} \cdot \underline{v}_s = \underline{n} \cdot \underline{v} = \underline{n} \cdot \text{grad } \phi$$

Quindi per una superficie immobile  $\underline{n} \cdot \text{grad } \phi = 0$

La condizione suddetta impedisce al fluido di *attraversare* la superficie. Non è invece possibile, dato il carattere dell'equazione di Laplace, imporre una ulteriore condizione al contorno che impedisca al fluido di *scivolare* sulla superficie.

Peraltro, il moto di un fluido viscoso in prossimità di una superficie ( $\underline{v} - \underline{v}_s = 0$ ) *non può essere irrotazionale*.

In caso di moto stazionario e forze di massa conservative, una volta trovato il campo di velocità si può ricavare il campo di pressione dall'equazione di Bernoulli

$$\text{grad} \left( \frac{v^2}{2} + \psi + \frac{p}{\rho} \right) = \underline{v} \times \underline{\zeta} = 0$$

Essendo la vorticità nulla, *il valore dell'invariante di Bernoulli è costante in tutto il dominio*. Non è quindi necessario risolvere N-S.

# CARATTERISTICHE DELLA EQUAZIONE DI LAPLACE

Altri fenomeni fisici regolati dall'equazione di Laplace sono ad esempio:

- la conduzione del calore in stazionario;
- la deflessione di una membrana elastica;
- la distribuzione di campo elettrico in assenza di carica libera;
- la distribuzione di tensione in una trave soggetta a torsione;
- ....

L'equazione di Laplace è lineare quindi vale la sovrapposizione degli effetti; la soluzione può anche essere ottenuta tramite una combinazione lineare di soluzioni note che soddisfa le condizioni al contorno; è una equazione ellittica, quindi l'effetto di una perturbazione si risente immediatamente in tutto il dominio.

Il moto potenziale di un fluido è dominato dalla geometria; densità e tempo non lo influenzano, e il campo di velocità non ha "memoria del passato" anche nel caso non stazionario; non ci sono effetti di immagazzinamento perchè mancano le derivate temporali.

Il campo di pressione, invece, è regolato da Bernoulli o N-S e dipende dalla densità e/o dal tempo.

# MOTO IRROTAZIONALE IN UN FLUIDO VISCOSO - 1

Se il moto di un fluido viscoso è irrotazionale, le tensioni viscosse si autoequilibrano ma non si annullano; anche la dissipazione viscosa non è nulla

$$\tau_{ij} = 2\mu \dot{d}_{ij} = 2\mu \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = 2\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \quad (\text{moto incomprimibile})$$

$$\underline{\underline{T}} = 2\mu \underline{\underline{\dot{D}}} = 2\mu \text{grad}(\text{grad } \varphi)$$

$$\mathcal{D}_v = \iiint_V \underline{\underline{\dot{D}}} : \underline{\underline{T}} dV = 2\mu \iiint_V \underline{\underline{\dot{D}}} : \underline{\underline{\dot{D}}} dV = 2\mu \iiint_V \sum_{i,j} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 dV$$

Come mostrato già da Stokes, il lavoro delle tensioni viscosse ai confini del dominio introduce nel sistema una energia meccanica per unità di tempo pari a quella distrutta dalla dissipazione viscosa.

## MOTO IRROTAZIONALE IN UN FLUIDO VISCOSO - 2

Anche la equazione di Bernoulli mantiene la sua validità, infatti da N-S

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho \underline{v} \cdot \text{grad } \underline{v} = \mu \nabla^2 \underline{v} - \text{grad } p + \rho \underline{f}'$$

Ricordando

$$\nabla^2 \underline{v} = \text{rot } \underline{\zeta} \qquad \underline{v} \cdot \text{grad } \underline{v} = -\underline{v} \times \underline{\zeta} + \text{grad } \frac{v^2}{2}$$

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} - \underline{v} \times \underline{\zeta} = -\text{grad} \left( \frac{p}{\rho} + \psi + \frac{v^2}{2} \right) + \nu \nabla^2 \underline{v} = -\text{grad} \left( \frac{p}{\rho} + \psi + \frac{v^2}{2} \right) + \nu \text{rot}(\underline{\zeta})$$

(per moto potenziale stazionario)  $\boxed{\frac{p}{\rho} + \psi + \frac{(\text{grad } \varphi)^2}{2} = \text{cost}}$

NB: la eventuale *componente deviatorica* della tensione normale deve essere aggiunta alla pressione idrostatica  $p$ .

In conclusione (come evidenziato da Joseph e mostrato da Stokes) la condizione di moto potenziale o irrotazionale è significativa anche per un fluido viscoso, eccetto che in prossimità della parete dove gli effetti della vorticità non possono essere ignorati.

# CONDIZIONI DI ESISTENZA DEL MOTO POTENZIALE

L'equazione di vorticità ci mostra (sia pure in modo solo qualitativo) che la viscosità del fluido (unita ad un gradiente di velocità) è la principale causa dell'insorgenza di vorticità nel moto.

$$\frac{D \underline{\zeta}}{D t} = \underline{\zeta} \cdot \text{grad } \underline{v} + \nu \nabla^2 \underline{\zeta}$$

Una serie di teoremi, tra cui quello di Lagrange e quello di Kelvin assicurano più rigorosamente che un moto incomprimibile inizialmente irrotazionale (es. il moto uniforme) permane di tale natura, indipendentemente dal fatto che il fluido sia viscoso o meno, e la vorticità non può essere generata al suo interno, ma solo esservi introdotta per diffusione dalle pareti o per l'azione di forze rotazionali.

Si può concludere affermando che il moto potenziale è comunque una rappresentazione significativa del moto di un fluido per alti valori del numero di Reynolds, al di fuori dello *strato limite* e delle *scie*. In ogni caso, i concetti di moto potenziale e di fluido non viscoso debbono essere mantenuti rigorosamente separati.

# MOTO POTENZIALE BIDIMENSIONALE : FUNZIONE DI CORRENTE

Nel caso di moto bidimensionale, *sia esso irrotazionale o meno*, è possibile definire una funzione di corrente

$$\begin{cases} v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{geometria cartesiana})$$

Se inoltre il moto è irrotazionale, la funzione di corrente è armonica. Infatti se il moto irrotazionale

$$\text{rot } \underline{v} = \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \underline{k} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

E sostituendo la funzione di corrente

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \Psi = 0$$

# MOTO POTENZIALE BIDIMENSIONALE : LINEE DI FLUSSO E LINEE ISOPOTENZIALI

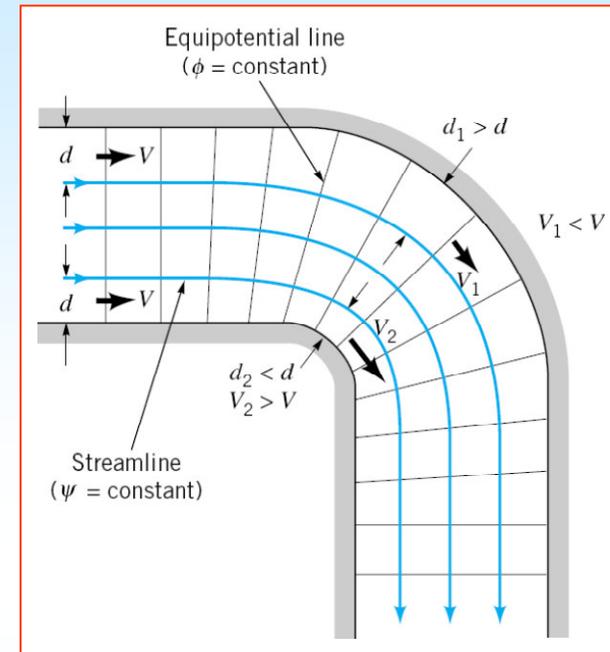
L'equazione parametrica delle linee isopotenziali ( $\phi = \text{cost}$ ) è

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = v_x dx + v_y dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{v_x}{v_y} \quad (\phi = \text{cost})$$

Per le linee di flusso invece si ha

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} \quad (\Psi = \text{cost})$$



Quindi le due famiglie di linee sono ortogonali, infatti  $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{\Psi} = -\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{\phi}^{-1}$

Per un moto potenziale *piano*, dato che sia la funzione di corrente che il potenziale rispettano l'equazione di Laplace e le due famiglie di linee di flusso e isopotenziali sono ortogonali, esse sono mutuamente *interscambiabili*, ovvero dato un moto potenziale se ne può ottenere un altro (detto il suo *duale*) semplicemente scambiando il ruolo delle due famiglie di linee, ovvero la funzione  $\phi$  con  $\Psi$ .

# MOTI POTENZIALI FONDAMENTALI

Moto	$\phi$	$\Psi$	$\underline{v}$
Uniforme	$U (x \cos \alpha + y \sin \alpha)$	$U (y \cos \alpha - x \sin \alpha)$	$v_x = U \cos \alpha$ $v_y = U \sin \alpha$
Sorgente/pozzo piano	$\frac{m}{2\pi} \ln r$	$\frac{m}{2\pi} \theta$	$v_r = m/2\pi r$ $v_\theta = 0$
Sorgente/pozzo puntiforme	$-\frac{m}{4\pi r}$	$\frac{m}{4\pi} (1 - \cos \theta)$	$v_r = \frac{m}{4\pi r^2}$ $v_\theta = 0$
Vortice irrotazionale	$\frac{\Gamma}{2\pi} \theta$	$-\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$	$v_r = 0$ $v_\theta = \Gamma/2\pi r$
Doppietto piano	$\frac{K}{r} \cos \theta$	$-\frac{K}{r} \sin \theta$	$v_r = -K \cos \theta / r^2$ $v_\theta = -K \sin \theta / r^2$
Doppietto sferico	$\frac{K}{4\pi r^2} \cos \theta$	$-\frac{K}{4\pi r} \sin^2 \theta$	$v_r = -\frac{K}{2\pi r^3} \cos \theta$ $v_\theta = -\frac{K}{4\pi r^3} \sin \theta$

A partire da questi, è possibile ricavare altri moti che soddisfano differenti condizioni al contorno sfruttando la sovrapposizione degli effetti.

# MOTO UNIFORME

Le linee di flusso ed isopotenziali sono due fasci mutuamente ortogonali di rette parallele ed equispaziate. Detta  $\alpha$  l'inclinazione della velocità rispetto all'asse  $x$

$$\varphi = U (x \cos \alpha + y \sin \alpha)$$

$$\Psi = U (-x \sin \alpha + y \cos \alpha)$$

Il campo di velocità è dato da

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = U \cos \alpha$$

$$v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = U \sin \alpha$$

## SORGENTE/POZZO PIANO

Il moto rappresenta il flusso piano entrante od uscente da un asse perpendicolare al piano del moto nell'origine. L'origine rappresenta una singolarità in cui la velocità tende all'infinito

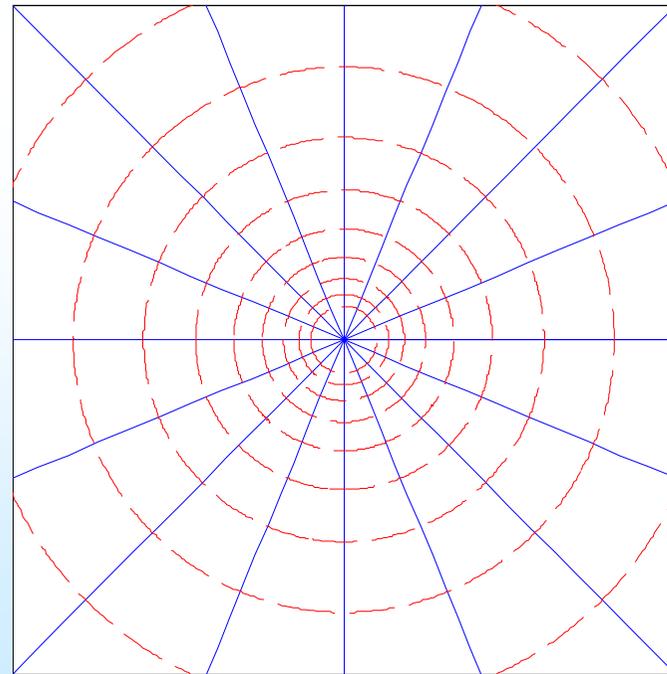
$$\varphi = \frac{m}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0}, \quad \Psi = \frac{m}{2\pi} \theta$$

La costante  $m$  è detta *intensità della sorgente* e si può verificare facilmente che rappresenta il flusso volumetrico (per unità di altezza) entrante o uscente dall'origine.

Le linee di flusso sono quindi rette uscenti (o entranti) dall'origine, le linee isopotenziali sono circonferenze centrate nell'origine

Il campo di velocità è dato da

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{m}{2\pi r}$$
$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0$$



# VORTICE IRROTAZIONALE

E' il moto duale di una sorgente/pozzo

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta \qquad \Psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$

Rappresenta un flusso rotante intorno all'origine: poiché in tale moto la rotazione rigida delle particelle è nulla, la vorticità è a sua volta nulla. La costante  $\Gamma$  è la circuitazione della velocità lungo un qualunque percorso chiuso che circonda l'origine: pur essendo il moto irrotazionale, in questo caso il teorema di Stokes non si applica in quanto l'origine è una singolarità. La circuitazione lungo una qualunque linea chiusa che non include l'origine è invece nulla.

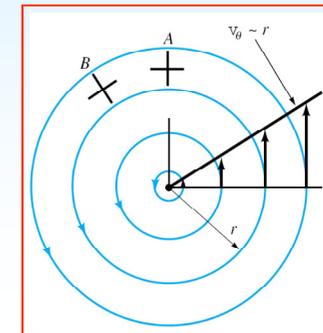
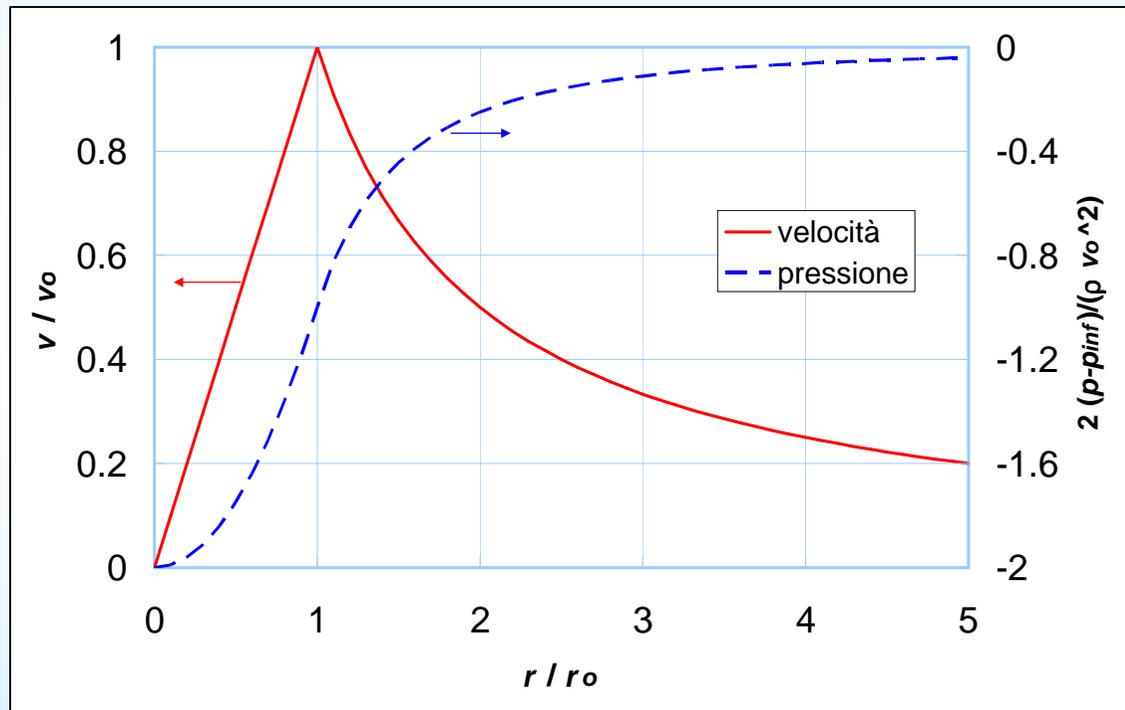
Il campo di velocità è dato da

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = 0$$
$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

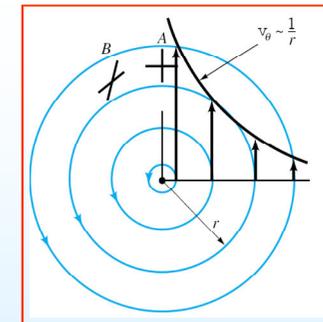
# VORTICE VERO

Il vortice irrotazionale rappresenta il moto di un vortice a sufficiente distanza dall'asse di rotazione. In prossimità dell'asse si ha una struttura più simile ad un vortice rigido che si raccorda col precedente al raggio  $r_0$

$$v_r = 0 \quad , \quad v_\theta = \omega r$$



vortice rigido



vortice irrotazionale

In un vortice la pressione aumenta allontanandosi dall'asse di rotazione: questo spiega la formazione delle *linee di condensazione*.

## DOPPIETTO PIANO

Un *doppietto* si ottiene considerando il campo di un pozzo e di una sorgente di uguale intensità,  $\pm m$ , posti a distanza  $a$ , e facendo tendere a zero la loro distanza mantenendo costante il prodotto  $ma$ . Si dice asse del doppietto l'asse del segmento  $a$ . In un sistema di coordinate polari il cui asse  $r$  coincide con la congiungente il pozzo e la sorgente, orientato dalla sorgente verso il pozzo, le linee di flusso ed isopotenziali hanno equazioni

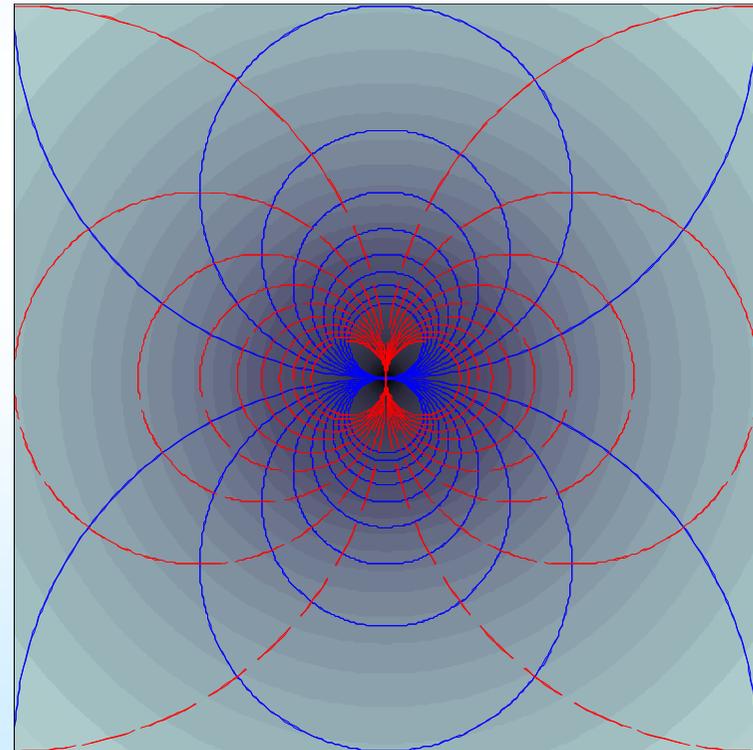
$$\varphi = \frac{K}{r} \cos \theta \quad , \quad \Psi = -\frac{K}{r} \sin \theta$$

$K = ma$  si dice *intensità* (o talvolta anche *momento*) del doppietto  
Il campo di velocità è dato da

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = -\frac{K}{r^2} \cos \theta$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{K}{r^2} \sin \theta$$

Il duale di un doppietto è un secondo doppietto ruotato di  $90^\circ$



## SORGENTE/POZZO SFERICO

Rappresenta il flusso che si origina (o si raccoglie, nel caso di un pozzo) in un unico punto dello spazio. Equivale al campo elettrico generato da una carica puntiforme.

$$\varphi = -\frac{m}{4\pi r} \quad , \quad \Psi = \frac{m}{4\pi}(1 - \cos\theta)$$

Il moto ha simmetria sferica e la velocità è funzione unicamente del raggio. Le superfici isopotenziali sono sfere centrate nell'origine. Dato che  $v = f(r)$ , la funzione di corrente dipende solo da  $\theta$ , e le superfici di flusso sono coni uscenti dall'origine.

Il campo di velocità è dato da

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{m}{4\pi r^2}$$
$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0$$

# DOPPIETTO SFERICO

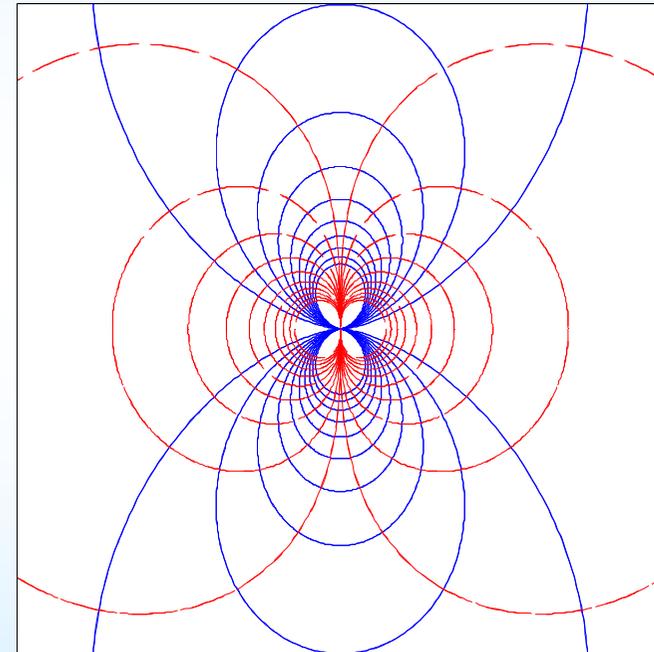
Il doppietto sferico è originato, analogamente a quello piano, dalla sovrapposizione al limite di una sorgente e di un pozzo puntiformi. È analogo al dipolo in elettrostatica.

$$\varphi = \frac{K}{4\pi r^2} \cos \theta \quad , \quad \Psi = -\frac{K}{4\pi r} \sin^2 \theta$$

Il campo di velocità è dato da

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = -\frac{K}{2\pi r^3} \cos \theta$$
$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{K}{4\pi r^3} \sin \theta$$

Le linee di flusso si sviluppano in superfici toroidali attorno all'asse  $r$ , mentre le linee isopotenziali sono superfici sferoidali tangenti nell'origine



# MOTO ATTORNO AD UN CILINDRO - 1

Si abbia un cilindro circolare di raggio  $a$  investito da una corrente uniforme di velocità  $U_0$ . Il moto a sufficiente distanza dal cilindro è irrotazionale e, se il fluido non è viscoso, permane tale anche nell'intorno del cilindro o comunque al di fuori dello strato limite. Questo moto è descritto in un sistema di coordinate cilindriche  $(r, \theta)$  dal problema differenziale

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = 0 \\ v_r(a) = 0 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \underline{v} = \underline{U}_0 \end{cases}$$

Si constata che una soluzione derivante dalla somma del moto uniforme con un doppietto soddisfa il problema. Ponendo  $\alpha = 0$  e  $x = r \cos \theta$  si ha per potenziale e funzione di corrente

$$\varphi = U_0 r \cos \theta + \frac{K}{r} \cos \theta = \left( U_0 + \frac{K}{r^2} \right) r \cos \theta$$

$$\Psi = U_0 r \sin \theta - \frac{K}{r} \sin \theta = \left( U_0 - \frac{K}{r^2} \right) r \sin \theta$$

## MOTO ATTORNO AD UN CILINDRO - 2

Si determinano ora le velocità alternativamente dalla funzione di corrente o dal potenziale

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \left( U_0 - \frac{K}{r^2} \right) \cos \theta$$
$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = - \left( U_0 + \frac{K}{r^2} \right) \sin \theta$$

e si impone la condizione al contorno  $v_r = 0$  per  $r = a$  per determinare  $K$ ,

$$v_r|_{r=a} = \left( U_0 - \frac{K}{a^2} \right) \cos \theta = 0 \quad \rightarrow \quad K = U_0 a^2$$

ottenendo

$$v_r = U_0 \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta$$
$$v_\theta = -U_0 \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta$$

## MOTO ATTORNO AD UN CILINDRO - 3

L'andamento di pressione si ricava dalla equazione di Bernoulli

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 = \text{cost} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}U_0^2$$

Sulla superficie del cilindro si ha

$$v_{\theta}|_{r=a} = v_{\theta s} = -2U_0 \sin \theta$$

$$p_s - p_0 = \frac{1}{2}\rho U_0^2 (1 - 4 \sin^2 \theta)$$

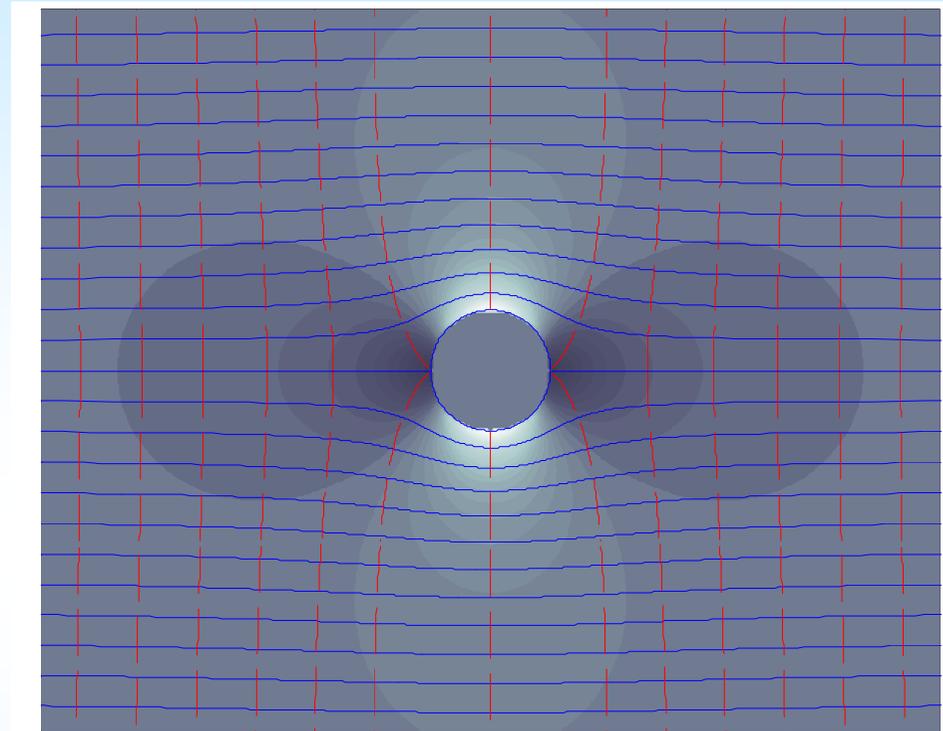
quindi la velocità è massima, e la pressione minima, per  $\theta = 90^\circ$

$$\theta = 0^\circ, 180^\circ \quad v_s = 0 \quad p_s - p_0 = \frac{1}{2}\rho U_0^2$$

$$\theta = \pm 90^\circ \quad v_s = \mp 2U_0 \quad p_s - p_0 = -3\rho U_0^2$$

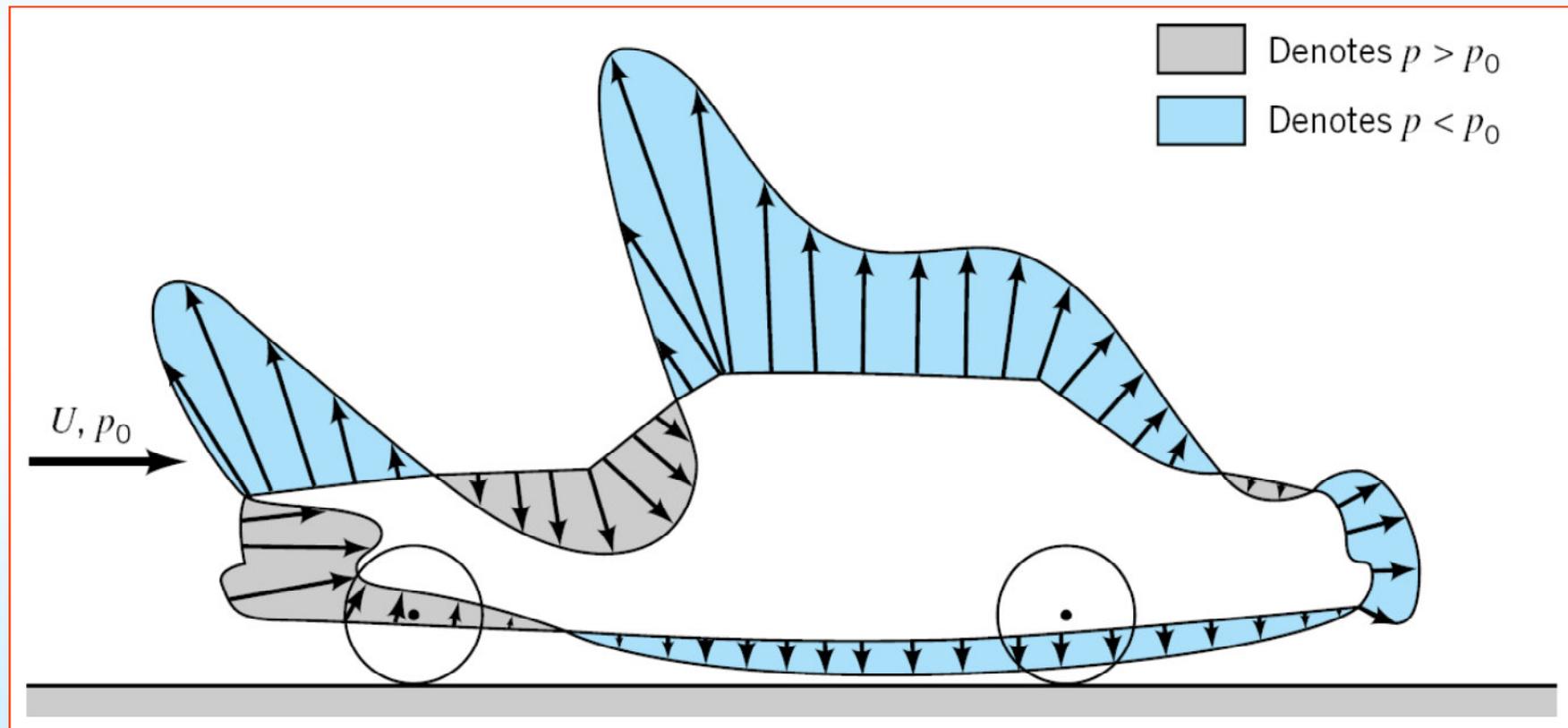
La pressione è negativa lungo il fianco del cilindro: questa caratteristica è comune a tutti i corpi tozzi.

Nei punti di ristagno invece il fluido si arresta completamente e tutta la sua energia è convertita in energia di pressione: la corrispondente sovrappressione raggiunta è detta *pressione dinamica*.



# ANDAMENTO DELLA PRESSIONE ATTORNO AD UN CORPO TOZZO

Se non si verificano fenomeni di distacco della scia (v. in seguito) in genere la pressione attorno ad un corpo tozzo diminuisce dove la velocità aumenta



# FORZA RESISTENTE SU UN CILINDRO

## PARADOSSO DI D'ALEMBERT

La risultante delle forze fluidodinamiche agenti sulla superficie solida si scompone in due componenti: quella parallela alla direzione del moto è detta forza resistente (o di drag) e quella in direzione perpendicolare forza portante (o di lift).

Nel caso di moto potenziale il tensore deviatorico è nullo e si considera solo la pressione idrostatica, quindi per la forza portante si ha

$$F_L = \iint_A (p_s - p_0) \sin \theta dA = b \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \rho U_0^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) \sin \theta a d\theta = 0$$

accettabile in base a considerazioni di simmetria. Ma per la forza resistente

$$F_D = \iint_A (p_s - p_0) \cos \theta dA = b \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \rho U_0^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) \cos \theta a d\theta = 0$$

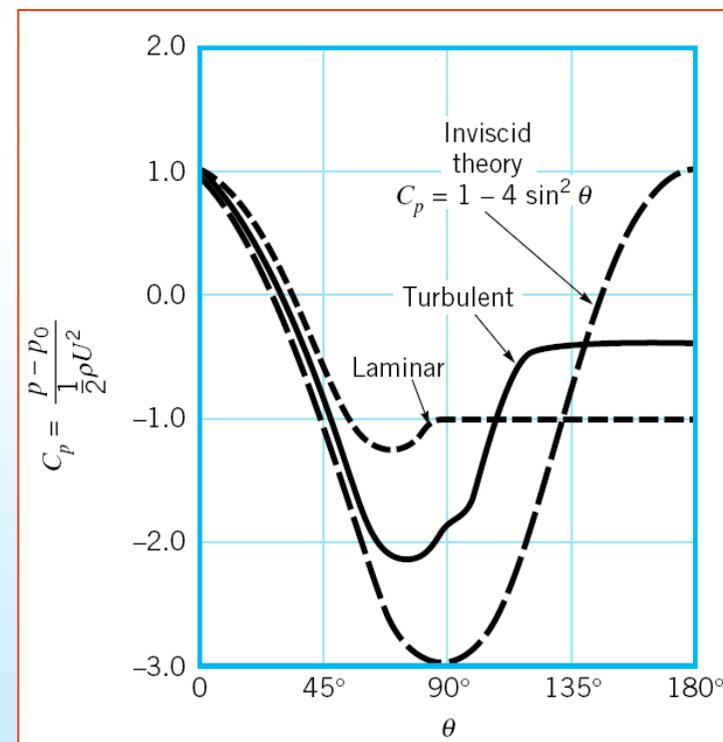
????

Ne segue che il moto potenziale **prevede che un fluido ideale eserciti una forza resistente nulla su un cilindro**: questo risultato, detto *paradosso di D'Alembert* (in quanto da lui formulato nel 1752) è estendibile anche a qualunque corpo tozzo in una corrente uniforme ed è palesemente contrario all'evidenza sperimentale, come notato immediatamente da D'Alembert stesso.

# LIMITI DELLA TEORIA DEL MOTO POTENZIALE ATTORNO AD UN CORPO TOZZO

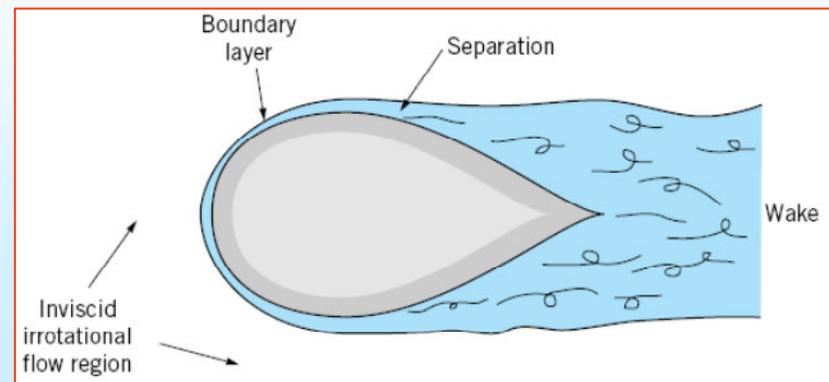
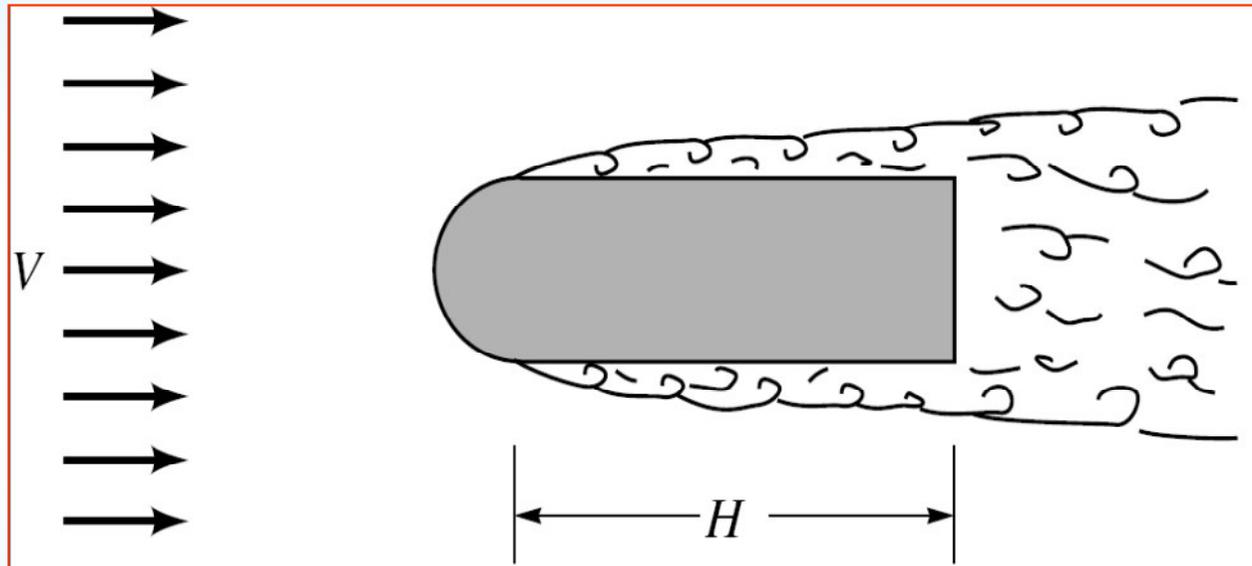
Il campo di pressione derivante dal moto potenziale di un fluido ideale attorno ad un corpo tozzo presenta una simmetria "prua-poppa" che annulla la forza resistente: nel caso reale, come vedremo in seguito, la forza resistente è originata sia dalle *tensioni deviatoriche alla parete* che *dal distacco dei filetti fluidi dalla superficie nella parte posteriore del corpo (scia)*; quest'ultimo fenomeno, ad alto numero di Reynolds, è prevalente nei corpi tozzi e dà luogo alla formazione di una scia che rende il campo di pressione asimmetrico.

Essendo l'equazione di Laplace un'equazione ellittica, la presenza della scia influenza anche il campo di moto nella parte anteriore del corpo: tuttavia la previsione del campo di pressione sulla parte anteriore del cilindro rimane accettabile, almeno fino ad un angolo di circa 45°.



## EFFETTI DI SCIA (CENNO)

La formazione della scia (wake) è regolata dai fenomeni viscosi che avvengono al contatto tra il fluido ed il corpo. Essa può essere ridotta sagomando opportunamente la parte *posteriore* del corpo. Torneremo su questo argomento in seguito.



# MOTO ATTORNO AD UN CILINDRO ROTANTE - 1

Se al moto attorno ad un cilindro aggiungiamo un vortice irrotazionale con circuitazione  $\Gamma$  arbitraria, otteniamo un campo di velocità che si presta a simulare quello esistente attorno a un cilindro che ruota  
Le funzioni potenziale e di corrente e le velocità sono

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = U_0 \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) r \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \\ \Psi = U_0 \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) r \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} v_r = U_0 \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \\ v_\theta = -U_0 \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{array} \right.$$

La velocità alla superficie del cilindro non è costante e vale

$$v_\theta|_{r=a} = v_{\theta s} = -2U_0 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a}$$

mentre quella della superficie solida del cilindro vale  $\omega a$ ; in assenza della condizione di no-slip, le due velocità possono essere diverse; è però difficile stabilire un legame diretto tra velocità angolare del cilindro e circuitazione, che rimane comunque minore del suo valore "teorico"  $\Gamma = 2\pi\omega a^2$ .

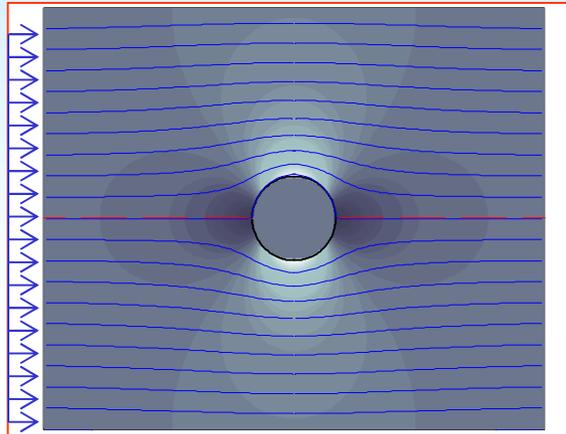
Dal punto di vista matematico, essendo il dominio *doppiamente connesso*, la soluzione non è unica.

Nella realtà la rotazione del fluido è indotta dalle azioni viscosse in prossimità della superficie del cilindro (v. in seguito).

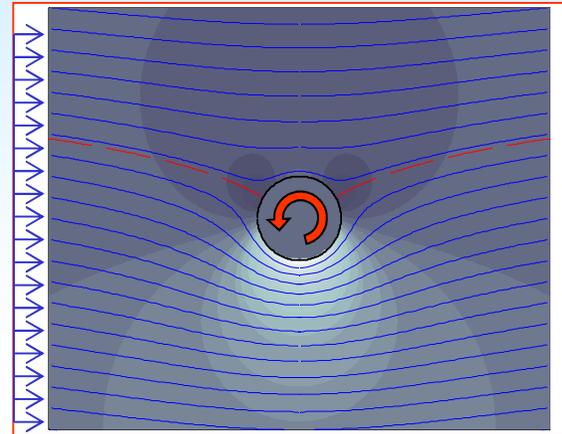
## MOTO ATTORNO AD UN CILINDRO ROTANTE - 2

I punti di ristagno ( $v_\theta = 0$ ) si spostano l'uno verso l'altro e si dispongono ad un angolo

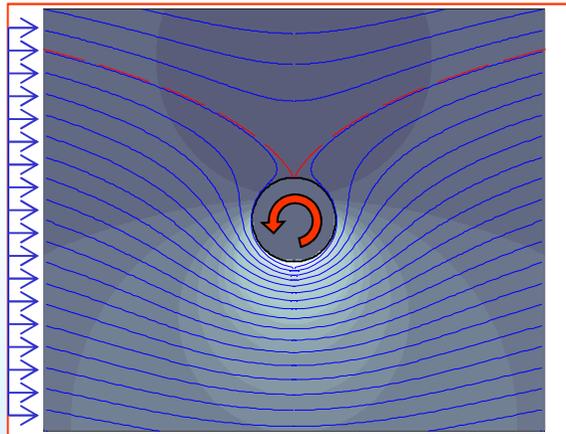
$$\theta_0 = \arcsin\left(\frac{\Gamma}{4\pi a U_0}\right)$$



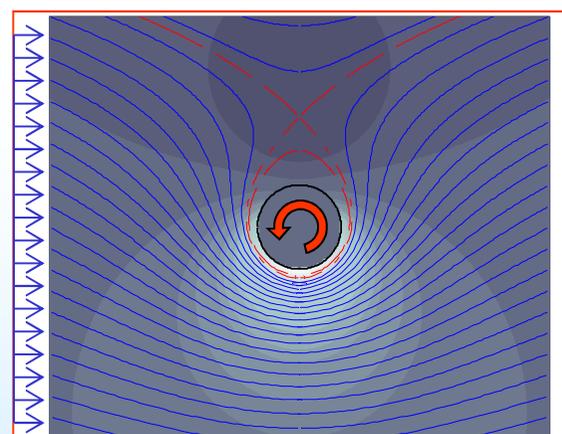
$$\frac{\Gamma}{4\pi a U_0} = 0$$



$$\frac{\Gamma}{4\pi a U_0} = 1$$



$$\frac{\Gamma}{4\pi a U_0} = 0.5$$



$$\frac{\Gamma}{4\pi a U_0} = 1.5$$

quando il punto di ristagno si sposta all'esterno del cilindro quest'ultimo è circondato da una porzione di fluido che ruota intorno ad esso senza mai abbandonarlo, dato che le streamlines si richiudono su sé stesse.

# CAMPO DI PRESSIONE E FORZE ATTORNO AD UN CILINDRO ROTANTE : EFFETTO MAGNUS

Il campo di pressione si ricava dall'equazione di Bernoulli

$$p_s - p_0 = \frac{1}{2} \rho U_0^2 \left( 1 - 4 \sin^2 \theta + \frac{2\Gamma \sin \theta}{\pi a U_0} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 a^2 U_0^2} \right)$$

La forza di drag è comunque nulla (tutti i termini sono dispari)

$$F_D = \iint_A (p_s - p_0) \cos \theta dA = b \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \rho U_0^2 \left( \cos \theta - 4 \cos \theta \sin^2 \theta + \frac{2\Gamma \cos \theta \sin \theta}{\pi a U_0} - \frac{\Gamma^2 \cos \theta}{4\pi^2 a^2 U_0^2} \right) a d\theta = 0$$

mentre quella di lift, a causa di un termine pari, è diversa da zero e vale

$$F_L = \iint_A (p_s - p_0) \sin \theta dA = b \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \rho U_0^2 \left( \sin \theta - 4 \sin 3\theta + \frac{2\Gamma \sin^2 \theta}{\pi a U_0} - \frac{\Gamma^2 \sin \theta}{4\pi^2 a^2 U_0^2} \right) a d\theta = -\rho b U_0 \Gamma$$

Che mostra che un corpo rotante in moto in un fluido è soggetto ad una forza perpendicolare al moto (*effetto Magnus*).

Questo è un caso particolare del *teorema di Kutta-Joukowski*

(fondamentale per l'aerodinamica) che stabilisce che l'esistenza una forza portante su un corpo investito da una corrente fluida è legata al fatto che la *circuitazione della velocità su una linea che lo circonda non è nulla*.

# L'EFFETTO MAGNUS IN PRATICA

Le esperienze effettuate (v. figura) mostrano che la forza di lift su un cilindro rotante è effettivamente proporzionale alla velocità di rotazione  $\omega$  fino a  $\omega a / U_0 \cong 2.5$ , dopodiché essa cresce più lentamente di quanto previsto dalla teoria del moto potenziale.

Volendo stabilire un legame empirico tra circuitazione e velocità angolare del cilindro, si nota che la retta che interpola i valori sperimentali ha equazione

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2} \rho U_0^2 (2ba)} = \pi \left( \frac{\omega a}{U_0} - 0.4 \right)$$

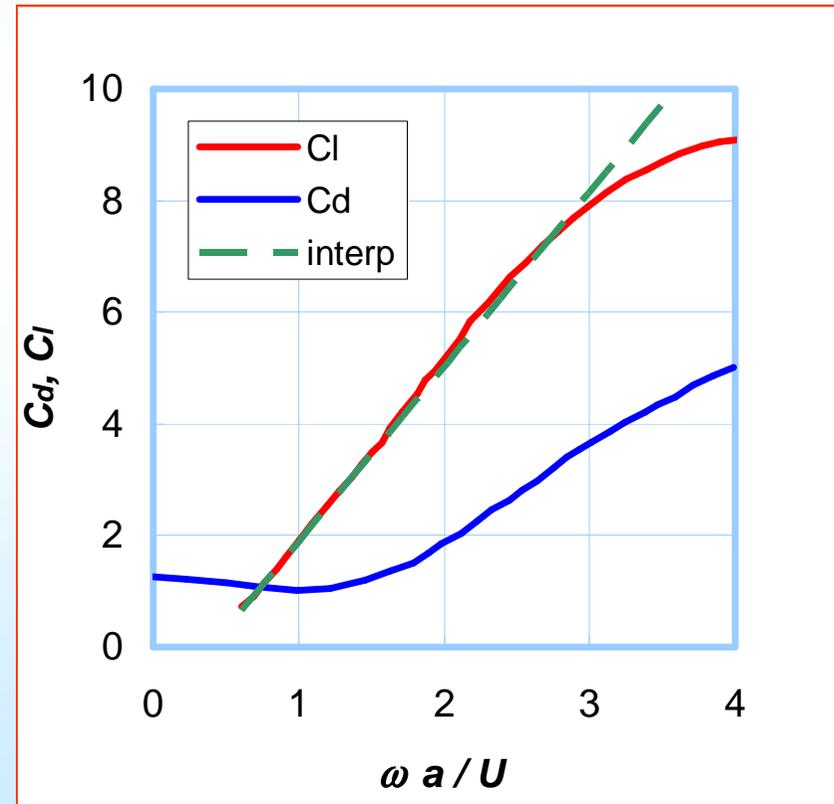
Come se la circuitazione fosse

$$\Gamma = \pi a (\omega a - 0.4 U_0)$$

Dalla figura si nota che anche il coefficiente di resistenza

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho U_0^2 (2ba)}$$

cresce notevolmente con  $\omega$ .



## MOTO ATTORNO AD UNA SFERA

Il moto attorno ad una sfera può essere descritto in un sistema di coordinate sferiche  $r, \theta, \phi$ , in cui, in condizioni di assialsimmetria, la dipendenza da  $\phi$  è nulla. Il moto risulta dalla sovrapposizione di un doppietto sferico ed di un moto uniforme e si esprime come

$$\begin{cases} \varphi = U_0 r \cos \theta + \frac{K}{4\pi r^2} \cos \theta \\ \Psi = \frac{U_0 r^2}{2} \sin^2 \theta - \frac{K}{4\pi r} \sin^2 \theta \end{cases}$$

La costante  $K$  si ottiene annullando la velocità radiale alla superficie della sfera

$$v_r|_{r=a} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = \left( U_0 - \frac{2K}{4\pi a^3} \right) \cos^2 \theta = 0 \quad \rightarrow \quad K = 2\pi U_0 a^3$$

E si ha quindi

$$\begin{cases} v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = U_0 \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta \\ v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{U_0}{2} \left( 2 + \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \theta \end{cases}$$

# MOTO ATTORNO AD UNA SFERA – CAMPO DI PRESSIONE

La velocità sulla superficie della sfera vale

$$v_{\theta}|_{r=a} = v_{\theta s} = -\frac{3}{2}U_0 \sin \theta$$

La pressione alla superficie si ricava tramite l'equazione di Bernoulli

$$p - p_0 = \frac{1}{2}\rho U_0^2 \left(1 - \frac{9}{4}\sin^2 \theta\right)$$

Nei punti di ristagno ed sull' equatore si ha

$$\theta = 0^\circ, 180^\circ \quad v_{\theta s} = 0 \quad p - p_0 = \frac{1}{2}\rho U_0^2$$

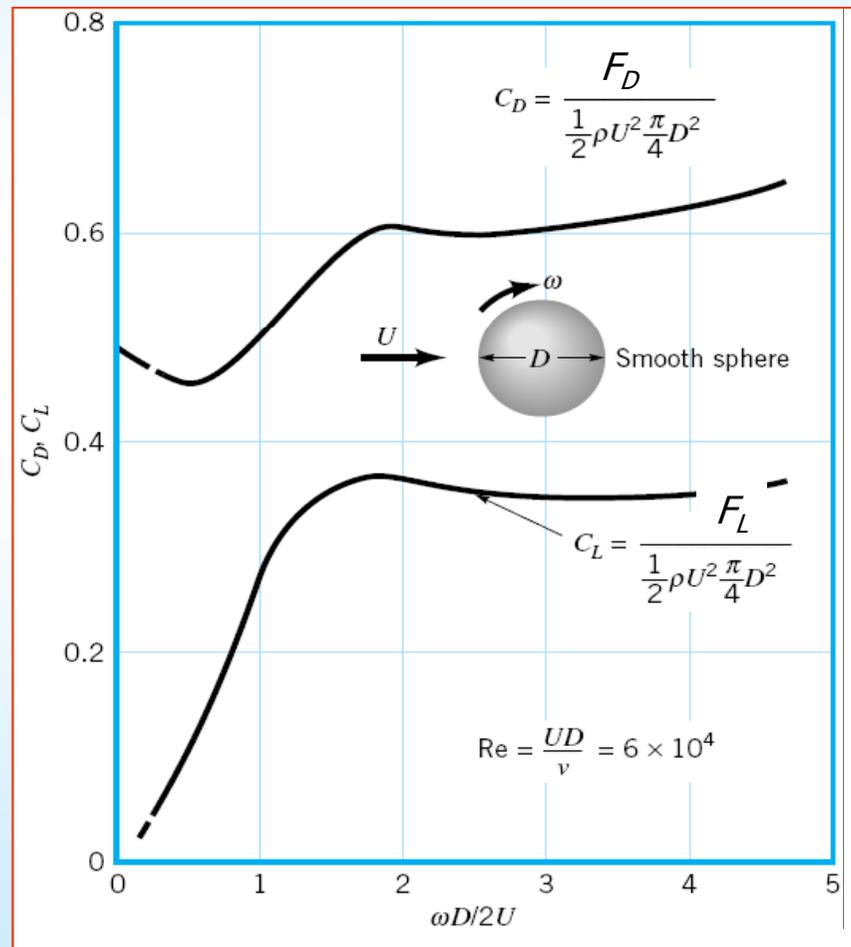
$$\theta = 90^\circ \quad v_{\theta s} = -\frac{3}{2}U_0 \quad p - p_0 = -\frac{5}{4}\rho U_0^2$$

La velocità e la depressione sui fianchi di una sfera sono pertanto minori di quelle sui fianchi di un cilindro. Inoltre la "distorsione" del campo di velocità in prossimità della sfera rispetto al campo uniforme decresce con  $r^3$  anziché con  $r^2$ . Anche in questo caso la forza di drag sulla sfera è nulla.

# MOTO ATTORNO AD UNA SFERA ROTANTE

In questo caso bisogna sovrapporre un vortice irrotazionale, e compare anche una dipendenza da  $\varphi$ .

Nella pratica il seguente diagramma (tratto da Munson) dà il coefficiente di lift



## PER APPROFONDIMENTI

- B.R. Munson, D.F. Young e T.H. Okiishi, *Fundamentals of Fluid Mechanics*, 4th ed., Wiley, 2002, cap.6.
- R.L. Panton, *Incompressible Flow*, Wiley, 2005, capp.18 e 19.
- F.M. White, *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, 1994, cap.8.
- G.K. Batchelor, *An introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge, 1973, cap.6.
- D.D. Joseph,  
<http://www.aem.umn.edu/people/faculty/joseph/ViscousPotentialFlow>.
- G. Buresti, *Elements of Fluid Dynamics*, Imperial College Press, 2012