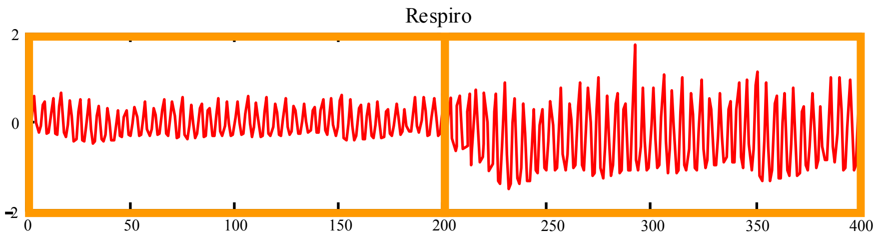
Trasformata Discreta di Fourier (DFT)

Con dati discreti, usare "finestre" temporali significa prendere in considerazione un certo numero di campioni che cadono all'interno della finestra.

Potremo quindi parlare, per esempio, di finestre temporali di 1 sec. oppure, equivalentemente, di 1000 campioni acquisiti con una frequenza di 1 KHz.

Esempi:

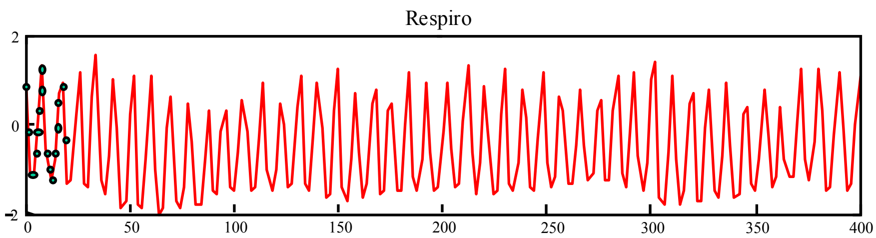
Freq. Campionamento (f_c)	***Numero campioni*** (N)	***Durata*** $= N * (1 / f_c)$
1000 Hz	1000	1 sec.
250 Hz	2000	8 sec.
2000 Hz	4000	2 sec.



UNIPI-SM-Fourier/ValutazionePrestazioni/Classificazione

Numero di campioni e frequenze

Applicando la DFT, o la versione ottimizzata FFT (Fast Fourier Transform), ad ***N*** campioni campionati a frequenza f_c otteniamo come risultato un numero discreto di oscillazioni sinusoidali.



Se il numero dei dati campionati è un numero pari ***N***, l'algoritmo che calcola la Trasformata di Fourier fornisce un numero di oscillazioni distinte pari a $M = N/2+1$.

Queste oscillazioni hanno frequenze f_i da 0 (cioè la componente continua) fino a metà della frequenza di campionamento dei dati:

f_i dove $i = 0, 1, \ldots, N/2$

e dove $f_0 = 0$ e $f_{max} = f_{N/2} = f_c/2$

UNIPI-SM-Fourier/ValutazionePrestazioni/Classificazione

Numero di campioni e frequenze

Se il numero dei dati campionati è un numero dispari N, l'algoritmo che calcola la Trasformata di Fourier fornisce un numero di oscillazioni $M = (N\text{-}1)/2+1$.

Queste oscillazioni hanno frequenze f_i da 0 (cioè la componente continua) fino a quasi metà della frequenza di campionamento dei dati:

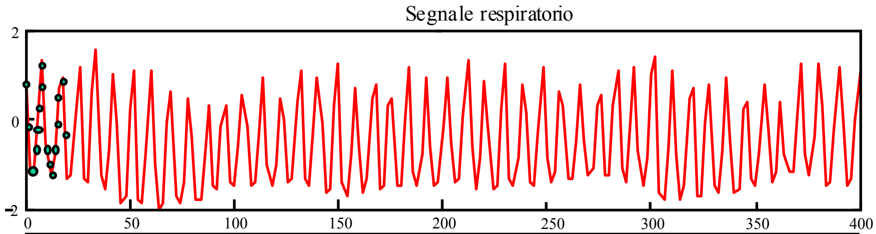
f_i ⇨ dove $i = 0, 1, \ldots, (N\text{-}1)/2$

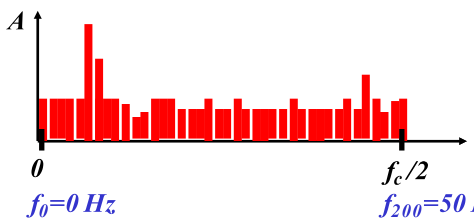
e dove $f_0 = 0$ e $f_{max} = f_{N-1/2} = f_c/2\text{-}df$

Dove df è la risoluzione frequenziale, intesa come la distanza tra due componenti frequenziali successive

Numero di campioni e frequenze

Se, per esempio, applico l'algoritmo FFT ad un intervallo di segnale di N=400 campioni, con frequenza di campionamento f_c=100Hz, ottengo come risultato M=400/2+1=201 oscillazioni con differente frequenza





Spettro di ampiezza

È importante ricordarsi che
Il limite superiore alle frequenze
È dato dalla frequenza di campio

Numero di campioni e frequenze

È importante ricordarsi che
Il limite superiore alle frequenze visualizzabili
È dato dalla frequenza di campionamento

Sia N pari o dispari la frequenza massima rappresentabile
è pari a $f_c/2$

Nel caso di N pari esisterà un campione delle frequenze
con esattamente tale frequenza

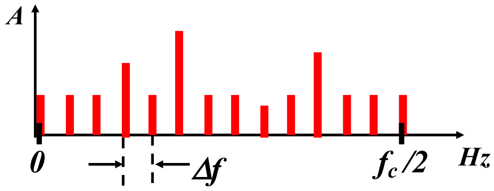
Risoluzione in frequenza

Lo spettro è costituito dalle componenti sinusoidali da frequenza 0 fino a $f_c/2$, ed il numero di componenti sinusoidali è uguale a *N/2* (inclusa la frequenza 0 e $f_c/2$ nel caso di N pari)
La "distanza" tra una componente e la successiva risulta essere:

$$\Delta f = (f_c/2)/(N/2) = f_c/N = 1/(N\,T)$$

*dove **T** è il tempo di campionamento*

e tale distanza è inversamente proporzionale alla "***risoluzione in frequenza***", cioè alla capacità di "risolvere" frequenze tra loro vicine.



Risoluzione in frequenza

$\Delta f = (f_c/2) / (N/2) = f_c / N = 1 / (N\,T)$

*Se consideriamo la formula per la risoluzione si vede che la risoluzione frequenziale è inversamente proporzionale a N**T***

Quindi, visto che NT è la grandezza temporale della finestra dei dati, si ottiene chela risoluzione è inversamente proporzionale alla finestra di osservazione ovvero per quanto osserviamo il segnale

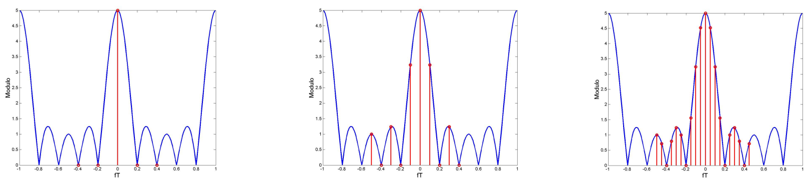
Se vogliamo distinguere due componenti frequenziali a frequenze

10.1 Hz e 10.2Hz allora dovremo osservare il segnale per almeno 10 secondi

Zero padding

Una "falsa" risoluzione frequenziale può essere ottenuta aumentando artificiosamente il numero di campioni di una finestra aggiungendo degli zeri in coda (zero padding)

Questa operazione permette di avere un df minore (ovvero campioni in frequenza ravvicinati) ma non di distinguere due componenti vicine: è solo una rappresentazione più continua



N=5 N=10 N=20

Consigli nell'uso della DFT

La Trasformata di Fourier è uno strumento di indagine fondamentale nell'analisi dei segnali.

Deve essere applicato, ovviamente, con attenzione per evitare risultati di scarso valore o difficilmente interpretabili.

Specialmente nell'analisi di segnali biologici, in cui la variabilità sia nel tempo che in frequenza è elevata, particolare attenzione deve essere prestata alla scelta della ***finestra temporale*** e della ***risoluzione in frequenza***.

La condizione di "non stazionarietà" dei segnali biologici consiglia di usare finestre il più piccole possibili.
D'altra parte usare finestre temporali piccole (cioè con pochi campioni) porta ad avere una scarsa risoluzione in frequenza con il rischio di non risolvere componenti oscillatorie vicine.

La soluzione quindi è trovare una opportuna ***soluzione di compromesso tra risoluzione in frequenza e condizione di stazionarietà***, aiutati dalla conoscenza dei fenomeni che stiamo indagando ed eventualmente da specifiche pre-elaborazioni del segnale.