UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in Scienze Motorie

Tecnologie e strumentazione biomedica

Accenni sulla Trasformata di Fourier

Alberto Macerata

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione

Fourier (1768-1830)

Jean Baptiste Joseph **Fourier** era un rivoluzionario (partecipò alla Rivoluzione Francese), un diplomatico (in Egitto, al seguito di Napoleone), un allievo e poi un professore alla **École Normale Supérieure.**

Come matematico si occupò, tra l'altro, della teoria della propagazione del calore e come modellare l'evoluzione della temperatura per mezzo di serie trigonometriche.

Fourier scoprì che qualunque **funzione periodica** $f(t)$, di periodo T, può essere espressa come somma di un termine costante più tanti termini (anche infiniti) in seno e coseno di pulsazioni multiple di quella fondamentale (cioè ω), secondo la formula:

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t + \cdots$$

Dove il termine ω, cioè la *pulsazione*, è dato da: $\omega = 2\pi / T$ oppure $\omega = 2\pi f$.

Il metodo e' reversibile e consente di ricomporre il segnale a partire dalla serie di sinusoidi.

Serie di Fourier

Dalla Fisica sappiamo che qualsiasi combinazione lineare di onde sinusoidali con lo stesso periodo ma di differenti fasi è ancora un'onda sinusoidale dello stesso periodo, ma con una nuova fase.

Nella formula le coppie di termini del tipo $a \cos \omega t$ e $b \sin \omega t$ possono essere riscritte come:

$$a \cos \omega t + b \sin \omega t = (a^2 + b^2)^{1/2} \sin (\omega t + \varphi)$$

dove

$$\varphi = \arctan(b/a) \qquad \text{se } a \geq 0$$
$$\varphi = \pi + \arctan(b/a) \qquad \text{se } a < 0$$

La formula può quindi essere riscritta come:

$$f(t) = c_0 + c_1 \sin (\omega t + \varphi_1) + c_2 \sin (2\omega t + \varphi_2) + \cdots$$

oppure, in maniera compatta

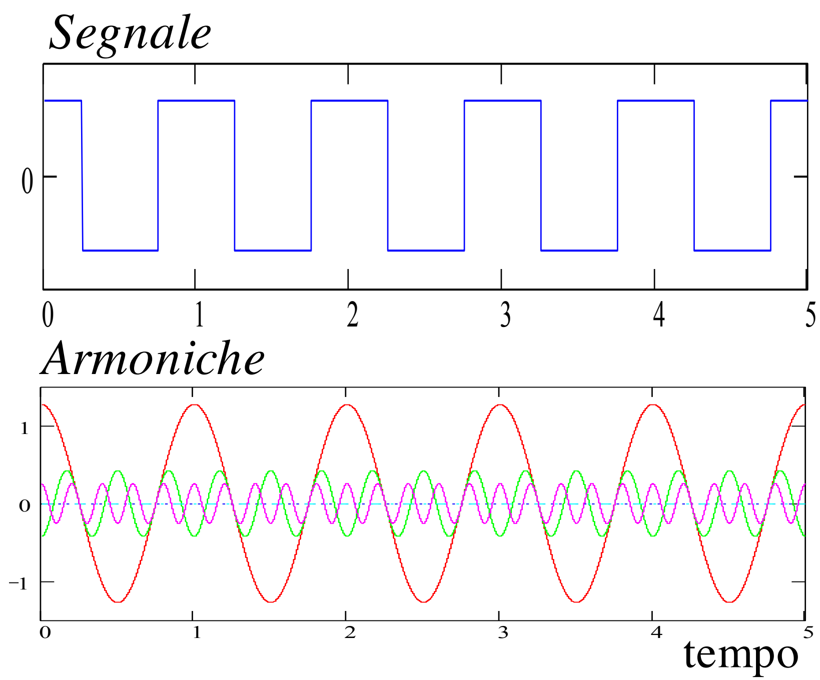
$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sin (\omega t + \varphi_k)$$

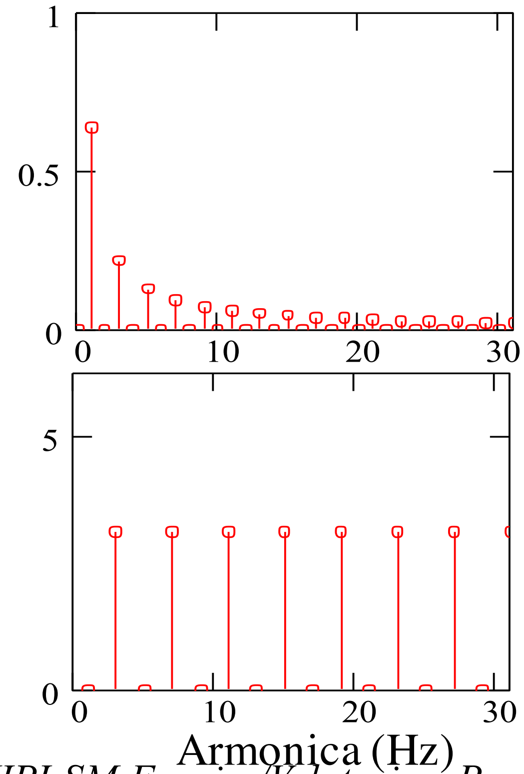
Scomposizione in Serie di Fourier

Un **segnale periodico** può essere decomposto in una somma di oscillazioni sinusoidali (***armoniche***), ciascuna caratterizzata dalla sua *ampiezza* e *fase*.

Possiamo rappresentare questi valori di ampiezza e fase sotto forma di grafici, mettendo sulle ascisse il valore delle armoniche in ordine crescente e sulle ordinate le ampiezze, o le fasi, di ciascuna armonica.

Questi grafici si chiamano rispettivamente: ***spettro di ampiezza e di fase*** del segnale.





Spettro di ampiezza

Spettro di fase

Ricomposizione dalla Serie di Fourier

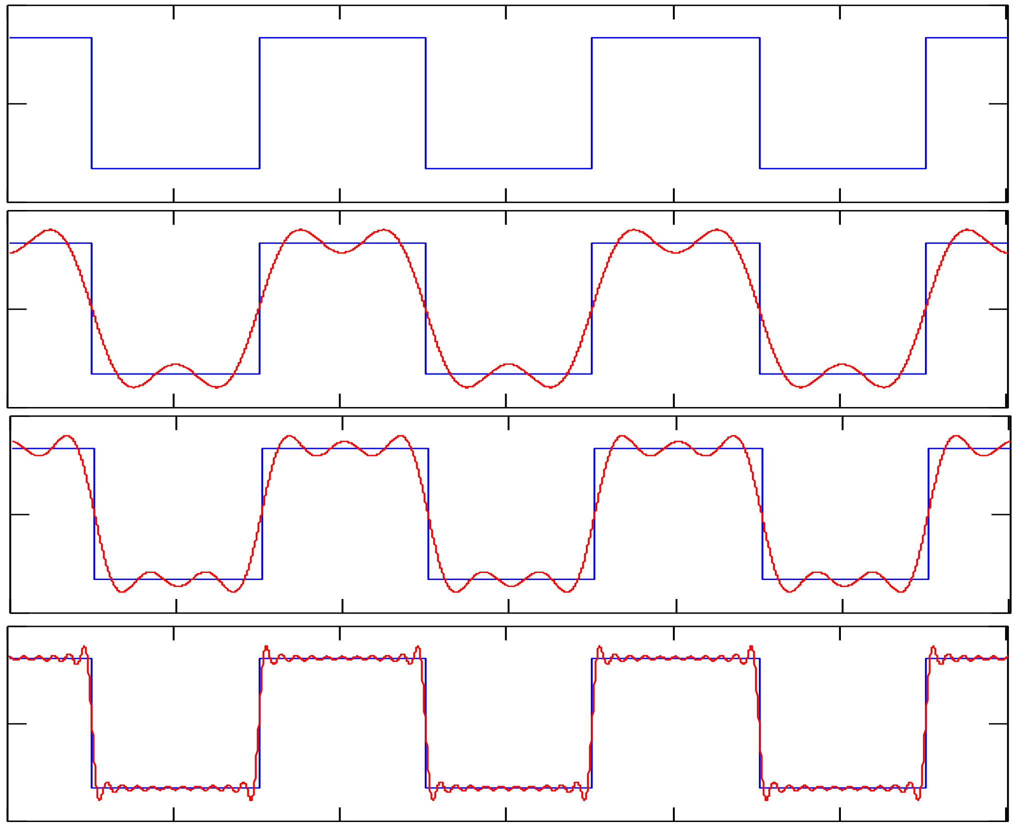
Approssimazione di un segnale “onda quadra” con le sue prime armoniche

“onda quadra”

2 armoniche

3 armoniche

11 armoniche



Ricomposizione dalla Serie di Fourier

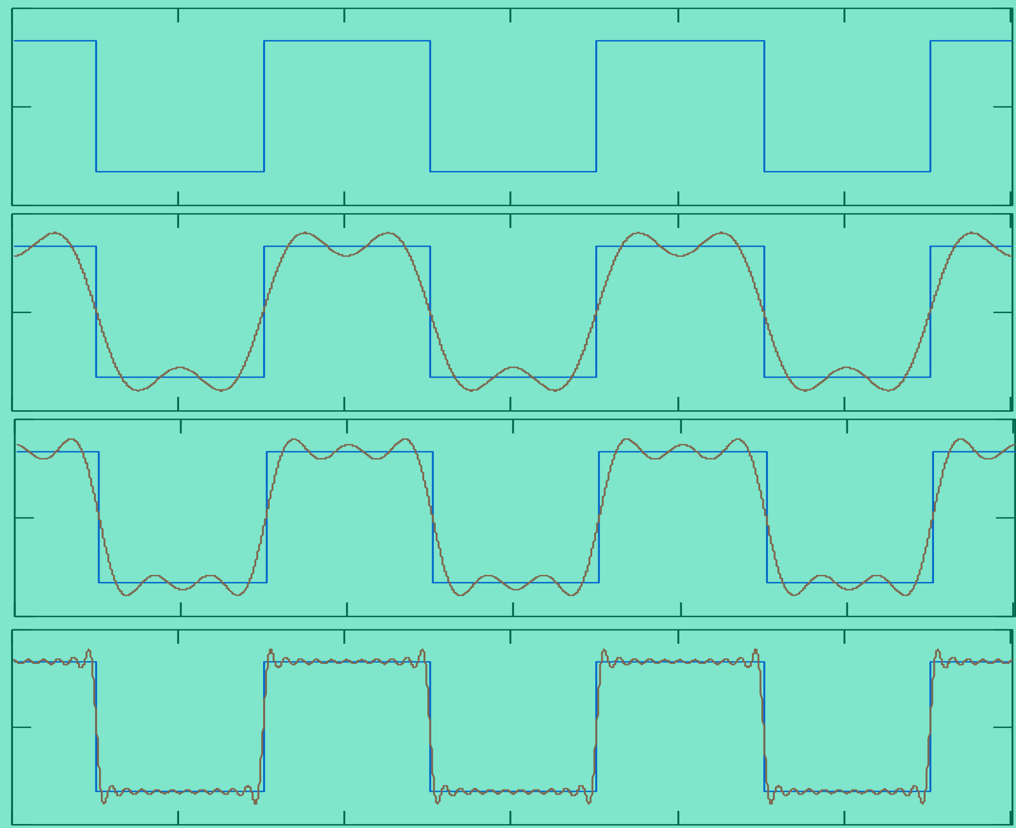
Approssimazione di un segnale “onda quadra” con le sue prime armoniche

“onda quadra”

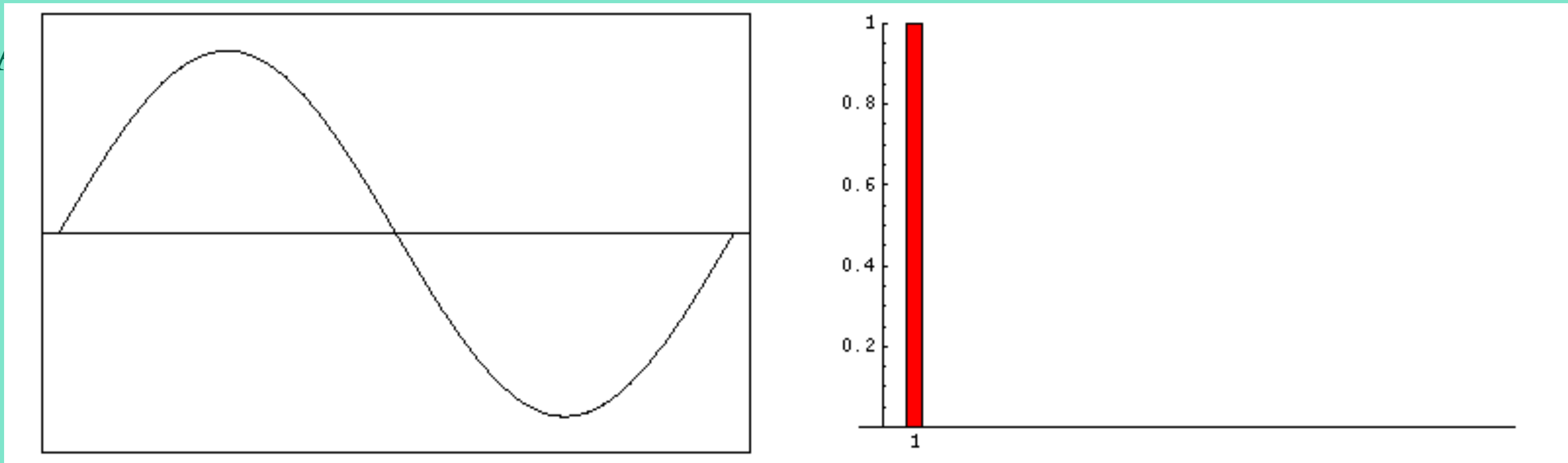
2 armoniche

3 armoniche

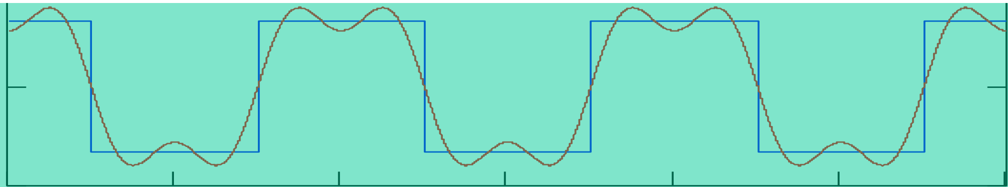
11 armoniche



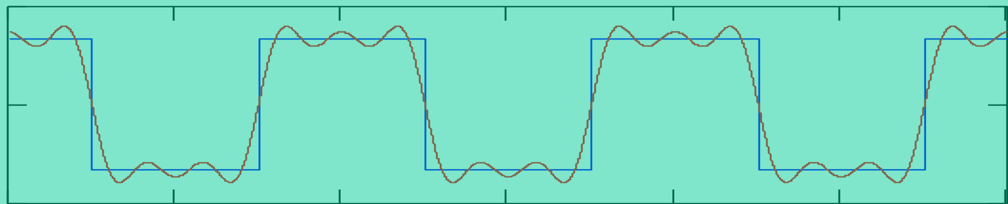
Ricomposizione dalla Serie di Fourier



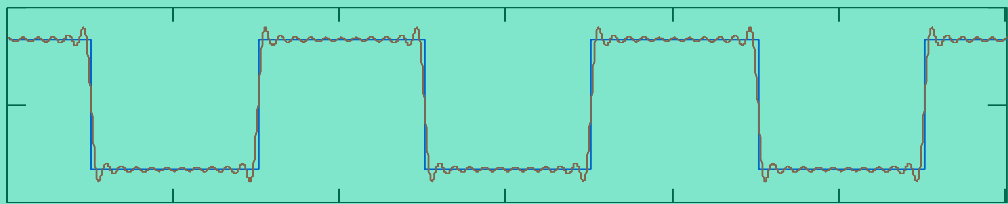
2 armoniche



3 armoniche

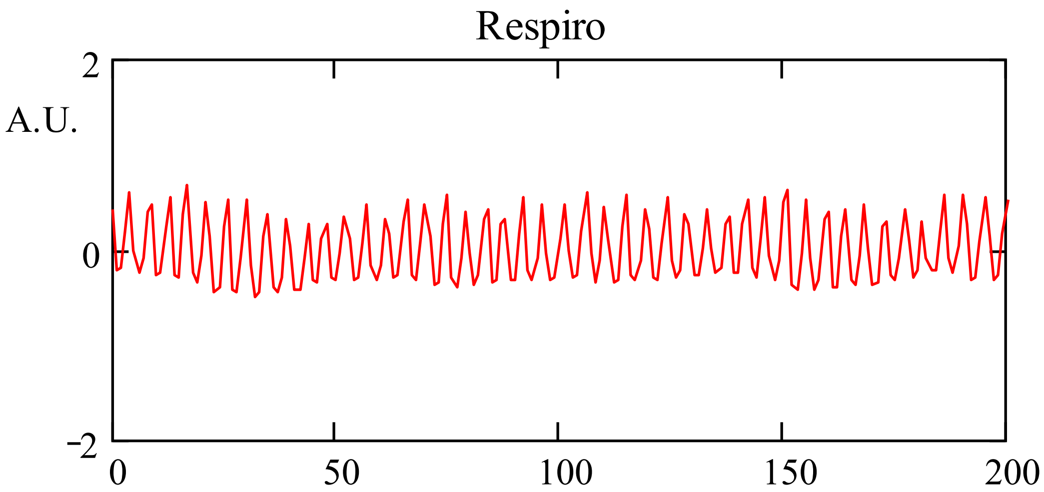


11 armoniche

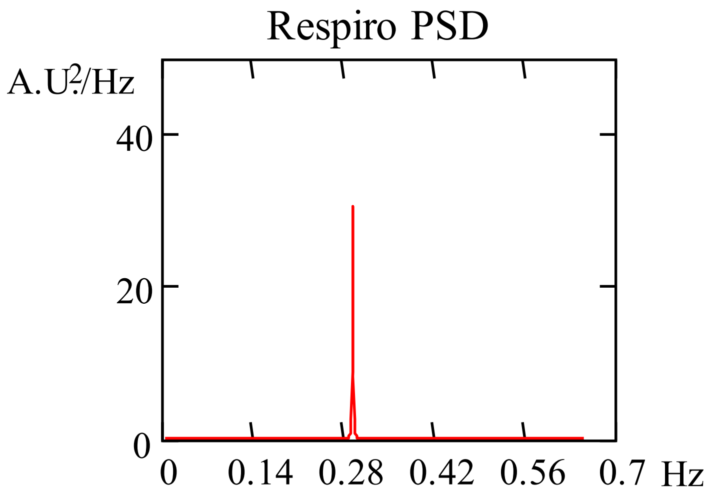


Analisi in frequenza di segnali biologici

Grafico dei parametri nel tempo



Spettro di ampiezza



L'espansione in serie di Fourier per segnali periodici scompone il segnale in una somma di sinusoidi illimitate nel tempo (spettro in frequenza e in fase).

Molti segnali biologici hanno caratteristiche quasi-periodiche (respiro, ECG, pressione sanguigna) e ad essi può ancora essere applicato il metodo della scomposizione di Fourier a patto che le caratteristiche del segnale si mantengano costanti nel tempo.

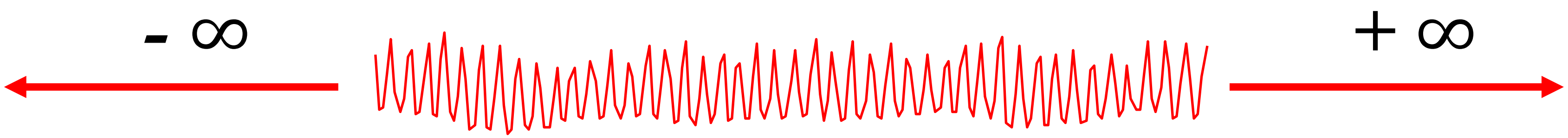
Dalla Serie alla Trasformata di Fourier

Il metodo di Fourier (espansione in serie per segnali periodici) può essere esteso anche a segnali non periodici ipotizzando che il periodo della componente a frequenza più bassa sia ∞

In questo caso parleremo di Trasformata di Fourier che è definita come:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

dove $X(f)$ rappresenta la trasformata continua di Fourier del segnale $x(t)$.

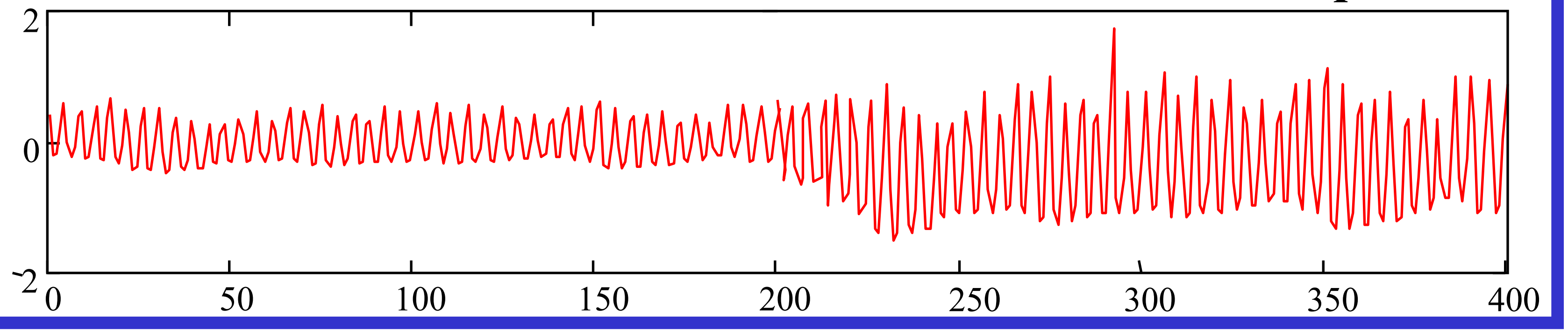


Problemi nell'uso pratico

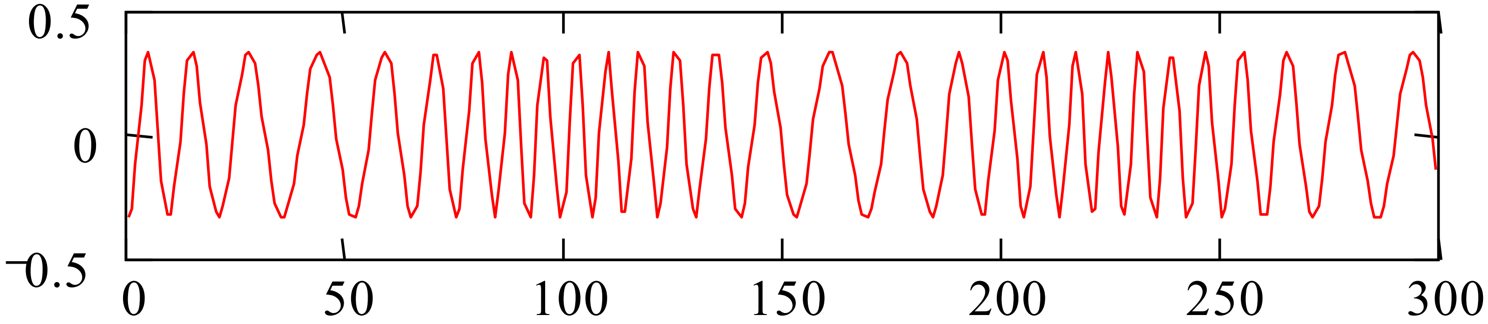
Nella pratica:

- non abbiamo a disposizione segnali di lunghezza illimitata nel tempo
- le caratteristiche del segnale non sono costanti nel tempo (cioè il segnale è ***non stazionario***)

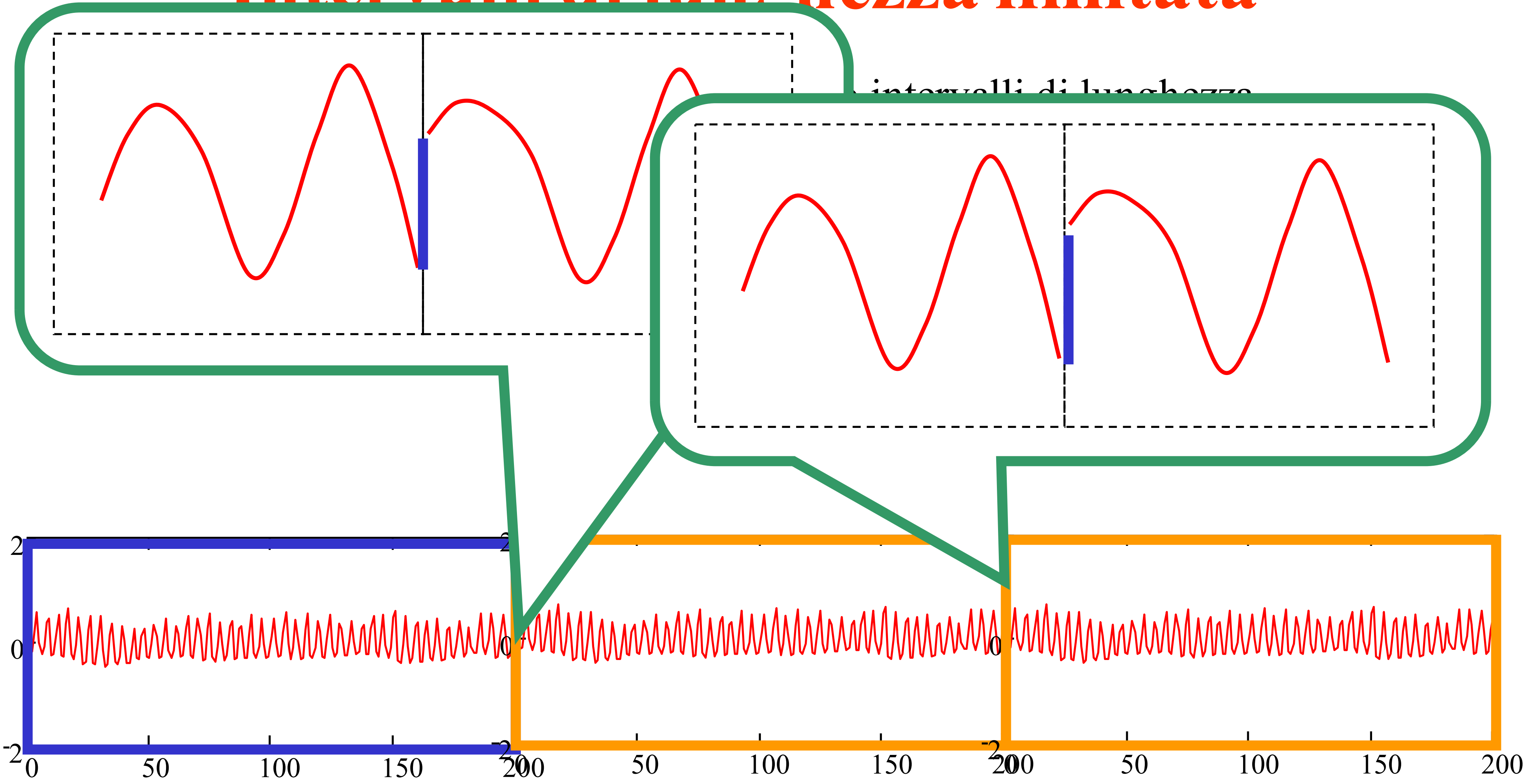
non stazionarietà in ampiezza



non stazionarietà in frequenza



Intervalli di lunghezza limitata

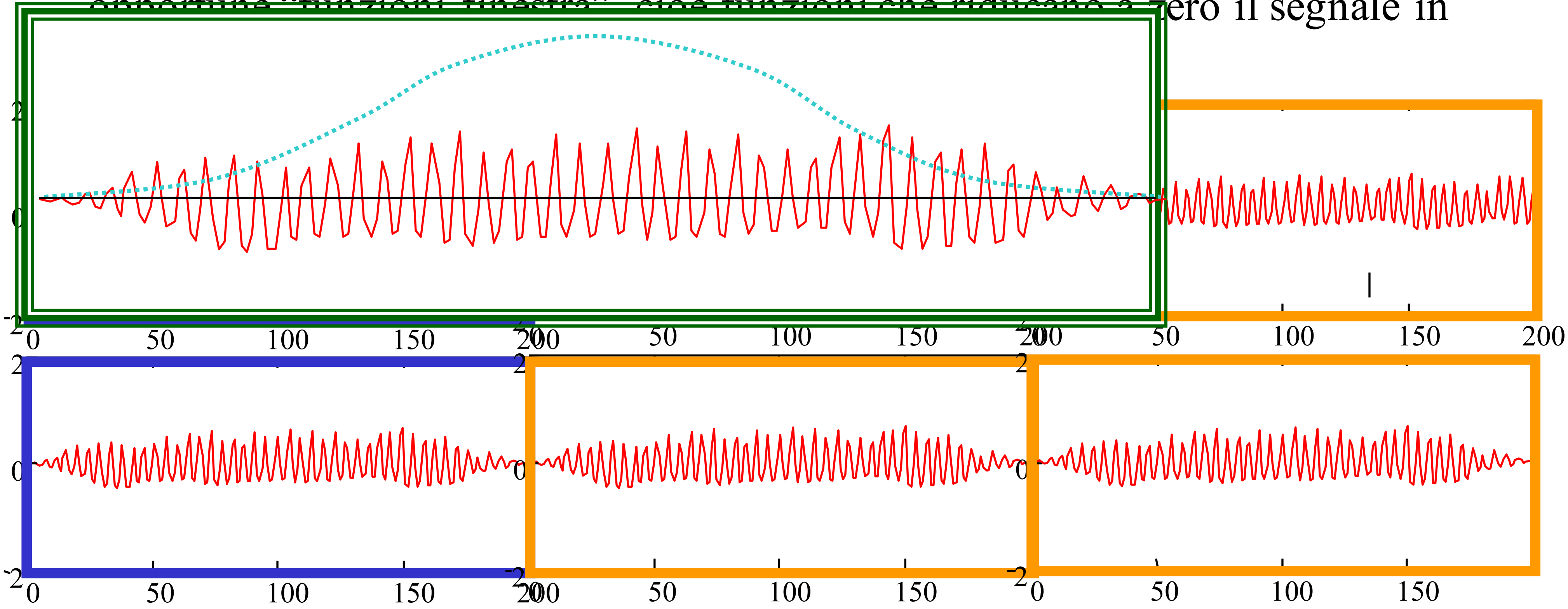


La procedura di “mettere insieme” copie dello stesso intervallo fa sì che nel punto di contatto tra un intervallo e l’altro si creino delle discontinuità nel segnale.

Intervalli di lunghezza limitata

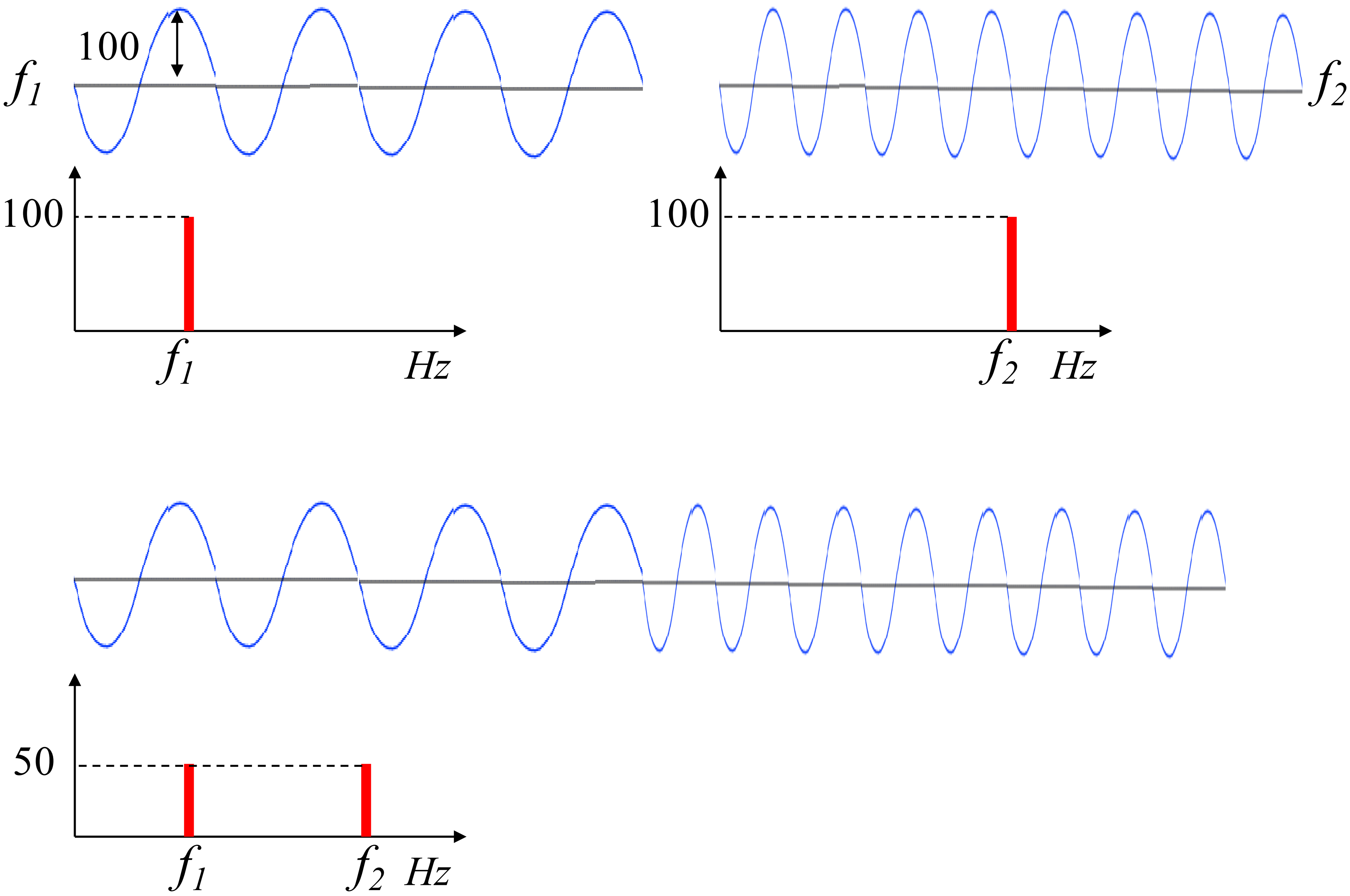
Queste discontinuità del segnale creano sullo spettro di Fourier degli artefatti, cioè la comparsa sullo spettro di componenti sinusoidali che in realtà non esistono nel segnale originale.

Per evitare questo inconveniente l’intervallo di segnale viene moltiplicato per opportune “funzioni finestra”, cioè funzioni che riducano a zero il segnale in

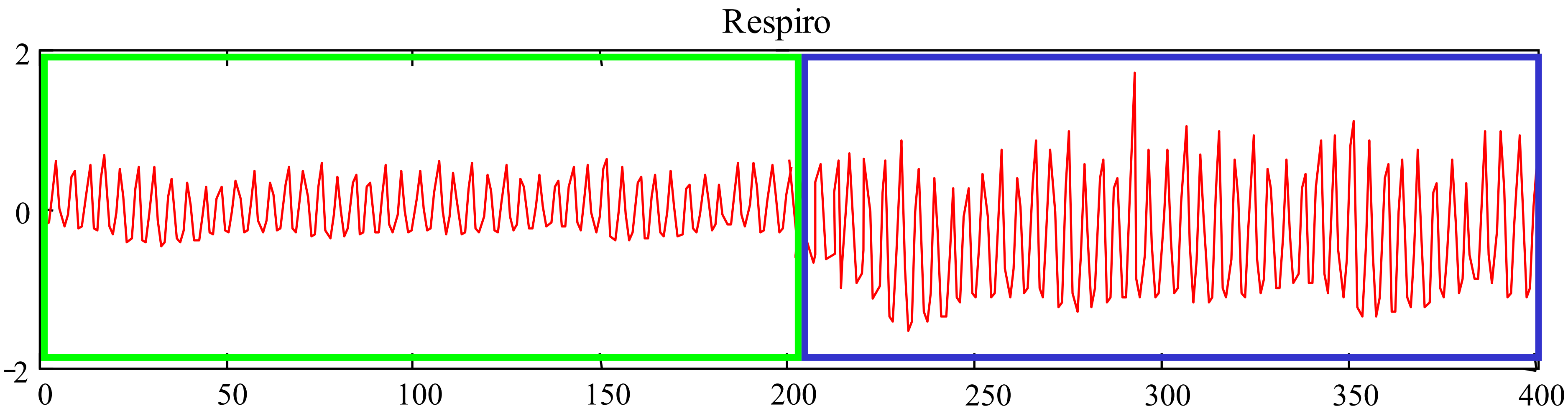


In questo modo l’intervallo può essere replicato senza creare discontinuità nei punti di unione evitando la comparsa di frequenze spurie.

Non stazionarietà



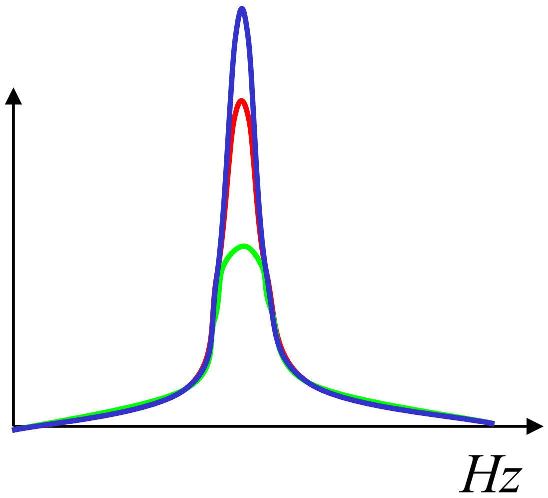
Non stazionarietà: intervallo di analisi



Consideriamo un segnale respiratorio dove, a partire da un certo istante, l'ampiezza dell'escursione polmonare inspirazione-espirazione cresce. Il segnale presenta una chiara *non stazionarietà* dovuta all'ampiezza che cambia.

L'analisi di Fourier applicata su questo intervallo fornisce un risultato che "media" l'ampiezza dell'oscillazione respiratoria su tutto l'intervallo.

Se pure il risultato è corretto matematicamente è di scarsa utilità pratica in quanto fornisce un'ampiezza che non è reale poiché il segnale è più basso all'inizio e più alto alla fine.



Uso di finestre temporali

Per avere risultati corretti devo applicare il metodo su intervalli *stazionari*, cioè "stabili" sia in ampiezza che in frequenza.

Nella pratica questa condizione si ottiene più facilmente prendendo intervalli molto corti, così da limitare la presenza di variazioni significative del segnale.