Trasformata discreta di Fourier di una sequenza finita : algoritmi FFT

La TDF di una sequenza finita può essere calcolata utilizzando algoritmi, computazionalmente efficienti, quali gli algoritmi Fast Fourier Transform (FFT).

L'efficienza degli algoritmi FFT consiste nel numero di operazioni necessarie per calcolare la TDF di una sequenza finita di N campioni:

-il calcolo della TDF, a partire dalla definizione, implica l'utilizzo di $8N^2-2N$ operazioni

-tramite algoritmi FFT si arriva a $8\log_2(N)+6N$ operazioni

Tale velocità di calcolo giustifica l'utilizzo di algoritmi FFT per il calcolo della convoluzione tra due sequenze.

Trasformata discreta di Fourier
Tramite FFT in ambiente Matlab

Vedremo un'esercitazione relativa al calcolo della trasformata discreta di Fourier di alcune sequenze finite.

Il comando per calcolare la trasformata discreta di Fourier in ambiente Matlab® prende il nome di fft(.)

Se la sequenza finita viene memorizzata in un vettore x di N elementi, il comando y=fft(x) fornisce nel vettore y di N elementi, i coefficienti della TDF, previa divisione per il numero di campioni N

L'algoritmo dal punto di vista computazionale è particolarmente efficiente se N è uguale ad una potenza di 2

Trasformata discreta di Fourier
Tramite FFT in ambiente Matlab

Il risultato differisce ne caso in cui il numero N sia pari o dispari.

N pari : la prima posizione del vettore di uscita y contiene il coefficiente X[0], che rappresenta la componente continua della trasformata, alla posizione N il vettore contiene il coefficiente X[N-1]

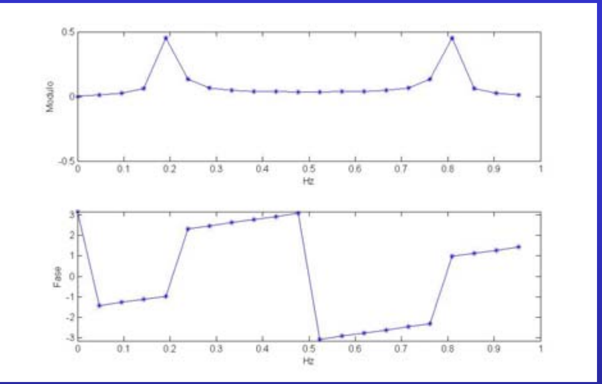
Consideriamo un segnale sinusoidale definito su un intervallo temporale tra -10 e 10 secondi, con T=1 sec

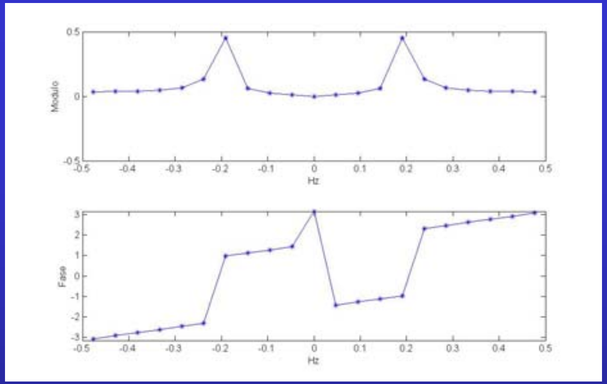
$$x = \sin(2 * pi * f0 * t)$$

con t=[-10:1:10] e f0=0.2 Hz

Trasformata discreta di Fourier
Tramite FFT in ambiente Matlab

La TDF calcolata su N=21 punti viene mostrata in modulo e fase nelle figure seguenti.
A destra viene visualizzato l'intervallo tra 0 e (N-1)/NT
A sinistra viene eseguito l'operazione di fftshift che utilizza l'intervallo frequenziale -(N-1)/2NT:(N-1)/2NT



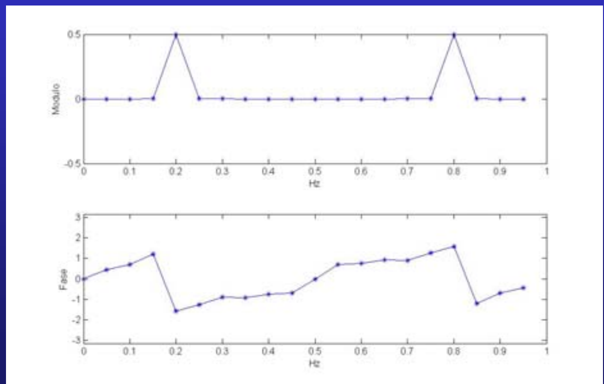


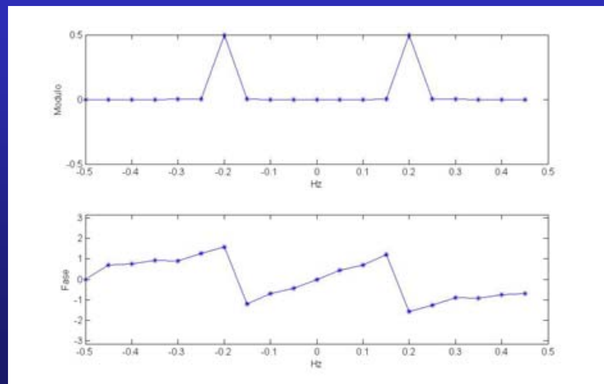
Si deve notare che la risoluzione frequenziale scelta non permette di visualizzare il valore 0.2 Hz

Trasformata discreta di Fourier
Tramite FFT in ambiente Matlab

La stessa trasformata calcolata su 20 punti dando come opzione al comando fft(.) il numero N=20:   Y=fft(x,20)
Essendo x lungo 21 elementi, la fft viene calcolata sul segnale troncato.

In questo caso la risoluzione frequenziale è tale da poter visualizzare 0.2 Hz.
L'operazione di fftshift (figura di destra) porta, come primo elemento del vettore, la frequenza pari a N/(2NT), detta frequenza di Nyquist, che ritroveremo quindi al valore f=-0.5 Hz





Trasformata discreta di Fourier Tramite FFT in ambiente Matlab: analisi TF sequenza

Riprendiamo la relazione di campionamento in frequenza.

$$X(k) = \frac{1}{N_0}\,\overline{X}\left(\frac{k}{N_0 T}\right)$$

Da questa relazione si evince che è possibile utilizzare la fft per stimare la Trasformata di Fourier $\overline{X}(f)$ della sequenza aperiodica x[n]:

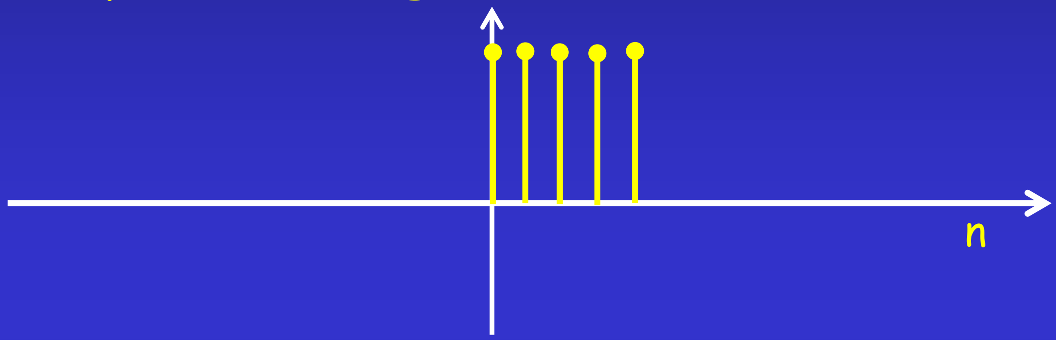
$$\overline{X}\left(\frac{k}{N_0 T}\right) = N_0 X(k)$$

Tramite la fft si possono calcolare gli X(k) e dalla questi i valori della $\overline{X}(f)$.

Vedremo un esempio di come fare questa stima e migliorarla con la Tecnica dello zero padding: in questo caso aggiungere zeri, vuol dire aumentare N_0 e quindi aumentare la risoluzione frequenziale di $\overline{X}(f)$

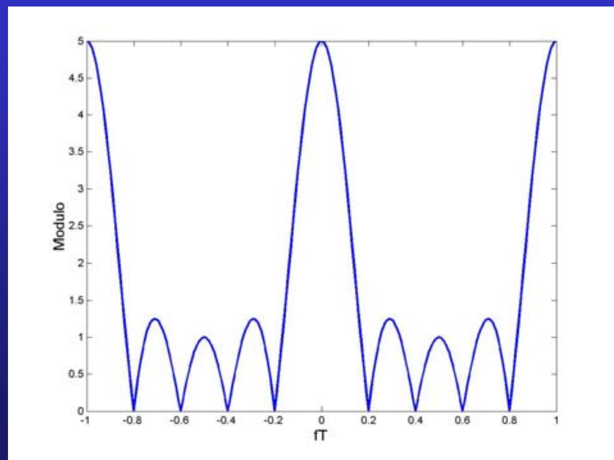
Trasformata discreta di Fourier Tramite FFT in ambiente Matlab: analisi TF sequenza

Come esempio consideriamo la Trasformata di Fourier di un impulso rettangolare discreto



La Trasformata di Fourier vale $$\overline{X}(f) = \frac{\sin(5\pi fT)}{\sin(\pi fT)} e^{-j4\pi fT}$$

La figura seguente ne rappresenta il modulo



Trasformata discreta di Fourier Tramite FFT in ambiente Matlab: analisi TF sequenza

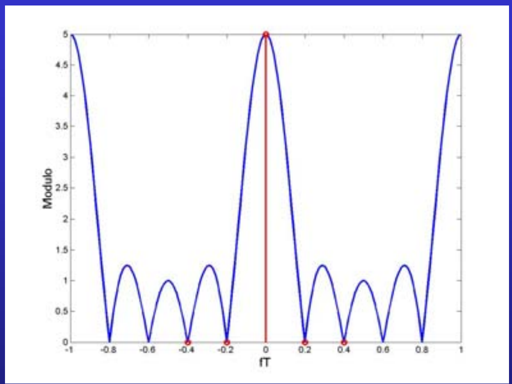
Noi partiremo da un vettore contenente gli elementi non nulli della sequenza di partenza: quindi di 5 elementi.

Si esegue la fft(.) sul vettore periodicizzato, rispettivamente con N=5 con N=10 e N=20. Nel caso di N=10 e N=20, è necessario aggiungere in coda al vettore di partenza rispettivamente 5 e 15 zeri. Questo può essere ottenuto sempre come seconda opzione del comando fft:

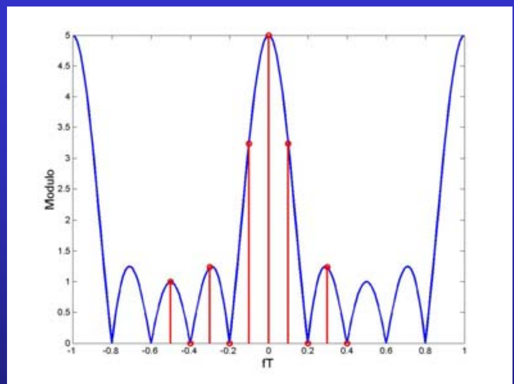
y=fft(x,N)

Trasformata discreta di Fourier Tramite FFT in ambiente Matlab: analisi TF sequenza

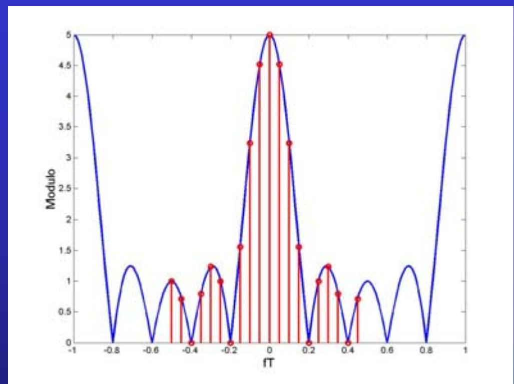
Il grafico del modulo del risultato della fft(.) è sovrapposto a quello della Trasformata di Fourier della sequenza. Si fa notare che se non effettuiamo la normalizzazione per N l'algoritmo fft, nella versione di Matlab, fornisce già il valore $N_0 X(k)$



N=5



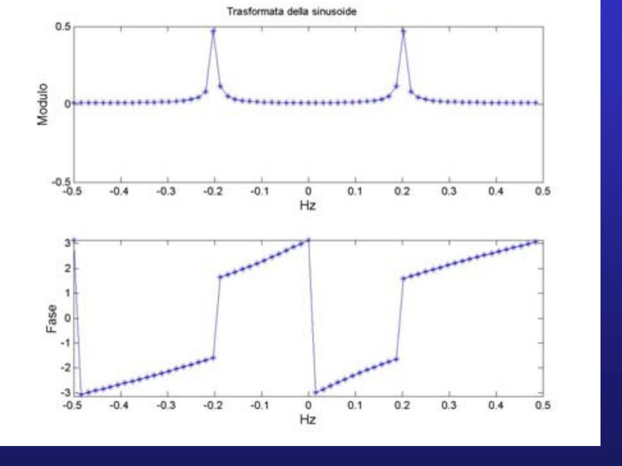
N=10



N=20

Trasformata discreta di Fourier Tramite FFT in ambiente Matlab: durata delle osservazioni

Se ipotizziamo che la nostra sequenza finita derivi dal campionamento di un segnale tempo continuo, può essere interessante vedere cosa succede se aumento il mio intervallo di osservazione. Consideriamo sempre il segnale $x = \sin(2 * pi * f0 * t)$
con t=[-32:1:31] e f0=0.2 Hz.
Abbiamo scelto la finestra temporale in modo da avere ancora 64 campioni come nel caso del seno precedentemente studiato, così come lo stesso è l'intervallo di campionamento: questo implica che lo spettro è rappresentato per gli stessi valori della frequenza. Quello che cambia è la risoluzione frequenziale. Vediamo cosa cambia nello spettro del segnale.



Trasformata discreta di Fourier Tramite FFT in ambiente Matlab: durata delle osservazioni

Vediamo che in corrispondenza di f=2 Hz e f=-2Hz sono presenti due picchi pronunciati, mentre nel caso precedente sono più smussati e presentano delle ondulazioni.

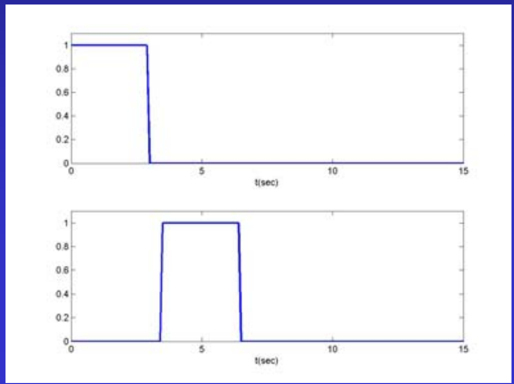
Questo fenomeno è l'effetto del troncamento del segnale:

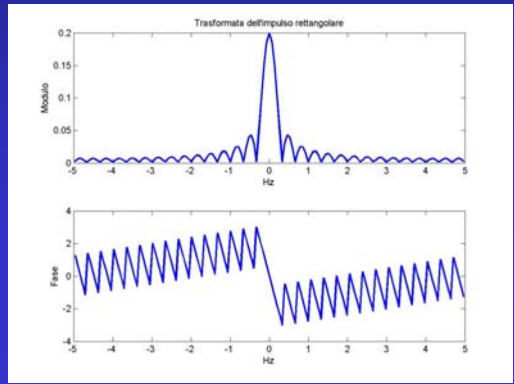
un troncamento più pesante e quindi l'osservazione di un numero inferiore di campioni si può schematizzare come il prodotto tra la sequenza, supposta di durata infinita e una finestra rettangolare w[n]. Dal teorema del prodotto segue che lo spettro finale è dato dalla convoluzione tra i due spettri.

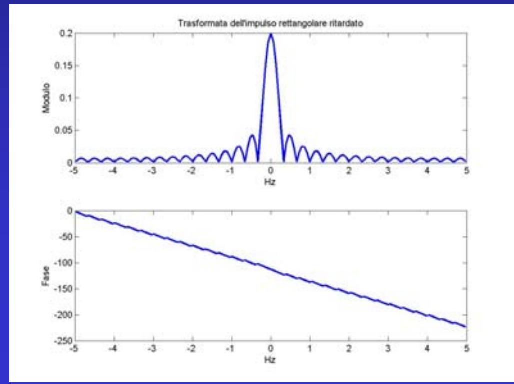
La differenza tra i due casi precedenti si può capire se ricordiamo che lo spettro di w[n] si concentra sempre più nello zero all'aumentare della durata della finestra, mentre presenta un lobo principale e i lobi laterali sempre più ampi al diminuire di T.

Trasformata discreta di Fourier
Tramite FFT in ambiente Matlab

Il prossimo esempio mostra la TDF di un impulso rettangolare e della sua versione ritardata.







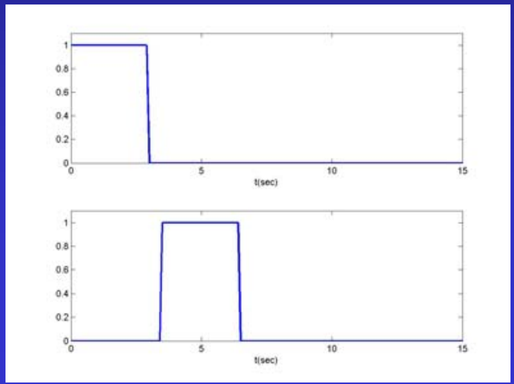
Le successioni e gli spettri sono disegnati a tratto continuo: bisogna comunque ricordare sempre che sono a valori discreti.

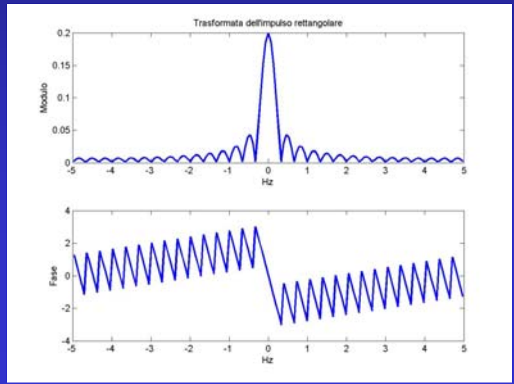
Si deve evidenziare l'effetto sulla fase della trasformata del ritardo temporale. Infatti dal teorema del ritardo si ha:

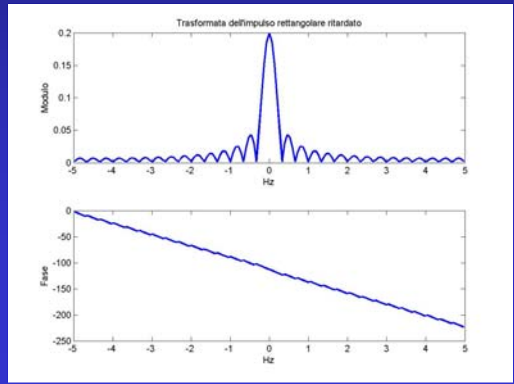
$$x[n] \overset{TDF}{\leftrightarrow} X(k) \Rightarrow x[n-n_0] \overset{TDF}{\leftrightarrow} X(k)e^{-j\frac{2\pi k n_0}{N}}$$

con somma sulla fase di un termine che varia linearmente con la frequenza.

Trasformata discreta di Fourier
Tramite FFT in ambiente Matlab



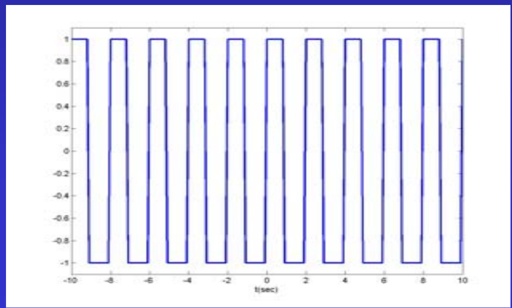


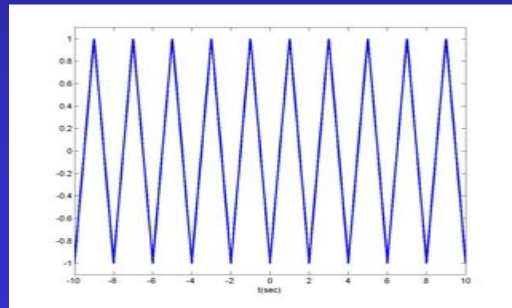


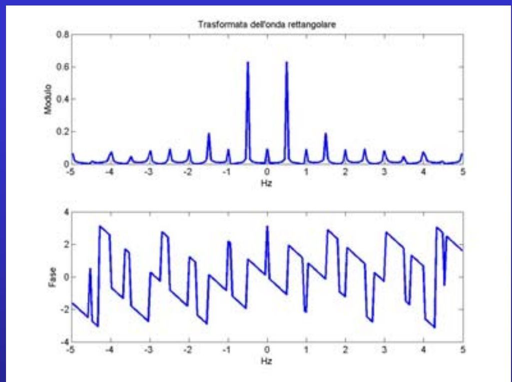
Si deve notare che, nella figura di destra, le oscillazioni sulla fase presente nel grafico di fase dell'impulso non ritardato non sono apprezzabili a causa della scala scelta.
Il grafico di fase è stato realizzato utilizzando unwrap(.) che permette la visualizzazione della fase non limitandosi all'intervallo $[-\pi,\pi]$

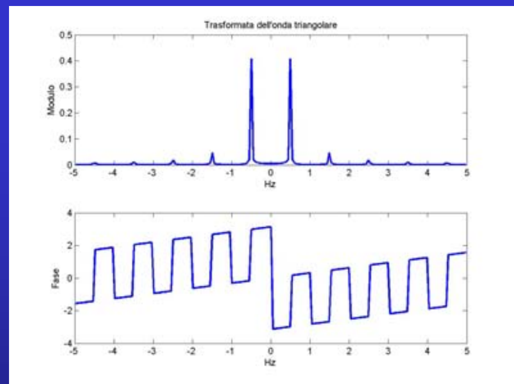
Trasformata discreta di Fourier
Tramite FFT in ambiente Matlab

Il prossimo esempio mostra le TDF di un onda quadra e di un triangolare.









Dallo spettro di ampiezza si ha la conferma che il modulo dei coefficienti di Fourier X(k) decresce secondo come $1/k$ per l'onda quadra e come $1/k^2$ per l'onda triangolare

Calcolo della convoluzione tra due sequenze utilizzando la Trasformata discreta di Fourier

La convoluzione tra due sequenze finite x[n]e h[n] può essere calcolata tramite la TDF utilizzando l'efficienza degli algoritmi fft.

Infatti detta $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$ la convoluzione lineare tra le due sequenze e date P e Q le lunghezze rispettivamente di x[n]e y[n], si verifica che la convoluzione lineare coincide con un periodo della convoluzione circolare delle due sequenze, periodicizzate di N=P+Q-1.

$$y[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}x[k]h[n-k]$$

Calcolo della convoluzione tra due sequenze utilizzando la Trasformata discreta di Fourier

I passi da seguire sono:

-calcolare le TDF, tramite fft, delle due sequenze periodicizzate

-moltiplicare le due TDF e antitrasformare il risultato

La periodicizzazione della sequenza è implicita quando si utilizza la TDF:
il periodo corretto viene indicato con l'operazione dello zero padding in modo da avere, per ogni sequenza, una TDF calcolata su N=P+Q-1 campioni

Calcolo della convoluzione tra due sequenze utilizzando la Trasformata discreta di Fourier

Nell'esempio viene mostrata la convoluzione lineare tra due rect.
Nella figure in basso a destra il risultato della convoluzione circolare tramite fft senza zero padding, nella figura di sinistra con zero padding.