

Classificazione dei Segnali

Segnali Determinati:

Si dice di un segnale del quale conosciamo esattamente l'andamento nel tempo. Del segnale sappiamo tutto.

Ad esempio

$s(t)=2\sin(4\pi t)$ è un segnale determinato

un segnale biomedico acquisito e memorizzato
è un segnale determinato

Classificazione dei Segnali

Segnali Aleatori:

Si dice di un segnale del quale non conosciamo a priori l'andamento nel tempo.

Possiamo conoscerne alcune proprietà statistiche, quindi possiamo aspettarci un certo tipo di andamento.

La trattazione dei segnali aleatori è importante per la progettazione di algoritmi e sistemi per l'elaborazione del segnale

Ad esempio

$s(t)=2\sin(4\pi t+\theta)$ dove θ è una variabile aleatoria è un segnale aleatorio

un ecg che dobbiamo ancora acquisire è un segnale aleatorio: possiamo dire qualcosa a priori su questo segnale?

Classificazione dei Segnali

All'interno delle precedenti classificazioni, possiamo distinguere in:

Segnali analogici:

la variabile temporale è continua così come l'ampiezza del segnale.

È la forma nella quale vengono acquisiti i segnali biomedici prima di essere convertiti

Segnali quantizzati:

L'ampiezza è definita per valori discreti e

può essere rappresentata utilizzando un numero finito di simboli

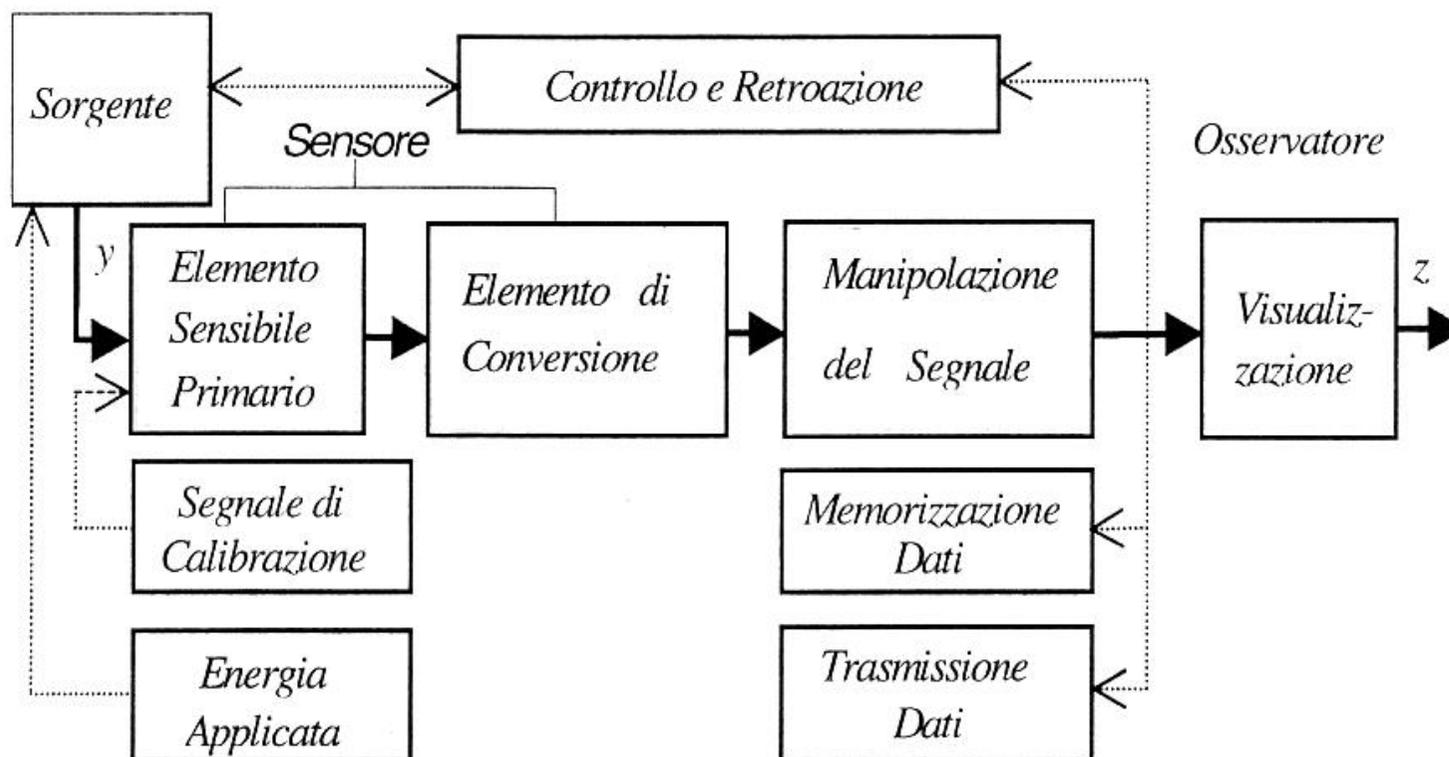
Segnali campionati (sequenze):

la variabile temporale è discreta. Abbiamo un valore

Segnali digitali:

Sia la variabile temporale che l'ampiezza sono discrete. Sono i segnali che possono essere trattati da un sistema numerico.

Architettura di un sistema per le misure biomediche



ANALISI DI FOURIER

Segnali a tempo continuo:

Segnali periodici - Sviluppo in serie di Fourier

Segnali aperiodici - Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

Estensione della TCF a segnali periodici

Segnali a Tempo Discreto:

- Trasformata di Fourier di una sequenza
- Trasformata Discreta di Fourier
- Analisi tramite TDF di sequenze finite

Classificazione dei Segnali

Classificazione in base all'energia

Definizione.

Si dice energia del segnale $s(t)$ nell'intervallo $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$

la grandezza

$$E_S(T) \triangleq \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt$$

Classificazione dei Segnali

Classificazione in base all'energia

Un segnale si dice ad energia finita se esiste finito e diverso da zero il seguente limite

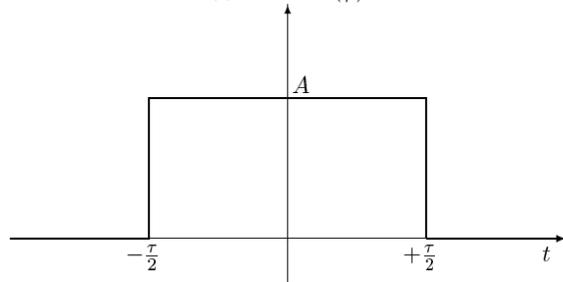
$$E_S = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt$$

Classificazione dei Segnali

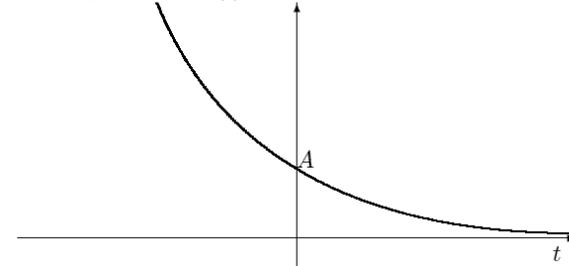
Classificazione in base all'energia $E_S = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt$

Quali di questi segnali è ad energia finita?

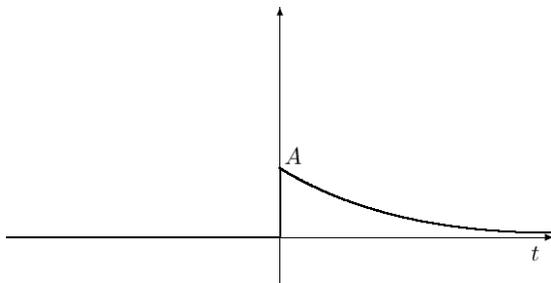
Impulso rettangolare $s(t) = A \text{rect}(\frac{t}{\tau})$.



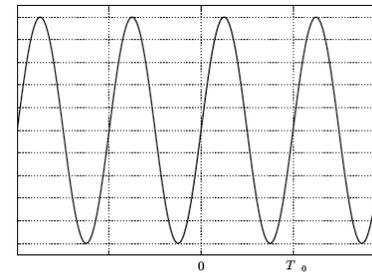
Segnale esponenziale $s(t) = Ae^{-\alpha t}$ con $\alpha > 0, \in \Re$



Segnale esponenziale $s(t) = Ae^{-\alpha t}u(t)$ con $\alpha > 0, \in \Re$



$s(t) = A \sin(2\pi \frac{t}{T_0})$



Classificazione dei Segnali

Definizione.

Si definisce potenza media del segnale $s(t)$ nell'intervallo $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$

la grandezza

$$P_S(T) \triangleq \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt$$

Classificazione dei Segnali

Un segnale si dice ad potenza media finita se esiste finito e diverso da zero il seguente limite

$$P_S = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt$$

Si confronti con la definizione di energia

$$E_S = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt$$

Si evince che:

Un segnale a potenza media finita ha energia infinita

Un segnale a energia finita ha potenza media nulla

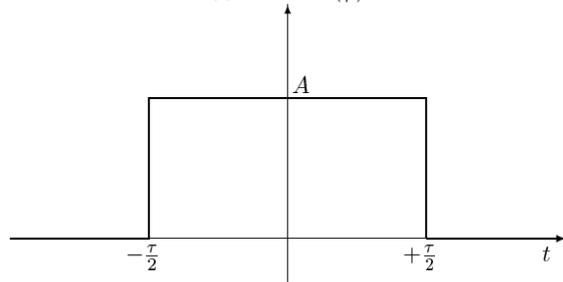
Classificazione dei Segnali

Classificazione in base alla potenza

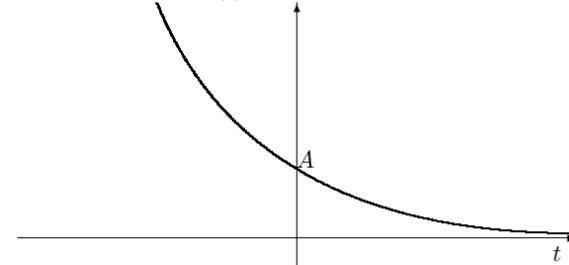
Quali di questi segnali sono a potenza media nulla ?

Quali a potenza media finita?

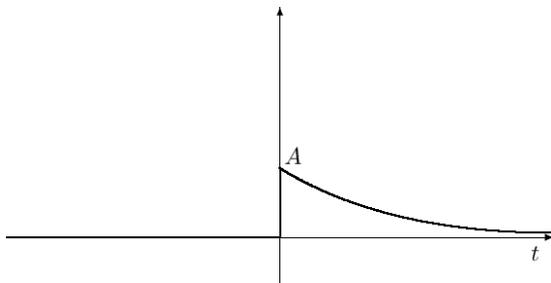
Impulso rettangolare $s(t) = A \text{rect}(\frac{t}{\tau})$.



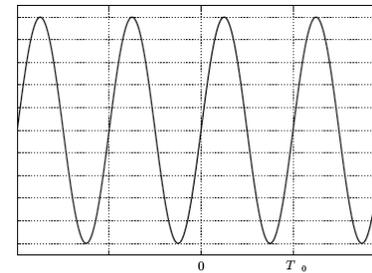
Segnale esponenziale $s(t) = Ae^{-\alpha t}$ con $\alpha > 0, \in \Re$



Segnale esponenziale $s(t) = Ae^{-\alpha t}u(t)$ con $\alpha > 0, \in \Re$



$s(t) = A \sin(2\pi \frac{t}{T_0})$



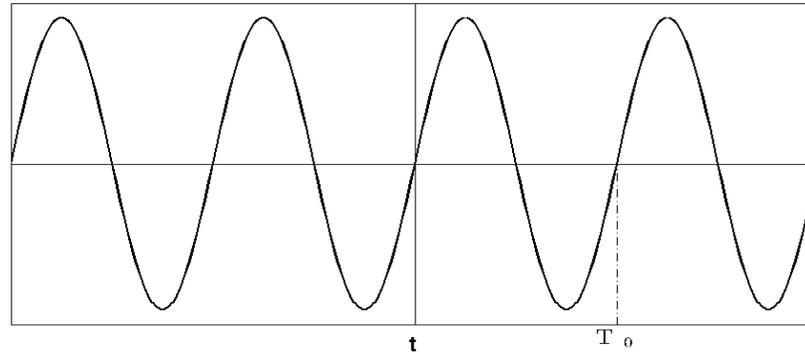
$$P_S = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt$$

Classificazione dei Segnali

Segnali periodici

Un segnale si dice periodico se $\forall t, \exists T_0 : s(t) = s(t + T_0)$

Segnale sinusoidale $s(t) = \sin\left(2\pi \frac{t}{T_0}\right)$



Un segnale periodico è a potenza media finita e la potenza media equivale a quella in un periodo

$$\begin{aligned} P_S &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{NT_0} \int_{-\frac{NT_0}{2}}^{\frac{NT_0}{2}} |s(t)|^2 dt = \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{NT_0} N \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |s(t)|^2 dt \end{aligned}$$

ANALISI DI FOURIER

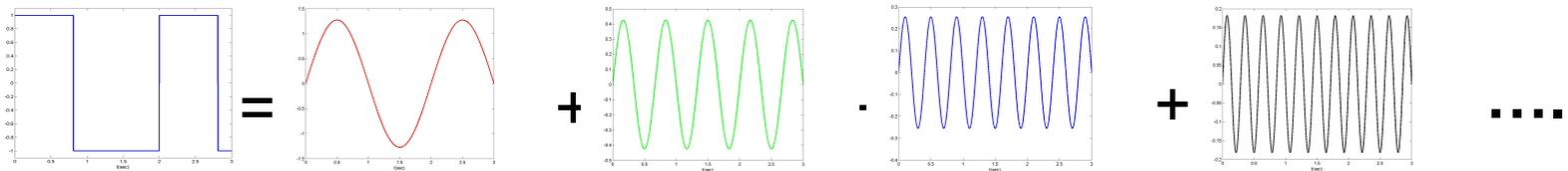
Segnali tempo continui:

Segnali periodici

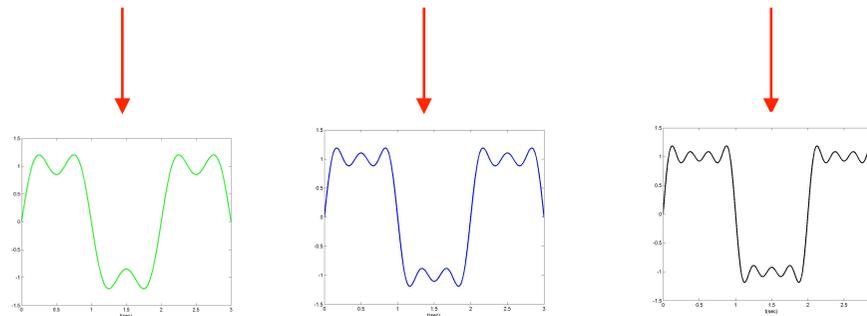
- Sviluppo in serie di Fourier
- Criteri di Convergenza
- Breve Introduzione sui Fasori
- Spettro di Ampiezza e Fase
- Spettro per i Segnali Reali
- Esempi

ANALISI DI FOURIER

Introduciamo l'argomento con l'esempio di un segnale reale: questo può essere espresso come la somma di oscillazioni sinusoidali opportunamente pesate



Ricostruzione aumentando il numero di componenti



L'esempio mostra un'onda quadra scomposta in quattro componenti. Il numero di componenti è, in generale, infinito

Serie di Fourier

Lo sviluppo in Serie di Fourier viene impiegato nel caso di segnali periodici: $s(t)=s(t+ T_0)$ per ogni t

Un segnale $s(t)$, periodico di periodo T_0 , può essere espresso come la somma pesata di infinite funzioni sinusoidali del tipo

$$e^{j 2 \pi n t / T_0} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

periodiche di periodo T_0/n e frequenza $f_n = \frac{n}{T_0}$

Per i segnali a potenza media finita è possibile scrivere

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{j 2 \pi n t / T_0}$$

Serie di Fourier

Vediamo in quali condizioni vale e che significato ha l'uguaglianza appena indicata.

Consideriamo la combinazione lineare di $2N+1$ funzioni periodiche

$$s_N(t) = \sum_{n=-N}^N s_n e^{j 2\pi n t / T_0}$$

E definiamo l'errore tra $s_N(t)$ e il segnale originario $s(t)$

$$\varepsilon_N(t) = s(t) - s_N(t)$$

Serie di Fourier

È possibile dimostrare che i coefficienti che minimizzano l'errore quadratico medio tra $s(t)$ e $s_N(t)$ sono dati da

$$S_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0 + T_0} s(t) e^{-j2\pi nt/T_0} dt$$

Dove gli estremi di integrazione così indicati indicano che l'integrale può essere calcolato per qualsiasi intervallo di ampiezza T_0 .

In queste condizioni l'errore quadratico medio si può scrivere come (abbiamo posto $t_0 = 0$)

$$\bar{\varepsilon}_N^2 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |s(t)|^2 dt - \sum_{n=-N}^N |S_n|^2$$

Per $N \rightarrow \infty$, nel caso di segnale a potenza media finita, l'errore quadratico medio tende a zero

Serie di Fourier

Con questa scelta dei coefficienti si ritrova l'uguaglianza di Parseval

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |s(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |S_n|^2$$

Che esprime la potenza media del segnale in funzione dei coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier

Serie di Fourier

Abbiamo quindi due equazioni

La prima di analisi che individua il valore dei coefficienti dello Sviluppo in Serie di Fourier

$$S_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0 + T_0} s(t) e^{-j2\pi nt/T_0} dt$$

La seconda di sintesi, che rappresenta lo sviluppo in serie di Fourier del segnale a tempo continuo periodico

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{j2\pi nt/T_0}$$

Serie di Fourier

Criterio di Dirichlet

Il criterio di Dirichlet stabilisce in quali condizioni un segnale periodico è rappresentabile come sviluppo in serie di Fourier

- $s(t)$ deve essere assolutamente integrabile sul periodo T_0 ;

- $s(t)$ deve essere continuo o presentare al più, in un periodo, un numero finito di discontinuità di prima specie;

- $s(t)$ deve essere derivabile rispetto al tempo nel periodo, escluso al più un numero finito di punti nei quali, però, devono esistere finite le derivate destra e sinistra.

Soddisfatte queste condizioni la serie di Fourier converge a $s(t)$.
Nei punti di discontinuità di prima specie di $s(t)$, la serie converge alla semisomma del limite destro e sinistro nei suddetti punti

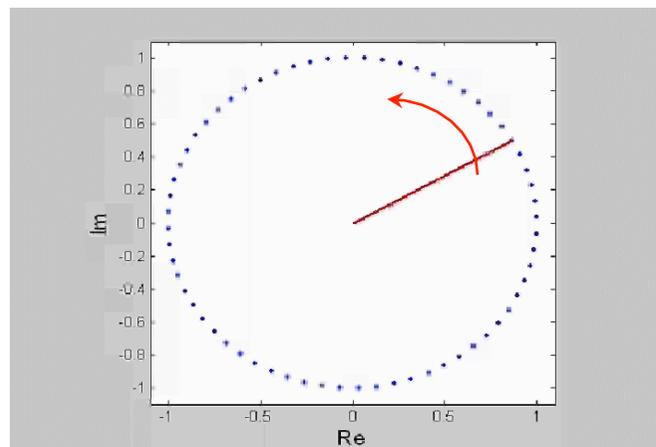
Serie di Fourier: breve introduzione ai fasori

Consideriamo il segnale complesso

$$s(t) = Ae^{j(2\pi ft + \theta)}$$

Questo viene detto fasore rotante: la posizione del fasore sul piano di Gauss può essere individuata da un vettore ruotante alla velocità angolare $\omega=2\pi f$ e al tempo $t=0$ forma un angolo pari a θ con l'asse reale

Nel seguito si visualizza un esempio di rotazione con velocità angolare maggiore di zero $A=1$ e $\theta=\pi/6$ radianti

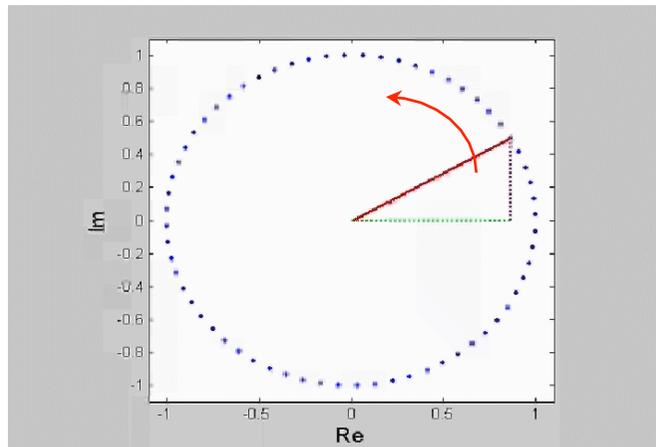


Serie di Fourier: breve introduzione sui fasori

Dalla formula di Eulero discende

$$Ae^{j(2\pi ft + \theta)} = A \cos(2\pi ft + \theta) + jA \sin(2\pi ft + \theta)$$

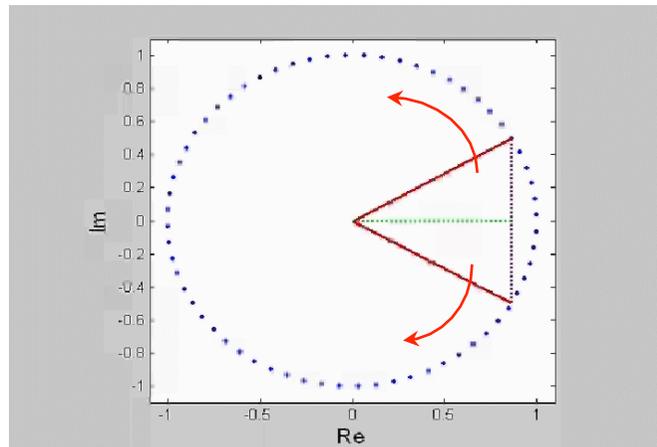
Per cui il segnale $A \cos(2\pi ft + \theta)$ può essere trovato come parte reale del fasore



Serie di Fourier: breve introduzione sui fasori

La parte reale si può ottenere anche come somma del fasore con il complesso coniugato divisa per due

$$\operatorname{Re}\{s(t)\} = \frac{s(t) + s^*(t)}{2} = \frac{Ae^{j(2\pi ft + \theta)} + Ae^{-j(2\pi ft + \theta)}}{2}$$



Da questa animazione si intuisce il significato da attribuire alle frequenze negative: esse sono associate a fasori che ruotano nel piano di Gauss in senso orario.

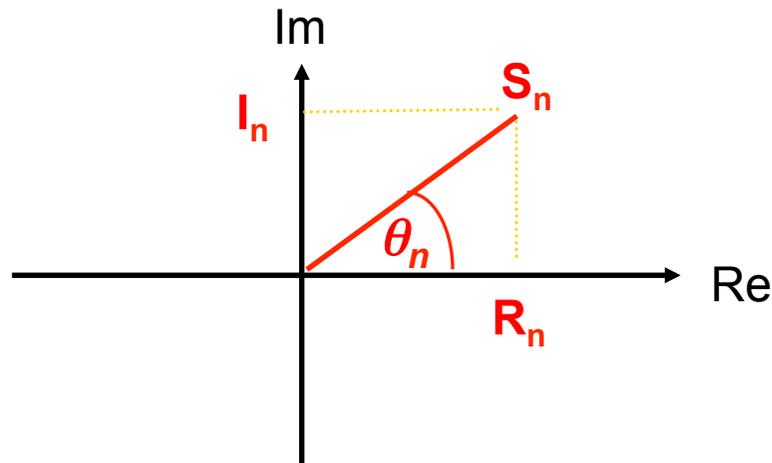
Serie di Fourier

I coefficienti della serie di Fourier S_n formano lo spettro del segnale $s(t)$.

Sono numeri complessi e sono rappresentabili come

- modulo e fase $S_n = |S_n| e^{j\theta_n}$ con $\theta_n = \angle S_n$

- parte reale e parte immaginaria $S_n = R_n + j I_n$



Il grafico del modulo di S_n , al variare di n , si dice spettro di ampiezza mentre il grafico della fase di S_n si dice spettro di fase di $s(t)$

Serie di Fourier

Ciascun coefficiente di Fourier S_n nella formula dello sviluppo va a moltiplicare la funzione oscillante $e^{j2\pi nt/T_0}$

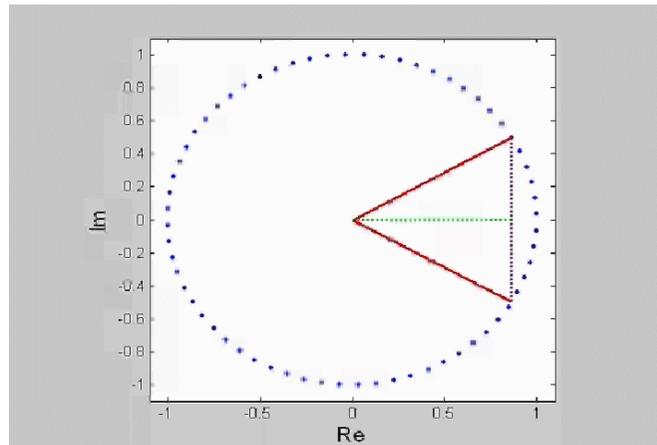
La sommatoria diviene quindi una sommatoria di fasori

$$|S_n| e^{j\theta_n} e^{j2\pi nt/T_0} = |S_n| e^{j(2\pi nt/T_0 + \theta_n)}$$

di ampiezza $|S_n|$ e fase θ_n

Serie di Fourier

Se consideriamo l'animazione precedente possiamo dedurre che ogni segnale reale è costituito da fasori tali per cui, per ogni fasore a frequenza positiva, deve esistere anche il corrispettivo a frequenza negativa tale per cui $|S_n| = |S_{-n}|$ e fase θ_n e la fase iniziale θ_n deve essere opposta



Serie di Fourier

Rappresentazioni della Serie di Fourier per segnali reali
Ricaviamo la **forma trigonometrica**

Si parte da $S_n = R_n + j I_n$

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{j2\pi nt/T_0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (R_n + jI_n) e^{j2\pi nt/T_0} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (R_n + jI_n) \left(\cos(2\pi nt/T_0) + j \sin(2\pi nt/T_0) \right) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \cos(2\pi nt/T_0) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \sin(2\pi nt/T_0) + \\ &+ j \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \sin(2\pi nt/T_0) + j \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \cos(2\pi nt/T_0) = \end{aligned}$$

Serie di Fourier

Se il segnale è reale vale la relazione $S_n^* = S_{-n}$

(si verifica immediatamente dalla formula del coefficiente di Fourier)

Come conseguenza abbiamo $R_n = R_{-n}$ e $I_n = -I_{-n}$

forma trigonometrica segnale reale

$$s(t) = R_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[R_n \cos(2\pi n t / T_0) - I_n \sin(2\pi n t / T_0) \right]$$

Abbiamo anche la forma polare:

$$s(t) = S_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |S_n| \cos(2\pi n t / T_0 + \theta_n)$$

Serie di Fourier

Esempi di Sviluppo in serie di Fourier:

$$s(t) = a \cos(2\pi f_0 t)$$

Dal confronto con la forma polare dello sviluppo in serie di Fourier di un segnale reale periodico si ricavano i coefficienti della Serie di Fourier

$$s(t) = a \cos(2\pi f_0 t) = S_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |S_n| \cos(2\pi n f_0 t + \vartheta_n)$$

Da questo confronto si ricava $|S_1| = \frac{a}{2}$, $\vartheta_1 = 0$ e

$$|S_n| = 0, \vartheta_n = 0, \forall n \neq 1$$

Visto che il segnale è reale si ha $S_n^* = S_{-n}$

$$S_1 = \frac{a}{2} e \quad S_{-1} = \frac{a}{2}$$

Serie di Fourier

Altro caso: $s(t) = a \sin(2\pi f_0 t)$

Il segnale si può scrivere come $s(t) = a \cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$

Dal confronto con la forma polare si ottiene

$$\left|S_1\right| = \frac{a}{2}, \vartheta_1 = -\frac{\pi}{2} \quad \left|S_n\right| = 0, \vartheta_n = 0, \forall n \neq 1$$

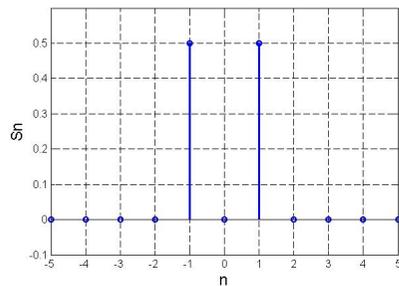
Dalla relazione $S_n^* = S_{-n}$ si ottiene

$$S_1 = \frac{a}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad S_{-1} = \frac{a}{2} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

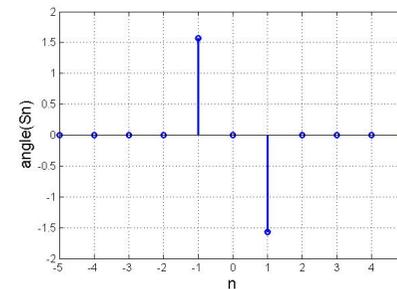
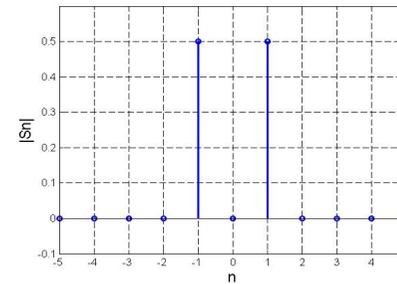
Serie di Fourier

Nelle figure che seguono si vede lo spettro del coseno e del seno per $a=1$

Coefficienti di Fourier coseno



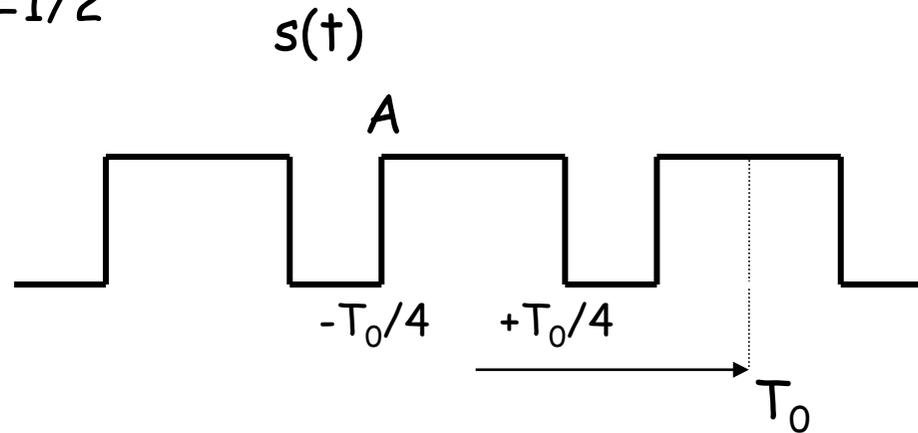
Coefficienti di Fourier seno



Nel caso del coseno è sufficiente un grafico visto che i coefficienti sono reali. I coefficienti nel caso del seno sono complessi e possono essere visualizzati in modulo e fase, oppure tramite un unico grafico della parte immaginaria.

Serie di Fourier

Sviluppo in serie di Fourier del treno di impulsi rettangolari $s(t)$ di periodo T_0 e duty cycle $\delta=1/2$



$$S_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} s(t) e^{-j2\pi n t / T_0} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/4}^{+T_0/4} A e^{-j2\pi n t / T_0} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/4}^{+T_0/4} A e^{-j2\pi n t / T_0} dt =$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/4}^{+T_0/4} A dt & \text{per } n = 0 \\ \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/4}^{+T_0/4} A e^{-j2\pi n t / T_0} dt & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Serie di Fourier

- $n = 0$

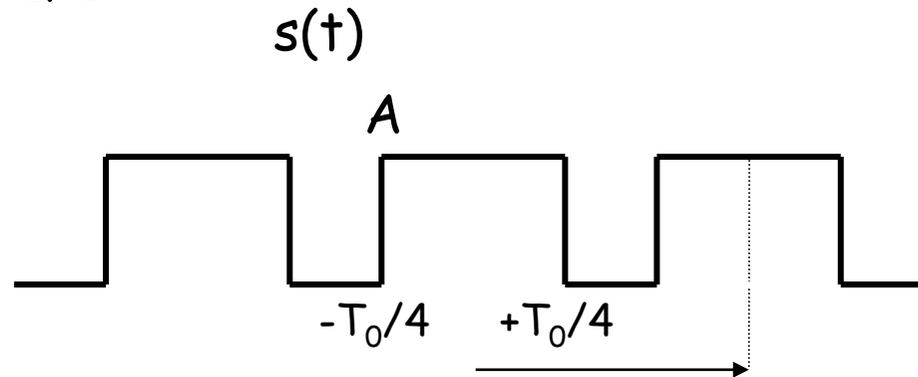
$$S_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/4}^{+T_0/4} A dt = \frac{A}{2} \quad \text{È il valore medio del segnale.}$$

- $n \neq 0$

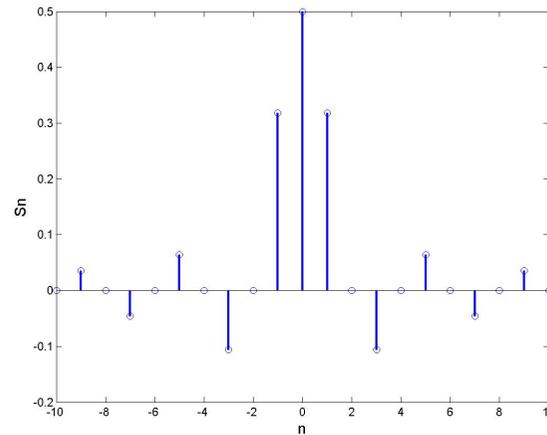
$$S_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/4}^{+T_0/4} A e^{-j2\pi n t / T_0} dt = \frac{1}{T_0} A \left[\frac{e^{-j2\pi n t / T_0}}{-j2\pi n / T_0} \right]_{-T_0/4}^{+T_0/4} = \frac{A}{T_0} \frac{e^{-j\frac{\pi n}{2}} - e^{+j\frac{\pi n}{2}}}{-j2\pi n / T_0} =$$
$$= A \frac{-2j \sin(\frac{\pi n}{2})}{-j2\pi n} = A \frac{\sin(\frac{\pi n}{2})}{\pi n} = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \frac{-(-1)^k}{(2k-1)\pi} & n = 2k-1 \quad \text{con } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Serie di Fourier

Sviluppo in serie di Fourier del treno di impulsi rettangolari $s(t)$ di periodo T_0 e duty cycle $\delta=1/2$



Di seguito vengono mostrati i coefficienti compresi nell'intervallo $[-10:10]$

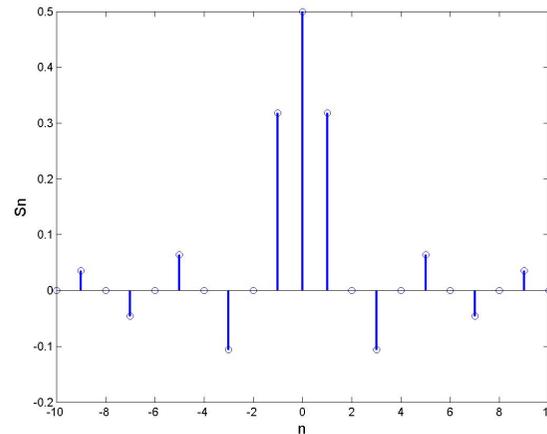


Serie di Fourier

Le componenti per $n=1$ e $n=-1$ possiedono lo stesso periodo del segnale di partenza e sono dette fondamentali

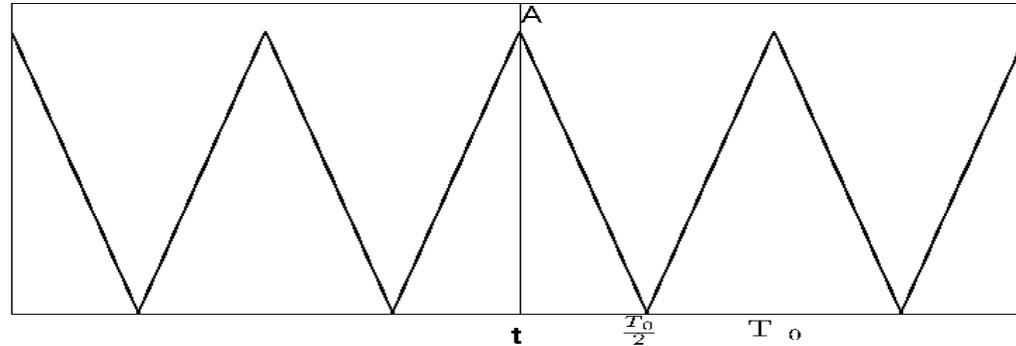
Le componenti per $|n|>1$ sono dette armoniche e le frequenze sono corrispondenti a $f_n = nf_0$

Di seguito vengono mostrati i coefficienti compresi nell'intervallo $[-10:10]$



Serie di Fourier

Sviluppo in serie di Fourier dell'onda triangolare



Il segnale è pari e reale. In questo caso è possibile dimostrare che:

$$S_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} s(t) e^{-j2\pi nt/T_0} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} s(t) e^{-j2\pi nt/T_0} dt = \frac{2}{T_0} \int_0^{+T_0/2} s(t) \cos(2\pi nt/T_0) dt$$

I coefficienti sono quindi reali.

In questo caso possono essere calcolati come

$$S_n = R_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{+T_0/2} A \left(1 - \frac{2t}{T_0}\right) \cos(2\pi nt/T_0) dt$$

Serie di Fourier

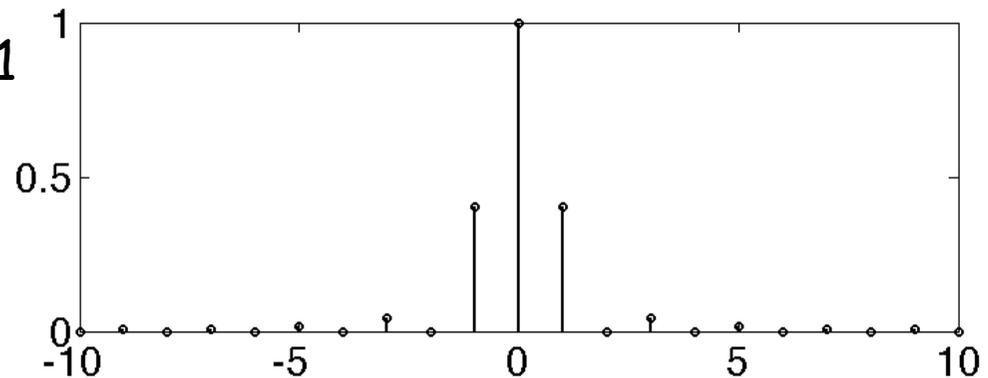
Il termine per $n=0$ si calcola facilmente come:

$$R_0 = \frac{2}{T_0} \int_0^{+T_0/2} A \left(1 - \frac{2t}{T_0}\right) dt = \frac{2}{T_0} \left(\frac{1}{2} A \frac{T_0}{2}\right) = \frac{A}{2}$$

Per $n \neq 0$ si risolve l'integrale per parti e si ottiene

$$S_n = R_n = \frac{A}{2} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2}$$

A destra l'andamento per $A=1$



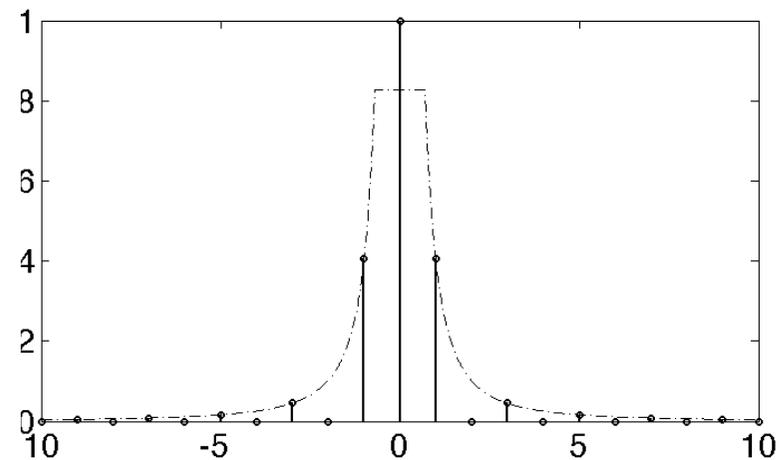
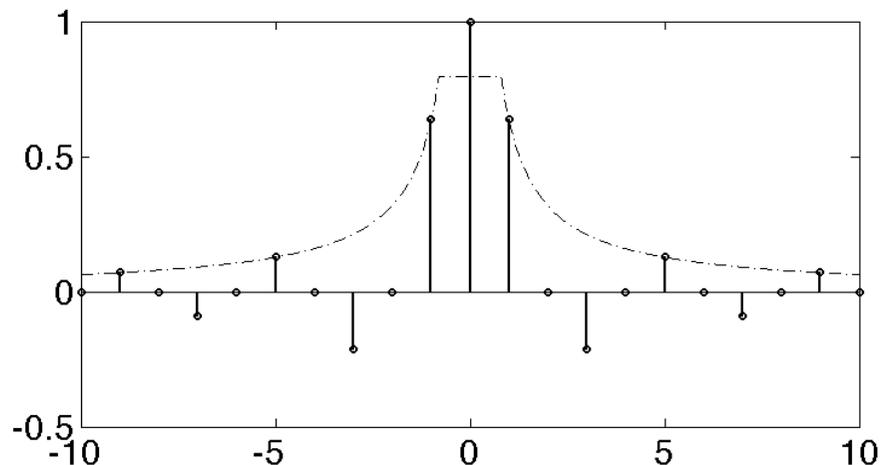
Confronto coeff. Serie di Fourier

Confrontiamo l'andamento dei coefficienti per l'onda quadra e l'onda triangolare:

$$S_n = R_n = \frac{A}{2} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\frac{\pi n}{2}}$$

$$S_n = R_n = \frac{A}{2} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2}$$

Si vede che l'andamento del modulo dei coefficienti per $|n|$ crescente Dipende da un fattore $1/n$ per l'onda quadra e $1/n^2$ per l'onda triangolare

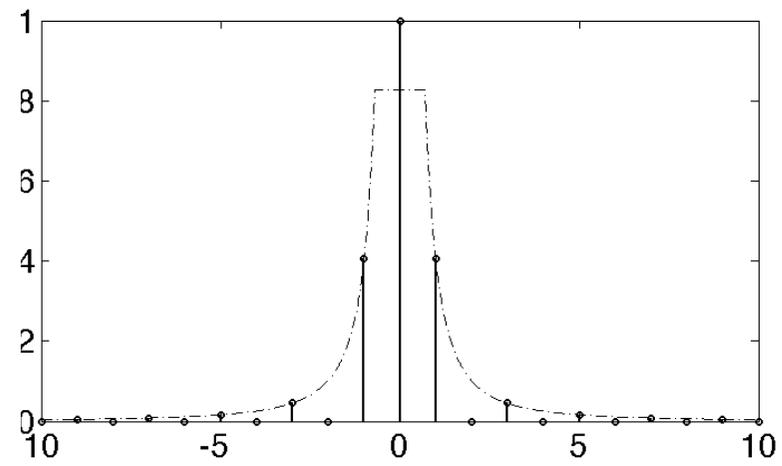
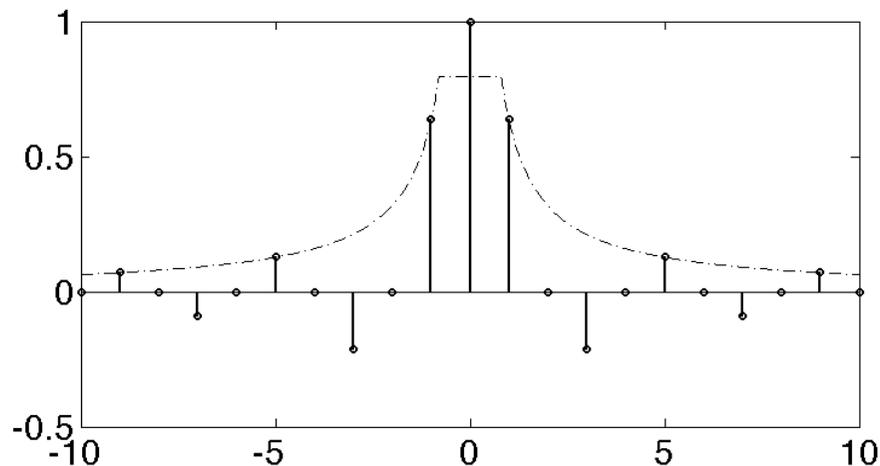


Confronto coeff. Serie di Fourier

Quindi i coefficienti dello sviluppo in serie dell'onda triangolare, tendono a zero più velocemente di quelli dell'onda quadra

Questo fenomeno è legato alle diverse caratteristiche temporali dell'onda quadra

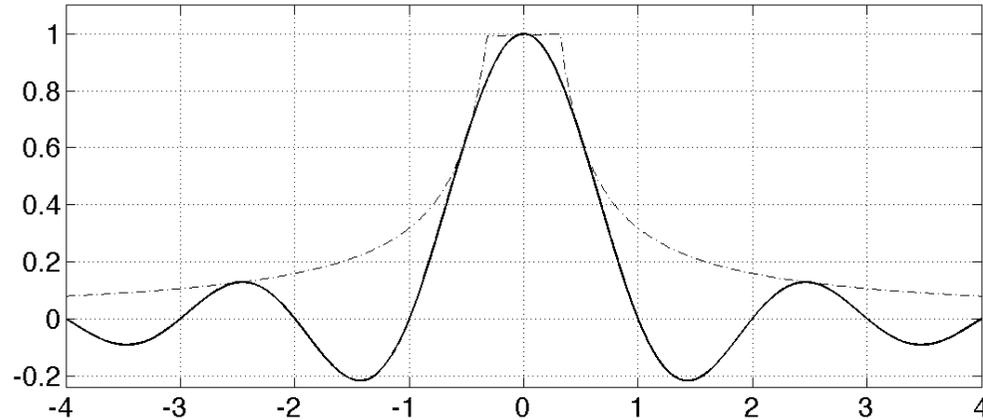
Che presenta forti discontinuità, ovvero variazioni brusche, veloci, tali da richiedere un contributo maggiore delle alte frequenze, quindi da oscillazioni rapide.



Funzione Sinc(x)

Introduciamo una funzione fondamentale nell'analisi dei segnali

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$



Quindi i coefficienti precedenti possono essere visti come:

$$S_n = R_n = \frac{A}{2} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\frac{\pi n}{2}} = \frac{A}{2} \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)$$

quadra

$$S_n = R_n = \frac{A}{2} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2} = \frac{A}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right)$$

triangolare