Campionamento dei Segnali

I segnali biomedici sono di tipo analogico, quindi continui in ampiezza e a tempo continuo.
Mentre i primi stadi dei sistemi di acquisizione devono eseguire operazioni nel dominio analogico, quali trasduzione, pre-amplificazione e filtraggio

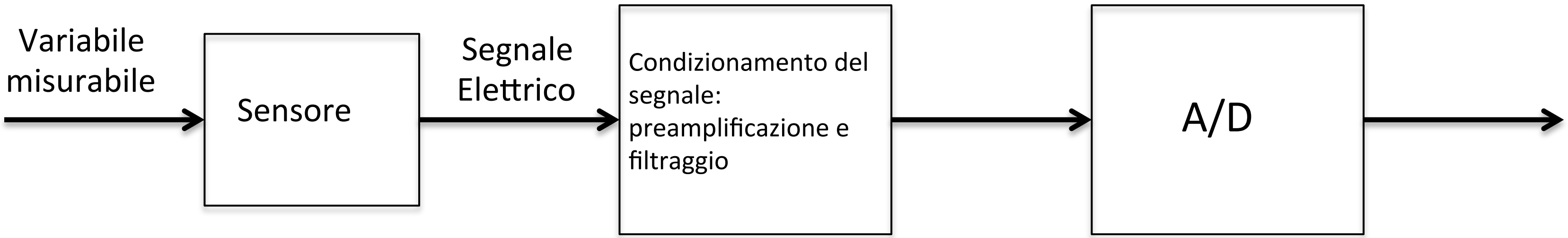
Negli attuali sistemi di elaborazione il segnale viene convertito in digitale. Questo permette poi il trattamento del segnale con sistemi digitali con alcuni vantaggi quali

- La robustezza dell'informazione rispetto al rumore
- La facilità di memorizzazione e recupero dell'informazione
- Lo sviluppo di sistemi di elaborazione digitale versatili e potenti

Campionamento dei Segnali

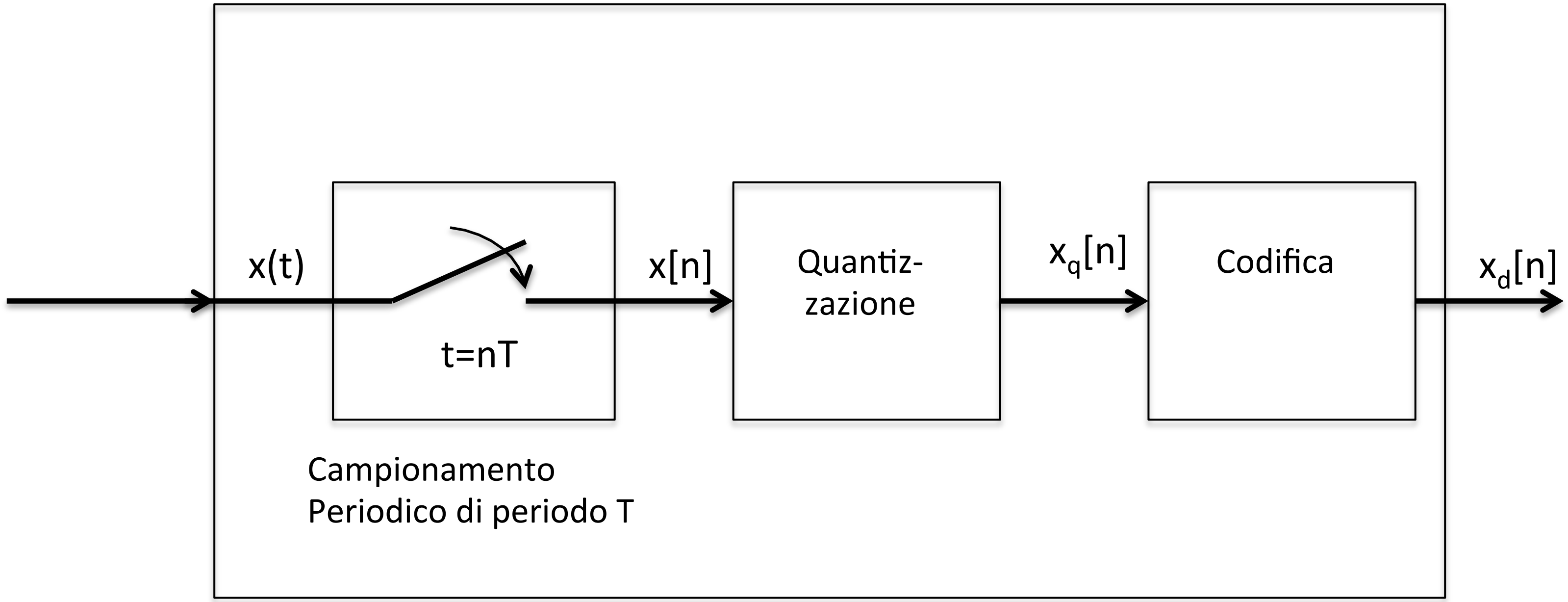
Le operazioni di passaggio da analogico a digitale vengono fatte da un convertitore analogico digitale (A/D converter)
Che ha lo scopo di

- Campionare il segnale (conversione da tempo continuo a tempo discreto)
- Quantizzare il segnale (conversione da ampiezza continua a ampiezza discreta)
- Codificare il segnale (associare ad ogni livello discreto dell'ampiezza un diverso codice es. binario 8, 12 o 16 bit)



Campionamento dei Segnali

Vediamo uno schema del convertitore analogico-digitale

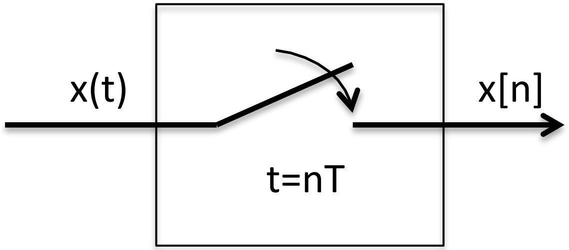


T è detto tempo di campionamento e il suo inverso fc=1/T è detta frequenza di campionamento

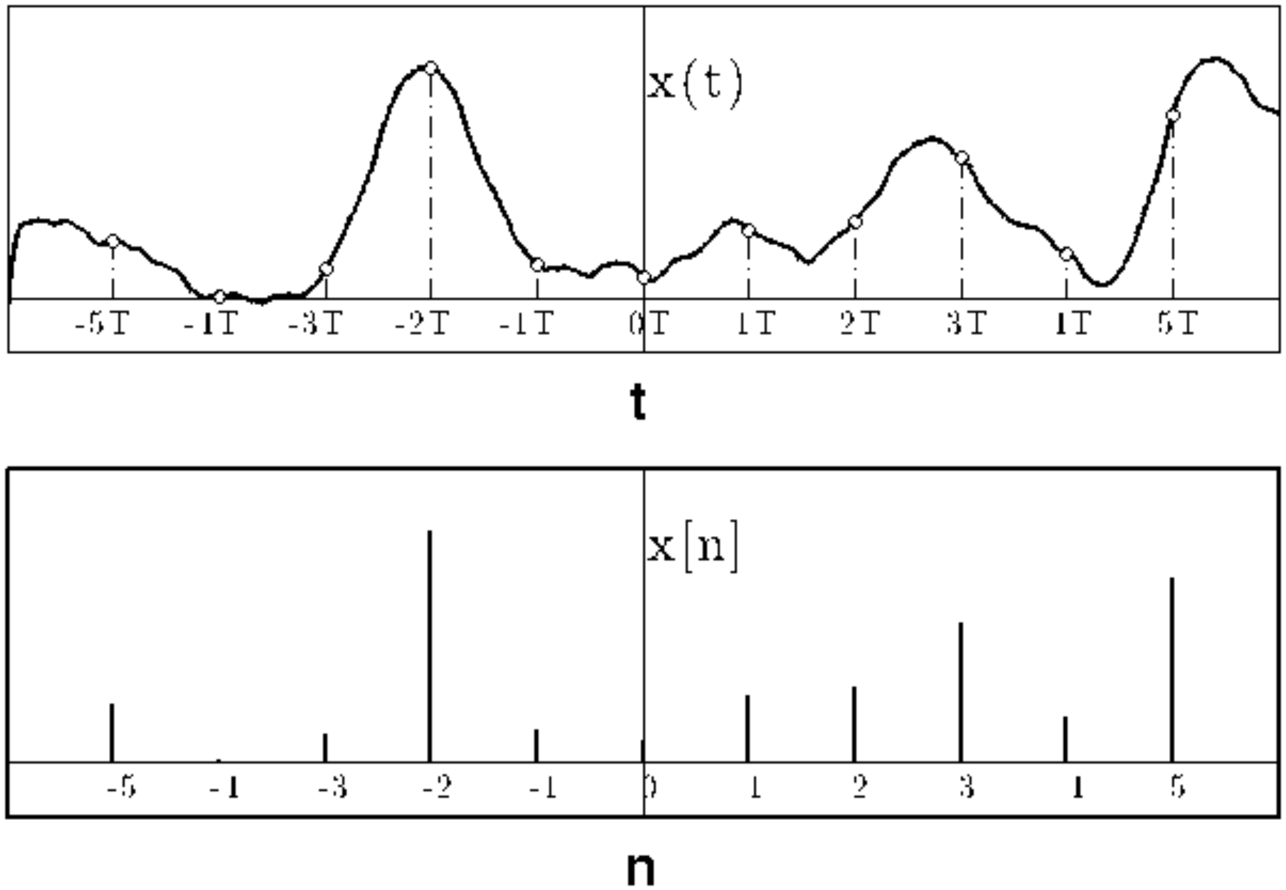
Noi ci occuperemo dei modi per studiare in frequenza le sequenze x[n]

Non ci occuperemo degli effetti del quantizzazione sul segnale e degli aspetti legati alla codifica

Campionamento dei Segnali

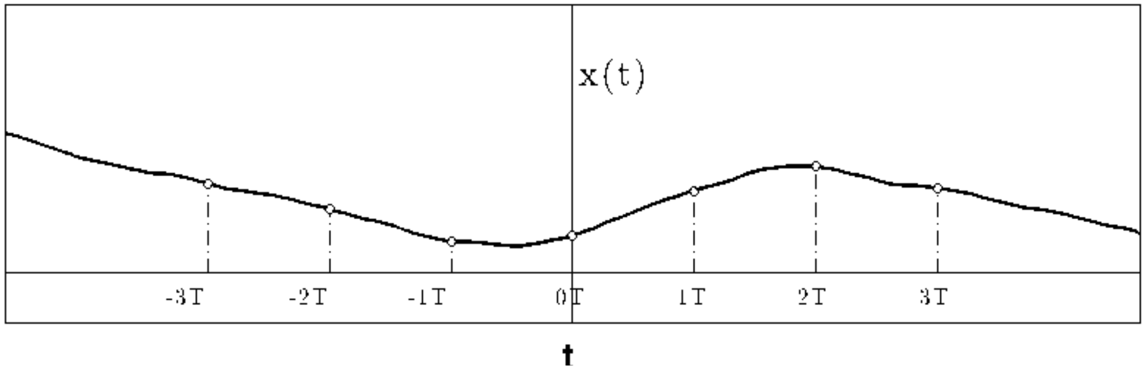


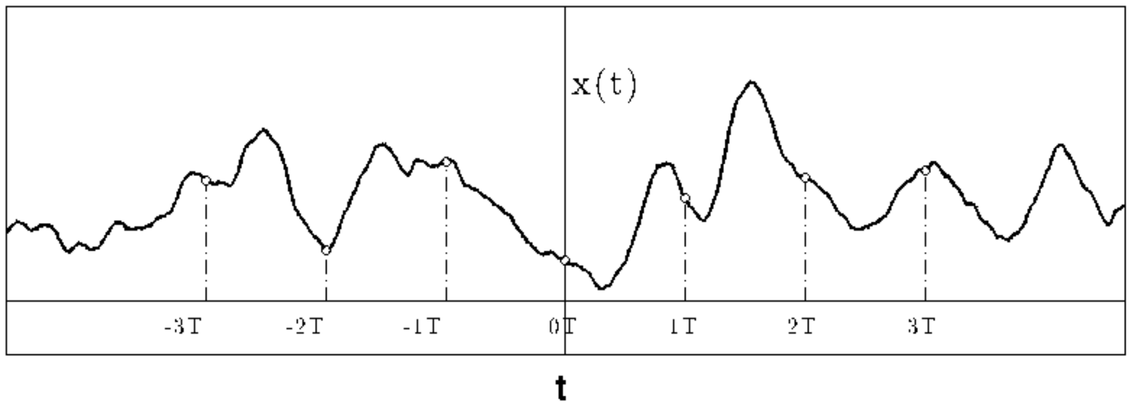
Campionamento periodico
di periodo T



Campionamento dei Segnali

Che differenza esiste tra queste due operazioni di campionamento?

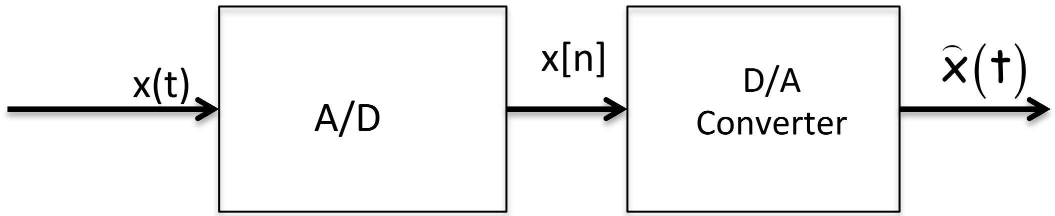


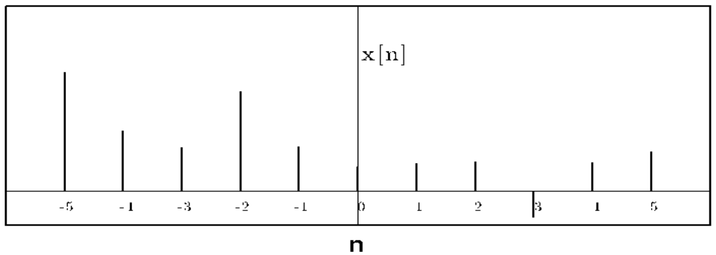


Se conoscessimo solo il valore dei campioni, in quale caso potremmo meglio ricostruire il segnale di partenza?

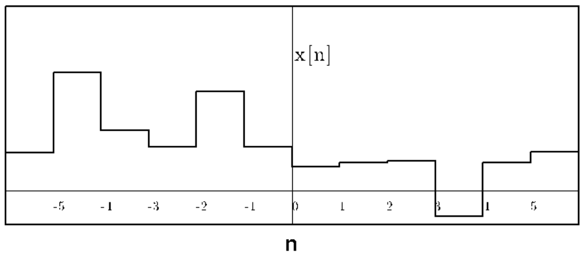
Conversione D/A

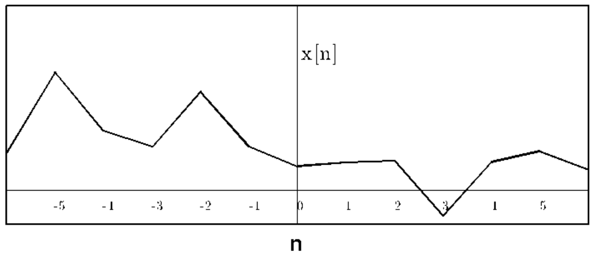
È infatti possibile ricostruire un segnale tempo continuo a partire
Da una sequenza, tramite una conversione digitale-analogica





Di seguito due tipi di interpolazione: mantenimento (sx) e lineare





Campionamento dei Segnali

C'è un legame tra la velocità di variazione di un segnale e il tempo di campionamento che possiamo utilizzare

Teorema del Campionamento o di Shannon.
É possibile ricostruire un segnale, a banda rigorosamente limitata B, a partire dai suoi campioni, se prelevati ad una frequenza non inferiore a $f_c \geq 2B$

La condizione $f_c \geq 2B$ sulla frequenza di campionamento si chiama Condizione di Nyquist

Campionamento dei Segnali

Cerchiamo si capire come questa condizione incida sull'informazione nel dominio della frequenza

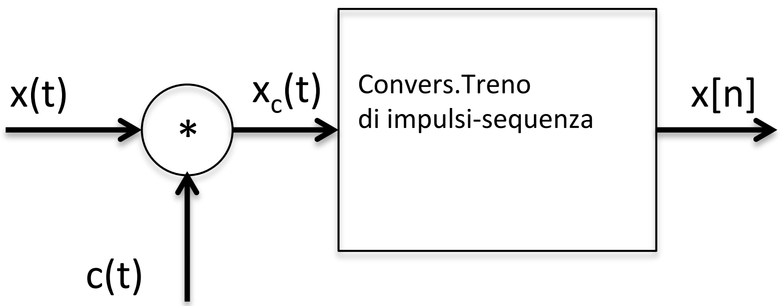
Infatti se il campionamento ci permettesse di mantenere il contenuto frequenziale del segnale di partenza, vista l'equivalenza informativa nel dominio del tempo e nel dominio della frequenza
avremmo la possibilità di ricostruire il segnale di partenza a partire dai suoi campioni

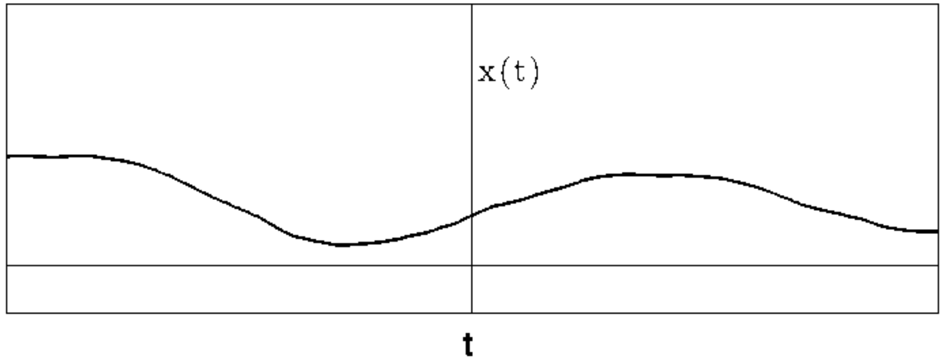
Effetto del Campionamento nel dominio Frequenziale

Qual è l'effetto del campionamento nel dominio della frequenza?

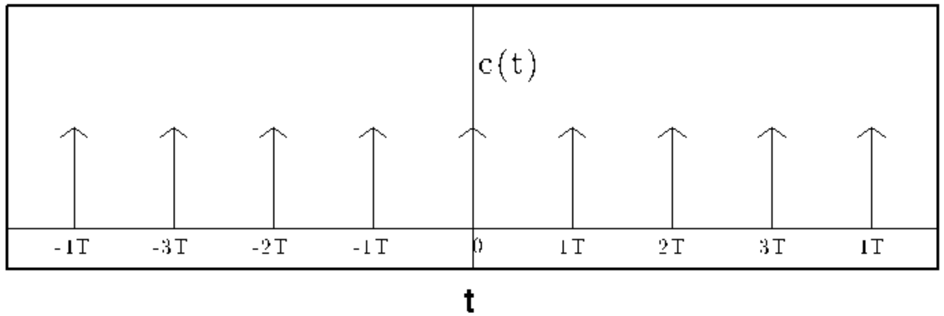
Vediamo di trovare una relazione tra TCF del segnale analogico e il contenuto frequenziale del segnale campionato, ovvero della sequenza

Effetto del Campionamento nel dominio Frequenziale



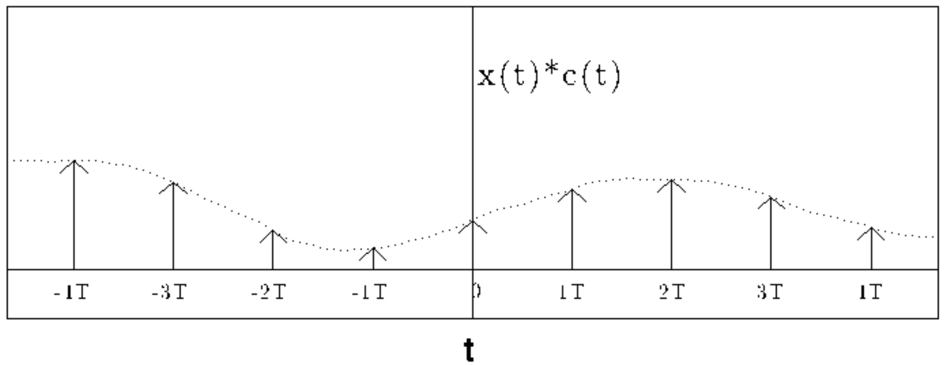


L'operazione di campionamento può essere vista matematicamente come la moltiplicazione del segnale a tempo continuo per un pettine di delta



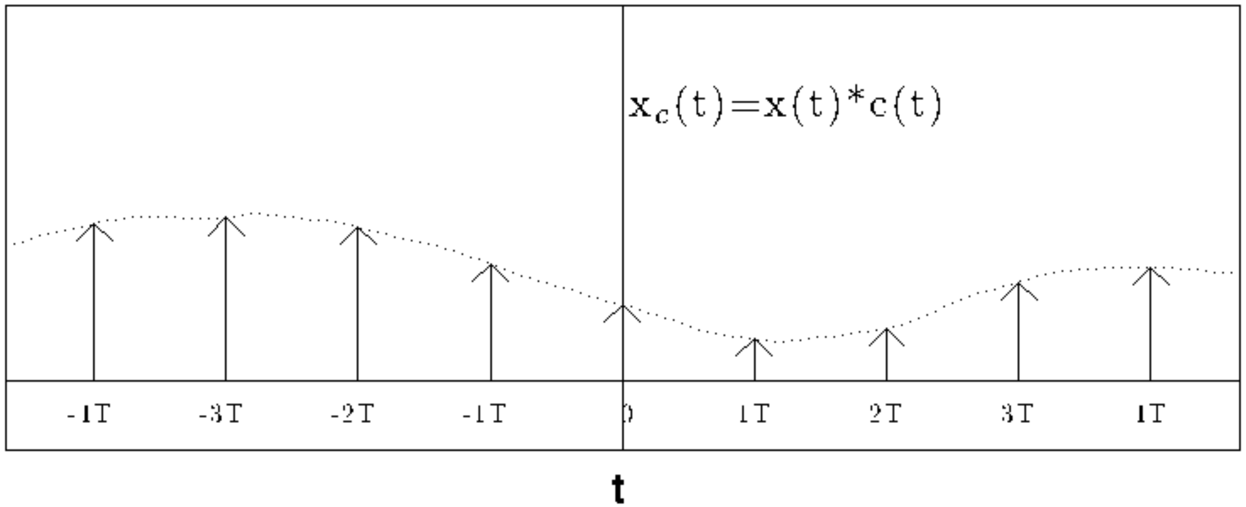
$$x_c(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) =$$

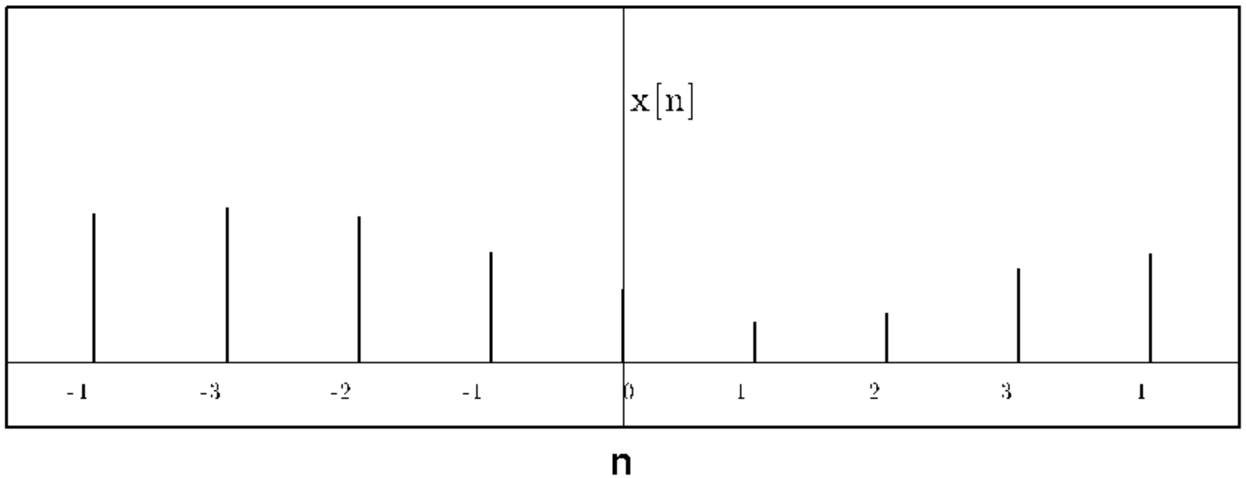
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$



Effetto del Campionamento nel dominio Frequenziale

La $x_c(t)$ e la $x[n]$ hanno lo stesso contenuto informativo.
I risultati sulla prima saranno estesi quindi alla sequenza $x[n]$





Trasformata di Fourier di una Sequenza

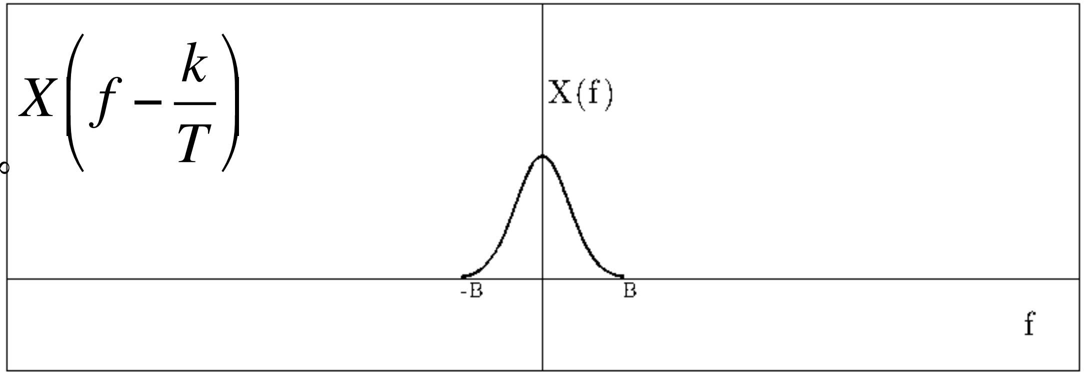
E' possibile trovare una relazione che lega la Trasformata Continua di Fourier di x(t), $X(f)$ a quella del segnale campionato $X_c(f)$
In particolare si ha

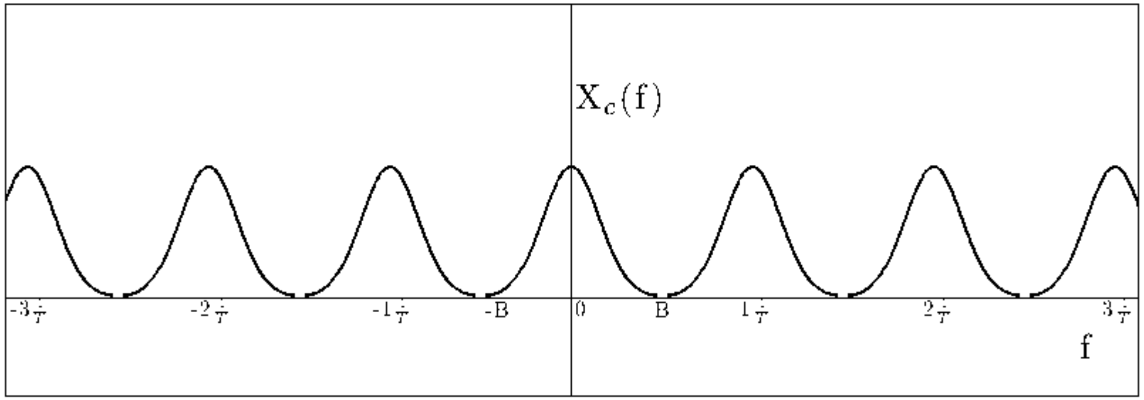
$$X_c(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

La trasformata continua di Fourier della segnale campionato è ottenuta periodicizzando, con periodo pari alla frequenza di campionamento 1/T la trasformata di Fourier del segnale tempo continuo.

Trasformata di Fourier di una Sequenza

$$X_c(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T} \right)$$

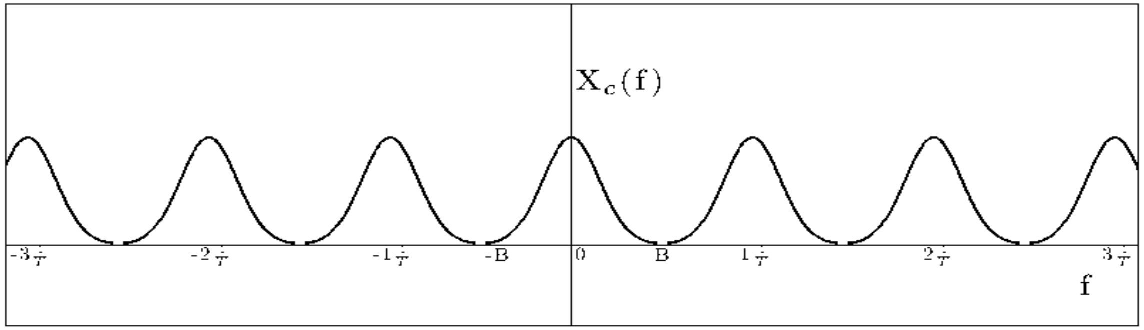


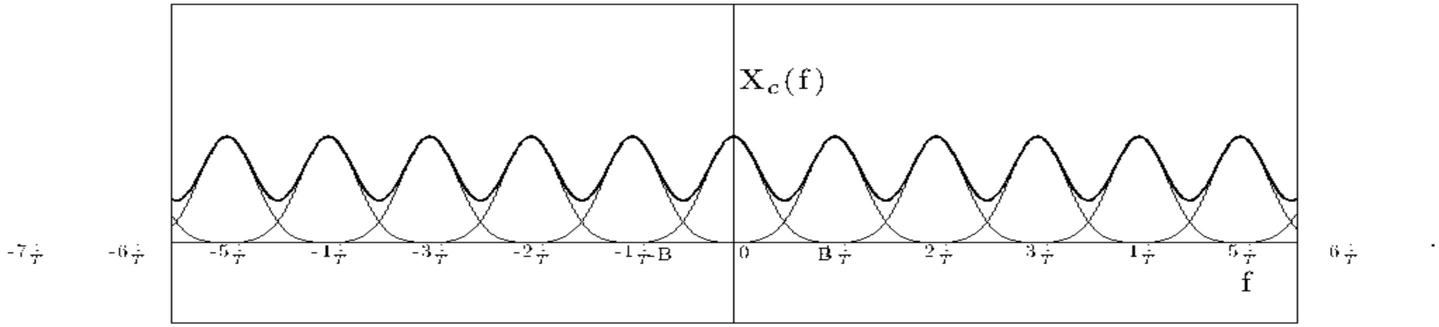


Si nota che in questo caso è possibile ritrovare in $X_c(f)$ il contenuto frequenziale del segnale di partenza

Cosa succede se usiamo un tempo di campionamento maggiore?

Trasformata di Fourier di una Sequenza





Le repliche del segnale si sovrappongono, causando una perdita della informazione di partenza

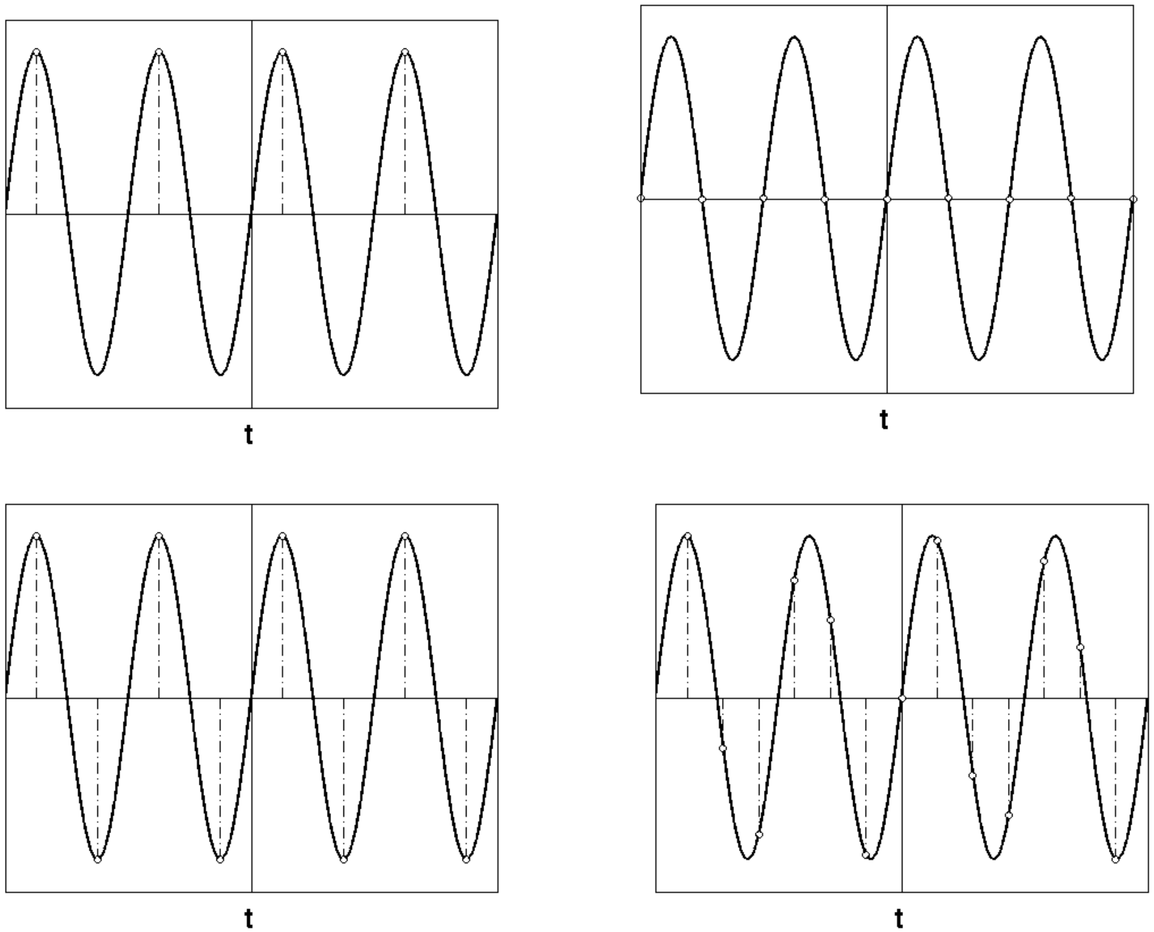
Questo fenomeno è detto di aliasing e si può evitare tramite la scelta di una frequenza di campionamento che soddisfi la condizione di Nyquist

$$f_c = \frac{1}{T} \geq 2B$$

Trasformata di Fourier di una Sequenza

Un non corretto campionamento potrebbe causare l'individuazione di
Una componente frequenziale al posto di quella reale

Quali tra questi segnali
È stato campionato
correttamente ?

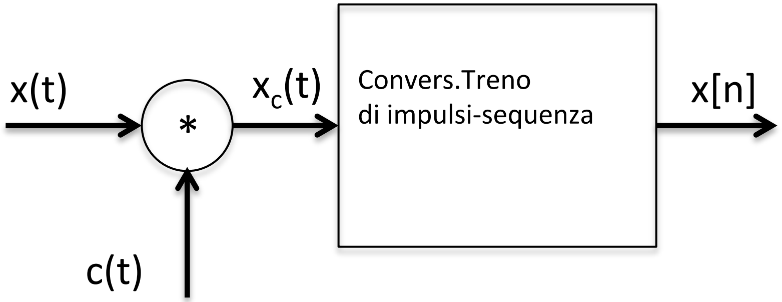


Dimostrazione: Trasformata Continua di Fourier di un Segnale Campionato e relazione con TCF del segnale originario

Vogliamo dimostrare la seguente relazione

$$X_c(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Riconsideriamo il seguente schema



$$x_c(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\,\delta(t - kT)$$

Dimostrazione: Trasformata Continua di Fourier di un Segnale Campionato e relazione con TCF del segnale originario

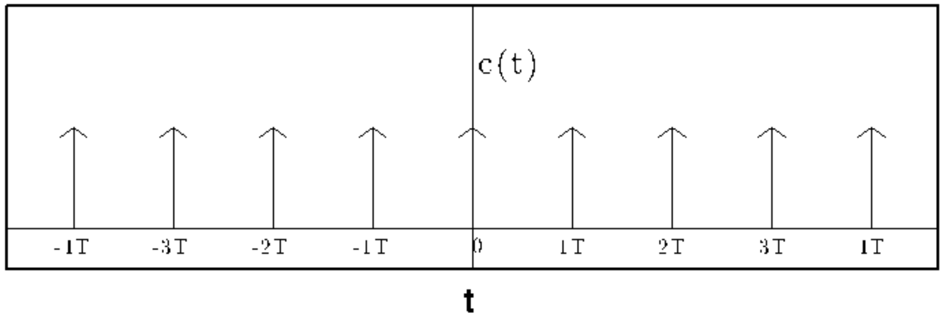
Vogliamo dimostrare la seguente relazione

$$x_c(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT) = x(t)c(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} X_c(f) = X(f)\otimes C(f)$$

Troviamo *C(f)*

$$c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$$

Ne facciamo prima lo Sviluppo in Serie, essendo un segnale periodico di periodo T



Dimostrazione: Trasformata Continua di Fourier di un Segnale Campionato e relazione con TCF del segnale originario

$$C_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} c(t)e^{-j2\pi nt/T}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)e^{-j2\pi nt/T}\,dt$$

Tra –T/2 e T/2 è presente una sola Delta, quella centrata nell'origine, quindi

$$C_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)e^{-j2\pi nt/T}\,dt = \frac{1}{T}e^{-j2\pi nt/T}\Big|_{t=0} = \frac{1}{T}$$

Da cui si ricava che

$$c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{j2\pi kt/T} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi kt/T}$$

I coefficienti di Fourier valgono sempre 1/T

Dimostrazione: Trasformata Continua di Fourier di un Segnale Campionato e relazione con TCF del segnale originario

Se dello sviluppo precedente facciamo la TCF, utilizzando la linearità e la proprietà di traslazione in frequenza

$$c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{j2\pi kt/T} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi kt/T} \overset{F}{\Leftrightarrow} C(f) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

La TCF di un pettine di Delta è ancora un pettine di Delta

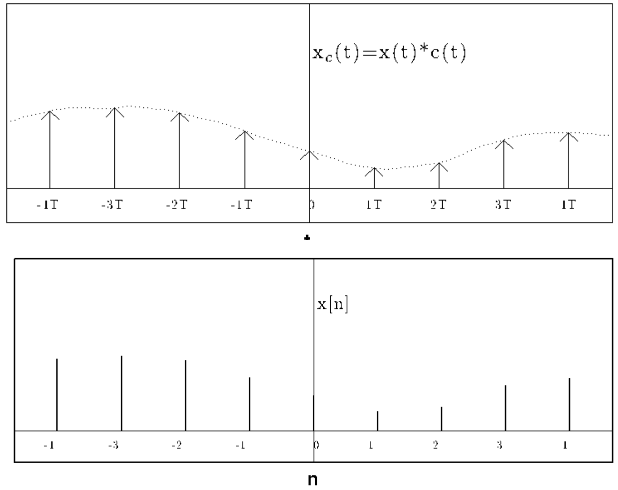
Se quindi facciamo la convoluzione con *X(f)*

$$X_c(f) = X(f) \otimes C(f) = X(f) \otimes \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f) \otimes \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha)\delta\left(f - \frac{k}{T} - \alpha\right)d\alpha = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Trasformata di Fourier di una Sequenza

Vista l'equivalenza informativa tra $x_c(t)$ e la $x[n]$



$$x_c(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT)\delta(t-nT)$$

Applicando la TCF, ricordando che

$\delta(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} 1$ e il teorema del ritardo $\mathrm{y}(t) = \mathrm{s}(t-t_0) \overset{F}{\Leftrightarrow} Y(f) = S(f)e^{-j2\pi t_0 f}$

$$X_c(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT)e^{-j2\pi nfT}$$

Se consideriamo i valori della sequenza dopo l'operazione di conversione in sequenza

$$X_c(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j2\pi nfT} \overset{\Delta}{=} \overline{X}(f)$$

Che è la definizione di Trasformata di Fourier di una Sequenza

Trasformata di Fourier di una Sequenza

$$\bar{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-\mathrm{j}2\pi \mathrm{n} fT}$$

La trasformata è una funzione della variabile continua f.
È possibile esprimere la TF della sequenza in funzione della frequenza normalizzata F=fT.
La TF risulta periodica in f di periodo f=1/T infatti:

$$\bar{X}\left(f+\frac{1}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-\mathrm{j}2\pi \mathrm{n}\left(f+\frac{1}{T}\right)T} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-\mathrm{j}2\pi \mathrm{n} fT} e^{-\mathrm{j}2\pi \mathrm{n}} = \bar{X}(f)$$

Trasformata di Fourier di una Sequenza

L' operazione inversa (antitrasformata) permette di ricavare x[n] a partire dalla trasformata di Fourier

$$x[n] = T \int_{-1/2T}^{+1/2T} \bar{X}(f) e^{j2\pi n fT} df$$

La relazione ricorda quella ottenuta per i segnali tempo continui, con la differenza che l' integrale è esteso ad un periodo della $\bar{X}(f)$.
Questo implica la sequenza può essere ricostruita utilizzando le frequenze comprese nell' intervallo finito [-1/2T:1/2T].
Questo fatto si può spiegare pensando alla periodicità della trasformata per cui le informazioni significative per la ricostruzione del segnale sono ottenibili analizzando un periodo della trasformata.

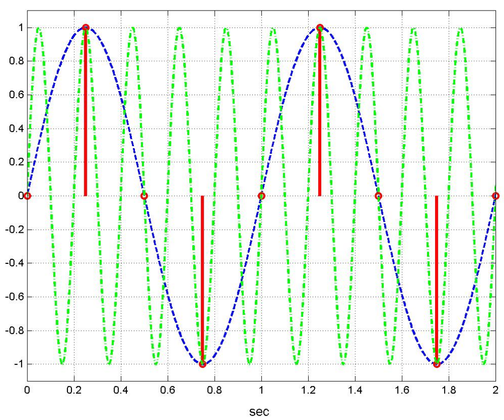
Se utilizziamo la frequenza normalizzata il periodo base si riduce all'intervallo di fT, [-1/2:1/2]

Trasformata di Fourier di una Sequenza

La periodicità di $\overline{X}(f)$ implica che due oscillazioni a frequenza f_1 e f_1+k/T, con f_1 generico, sono equivalenti

$$e^{j2\pi n\left(f_1+\frac{k}{T}\right)T} = e^{j2\pi n f_1 T} e^{j2\pi n k} = e^{j2\pi n f_1 T}$$

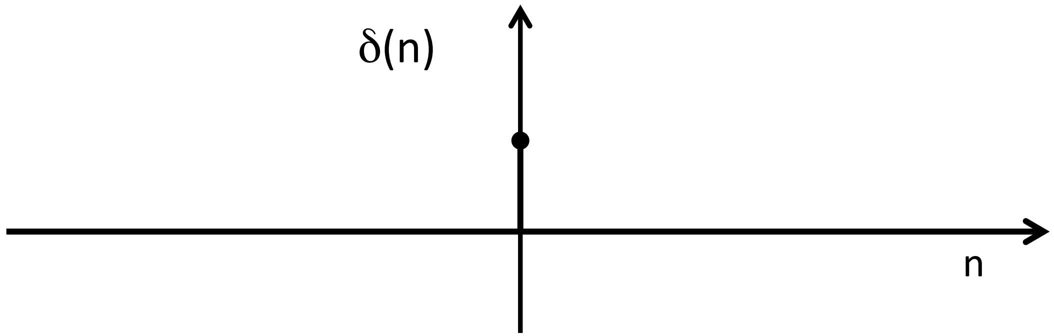
Come esempio scegliamo un tempo di campionamento pari a 4 Hz=1/T con T=0.25 sec. Con questo intervallo di campionamento l'intervallo base di frequenze necessarie e sufficienti per ricostruire la sequenza è
[-2 Hz: 2 Hz]. Consideriamo una oscillazione sinusoidale a frequenza f_1=1Hz. Allora, dato T, questa oscillazione è indistinguibile da tutte quelle a frequenza 1 Hz+k*4Hz, con k intero: quindi 5 Hz, 9Hz etc.



La figura a sinistra mostra come le due oscillazioni a 1 Hz (linea blu) e 5 Hz (linea verde) diano origine alla stessa sequenza se campionate con T=4Hz

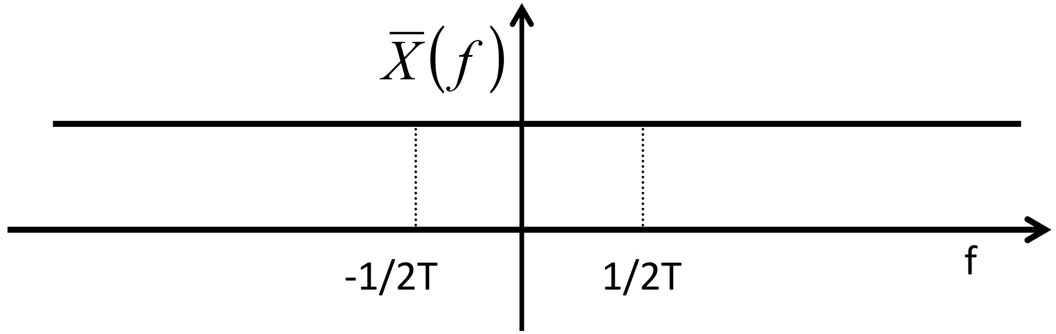
Trasformata di Fourier di una Sequenza

Esempi di TF di sequenze



$$\bar{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n f T} =$$

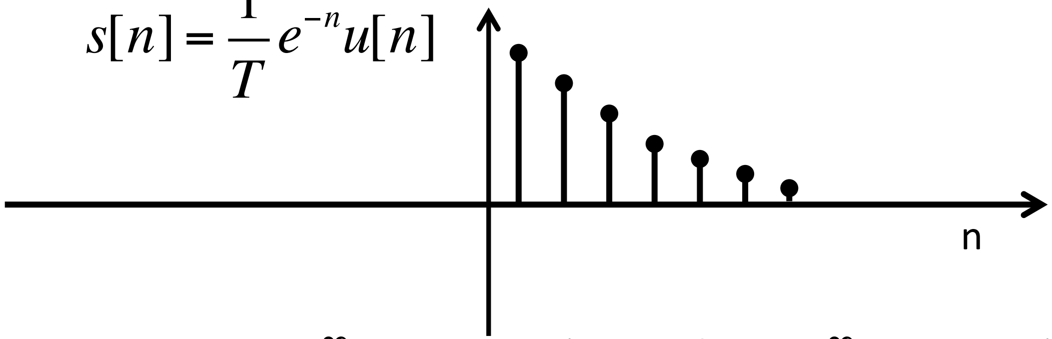
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j2\pi n f T} = 1$$



Trasformata di Fourier di una Sequenza

Esempi di TF di sequenze

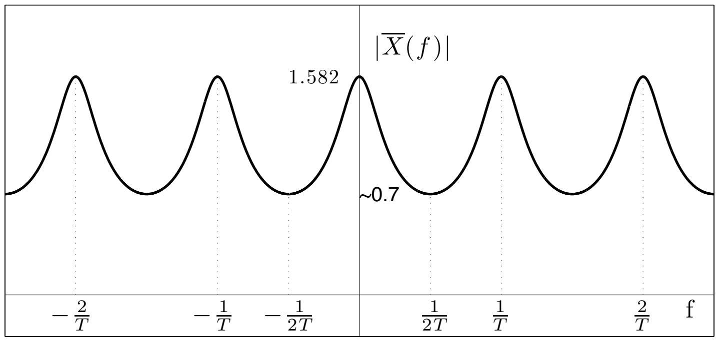
$$s[n] = \frac{1}{T} e^{-n} u[n]$$

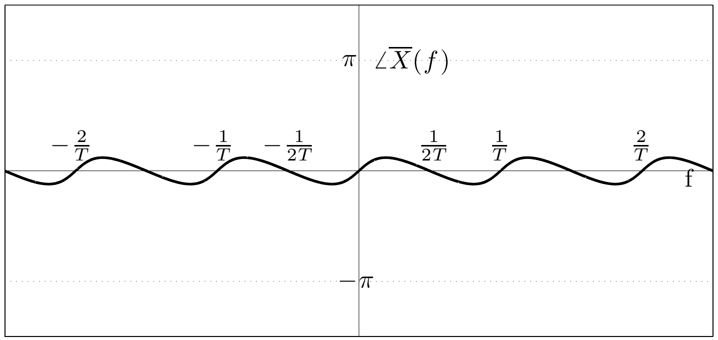


$$\bar{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n fT} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} e^{-j2\pi n fT} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(1+j2\pi fT)n} = \frac{1}{1-e^{-(1+j2\pi fT)}}$$

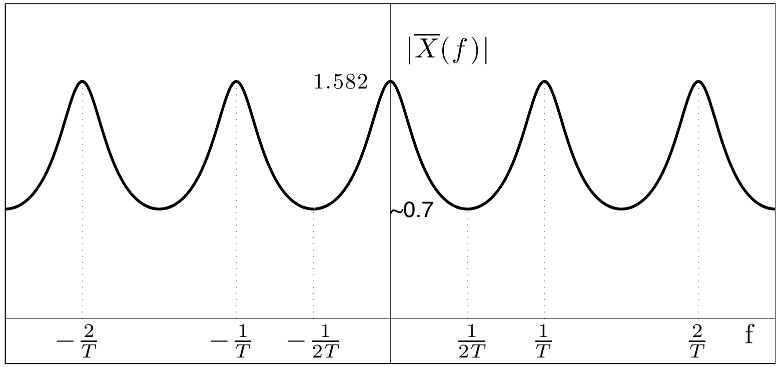
Visto che $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$

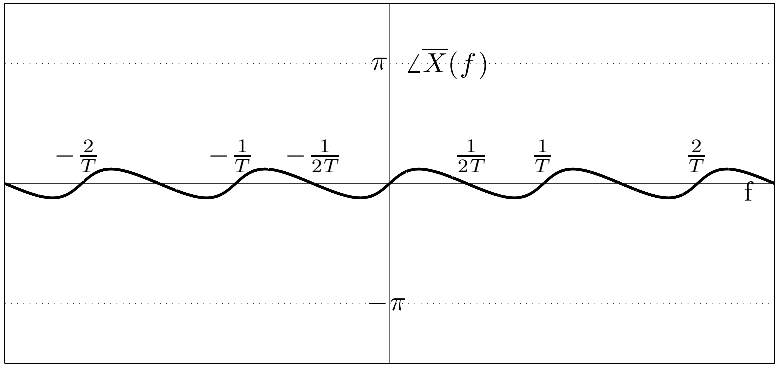




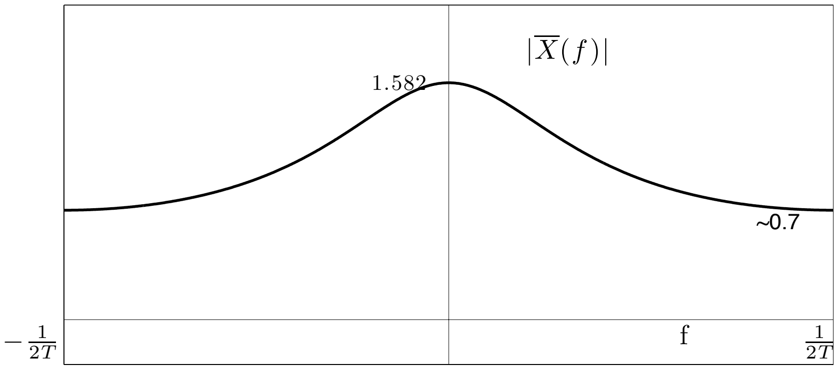
Trasformata di Fourier di una Sequenza

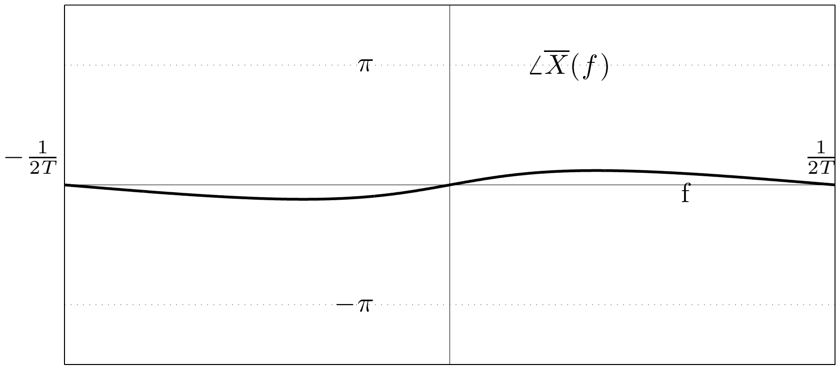
Da queste figure si vede la periodicità della TF





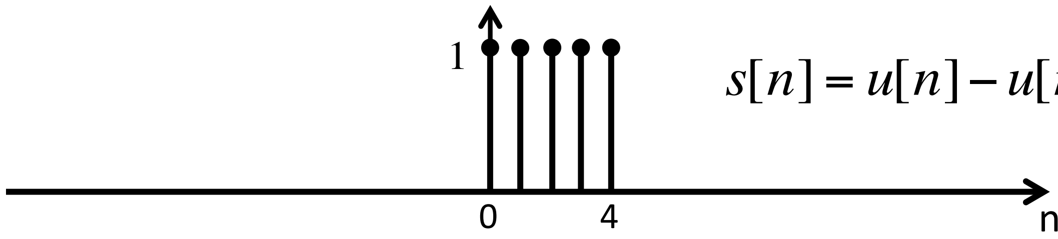
Quello che solitamente viene rappresentato è l'intervallo di frequenze in un periodo (quindi da –fc/2 a fc/2   dove fc=1/T è la frequenza di campionamento)





Trasformata di Fourier di una Sequenza

Esempi di TF di sequenze



$$s[n] = u[n] - u[n-5]$$

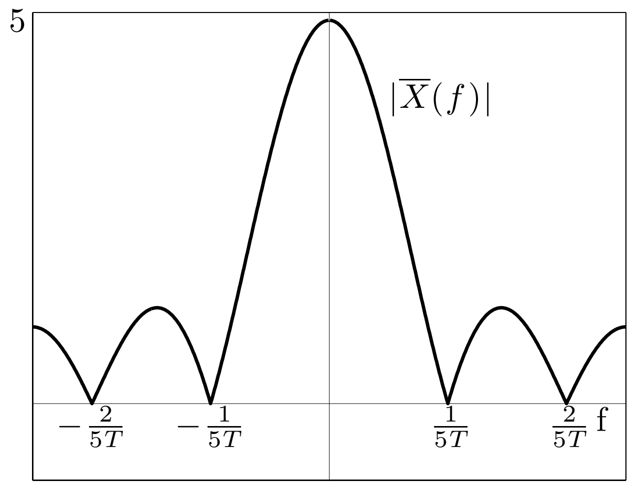
$$\bar{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi nfT} = \sum_{n=0}^{4} e^{-j2\pi nfT} =$$

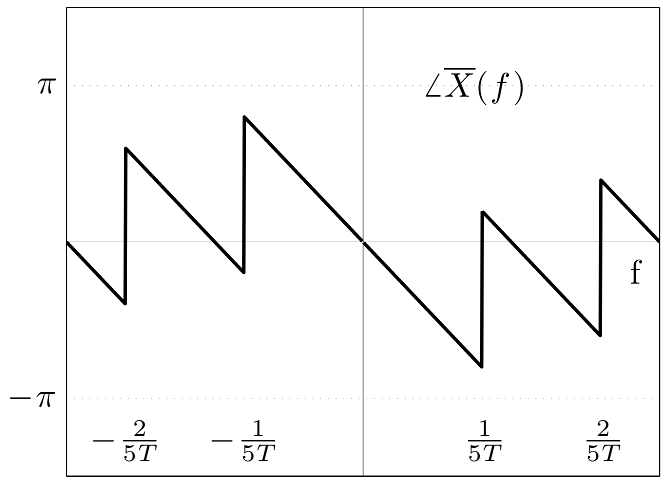
$$= \sum_{n=0}^{4} \left(e^{-j2\pi fT}\right)^n = \frac{1-e^{-j2\pi fT5}}{1-e^{-j2\pi fT}} = \frac{e^{-j\pi fT5}}{e^{-j\pi fT}} \frac{e^{j\pi fT5}-e^{-j\pi fT5}}{e^{j\pi fT}-e^{-j\pi fT}} =$$

Visto che

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}$$

$$= \frac{\sin(\pi fT5)}{\sin(\pi fT)} e^{-j4\pi fT}$$





Trasformata di Fourier di una Sequenza

Così come nel caso dei segnali a tempo continuo,
così nel caso di sequenze è possibile estendere la TF a sequenze periodiche introducendo la delta di Dirac

Vediamo il caso della sequenza costante

$$x[n]=1$$

$$\bar{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-\mathrm{j}2\pi nfT} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\mathrm{j}2\pi nfT}$$

Per trovare quanto vale questa sommatoria ci ricordiamo lo Sviluppo in Serie del pettine di Delta

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi kt/T}$$

Da cui trasformando ambo i membri (utilizzando le proprietà di traslazione nel tempo, a sinistra, e quella di modulazione, a destra)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi fnT} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

Trasformata di Fourier di una Sequenza

Così come nel caso dei segnali a tempo continuo,
così nel caso di sequenze è possibile estendere la TF a sequenze periodiche introducendo la delta di Dirac

Vediamo il caso della sequenza costante

$$x[n] = 1$$

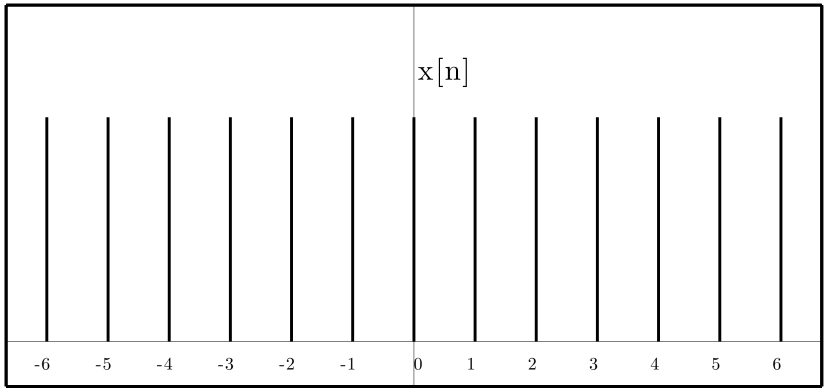
$$\bar{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j2\pi nfT} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi nfT} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

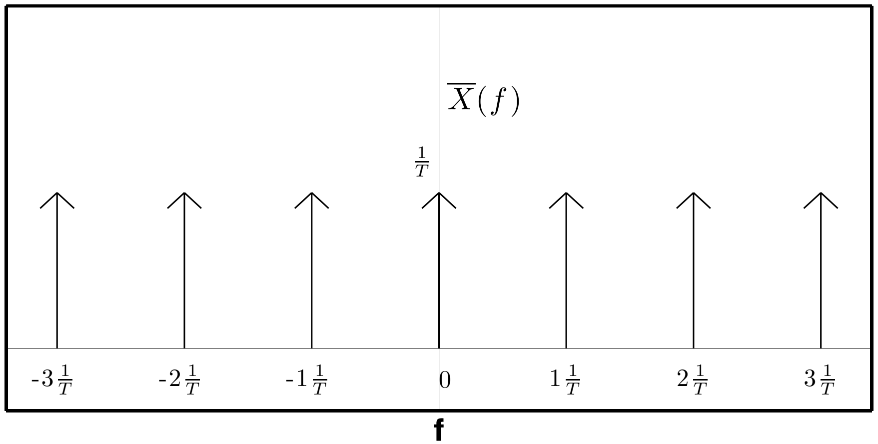
Quindi la trasformata di Fourier della sequenza costante è un pettine di delta
e nel periodo centrale è una delta in f=0. Questo risultato ci ricorda la TCF di una costante.

Visto che stiamo analizzando sequenze, la TF può essere vista come la periodicizzazione della TCF

Trasformata di Fourier di una Sequenza

$$x[n] = 1 \xleftrightarrow{F} \overline{X}(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$





Trasformata di Fourier di una Sequenza

Segnale Esponenziale complesso discreto

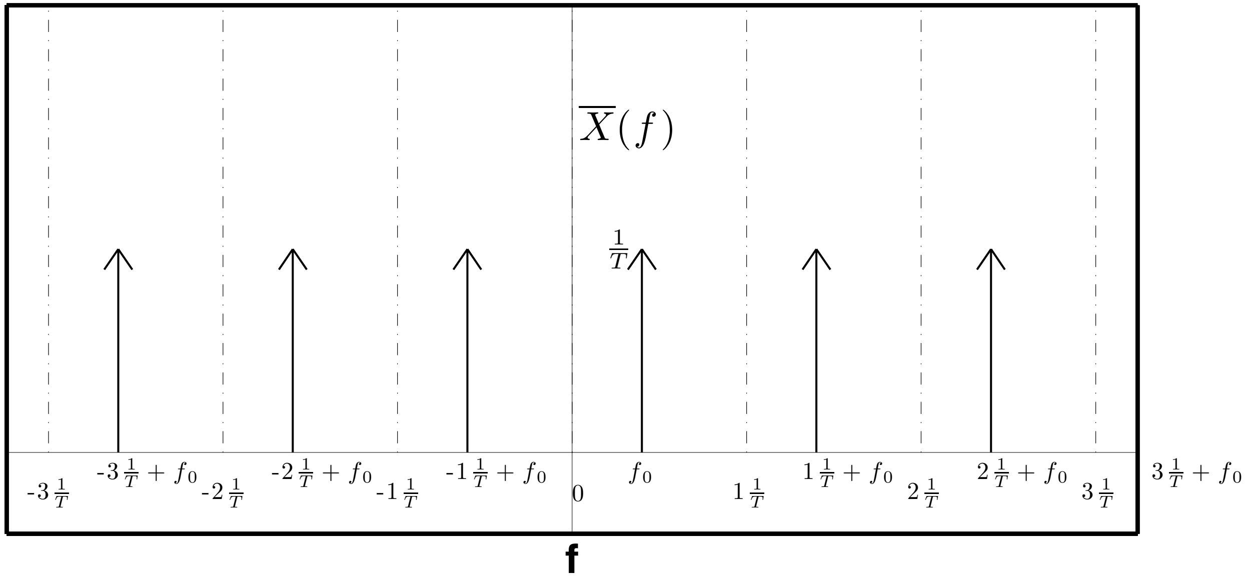
$$x[n] = e^{j2\pi f_0 nT}$$

$$\bar{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j2\pi nfT} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi nf_0T} e^{-j2\pi nfT} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi n(f-f_0)T}$$

Ripercorrendo l'approccio usato per la sequenza costante e sostituendo a $f \to f\text{-}f_0$

$$\bar{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi n(f-f_0)T} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f-f_0-\frac{k}{T}\right)$$



Trasformata di Fourier di una Sequenza

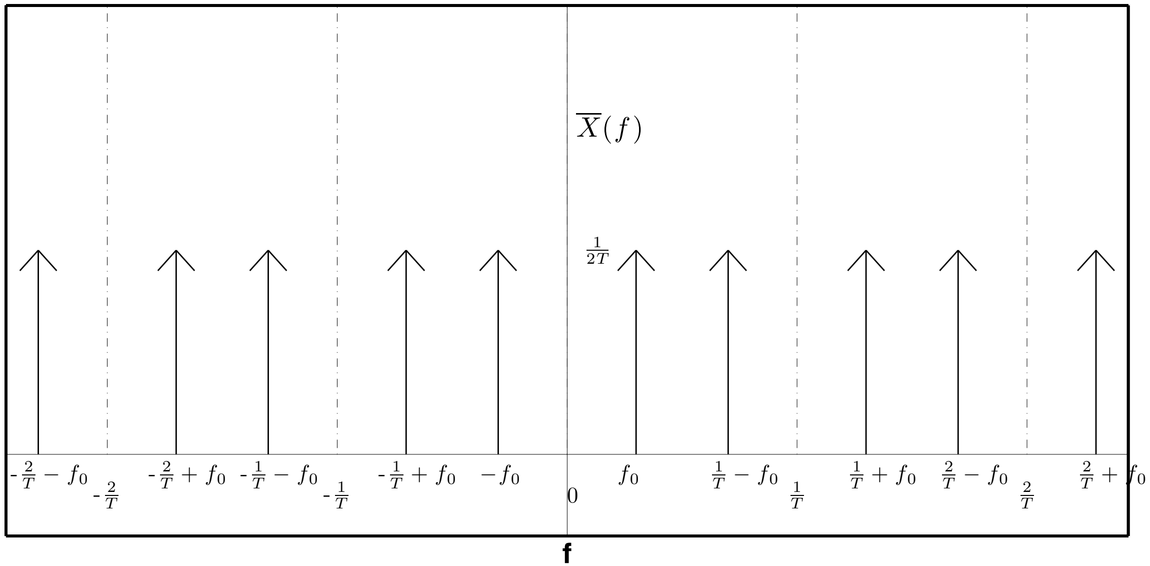
Segnale Cosinusoidale a Tempo Discreto

$$x[n] = \cos\left(2\pi f_0 nT\right)$$

$$\bar{X}\left(f\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j2\pi nfT} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e^{-j2\pi nf_0T}+e^{j2\pi nf_0T}}{2}\right)e^{-j2\pi nfT} =$$

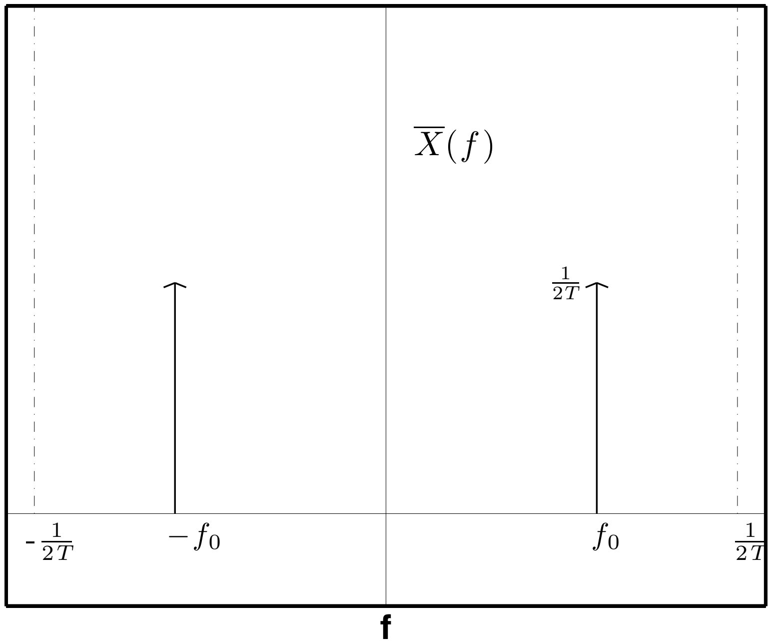
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-j2\pi n\left(f+f_0\right)T}+e^{-j2\pi n\left(f-f_0\right)T}}{2} = \frac{1}{2T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\delta\left(f+f_0-\frac{k}{T}\right)+\delta\left(f-f_0-\frac{k}{T}\right)\right]$$

Dove sono state applicate le formule di Eulero e sfruttato il risultato precedente l’approccio usato per la sequenza costante e sostituendo a *f* -> *f*-f_0



Trasformata di Fourier di una Sequenza

Nel periodo [$-f_c/2, f_c/2$]



Trasformata di Fourier di una Sequenza

Nella pratica si usano sequenze di durata finita: esse possono essere viste come l'osservazione, limitata temporalmente di una sequenza infinita x[n].
Questa operazione prende il nome di operazione di troncamento e matematicamente può essere descritta come il prodotto della sequenza x[n] per una finestra di osservazione w[n], nulla per gli n esterni all' intervallo di osservazione.

Per vedere come è sono legate le trasformate di x[n] e della sua versione troncata w[n] x[n] si deve ricorrere alla proprietà del prodotto nel tempo della TF, per cui

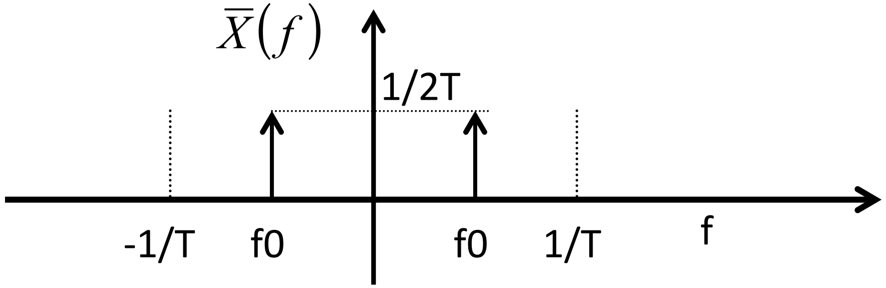
$$x[n] \overset{TF}{\Leftrightarrow} \overline{X}(f)$$

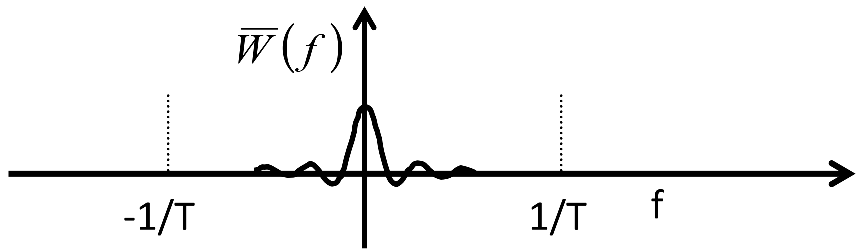
$$w[n] \overset{TF}{\Leftrightarrow} \overline{W}(f)$$

$$w[n]x[n] \overset{TF}{\Leftrightarrow} T\int_{-1/2T}^{+1/2T} \overline{W}(\alpha)\overline{X}(f-\alpha)\,d\alpha$$

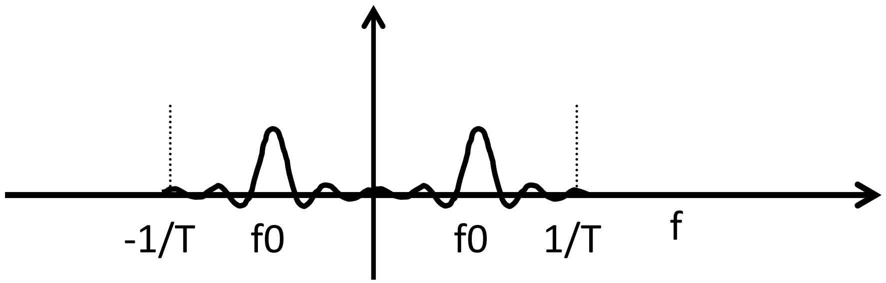
Trasformata di Fourier di una Sequenza

Consideriamo ad esempio la TF di $x[n] = \cos(2\pi f_o nT)$ Si trova che questa, nel periodo base, è data due delta di Dirac centrate in -f0 e f0.





Supponendo la finestra rettangolare, la sua TF risulterà simile ad una sinc(.),il risultato della convoluzione tra le delta e la TF della finestra è il seguente.



Visto che il contenuto frequenziale delle sinc diminuisce all'aumentare di T e si concentra attorno allo zero, la stima migliore della TF della sequenza di partenza si ottiene utilizzando una finestra di osservazione maggiore

Trasformata di Fourier di una Sequenza

In seguito considereremo la trasformata di Fourier di una sequenza finita.

Questa sarà ottenuta come Trasformata Discreta di Fourier (TDF) della sequenza ottenuta periodicizzando la sequenza originaria.

Questo ci permetterà di descriverne il contenuto frequenziale tramite un numero finito e discreto di coefficienti.

Riferimenti Bibliografici

Luigi Landini, Fondamenti di analisi di segnali biomedici, con esercitazioni in Matlab, Edizioni Plus – Pisa University Press

Lucio Verazzani, Teoria dei Segnali – Segnali Determinati, ETS Pisa

Marco Luise, Giorgio M. Vitetta, Teoria dei Segnali, McGraw Hill