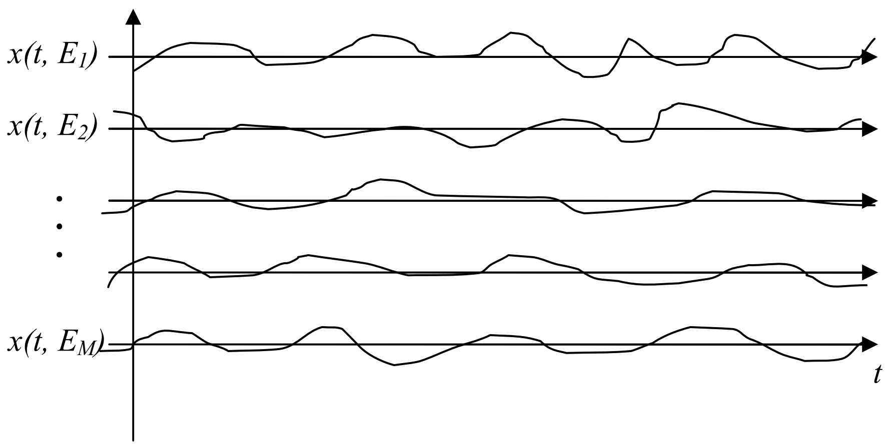
Note per esercitazioni sui processi

Consideriamo un processo aleatorio costituito dalle realizzazioni $x(t, E_t)$ dove con E_t si indica un dato evento che individua una funzione campione.
Supponiamo di acquisire ***M*** realizzazioni costituite da ***N*** campioni.



Possiamo memorizzare i campioni acquisiti in una matrice di dimensioni $\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{N}$.

$$\begin{bmatrix} x(t_1,E_1) & x(t_2,E_1) & x(t_3,E_1) & \cdots & x(t_N,E_1) \\ x(t_1,E_2) & x(t_2,E_2) & x(t_3,E_2) & \cdots & x(t_N,E_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x(t_1,E_M) & x(t_2,E_M) & x(t_3,E_M) & \cdots & x(t_N,E_M) \end{bmatrix}$$

La riga *h*-esima della matrice contiene la funzione campione relativa all'evento *h*.
La colonna *k*-esima contiene gli ***M*** campioni della variabile aleatoria $X(t_k)$.

Riprendiamo le definizioni di valore medio del processo e della funzione di autocorrelazione.

Valore medio: $\eta(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X(t)}(x)dx$

Funzione di autocorrelazione: $r(t_h, t_k) = E[X(t_h)X(t_k)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_h x_k f_{X(t_h)X(t_k)}(x_h, x_k)dx_h dx_k$

Possiamo stimare valore medio e funzione di autocorrelazione, a partire dai dati memorizzati nella matrice, in questo modo:

$$\eta(t) \cong \frac{1}{M}\sum_{l=1}^{M} x(t, E_l)$$

$$r(t_h, t_k) \cong \frac{1}{M}\sum_{l=1}^{M} x(t_h, E_l)x(t_k, E_l)$$

Si fa notare che la prima statistica esaminata non è altro che il valore medio sulle colonne della matrice.

La seconda statistica dipende dai valori t_k e t_k e si può vedere come la media del vettore ottenuto moltiplicando elemento per elemento due colonne della matrice per $t = t_k$ e $t = t_h$.

Nel caso di *processi stazionari in senso lato* (ssl), il valore medio non dipende dal tempo e la funzione di autocorrelazione dipende dalla distanza tra $\tau = t_k - t_h$.

Quindi $\eta(t) = \eta$ e $r(t_h, t_k) = r(\tau)$.

Nelle esercitazioni sui processi si chiede appunto di verificare se queste proprietà valgano per alcuni processi considerati.

Per verificare la prima basterà osservare l'andamento del valore medio in funzione del tempo (ovvero la media delle colonne).

Per verificare la seconda potremmo fissare un istante t_h e calcolare la funzione di autocorrelazione al variare di t_k. La stessa operazione andrebbe ripetuta per tutti gli altri valori di t_h. In questa esercitazione ci limiteremo, per brevità, ad osservare gli andamenti che si ottengono a partire da due soli valori di t_h scelti a piacere, t_{h1} e t_{h2}. Si otterranno così due andamenti.
Nel caso in cui gli andamenti ottenuti abbiano la stessa forma e la stessa dipendenza dalla variabile $\tau = t_k - t_{h1}$, nel primo caso, e $\tau = t_k - t_{h2}$, nel secondo, potremmo essere in presenza di un processo ssl.

Per calcolare $r(t_h, t_k)$, una volta fissato un istante t_h, si considerano i vettori colonna $x(t_h, E_t)$ e $x(t_k, E_t)$. Per selezionare di volta in volta le diverse colonne al variare di *k=1,…,N*, si può ricorrere ad un ciclo *for … end*. È possibile ottenere in un colpo solo tutti i valori di $r(t_h, t_k)$, con t_h fissato, sfruttando il calcolo matriciale: detto $\mathbf{v_1}$ il vettore colonna ottenuto fissando t_h, e **X** la matrice dei dati, il prodotto **v₁'*X** è un vettore riga che ha per elemento *k*-esimo il valore $\sum_{l=1}^{M} x(t_h, E_l)x(t_k, E_l)$. A questo punto basterà dividere ogni elemento per ***M***.

La prima esercitazione chiede di considerare un processo costituito da rumore gaussiano a valor medio nullo e varianza unitaria.
Le varie realizzazioni possono essere ottenute tramite la funzione matlab *normrnd(·)*, così come la matrice totale, fornendo in modo opportuno le dimensioni finali.

La seconda esercitazione chiede di considerare un processo le cui funzioni campione sono date da

$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$con $f_0 = 1/200 Hz$, passo di campionamento $\Delta t = 1$secondo, *A*=1 e φ variabile aleatoria distribuita in maniera uniforme tra 0 e 2π tra le varie realizzazioni: ogni riga della matrice sarà caratterizzata da un diverso valore di φ.

La matrice **X** in questo caso, sarà $A\cos(2\pi f_0 T + \Phi)$ dove T e Φ sono due matrici di dimensioni ***M***×***N*** così definite

$$T = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_N \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_N \\ \vdots & & & \vdots \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_N \end{bmatrix} \text{ e } \Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_1 & \cdots & \varphi_1 \\ \varphi_2 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \varphi_M & \varphi_M & \cdots & \varphi_M \end{bmatrix}$$

Queste possono essere ottenute replicando con il comando *repmat(·)* rispettivamente i vettori $t = [t_1 \quad t_2 \quad \cdots \quad t_N]$ e $\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_M \end{bmatrix}$.

La terza esercitazione richiede infine di considerare $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) + n(t)$ dove $n(t)$ è rumore gaussiano a valore medio nullo e varianza unitaria. In pratica la matrice **X** risulta essere la somma delle matrici delle precedenti esercitazioni.

Si chiede infine, per ogni esercitazione, di ripetere la stima delle statistiche per ***M***=100 e ***M***=1000. Si deve notare come passando da 100 a 1000 realizzazioni si ottengano stime migliori delle statistiche in esame: ad esempio si otterranno dei valori medi più vicino allo zero.