

Fondamenti di Ingegneria Sismica

Linda Giresini (co-docente)

linda.giresini@unipi.it

Università di Pisa

Corso di Laurea in Ing. Civile-Edile – Corso di Tecnica delle Costruzioni I

(titolare del corso Prof. Maurizio Froli)

SOMMARIO

Premessa	3
1 Risposta dinamica di una struttura	3
2 Gradi di libertà di una struttura	3
3 Il telaio semplice come sistema a singolo grado di libertà.....	4
3.1 Forza elastica	5
3.2 Forza smorzante	7
3.3 Forza esterna agente sul sistema	7
3.4 Equazione del moto di un sistema a 1 grado di libertà con forzante $p(t)$	7
3.5 Equazione del moto di un sistema a 1 grado di libertà con eccitazione sismica	8
4 Metodi di soluzione dell'equazione del moto	9
5 Vibrazioni libere di un sistema a 1 grado di libertà	10
5.1 Vibrazioni libere di sistema non smorzato.....	10
5.2 Vibrazioni libere di sistema smorzato.....	14
5.3 Energia nelle vibrazioni libere	16
5.4 Valutazione sperimentale del coefficiente di smorzamento	17
6 Vibrazioni forzate di un sistema a 1 grado di libertà	18
6.1 Vibrazioni forzate di sistema non smorzato.....	18
6.2 Vibrazioni forzate di sistema smorzato.....	19
7 Sistema ad 2 gradi di libertà.....	20
8 Analisi modale.....	22
8.1 Generalità.....	22
8.2 Determinazione dei modi di vibrare di un sistema	24
9 Rappresentazione dell'azione sismica.....	27
10 spettro di risposta elastico	28
10.1 Determinazione dello spettro di risposta elastico	28
10.2 Dallo spettro di risposta all'analisi sismica di un sistema a 1 gdl	30

11	Azione sismica secondo la norma italiana	31
11.1	Generalità.....	31
11.2	Concetto di pericolosità sismica	31
11.3	Parametri di sito	31
11.4	Stati limite, probabilità di superamento e periodi di ritorno dell'azione sismica ..	32
11.5	Categorie di sottosuolo e condizioni topografiche.....	32
11.6	Spettro di risposta elastico in accelerazione	33
11.7	Cenni sul fattore di struttura	33
12	Analisi sismiche lineari	34
12.1	Combinazione sismica	34
12.2	Criteri di modellazione dell'azione sismica.....	34
12.3	Analisi statica equivalente	35
12.4	Analisi dinamica lineare (a spettro di risposta).....	36

PREMESSA

Questa dispensa raccoglie gli appunti del modulo di Fondamenti di Ing. Sismica a supporto del corso di Tecnica delle Costruzioni I per allievi di Ingegneria Civile-Edile dell'Università di Pisa. Tali appunti rappresentano una introduzione all'argomento della dinamica applicata alle strutture, necessaria per acquisire i concetti di base della risposta dinamica e il calcolo dell'azione sismica agente sulle strutture. Si suppongono acquisite le nozioni fondamentali di analisi strutturale statica, quali il calcolo delle rigidità e la risoluzione di sistemi elastici semplici. Si proporranno comunque dei richiami alla Scienza delle Costruzioni per i concetti chiave, propedeutici alla comprensione degli argomenti più rilevanti. Non è scopo di questa dispensa analizzare nel dettaglio lo studio del sistema ad n gradi di libertà; non si faranno inoltre riferimenti all'analisi matriciale ma si cercherà di introdurre il tema in maniera intuitiva e pratica. Inoltre si ritiene non esaustiva la spiegazione delle analisi sismiche a spettro di risposta, per le quali si rimanda ai testi di bibliografia.

1 RISPOSTA DINAMICA DI UNA STRUTTURA

Le strutture possono essere soggette a carichi/azioni statici o dinamici. Rispetto ai carichi statici, dove il campo di forze e spostamenti sono ottenuti per risoluzione dei problemi di teoria dell'elasticità, in presenza di azioni dinamiche si aggiungono delle forze di inerzia dovute ai carichi variabili nel tempo. Alla variabile spostamento si aggiunge quella del tempo, per cui la risposta si ottiene tramite risoluzione di sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali tempo e spostamento. Per determinare la risposta dinamica di una struttura è necessario effettuare una analisi delle vibrazioni su di essa indotte per effetto di azioni esterne (es. il terremoto) o condizioni al contorno iniziali assegnati (spostamenti o velocità). Con vibrazione si intende una oscillazione meccanica attorno a un punto di equilibrio. Una vibrazione può essere armonica, periodica o casuale. Si distinguono vibrazioni libere, quando un sistema meccanico vibra e non è soggetto a forzante, e forzate, quando una forzante è applicata al sistema. Per lo studio del comportamento sotto azioni dinamiche occorre introdurre il concetto di gradi di libertà e metodi di discretizzazione di una struttura, che riguardano prevalentemente sistemi a masse concentrate: solo le masse sono soggette a forze inerziali, mentre il resto della struttura si considera privo di massa ma deformabile.

2 GRADI DI LIBERTÀ DI UNA STRUTTURA

Una generica struttura, ad esempio intelaiata, presenta in linea di principio un numero di gradi di libertà molto elevato. Con **gradi di libertà** (GdL o DoFs, Degrees Of Freedom) si intende il numero di spostamenti indipendenti necessari per definire compiutamente la posizione di tutte le masse relativamente alla loro posizione originale. Al fine di semplificare e rendere risolvibile il problema, sono stati proposti dei metodi di riduzione dei DOF, selezionando i più rilevanti in base al tipo di struttura e alle azioni su di essa agenti. A titolo di esempio, in una struttura intelaiata si individuano i nodi (intersezioni tra gli assi degli elementi strutturali), ciascuno dei quali ha, in partenza, 6 DOFs (nello spazio) o 3 DOFs (nel piano): spostamenti lungo e rotazioni attorno ai tre assi del piano cartesiano X-Y-Z. Tra i vari metodi proposti in letteratura assume notevole importanza il *metodo di condensazione statica*, che consiste nell'eliminazione delle rotazioni dei nodi. In questi appunti, per semplicità, si considerano soltanto strutture nel piano X (asse orizzontale) e Z (asse verticale), e pertanto i generici DOFs per ogni nodo e/o per ogni punto di controllo (cui è associato uno o più DOF) sono:

- traslazione lungo l'asse orizzontale X;

- traslazione lungo l'asse verticale Z;
- rotazione attorno all'asse perpendicolare al piano Y.

3 IL TELAIO SEMPLICE COME SISTEMA A SINGOLO GRADO DI LIBERTÀ

Si assuma la più semplice configurazione di struttura intelaiata: il telaio a una campata di altezza h e di luce L . Si supponga che il telaio sia privo di massa e che fornisca rigidità e smorzamento viscoso interno¹ (che dissipa energia vibrazionale) al sistema, nell'ipotesi di aste inestensibili. In linea di principio, il sistema avrebbe 3 DOF (traslazione lungo l'asse orizzontale e le due rotazioni ai nodi di estremità della trave), ma se la struttura venisse idealizzata come massa concentrata a livello della trave, questa verrebbe ad avere un solo DOF u , spostamento orizzontale relativo tra massa e base della struttura. Tale struttura può essere sollecitata da una forza $p(t)$ variabile nel tempo t oppure da uno spostamento del suolo u_g che rappresenta il terremoto (Figura 1).

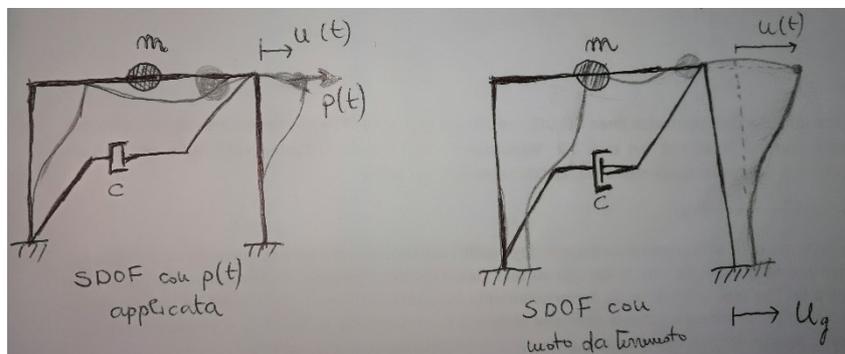


Figura 1 Sistema a un grado di libertà con forza applicate $p(t)$ o con spostamento del suolo u_g .

Per semplificare, dovendo riprodurre le tre principali grandezze del sistema, massa, rigidità e smorzamento, è possibile concepire il sistema idealizzato di riferimento, mostrato in Figura 2. Nel sistema vibrante si riconoscono gli elementi principali: massa, molla (priva di massa) con rigidità k , smorzatore (privo di massa) con costante di smorzamento c . L'unico grado di libertà del sistema (single degree of freedom, SDOF) è lo spostamento orizzontale relativo della massa del sistema u .

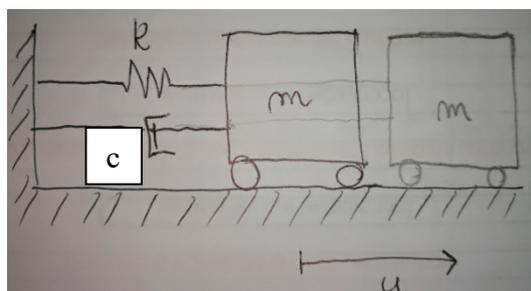


Figura 2 Sistema idealizzato del telaio in Figura 1 quale sistema SDOF

Le forze che agiscono sul sistema sono: la forza elastica, la forza smorzante, la forza agente sul sistema $p(t)$. Nel seguito esse vengono brevemente illustrate.

¹ I tipi di smorzamento sono: *viscoso esterno* (aria e acqua che lambiscono la struttura); *viscoso interno*, proporzionale alla velocità; *per attrito*, dovuto all'attrito nelle connessioni tra elementi strutturali (per piccoli spostamenti si ingloba nello s. viscoso esterno, per grandi in quello isteretico); *isteretico*, dovuto a cicli di carico-scarico in campo plastico.

3.1 Forza elastica

Si supponga che una forza statica f_s agisca sul telaio (Figura 3), generando una relazione non lineare con lo spostamento u (Figura 4).

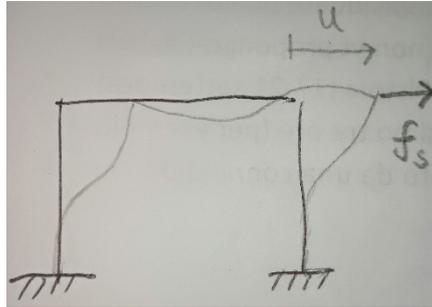


Figura 3 Telaio soggetto a forza statica f_s

Se si ipotizza di permanere nel regime di piccole deformazioni, la relazione tra f_s e u è lineare e la rigidezza k è data semplicemente da:

$$k = \frac{f_s}{u} \quad (1)$$

Nel seguito si accetta l'ipotesi di comportamento elastico lineare del sistema, ovvero di k costante in trazione e compressione e non dipendente dallo spostamento u .

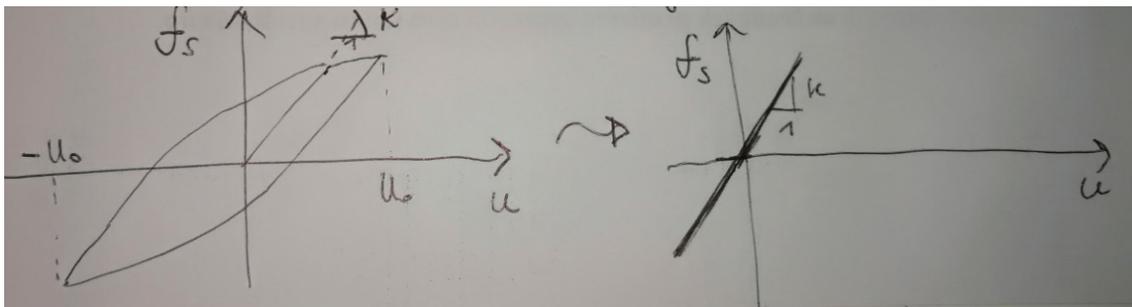


Figura 4 Relazione non lineare tra la forza statica f_s e lo spostamento u

A una forza statica f_s esterna corrisponde una **forza interna** di pari entità (principio di azione e reazione), che rappresenta la risposta elastica del sistema.

Richiamo di Scienza delle Costruzioni. Un telaio a campata semplice di luce L e altezza h incastrato a terra (Figura 5) ha rigidezze flessionali della trave EI_b e delle colonne - supposte uguali - EI_c (E modulo di elasticità normale del materiale del telaio e I_b/I_c momenti di inerzia del secondo ordine).

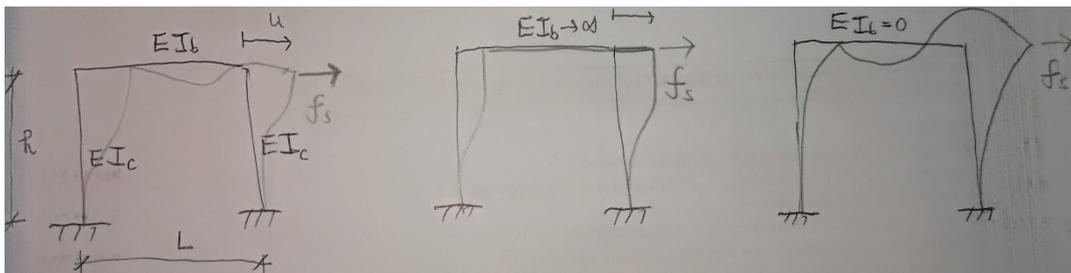


Figura 5 Telaio semplice con differenti valori di rigidezza flessionale della trave

A seconda del valore assunto dal rapporto I_b/I_c la rigidezza k varia. I due valori limite di interesse sono quelli per cui la rigidezza flessionale della trave tende a infinito (trave infinitamente rigida) oppure è nulla. Per trave infinitamente rigida, occorre sommare i contributi della rigidezza delle singole colonne, in questo caso due:

$$k = \frac{12EI_c}{h^3} + \frac{12EI_c}{h^3} = 24 \frac{EI_c}{h^3} \quad (2)$$

Per quanto riguarda, invece, il caso di trave priva di rigidezza flessionale, la rigidezza del sistema vale:

$$k = \frac{3EI_c}{h^3} + \frac{3EI_c}{h^3} = 6 \frac{EI_c}{h^3} \quad (3)$$

Casi intermedi dipendono dal rapporto tra le due rigidezze flessionali [1]-pag.10.

Alcune classiche costanti di rigidezza sono riportate in Figura 6 e in Figura 7.

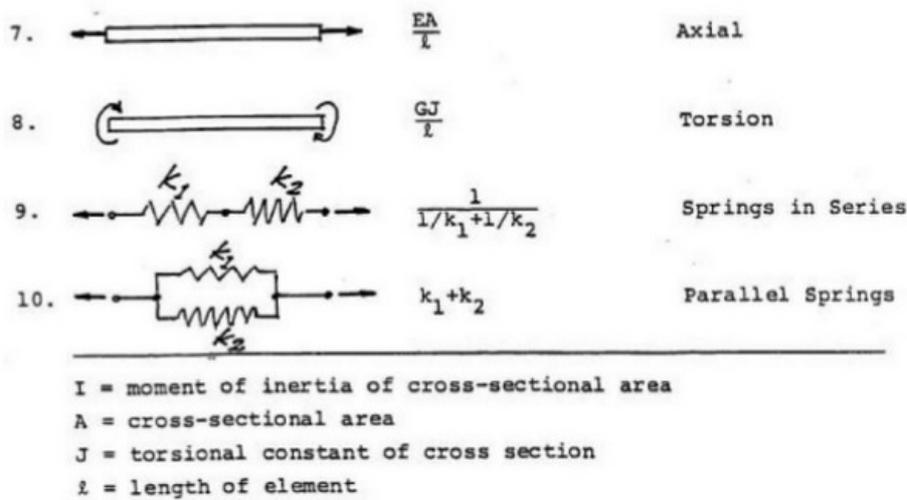


Figura 6 Costanti di rigidezza di elementi con rigidezza estensionale, torsionale, molle in serie e in parallelo

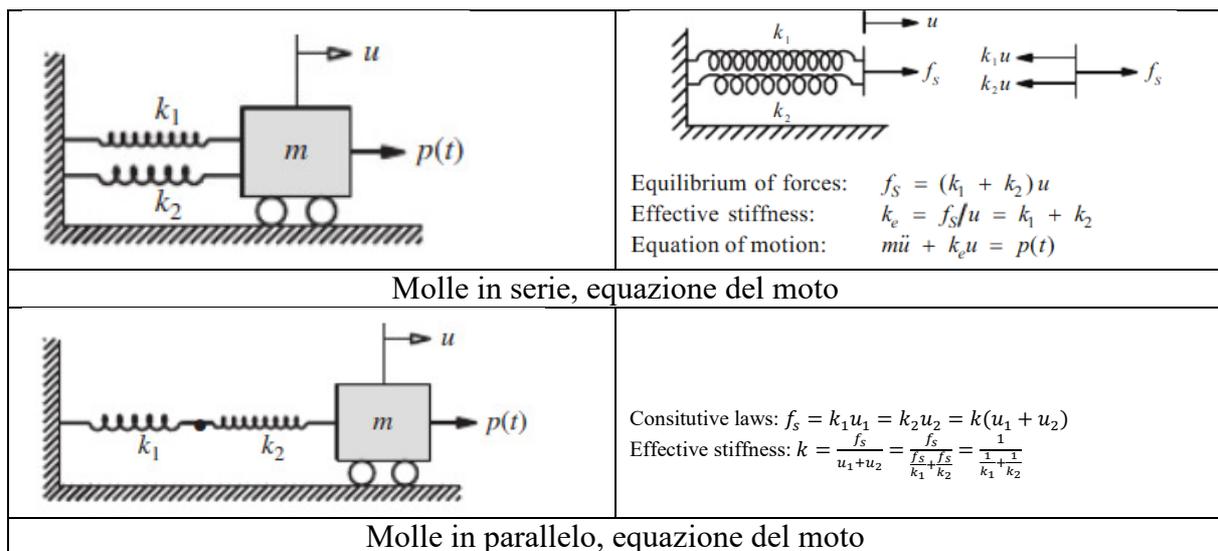


Figura 7 Molle in serie e parallelo, equazioni del moto

3.2 Forza smorzante

Nelle strutture reali contribuiscono alla dissipazione di energia l'effetto termico delle sollecitazioni ripetute nel materiale, l'attrito interno del materiale, l'apertura e chiusura di microfessure nel calcestruzzo, l'attrito tra elementi strutturali e non strutturali, ad esempio i pannelli di tamponamento in edifici in cemento armato. E' molto complesso, quindi, riuscire a rappresentare in maniera analiticamente compiuta lo smorzamento, pertanto tutti questi fenomeni si riassumono nel considerare uno *smorzamento viscoso equivalente* (Figura 1).

La forza generata nello smorzatore viscoso (*damping resisting force*) f_D è una forza funzione della velocità \dot{u} cui è soggetta la massa:

$$f_D = c\dot{u} \quad (4)$$

dove c è il coefficiente di smorzamento viscoso, responsabile della dissipazione dell'energia ovvero della riduzione dell'ampiezza delle vibrazioni. A differenza della rigidità k , il coefficiente di smorzamento non può essere calcolato per una struttura; ci si riferisce quindi a valori ottenuti da prove sperimentali su strutture reali, con vibrazioni libere o forzate. In linea di principio c varia con la deformazione, ma in ingegneria sismica solitamente la non linearità dello smorzamento è trascurata o considerata indirettamente tramite una scelta appropriata della massima deformazione attesa per la struttura.

3.3 Forza esterna agente sul sistema

La forzante del sistema può essere una forza applicata in un suo punto (come $p(t)$ in Figura 1 o, nel caso del terremoto, uno spostamento (o accelerazione) del suolo che induce uno stato di sollecitazione della struttura tramite azione indiretta. In quest'ultimo caso, l'equazione del moto acquista una veste particolare, spiegata nel paragrafo 3.5.

3.4 Equazione del moto di un sistema a 1 grado di libertà con forzante $p(t)$

L'equazione del moto che combina le forze illustrate nei paragrafi precedenti è, in base alla seconda legge di Newton (Figura 8):

$$f_I + f_D + f_s = p(t) \quad (5)$$

dove $f_I = m\ddot{u}$ è la forza di inerzia che si genera sulla massa m . L'equazione, espressa in funzione dell'unico parametro lagrangiano u , risulta:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (6)$$

Questa equazione potrebbe essere ottenuta anche tramite il principio di D'Alembert.

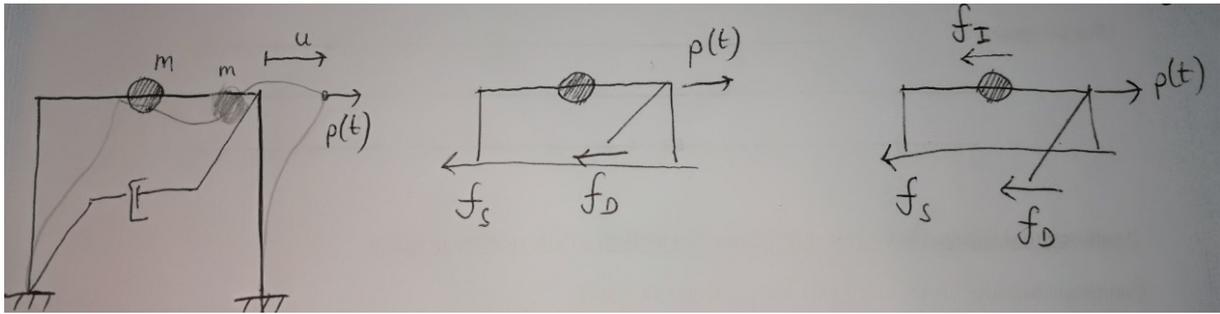


Figura 8 Telaio semplice per determinazione dell'equazione del moto

3.5 Equazione del moto di un sistema a 1 grado di libertà con eccitazione sismica

Quando il telaio viene sollecitato da un'eccitazione sismica, occorre comprendere come tale eccitazione possa esprimersi analiticamente. Il terremoto induce uno spostamento delle basi dei pilastri, pari a $u_g(t)$, variabile nel tempo. La massa m del sistema subisce uno spostamento totale o assoluto $u^t(t)$ dato dalla somma dello spostamento relativo u e dello spostamento indotto dal terremoto $u_g(t)$:

$$u^t(t) = u_g(t) + u(t) \tag{7}$$

Similmente a quanto scritto nel caso di una forzante $p(t)$, è possibile applicare la seconda legge di Newton al sistema. La forza di inerzia f_I cui è soggetta la massa sarà stavolta proporzionale all'accelerazione totale (derivata seconda dello spostamento assoluto o totale):

$$m\ddot{u}^t + c\dot{u} + ku = 0 \tag{8}$$

e ovviamente il termine $p(t)=0$ perché non si hanno forzanti esterne. Sostituendo ad essa l'Eq. (7), si ottiene:

$$m(\ddot{u}_g + \ddot{u}) + c\dot{u} + ku = 0 \tag{9}$$

ossia:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g \tag{10}$$

A questo punto, mantenendo la filosofia dell'approccio con la forzante, è possibile vedere l'azione sismica come forza sismica effettiva $p_{eff}(t) = -m\ddot{u}_g(t)$. La forza sismica è dunque proporzionale alla massa (maggiore la massa di un edificio, maggiore la forza sismica cui è soggetta. Nell'ambito delle costruzioni, maggiore è il peso di un edificio, maggiore sarà l'entità di azione sismica che lo impegna. La leggerezza consente quindi di ridurre gli accorgimenti atti a limitare gli effetti della forzante sismica. Inoltre, la forza sismica effettiva (nel seguito denominata semplicemente forza sismica) è proporzionale all'accelerazione del suolo, che è un parametro indipendente dalla struttura.

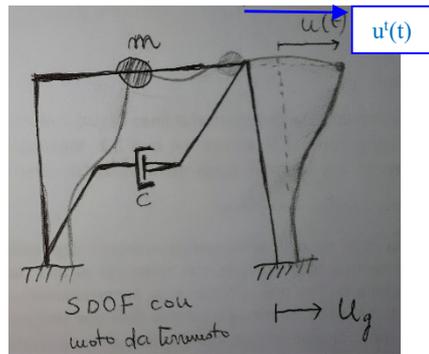


Figura 9 Telaio con eccitazione sismica

4 METODI DI SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DEL MOTO

L'equazione differenziale (del secondo ordine) del moto per sistemi ad un grado di libertà con coefficienti costanti può essere risolta con il metodo classico: la soluzione dell'equazione (6) si può esprimere come somma di una soluzione generale $u_{gen}(t)$ e di una soluzione particolare $u_p(t)$. La soluzione generale dell'equazione differenziale omogenea per un sistema non smorzato ($c=0$) ovvero:

$$m\ddot{u} + ku = 0. \quad (11)$$

risulta:

$$u_{gen} = A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t \quad (12)$$

con $\omega_n = \sqrt{k/m}$ detta *frequenza circolare naturale* del sistema. Questa espressione equivale alla:

$$u_{gen} = A' \sin(\omega_n t + \varphi) \quad (13)$$

In cui:

$$A' = \sqrt{A^2 + B^2}; \varphi = \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \quad (14)$$

Una espressione alternativa per esprimere tale soluzione è quella che fa uso degli esponenziali complessi:

$$u_{gen} = Ce^{i\omega_n t} + De^{-i\omega_n t} \quad (15)$$

dove, rispetto alla Eq. (12), si ha:

$$C = \frac{B - iA}{2}; D = \frac{B + iA}{2} \quad (16)$$

Per il teorema di esistenza e unicità della soluzione delle equazioni differenziali, le soluzioni espresse dalle Eq. (12), (13) e (15) sono totalmente identiche e diverse solo nella forma. Per quanto riguarda la soluzione particolare dell'equazione differenziale, essa dipende dalla tipologia di eccitazione. E' possibile risolvere il problema in forma chiusa solo in alcuni casi, ad esempio se la forzante è armonica, a gradino, etc.

Richiamo: numeri complessi e fasori. Un generico numero complesso si esprime nella forma cartesiana:

$$n = b + ia \quad (17)$$

dove b è la parte reale, a immaginaria e $i^2 = -1$. La forma polare (o trigonometrica) di un numero complesso è data da:

$$n = \rho e^{i\omega} \quad (18)$$

in cui il modulo è $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ e l'argomento $\omega = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$. Nel piano di Gauß (o di Nyquist) l'esponentiale complesso si può esprimere nella forma (detta anche di Eulero):

$$e^{i\omega} = \cos \omega + i \sin \omega \quad (19)$$

Da questa relazione risultano anche valide:

$$\cos \omega = \frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2}; \sin \omega = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i} \quad (20)$$

Nell'analisi delle vibrazioni si introduce il concetto di vettore rotante o fasore in un piano in cui l'asse orizzontale è quello della parte reale e quello verticale della parte immaginaria. L'angolo formato dal fasore con l'asse orizzontale è pari a ωt , e vale:

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t \quad (21)$$

5 VIBRAZIONI LIBERE DI UN SISTEMA A 1 GRADO DI LIBERTÀ

Una vibrazione si dice libera quando una struttura è disturbata dalla posizione di equilibrio statico e quindi soggetta a vibrare in assenza di forzante esterna. Lo studio delle vibrazioni libere è utilissimo per calcolare, in maniera analitica o sperimentale su prove su edifici reali, le caratteristiche dinamiche della struttura: periodo, frequenza naturale e smorzamento.

5.1 Vibrazioni libere di sistema non smorzato

Si immagini la struttura a telaio a una campata di Figura 1, idealizzata come sistema a un grado di libertà privo di smorzamento e di forzante esterna $p(t)$. La soluzione viene data risolvendo, come descritto nel paragrafo 4, l'equazione del moto:

$$m\ddot{u} + ku = 0. \quad (22)$$

La soluzione dell'equazione differenziale risulta:

$$u(t) = A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t \quad (23)$$

Le due costanti A e B si determinano imponendo le condizioni al contorno iniziali, che si assumono:

$$u(t = 0) = u_0; \dot{u}(t = 0) = v_0 \quad (24)$$

Queste sostanzialmente consistono nell'imporre al sistema uno spostamento iniziale u_0 e una velocità iniziale v_0 . La soluzione con metodo standard è pertanto:

$$u(t) = u_0 \cos \omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (25)$$

con $\omega_n = \sqrt{k/m}$.

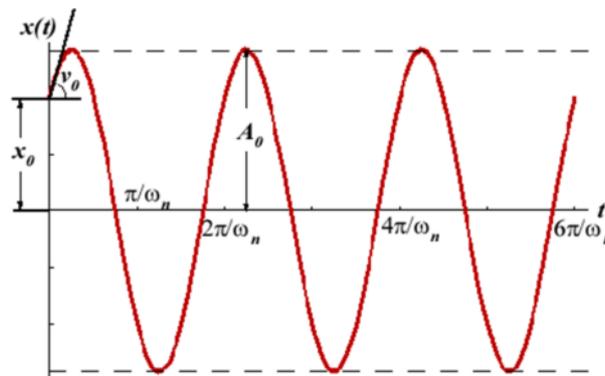


Figura 10 Vibrazione libera del sistema a un grado di libertà non smorzato ($x=u$)

È importante notare che la risposta del sistema, graficamente riportata in Figura 10, è un moto oscillatorio attorno alla sua posizione di equilibrio statico ($u=x=0$) o posizione indeformata. Questo moto, detto armonico semplice, si ripete ogni:

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (26)$$

secondi, dove T_n rappresenta il periodo proprio di vibrare del telaio. La *frequenza ciclica naturale* del sistema è data da:

$$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad (27)$$

ed è espressa in hertz (Hz) o cicli per secondo. In 1 secondo il sistema esegue $\frac{1}{T_n}$ cicli. Si specifica che entrambe ω_n e f_n sono frequenze naturali del sistema (perché sono indipendenti dall'eccitazione esterna), ma la prima è detta *circolare*, la seconda *ciclica*. Nel grafico sono chiaramente visibili lo spostamento iniziale $u_0 = x_0$ e la velocità iniziale v_0 , che rappresenta la pendenza della curva all'istante $t=0$. L'ampiezza del moto è data da:

$$A_0 = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2} \quad (28)$$

E' interessante commentare la risposta del telaio (supposto shear-type, ovvero con incastri alla base e trave infinitamente rigida) la cui massa viene sollecitata con uno spostamento iniziale diverso da zero e una velocità iniziale nulla (Figura 11). Inizialmente si imprime uno spostamento orizzontale alla massa pari a $+u_0$ (punto a). La velocità iniziale è nulla, come si

evinces dalla pendenza della curva in $t=0$. Procedendo nel tempo il telaio è portato a tornare alla sua posizione di riposo $u=0$, cui corrisponde la velocità massima (negativa) nel punto b, rappresentata dalla massima pendenza della curva. Il sistema, privo di smorzamento, continua a oscillare nella direzione delle X negative, per arrivare al punto c, che ha una velocità nulla e spostamento massimo pari a $-u_0$. Successivamente la velocità inizia a crescere con segno positivo per arrivare a d, punto in cui la massa torna alla posizione di riposo ($u=0$) e successivamente il ciclo si conclude con il punto e, in corrispondenza del quale il telaio torna alla posizione di partenza con spostamento pari a $+u_0$. Il tempo necessario per finire il ciclo, da a ad e, è proprio pari al periodo di vibrazione T_n . L'assenza di smorzamento si esplica nel fatto che non c'è decadimento dell'ampiezza del moto, che in valore assoluto massimo risulta sempre pari a u_0 . Come avviene il fenomeno dal punto di vista energetico? Si può pensare al principio di conservazione dell'energia in assenza di smorzatore:

- quando lo spostamento è massimo o minimo l'energia potenziale E_p (funzione dello spostamento) è massima (in valore assoluto), mentre l'energia cinetica (funzione della velocità) è nulla. Ciò vale per i punti a, c, e, g, etc del grafico di Figura 11.
- Quando, invece, lo spostamento è nullo, l'energia potenziale E_p è nulla mentre l'energia cinetica è massima. Questo stato è rappresentato dai punti b, d, f, etc. di figura.

La somma delle due energie rimane costante. Nei punti dei tratti intermedi vi sarà un'aliquota di energia cinetica e di energia potenziale, facilmente computabile dato che in ogni istante t sono note le coppie (\dot{u}, u) del sistema. Per una dimostrazione analitica di quanto illustrato si veda il paragrafo 5.4.

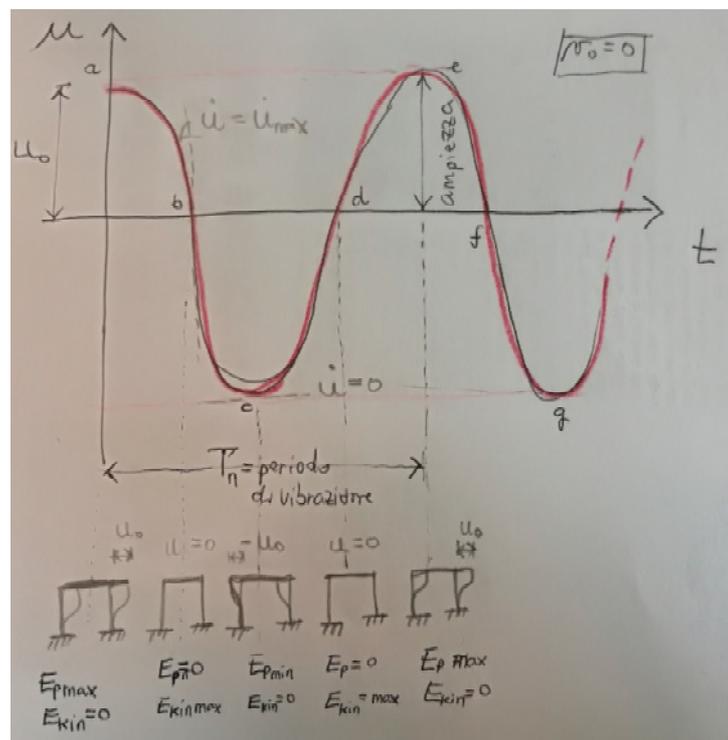


Figura 11 Vibrazioni libere del telaio non smorzato con velocità iniziale nulla.

Le proprietà racchiuse nei parametri ω_n , f_n e T_n sono essenziali per lo studio della risposta dinamica delle strutture. Questi parametri di vibrazione naturale **dipendono solo da massa e rigidezza** della struttura. Tra due telai a parità di rigidezza k , quello con massa maggiore avrà un periodo di vibrazione maggiore e una frequenza naturale minore; viceversa, a parità di massa, il telaio con rigidezza maggiore avrà periodo di vibrazione minore e frequenza naturale

maggiore. Ad esempio, per i due telai di Figura 5, la rigidezza del telaio shear-type k_{s-t} è 4 volte maggiore rispetto a quella del telaio con trave infinitamente deformabile k_{t-i} , il suo periodo di vibrare è la metà:

$$T_{n,s-t} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_{s-t}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{4k_{t-i}}} = \frac{1}{2} 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_{t-i}}} = \frac{1}{2} T_{n,t-i} \quad (29)$$

Ciò significa che la frequenza del telaio shear-type è doppia rispetto a quella del telaio con trave infinitamente deformabile, ossia che il primo compie due cicli quando il secondo ha finito di compiere il primo ciclo.

L'espressione del periodo di vibrazione naturale $T_n = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ assume una forma analoga rispetto a quella di un pendolo con massa all'estremità m soggetto alla sua sola forza peso mg (Figura 12). Se si scrive l'equilibrio in direzione tangenziale si ottiene l'equazione del moto per il pendolo:

$$-mg \sin \theta = m \frac{d}{dt}(\dot{\theta}l) \quad (30)$$

Dove l è la lunghezza del filo di sospensione del pendolo e $\dot{\theta}$ la velocità angolare. L'equazione per piccole oscillazioni (il seno si confonde con l'angolo) assume pertanto la forma:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (31)$$

Che ha la stessa forma dell'equazione del moto del sistema soggetto a vibrazioni libere non smorzato. Anch'essa si risolve col polinomio caratteristico per cui gli autovalori rappresentano la pulsazione propria (o frequenza circolare) del sistema:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (32)$$

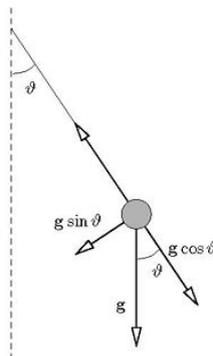


Figura 12 Pendolo semplice oscillante per effetto della sua forza peso

Se si ha una massa m sospesa tramite una molla di costante k e soggetta unicamente al suo peso proprio $P=mg$, la rigidezza k può essere espressa da:

$$k = \frac{P}{\delta_{st}} \quad (33)$$

È dunque immediato ottenere:

$$T_n = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}} \quad (34)$$

Che, se δ_{st} è espresso in cm e g in cm/s^2 , si semplifica nella [2]:

$$T_n = 0.2 \sqrt{\delta_{st}} \quad (35)$$

Per quanto riguarda il telaio semplice, se si assume che lo spostamento statico δ_{st} sia impresso da una forza orizzontale che eguaglia la forza peso del telaio stesso, il periodo di vibrazione naturale è nuovamente:

$$T_n = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}} \quad (36)$$

5.2 Esercizio su un oscillatore equivalente SDOF

Sia dato un serbatoio riempito di 10 mc di acqua a quota h variabile, sostenuto da un elemento in acciaio di massa m trascurabile rispetto alla massa M del serbatoio. Il profilo in acciaio ha sezione circolare con diametro $D=4$ cm e si suppone incastrato al suolo.

Determinare periodo proprio e frequenza ciclica naturale del sistema per i seguenti valori di h :

1. $h_1 = 0.50$ m;
2. $h_2 = 1.0$ m;
3. $h_3 = 1.5$ m.

Soluzione. Le masse in gioco sono:

- $m = \frac{\pi D^2}{4} \cdot h_3 \cdot \frac{\rho}{9.81} = \frac{\pi 0.04^2}{4} \cdot 1.5 \cdot \frac{7850}{9.81} = 1.51 \frac{\text{daNs}^2}{\text{m}}$ (valido per il caso 3.)
- $M = V \cdot \rho_w = 10 \cdot \frac{1000}{9.81} = 1019.37 \frac{\text{daNs}^2}{\text{m}}$

Data la predominanza di M su m , è possibile rappresentare la struttura come oscillatore equivalente a un grado di libertà (o SDOF, single degree of freedom) trascurando il contributo di m . L'elemento di collegamento in acciaio tra serbatoio e terreno ha una rigidezza ottenibile secondo l'espressione:

$$k = \frac{3EJ}{h^3}$$

dove $J = \frac{\pi D^4}{64}$ per sezione circolare piena. Considerando che $E = 2.1 \cdot \frac{10^6 \text{ daN}}{\text{cm}^2}$, i tre valori di rigidezza risultano:

1. $k_1 = 63302$ daN/m;
2. $k_2 = 7913$ daN/m;
3. $k_3 = 2345$ daN/m.

Da questi è immediato ottenere le caratteristiche dinamiche richieste per il sistema SDOF:

1. $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{M}} = 7.88 \frac{rad}{s}; T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 0.80 s; f_1 = \frac{1}{T_1} = 1.26 Hz;$
2. $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{M}} = 2.79 \frac{rad}{s}; T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 2.25 s; f_2 = \frac{1}{T_2} = 0.44 Hz;$
3. $\omega_3 = \sqrt{\frac{k_3}{M}} = 1.52 \frac{rad}{s}; T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = 4.14 s; f_3 = \frac{1}{T_3} = 0.24 Hz.$

Si osserva che, aumentando la lunghezza e quindi la flessibilità dell'elemento in acciaio, la pulsazione propria e la frequenza ciclica diminuiscono, mentre aumenta il periodo di vibrazione del sistema.

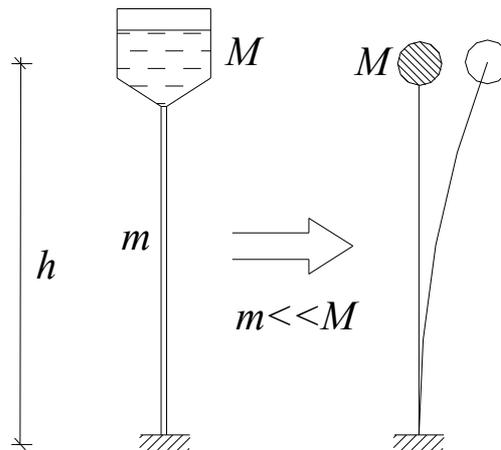


Figura 13 Modellazione di serbatoio tramite oscillatore semplice SDOF.

5.3 Vibrazioni libere di sistema smorzato

Supponendo che il telaio dissipi energia, ovvero sia dotato di uno smorzatore viscoso di costante c come in Figura 1, l'equazione del moto risulta:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \tag{37}$$

La forzante è nulla perché si è in regime di vibrazioni libere. Le radici del polinomio caratteristico associate alla equazione differenziale sono:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \mp \frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \tag{38}$$

Si distinguono tre casi a seconda del segno del discriminante. Nei casi di ingegneria civile (edifici, ponti, dighe, etc) i sistemi cui si fa riferimento sono quelli cosiddetti **sottosmorzati**, dove lo smorzamento c è minore di quello critico $c_{cr} = 2\sqrt{mk}$, ovvero i casi in cui:

$$\frac{c}{c_{cr}} = \zeta < 1 \quad (39)$$

ζ è detto coefficiente di smorzamento (o *damping ratio*). La soluzione dell'equazione differenziale è espressa da:

$$u(t) = C e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_D t - \varphi) \quad (40)$$

dove $\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$, pulsazione smorzata del sistema è:

$$C = \sqrt{u_0^2 + \frac{(v_0 + \zeta \omega_n u_0)^2}{\omega_D^2}}; \varphi = \arctan\left(\frac{v_0 + \zeta \omega_n u_0}{\omega_D u_0}\right) \quad (41)$$

dove la frequenza smorzata è pari a:

$$\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (42)$$

Si osserva che per le strutture reali $0.02 < \zeta < 0.2$ e quindi il valore minimo che assume la pulsazione smorzata del sistema ω_D è circa $0.98 \omega_n$, ovvero molto vicina alla pulsazione naturale dello stesso. Si ha pertanto un sia pure limitato incremento del periodo di vibrazione nei sistemi sottosmorzati rispetto a quelli non smorzati. Il moto conseguente è oscillatorio (a differenza del sistema con smorzamento critico e sovrasmorzato, caratterizzati da un decadimento del moto) con ampiezze decrescenti in maniera esponenziale (Figura 14). Maggiore è il valore del coefficiente di smorzamento, più rapida sarà l'attenuazione del moto. Se lo smorzamento fosse nullo, si ricadrebbe nel caso delle vibrazioni libere con equazione uguale alla Eq. (25).

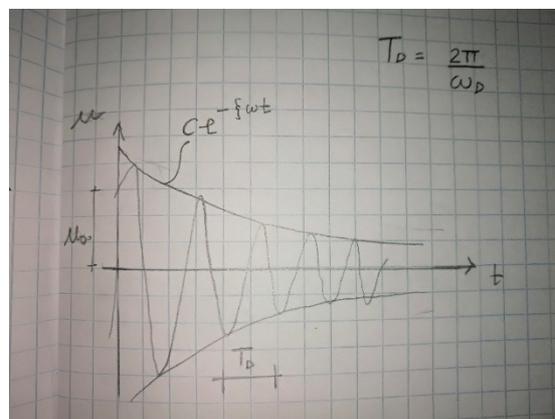


Figura 14 Vibrazione libera del sistema a un grado di libertà smorzato

5.4 Energia nelle vibrazioni libere

La quantità di energia di input spesa per applicare uno spostamento e una velocità iniziale a una struttura a 1 grado di libertà è dato da:

$$E_I = E_{kin}(t) + E_{pot}(t) \quad (43)$$

Ovvero è la somma di energia cinetica $E_{kin}(t)$ e di energia potenziale $E_{pot}(t)$. In particolare, queste sono espresse da:

$$E_{kin}(t) = \frac{1}{2} m[\dot{u}(t)]^2 \quad (44)$$

e:

$$E_{pot}(t) = \frac{1}{2} k[u(t)]^2 \quad (45)$$

dove l'energia cinetica è quella che coinvolge la massa della struttura m , mentre l'energia potenziale dipende dalla energia di deformazione immagazzinata nella molla di costante k .

5.5 Valutazione sperimentale del coefficiente di smorzamento

Se si hanno a disposizione delle prove sperimentali in cui sia possibile vedere il decadimento del moto come in Figura 14, è semplice valutare numericamente il coefficiente di smorzamento. Sia u_i un generico picco e u_{i+1} quello immediatamente successivo. Si vede facilmente che vale la:

$$\frac{u_i}{u_{i+1}} = \frac{u_t}{u_{t+T_D}} = \exp(\zeta \omega_n t) = \exp\left(\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \quad (46)$$

Da questa particolare espressione, si evince l'utilità di considerare, in luogo del quoziente diretto tra due picchi successivi, il suo logaritmo. Viene pertanto definita la grandezza delta quale decremento logaritmico, che risulta dunque pari a:

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (47)$$

Per strutture reali $\sqrt{1-\zeta^2} \cong 1$ e pertanto:

$$\delta \cong 2\pi\zeta \quad (48)$$

Se il decadimento del moto è lento, è più conveniente valutare il rapporto tra il primo picco e il j -esimo successivo:

$$\frac{u_1}{u_{j+1}} = \frac{u_1}{u_2} \cdot \frac{u_2}{u_3} \cdot \dots \cdot \frac{u_j}{u_{j+1}} = e^{j\delta} \quad (49)$$

E pertanto:

$$\delta = \frac{1}{j} \ln \frac{u_1}{u_{j+1}} \cong 2\pi\zeta \quad (50)$$

Dal secondo e terzo membro della suddetta equazione si ha pertanto che un decremento del 50% dell'ampiezza di moto ($\ln \frac{u_1}{u_{j+1}} = \ln 2 = 0.69$) si avrebbe in:

$$j \cong \frac{\ln 2}{2\pi\zeta} = \frac{0.11}{\zeta} \quad (51)$$

Ad esempio, se una struttura ha un $\zeta = 0.02 = 2\%$, allora impiega circa 5-6 cicli ad avere un decadimento dell'oscillazione del 50%. Questa semplice espressione è molto utile anche se, in

presenza di dati sperimentali, il numero di cicli j è noto. Ad esempio, se il decadimento del 50% avviene in 10 cicli, il corrispondente coefficiente di smorzamento sarà semplicemente $\zeta = \frac{0.11}{10} = 0.01$.

6 VIBRAZIONI FORZATE DI UN SISTEMA A 1 GRADO DI LIBERTÀ

Una vibrazione si dice forzata quando una struttura è disturbata dalla posizione di equilibrio statico e quindi soggetta a vibrare in presenza di forzante esterna. Lo studio delle vibrazioni libere è utilissimo per calcolare, in maniera analitica o sperimentale su prove su edifici reali, le caratteristiche dinamiche della struttura: periodo, frequenza naturale e smorzamento.

6.1 Vibrazioni forzate di sistema non smorzato

Un sistema non smorzato a un grado di libertà con rigidità k sia soggetto a forzante armonica di frequenza ω del tipo $p(t) = p_0 \sin(\omega t)$. La soluzione dell'equazione del moto, i cui passaggi si omettono per brevità, è rappresentata in Figura 15: essa è data dalla sovrapposizione di una fase transitoria e di una stabile. La risposta transitoria ha forma analoga alla soluzione in caso di vibrazioni libere, mentre quella stabile è da imputarsi alla forzante armonica.

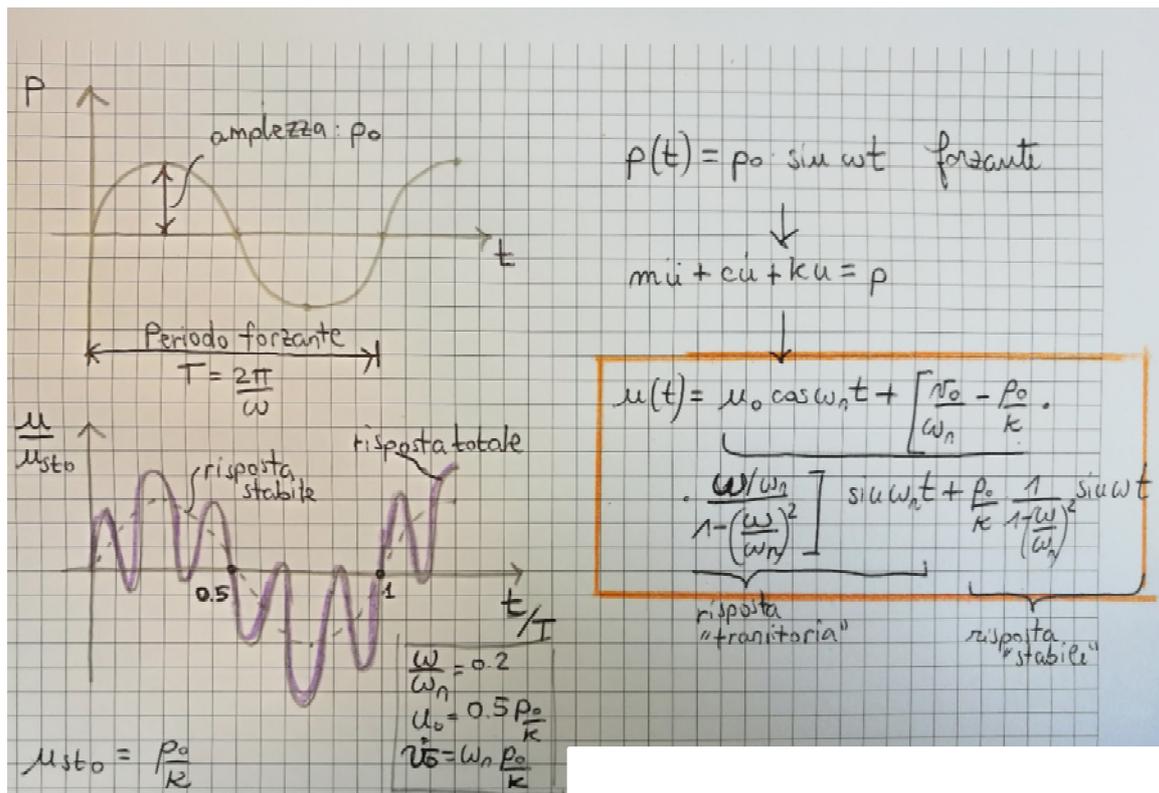


Figura 15 Vibrazioni forzate di sistema a 1 grado di libertà non smorzato soggetto a forzante armonica con $\omega \neq \omega_n$

Se la frequenza della forzante armonica eguaglia quella naturale del sistema, ovvero $\omega = \omega_n$, si ha una condizione fondamentale in dinamica delle strutture, detta **condizione di risonanza**: l'ampiezza del moto cresce indefinitamente come mostrato in Figura 16. Naturalmente, dal punto di vista ingegneristico, il moto di una struttura non può crescere indefinitamente, innanzitutto perché è sempre presente nelle strutture reali uno smorzamento, ma soprattutto

perché intervengono dei fenomeni di instabilità o raggiungimento di resistenza che comportano il collasso della struttura.

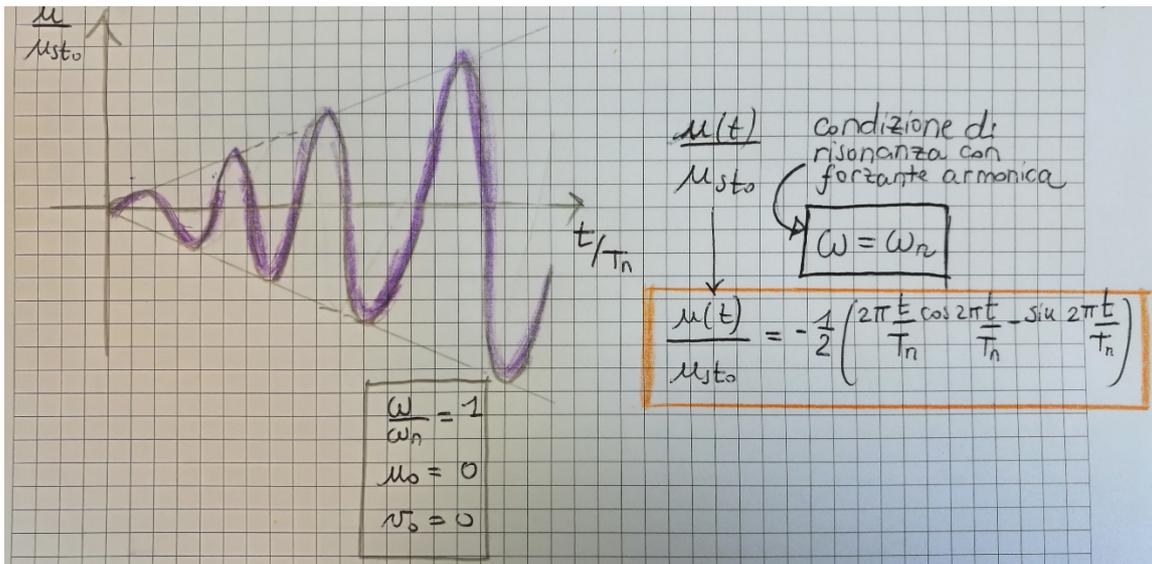


Figura 16 Vibrazioni forzate di sistema a 1 grado di libertà non smorzato soggetto a forzante armonica con $\omega = \omega_n$, condizione di risonanza

6.2 Vibrazioni forzate di sistema smorzato

Un sistema smorzato a un grado di libertà con rigidità k sia soggetto a forzante armonica di frequenza ω del tipo $p(t) = p_0 \sin(\omega t)$. In questo caso si ha una riduzione dell'ampiezza del moto per effetto dello smorzamento e la risposta transitoria, dopo un certo intervallo di tempo, si esaurisce tendendo a quella "stabile". Tale riduzione è tanto maggiore quanto maggiore è il coefficiente di smorzamento. In Figura 17° è rappresentato il rapporto tra spostamento $u(t)$ e lo spostamento statico $u_{st,0}$. In Figura 17b si evidenzia la risposta qualitativa in condizione di risonanza, che tende asintoticamente al valore $\frac{1}{2\zeta}$.

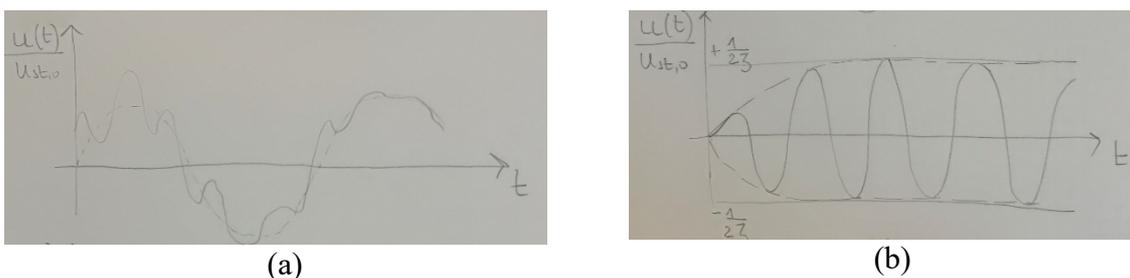


Figura 17 Vibrazioni forzate di sistema a 1 grado di libertà smorzato soggetto a forzante armonica con $\omega \neq \omega_n$ (a) e $\omega = \omega_n$, condizione di risonanza (b)

Risposta normalizzata. È interessante ai fini pratici plottare il fattore R_d quale rapporto tra lo spostamento iniziale imposto u_0 e lo spostamento statico iniziale $u_{st0} = p_0/k$. Si osserva che lo smorzamento riduce sensibilmente l'ampiezza normalizzata di oscillazione. In particolare, se:

1. $\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$, ovvero $T \gg T_n$ (la forza varia lentamente), R_d è solo leggermente maggiore di 1 e dipende principalmente dallo smorzamento. Quindi si può scrivere che:

$$u_0 \cong u_{st,0} = \frac{p_0}{k} \quad (52)$$

2. $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$ (condizione di risonanza), R_d è fortemente dipendente dallo smorzamento e può essere molto maggiore di 1 (picco per $\zeta = 0.1$ in Figura pari a 5). In particolare:

$$u_0 = \frac{u_{st,0}}{2\zeta} = \frac{p_0}{c\omega_n} \quad (53)$$

3. $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$, ovvero $T \ll T_n$ (la forza varia rapidamente), R_d tende a zero e non dipende dallo smorzamento. Si può scrivere, da considerazioni analitiche, che:

$$u_0 \cong u_{st,0} \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2 = \frac{p_0}{m\omega^2} \quad (54)$$

Quindi la risposta è controllata dalla massa del sistema.

Si considerino gli strumenti a riferimento inerziale (sismici) in grado di misurare i moti del suolo. La loro base è fissata al punto che si vuole misurare, e si muove quindi solidamente al terreno. La massa interna è collegata con molle e smorzatori (fluidi o correnti elettriche) all'interno della carcassa. Tra questi strumenti, il vibrometro serve per misurare gli spostamenti: per far sì quindi che lo spostamento che si misura sia molto vicino a quello del suolo, $u_0 \cong u_{st,0} = \frac{p_0}{k}$, occorre che $\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$, ossia avere una massa piccola o una rigidità elevata.

Per avere invece maggiore isolamento occorre una rigidità piccola o una massa grande (ovvero ω_n elevato a parità di ω).

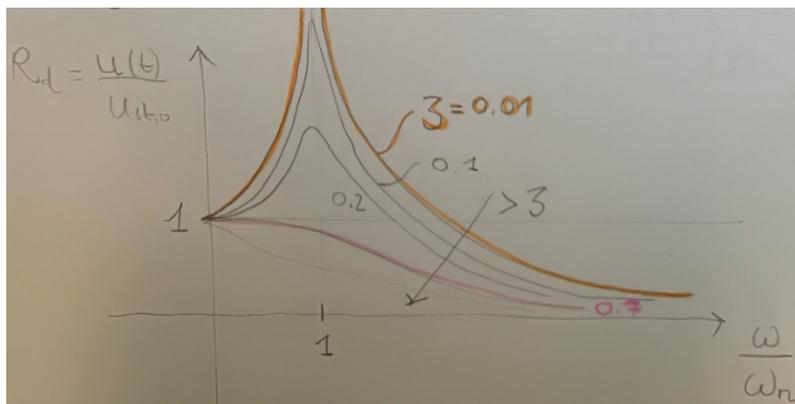


Figura 18 Fattore R_d per diversi coefficienti di smorzamento

7 SISTEMA AD 2 GRADI DI LIBERTÀ

Per analizzare il comportamento dinamico di strutture reali occorre estendere i concetti introdotti per i sistemi a 1 dof a sistemi a n dof (detti anche multi degrees of freedom MDOF). In questa sezione si affronta il più semplice sistema MDOF, quello a due gradi di libertà. Si sceglie di analizzare un telaio *shear-type* (traversi infinitamente rigidi) con due masse concentrate nei due impalcati. La rigidità è fornita dai pilastri; si supponga inoltre che la

struttura sia dotata di smorzamento viscoso equivalente che può essere rappresentato dal coefficiente di smorzamento c_1 per il primo impalcato e c_2 per il secondo. Le due masse siano inoltre soggette a forzanti $p_1(t)$ e $p_2(t)$ generiche.

L'equazione del moto assume una forma analoga all'Eq. (6), valida per sistema a 1 dof. In questo caso, tuttavia, i gradi di libertà sono due (le traslazioni orizzontali delle due masse componenti il sistema), e quindi altrettante saranno le equazioni descrittive il moto. Per ottenerle, si può ricorrere all'uso della seconda legge di Newton o al principio di D'Alembert.

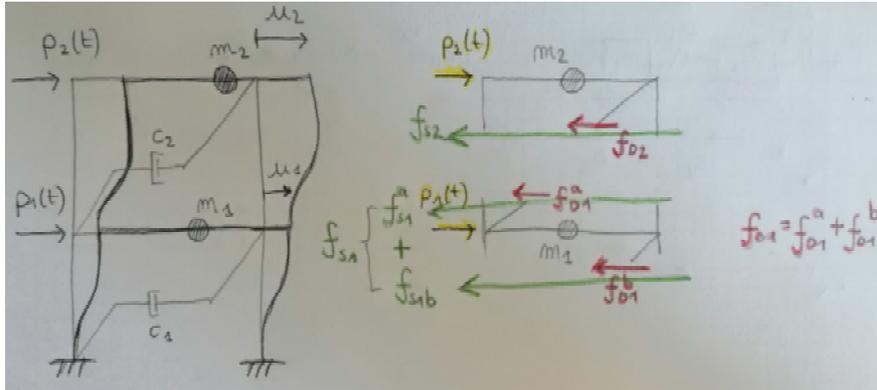


Figura 19 Telaio shear-type a due gradi di libertà

Con il primo approccio, si scrive l'equilibrio separatamente per ciascuna delle due masse, tenendo conto delle singole forze cui esse sono soggette. Con i simboli di Figura 19 si ha dunque:

$$\begin{cases} f_{I,1} + f_{D,1} + f_{s,1} = p_1(t) \\ f_{I,2} + f_{D,2} + f_{s,2} = p_2(t) \end{cases} \quad (55)$$

dove $f_{I,j}$ è la forza di inerzia sulla massa j . Esplicitando le forze coinvolte nell'equilibrio (e aiutandosi con il sistema classico a 2 dof di Figura 20) il sistema di equazioni si trasforma in:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}_1 + c_1 \dot{u}_1 - c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + k_1 u_1 - k_2(u_2 - u_1) - p_1(t) = 0 \\ m_2 \ddot{u}_2 + c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + k_2(u_2 - u_1) - p_2(t) = 0 \end{cases} \quad (56)$$

E infine:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}_1 + (c_1 + c_2)\dot{u}_1 - c_2 \dot{u}_2 + (k_1 + k_2)u_1 - k_2 u_2 = p_1(t) \\ m_2 \ddot{u}_2 + c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + k_2(u_2 - u_1) = p_2(t) \end{cases} \quad (57)$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} \quad (58)$$

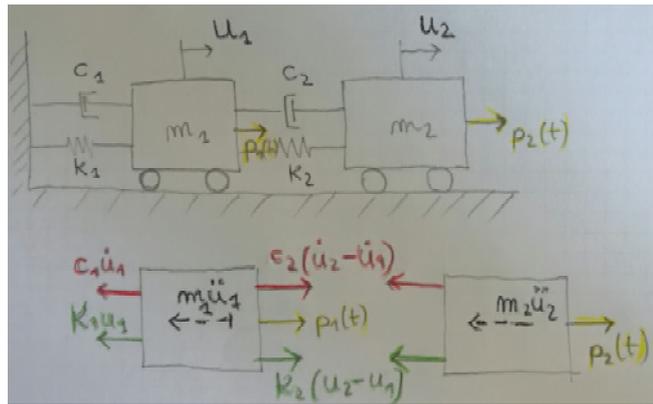


Figura 20 Sistema a due gradi di libertà con forze agenti sulle due masse

Le equazioni del moto sono pertanto accoppiate tramite matrici di massa, rigidezza e smorzamento. In generale, un sistema a n dof richiede n equazioni differenziali del moto.

8 ANALISI MODALE

8.1 Generalità

Si consideri un telaio *shear-type* non smorzato a masse concentrate a livello di ciascun impalcato. Una vibrazione libera è indotta tramite l'applicazione di spostamenti iniziali alle due masse (curva a di Figura 21). La velocità iniziale è nulla. In Figura è mostrato il moto nel tempo delle due masse (u_1 e u_2 sono gli spostamenti delle due masse in ogni istante di tempo t). Il sistema vibrante assume diverse configurazioni, ad esempio quelle rappresentate dalle curve b e c di Figura. Il fatto che la velocità iniziale imposta sia nulla si evince dalla pendenza nulla delle due storie di spostamento in $t=0$. A differenza del telaio non smorzato a 1 dof, il moto di ogni massa non è armonico semplice e non si può definire una frequenza del moto. Inoltre, il rapporto tra i due spostamenti in ogni t è differente.

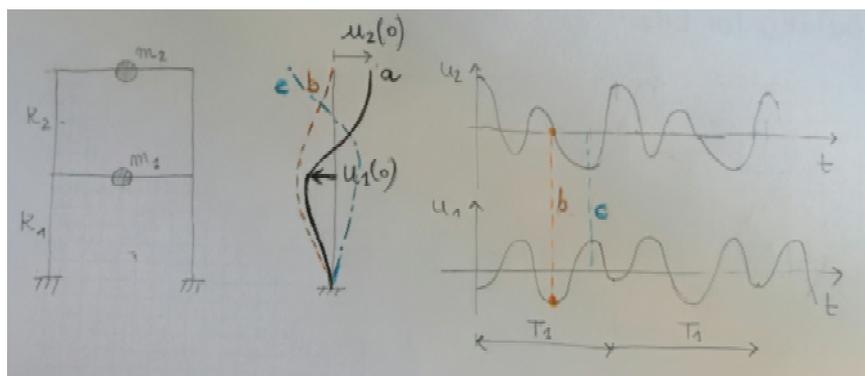


Figura 21 Vibrazioni libere di un telaio non smorzato con spostamento iniziale arbitrario

Tuttavia, se gli spostamenti iniziali imposti sono di un certo tipo, il moto conseguente ad essi è armonico semplice e la forma iniziale (configurazione deformata imposta inizialmente) si mantiene la stessa (Figura 22, Figura 23). Inoltre, entrambi i livelli vibrano con la stessa fase cioè assumono i massimi, minimi o nulli spostamenti nello stesso istante di tempo. Ogni caratteristica configurazione deformata di questo tipo prende il nome di modo naturale di vibrazione (o modo proprio di vibrare) di ogni sistema MDOF.

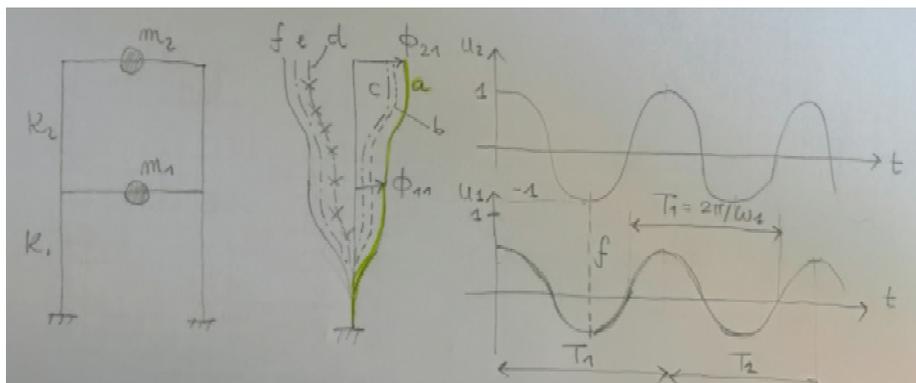


Figura 22 Vibrazioni libere di un telaio non smorzato con spostamento iniziale corrispondente al primo modo di vibrare

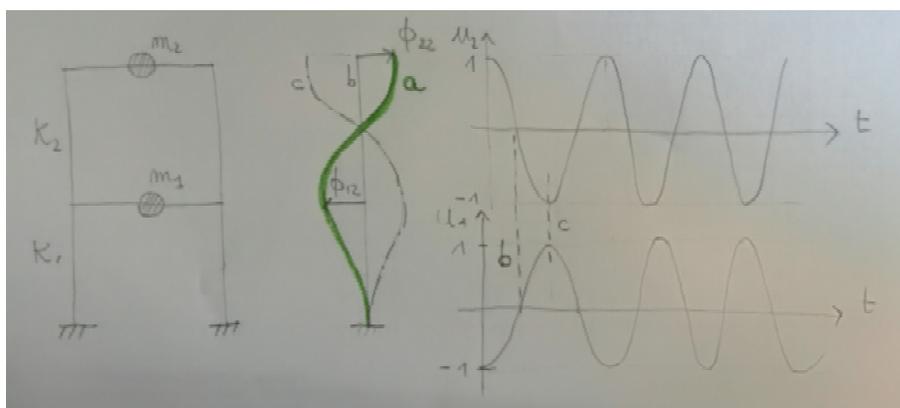


Figura 23 Vibrazioni libere di un telaio non smorzato con spostamento iniziale corrispondente al secondo modo di vibrare

Il periodo naturale di vibrazione T_n (T_1 in Figura 22

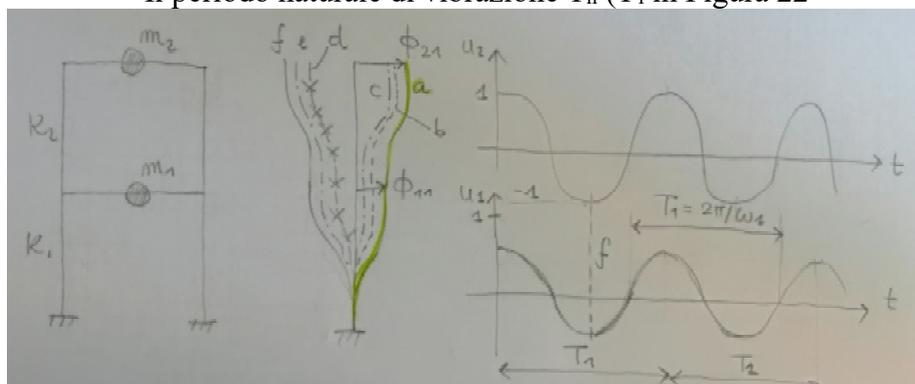
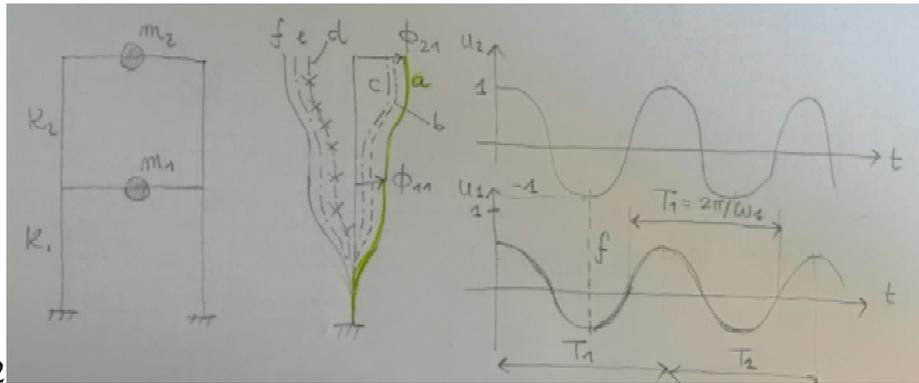


Figura 22) associato ad ogni modo naturale di vibrazione è il tempo richiesto per un ciclo di moto armonico semplice nel modo stesso. I modi naturali, come si vede in Figura 22, Figura 23 vengono in genere espressi tramite i vettori:

$$\Phi_n = \begin{pmatrix} \Phi_{1n} \\ \Phi_{2n} \end{pmatrix} \tag{59}$$



In Figura 22

Figura 22 il primo modo ha componenti:

$$\Phi_{1n} = \begin{pmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \end{pmatrix} \tag{60}$$

mentre in Figura 23 il secondo modo è descritto da:

$$\Phi_{1n} = \begin{pmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \end{pmatrix} \tag{61}$$

Quindi il primo indice del pedice si riferisce al grado di libertà eccitato (u_1 o u_2), mentre il secondo al numero del modo proprio considerato.

Il moto, detto armonico semplice, si ripete ogni:

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \tag{62}$$

secondi, dove T_n rappresenta il periodo proprio di vibrare del telaio associato ad uno dei due modi. La *frequenza naturale* del sistema è data da:

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T_n} \tag{63}$$

Si ricorda che ω_n è detta *circolare*. La più piccola delle due frequenze circolari è indicata da ω_1 , la più grande da ω_2 . Ad esse corrispondono rispettivamente un periodo maggiore e un periodo di vibrazione minore.

8.2 Determinazione dei modi di vibrare di un sistema

L'analisi modale consente di trovare i modi di vibrare del sistema e le corrispondenti percentuali di massa partecipante. I sistemi a N gradi di libertà hanno N frequenze naturali e corrispondenti N modi di vibrare. Per determinare i modi e frequenze naturali di un sistema, occorre risolvere il problema agli autovalori associato. Le vibrazioni libere di un sistema a 1 dof possono essere descritte tramite:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{q}_n(t) \cdot \Phi_n \tag{64}$$

Il grassetto indica che sono coinvolti vettori o matrici. Questa rappresentazione analitica è piuttosto utile perché disaccoppia il contributo del tempo – espresso dalla $\mathbf{q}_n(t)$ – da quello dello “spazio”, espresso dalla forma modale (deflected shape) Φ_n , che non varia con il tempo. La variazione nel tempo di $\mathbf{u}(t)$ è, come noto:

$$q_n(t) = A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t \quad (65)$$

Sostituendo la Eq. (82) nella:

$$m\ddot{u} + ku = 0. \quad (66)$$

Si ottiene:

$$[-\omega_n^2 \mathbf{m} \Phi_n + \mathbf{k} \Phi_n] q_n(t) = 0. \quad (67)$$

Questa equazione è soddisfatta se si annulla $q_n(t)$ (soluzione banale) oppure se:

$$\omega_n^2 \mathbf{m} \Phi_n = \mathbf{k} \Phi_n \quad (68)$$

che ricorda il ben noto problema agli autovalori. Questo è in generale un sistema di N equazioni in N incognite ω_n che ammette la soluzione non nulla se e solo se:

$$\det[-\omega_n^2 \mathbf{m} + \mathbf{k}] = 0. \quad (69)$$

Questa equazione prende il nome di equazione caratteristica e ha N radici positive ω_n^2 perchè le matrici m e k sono simmetriche e definite positive. Una volta determinate queste radici, si sostituiscono una per volta nella Eq. (68), determinando il modo proprio di vibrare corrispondente Φ_n .

Esempio: telaio *shear-type* a 2 dofs.

Sia dato il telaio di Figura 24. La massa del primo impalcato è 2m, quella del secondo m. La rigidezza del primo impalcato sia 2k, il doppio di quella del secondo. Determinare, in assenza di smorzamento, i modi propri di vibrare del telaio.

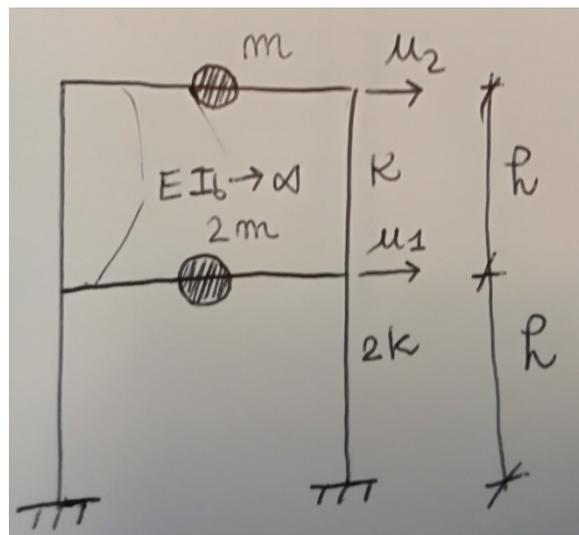


Figura 24 Telaio *shear-type* a 2 gradi di libertà

Soluzione. Attraverso la scrittura delle equazioni del moto (Eq. (58), dove $c=0$), è facile dedurre:

$$m = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}; k = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad (70)$$

La ricerca delle frequenze proprie è data dalla risoluzione della:

$$\det[-\omega_n^2 \mathbf{m} + \mathbf{k}] = 0. \quad (71)$$

Che, sostituendo i valori delle Eq. (70), porge:

$$\omega_{n1}^2 = \frac{k}{2m}; \omega_{n2}^2 = \frac{2k}{m}; \quad (72)$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado con incognita ω_n^2 .

Di conseguenza, le frequenze circolari del telaio e i corrispondenti periodi propri sono dati da:

$$\omega_{n1} = \sqrt{\frac{k}{2m}}; \omega_{n2} = \sqrt{\frac{2k}{m}}; \quad (73)$$

$$T_{n1} = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{k}}; T_{n2} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

ovvero la seconda frequenza è il doppio della prima. Generalmente si considerano le frequenze in senso crescente, mentre i periodi propri in senso decrescente (e.g. il secondo minore del primo, il terzo minore del secondo, e così via).

A questo punto, per determinare i modi propri, che sono due essendo i gradi di libertà del telaio due, occorre sostituire prima e seconda frequenza e, nei due casi, determinare gli autovettori del sistema. Pertanto, sostituendo la prima frequenza si ha un sistema del tipo:

$$[-\omega_{n1}^2 \mathbf{m} + \mathbf{k}] \Phi_{i1} = 0. \quad (74)$$

dove $i=1,2$ corrispondenti ai due gradi di libertà del sistema.

Esplicitando si ottiene:

$$\begin{cases} (-2\omega_{n1}^2 m + 3k)\Phi_{11} - k\Phi_{21} = 0 \\ -k\Phi_{11} + (-\omega_{n1}^2 m + k)\Phi_{21} = 0 \end{cases} \quad (75)$$

E sostituendo $\omega_{n1} = \sqrt{\frac{k}{2m}}$ si ottiene:

$$\begin{cases} 2k\Phi_{11} - k\Phi_{21} = 0 \\ -k\Phi_{11} + \frac{1}{2}k\Phi_{21} = 0 \end{cases} \quad (76)$$

Occorre normalizzare a 1 il grado di libertà n.2, ossia: $\Phi_{21} = 1$.

Sostituendo in una delle due Eq. (56) (la scelta è indifferente), si ottiene:

$$\Phi_{11} = 0.5. \quad (77)$$

In altre parole, i due gradi di libertà del primo modo hanno lo stesso segno e quello della massa 1 è la metà della massa 2. Se si applicasse una configurazione deformata iniziale tale da rispettare queste condizioni, con velocità nulla e in regime di vibrazioni libere, le due masse oscillerebbero con moto armonico semplice in fase con periodo T_{n1} .

Per determinare il modo 2 del sistema occorre ripetere gli stessi passaggi sviluppati per il modo 1. Sostituendo quindi la seconda frequenza al sistema si ottiene:

$$\begin{cases} (-2\omega_{n2}^2 m + 3k)\Phi_{12} - k\Phi_{22} = 0 \\ -k\Phi_{12} + (-\omega_{n2}^2 m + k)\Phi_{22} = 0 \end{cases} \quad (78)$$

E sostituendo $\omega_{n2} = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ si ottiene:

$$\begin{cases} -k\Phi_{11} - k\Phi_{21} = 0 \\ -k\Phi_{11} - k\Phi_{21} = 0 \end{cases} \quad (79)$$

Occorre normalizzare a 1 il grado di libertà n.2, ossia: $\Phi_{22} = 1$.

Sostituendo in una delle due Eq. (79) (la scelta è indifferente), si ottiene:

$$\Phi_{12} = -1. \quad (80)$$

In altre parole, i due gradi di libertà del secondo modo hanno segno opposto e uguale valore. Se si applicasse una configurazione deformata iniziale tale da rispettare queste condizioni, con velocità nulla e in regime di vibrazioni libere, le due masse oscillerebbero con moto armonico semplice in fase con periodo $T_{n2} < T_{n1}$.

9 RAPPRESENTAZIONE DELL'AZIONE SISMICA

L'azione sismica si rappresenta in funzione delle sue caratteristiche e dei suoi effetti sugli edifici. In particolare, l'azione sismica ha origine dall'ipocentro (a una certa profondità della crosta terrestre) che ha come corrispondente sulla superficie terrestre l'epicentro. Il sisma implica una liberazione di energia cui sono associate delle onde sismiche di tre tipi principali:

1. Onde P o di volume;
2. Onde S o di taglio;
3. Onde superficiali.

Le onde P, che attraversano longitudinalmente tutti i tipi di materia, solidi, liquidi e gas, generano compressioni nel materiale attraversato facendo oscillare le particelle della roccia nella stessa direzione di propagazione dell'onda. Causano variazioni di volume. La velocità di propagazione dipende dalle caratteristiche elastiche del materiale e dalla sua densità, ma si attesta attorno ai 4 e gli 8 km/s. Poiché le onde P si propagano più rapidamente, sono anche le prime (P = Primarie) a raggiungere i sismometri.

Le onde S, di taglio o "Secondarie", si propagano solo nei solidi perpendicolarmente alla loro direzione di propagazione senza causare variazioni di volumi. La loro velocità di propagazione è fra 2 e 4 km/s, quindi sono più lente delle onde P. Le onde S non possono propagarsi attraverso i fluidi e i gas perché questi ultimi non oppongono resistenza al taglio.

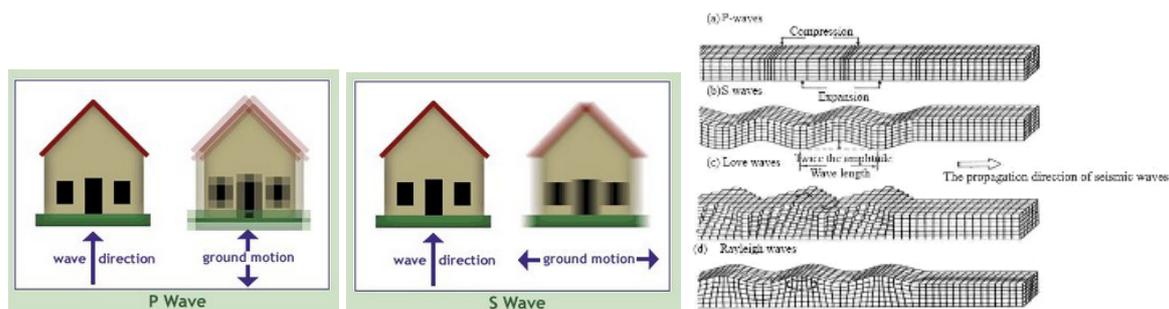


Figura 25 Onde sismiche

Le onde superficiali sono una combinazione delle precedenti. Di esse fanno parte le onde di Rayleigh e le onde di Love.

La rappresentazione dell'azione sismica necessaria per effettuare analisi strutturali dipende dal tipo di materiale e di analisi che si vuole condurre. In questo lavoro si analizzano due tipi di azione sismica:

- Spettro di risposta;
- Azione sismica equivalente.

10 SPETTRO DI RISPOSTA ELASTICO

10.1 Determinazione dello spettro di risposta elastico

Lo spettro di risposta è un concetto di essenziale importanza nell'analisi sismica strutturale. Rappresenta una semplificazione dell'azione sismica, rigorosamente schematizzabile come storia nel tempo di spostamenti, velocità o accelerazioni. La determinazione dello spettro di risposta è imprescindibile dalla risoluzione di sistemi dinamici a 1 grado di libertà. Infatti, lo spettro di risposta in accelerazione (velocità, spostamento) è un grafico che riporta in ascissa i periodi di vibrazione T e in ordinata la massima accelerazione (velocità, spostamento) che rappresenta la risposta del sistema ed è ottenibile dalla risoluzione della Eq. (10) che qui si riporta per comodità:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g \quad (81)$$

dove \ddot{u}_g indica la storia nel tempo delle accelerazioni da cui discende lo spettro di risposta. Questa si può anche rappresentare con:

$$\ddot{u} + 2\zeta\hat{\omega}\dot{u} + \hat{\omega}^2u = -\ddot{u}_g \quad (82)$$

dividendola per m .

In sostanza, lo spettro in accelerazione si costruisce per punti (T, S_a) , seguendo questo procedimento:

1. Si fissa un valore di periodo proprio di vibrazione \hat{T} , da cui si ottiene

$$\hat{\omega} = \frac{2\pi}{\hat{T}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (83)$$

E' quindi noto il rapporto k/m necessario per la risoluzione della Eq. (81).

2. Si fissa un valore del coefficiente di smorzamento ζ .
3. Noto \ddot{u}_g si risolve l'equazione del moto, generalmente in via numerica (con l'integrale di Duhamel) a causa della natura dell'azione sismica.
4. Si ottiene dunque la storia nel tempo degli spostamenti $u(t)$, determinando il picco dello spostamento u_0 ;
5. L'ordinata spettrale corrispondente quindi sar :

$$S_D = u_0 \quad (84)$$

Per lo spostamento, mentre le ordinate spettrali di velocit  e accelerazione sono:

$$S_V = \hat{\omega} S_D; S_A = \hat{\omega} S_V = \hat{\omega}^2 S_D \quad (85)$$

È cos  definita una coppia di coordinate che individuano il punto nel grafico (\hat{T} , S_a).

Si fissa un nuovo oscillatore equivalente di periodo T e si segue nuovamente la procedura da 1 a 5 definendo un nuovo punto dello spettro, e cos  via. Il range di periodi da coprire va generalmente da 0 a 5 secondi per applicazioni di ingegneria strutturale.

La forma dello spettro cos  ottenuta   piuttosto frastagliata (Figura 26); in genere si effettua la ricerca degli spettri di risposta per un numero piuttosto elevato di accelerogrammi (rappresentativi dell'azione di input sismica) e successivamente si trova lo spettro di risposta che minimizzi le differenze rispetto a quelli trovati, ad esempio con il criterio dei minimi quadrati (Figura 27). Si osserva che la forma qualitativa dello spettro determinato   ovviamente simile a quella proposta dalla normativa italiana NTC08.

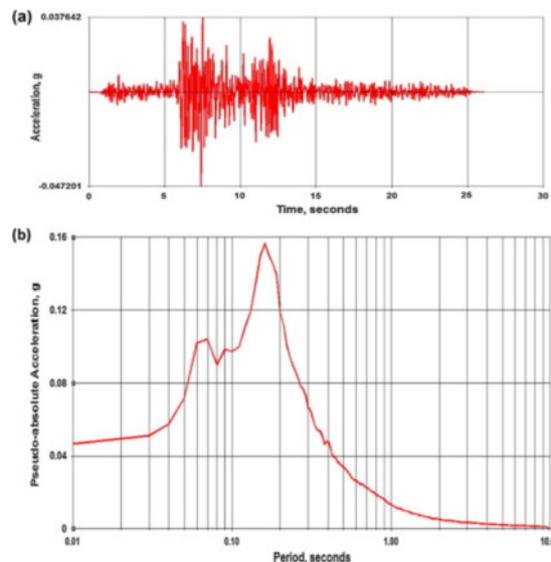


Figura 26 Generico accelerogramma (a) e spettro in accelerazione elastico corrispondente (b)
 Abuoelela Amin Mohamed et al. 2015

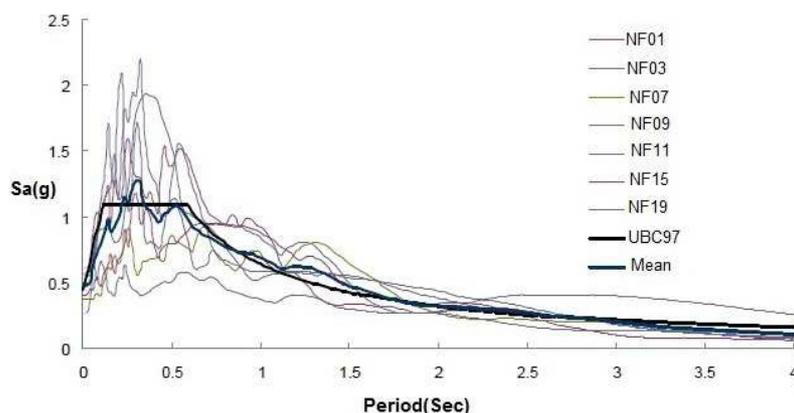


Figura 27 Esempio di determinazione dello spettro medio e confronto con quello di Norma: per diversi accelerogrammi (NF-) si ottiene lo spettro medio (Mean); quello della norma, UBC 97, è coerente con quello medio secondo una legge di minimo. G. R. Abdollahzadeh e H. Faghimaleki 2014.

A puro titolo informativo, quando si effettuano analisi dinamiche con accelerogrammi (almeno 7, secondo la Normativa corrente), si fa il procedimento inverso: dato lo spettro di risposta dalla Normativa, cap. 3 [3], si generano degli accelerogrammi ad esso compatibili.

10.2 Dallo spettro di risposta all'analisi sismica di un sistema a 1 gdl

Supponiamo che sia disponibile uno spettro di risposta in accelerazione (elastico) (S_A, T) rappresentativo dell'azione sismica del sito di costruzione. Note le caratteristiche dinamiche di un sistema a un grado di libertà, ovvero frequenza e periodo propri, derivanti da massa e rigidità specifiche, è possibile effettuare l'analisi sismica del sistema semplicemente individuando la forza statica equivalente cui il sistema è soggetto. Se il periodo proprio del sistema è T_n , la forza statica equivalente di picco sarà:

$$f_{s,0} = kS_D = k \frac{S_A}{\omega_n^2} \quad (86)$$

Sapendo che $k = m\omega_n^2$:

$$f_{s,0} = mS_A \quad (87)$$

Naturalmente, il sistema soggetto a questa forza sismica equivalente subirà una deformazione e quindi originerà uno stato di sollecitazione ottenibile coi metodi di Scienza delle Costruzioni. Il taglio alla base sarà

$$V_0 = mS_A \quad (88)$$

E il momento flettente alla base, se la struttura è alta h:

$$M_0 = V_0 h \quad (89)$$

Ad esempio, si ipotizzi di dover considerare uno spettro della normativa (UBC97, Figura 27) per un telaio a un grado di libertà con periodo 0.4 sec. Dallo spettro di risposta in accelerazione orizzontale si legge che

$$S_A = 1.1g \quad (90)$$

Con g accelerazione di gravità. La forza orizzontale cui il telaio è soggetto sarà dunque pari a:

$$f_{s,0} = m1.1g = 1.1W \quad (91)$$

dove W è il peso della struttura. Pertanto, la forza sismica equivalente sollecitante la struttura sarà il 10% maggiore del peso della struttura stessa.

11 AZIONE SISMICA SECONDO LA NORMA ITALIANA

11.1 Generalità

L'azione sismica viene illustrata nel punto 3.2 delle NTC08 [3] e nel C3.2 della Circolare Esplicativa [4]. In queste sezioni vengono forniti i concetti e gli elementi necessari per ricavare uno spettro di risposta (se occorre effettuare un'analisi dinamica a spettro di risposta) o accelerogrammi (se invece occorre fare un'analisi time history) ai fini del progetto di una struttura in presenza di azioni sismiche.

11.2 Concetto di pericolosità sismica

Il concetto di pericolosità sismica è definito in termini di accelerazione orizzontale massima attesa a_g in condizioni di campo libero su sito di riferimento rigido con superficie topografia orizzontale (categoria A, punto 3.2.2 NTC08), con riferimento a prefissate probabilità di eccedenza P_{VR} nel periodo di riferimento V_R (punto 2.4). Il periodo di riferimento $V_R = V_N C_U$ è il prodotto della vita nominale per il coefficiente della classe d'uso (da strutture con uso occasionale a strutture che prevedono affollamenti il coefficiente di classe d'uso cresce da 0.7 a 2). E' possibile considerare, per la valutazione della pericolosità sismica, sia le ordinate dello pseudo spettro di risposta in accelerazione sia accelerogrammi.

11.3 Parametri di sito

I tre parametri di sito da considerare, per definire uno spettro di risposta elastico in accelerazione, sono:

1. a_g accelerazione orizzontale massima al sito;
2. F_0 valore massimo del fattore di amplificazione dello spettro in accelerazione orizzontale;
3. T_C^* periodo di inizio del tratto a velocità costante dello spettro in accelerazione orizzontale.

Tali parametri sono forniti dalla norma per tutti i siti del territorio italiano nell'allegato B delle NTC08.

11.4 Stati limite, probabilità di superamento e periodi di ritorno dell'azione sismica

Nella progettazione sismica, si hanno due stati limite di esercizio e due stati limite ultimi. I primi sono: stato limite di operatività e stato limite di danno, i secondi stato limite di salvaguardia della vita e stato limite di collasso (Tabella 1).

STATO LIMITE	Elementi strutturali	Elementi non strutturali	Apparecchiature	Interruzioni d'uso	Resistenza/rigidezza della costruzione sotto az. orizzontali
SLO	No danni	No danni	No danni	No	Invariate
SLD	Sì, senza rischio per utenti	Invariate			
SLV	Significati vi danni	Rotture e crolli	Rotture e crolli	Sì	Significativa perdita di rigidezza solo per az. orizzontali
SLC	Danni molto gravi	Gravi rotture e crolli	Gravi rotture e crolli	Sì	Esiguo margine di sicurezza per azioni orizzontali e maggiore per azioni verticali

Tabella 1 Sintesi dei danni ai componenti della struttura in presenza dei diversi stati limite.

Ad essi naturalmente corrispondono danni crescenti per la struttura e maggiore pericolosità per la vita umana. Ad ogni stato limite è associata una probabilità di eccedenza o superamento P_{VR} (SLO 81%, SLD 63%, SLV 10% e SLC 5%), con la quale è possibile calcolare il periodo di ritorno dell'azione sismica T_R (C3.2.1 della Circolare). Si ottengono quindi periodi di ritorno compresi tra 30 e 2475 anni. Si vedano i punti citati della norma per maggiori dettagli.

11.5 Categorie di sottosuolo e condizioni topografiche

Per la definizione dell'azione sismica occorre conoscere la categoria di sottosuolo e le condizioni topografiche. Infatti, le condizioni di riferimento (suolo rigido) non corrispondono generalmente a quelle effettive. Occorre considerare il sito di costruzione e analizzare gli effetti della stratigrafia del terreno e quelli topografici.

Vi sono 5 possibili categorie di sottosuolo, da A (sottosuolo rigido) ad E (terreni a grana grossa mediamente o scarsamente addensati o terreni a grana fine mediamente o scarsamente consistenti per spessore non superiore a 20 m), a seconda della velocità equivalente $V_{S,30}$ di propagazione delle onde da taglio (funzione delle N_{SPT}) entro i primi 30 m di profondità. La misura diretta di $V_{S,30}$ è dalla norma fortemente raccomandata, altrimenti la classificazione può essere effettuata dai valori del numero equivalente di colpi della prova penetrometrica dinamica (i cui risultati sono N_{SPT} per terreni a grana grossa e $c_{u,30}$, resistenza non drenata, per i terreni a grana fine). Passando da A ad E si ha un'amplificazione dell'azione sismica, visto che i terreni sono via via più compressibili e meno consistenti.

Vi sono quattro categorie topografiche, da T1 (pianeggiante) a T4 (rilievi con inclinazione media maggiore di 30°).

11.6 Spettro di risposta elastico in accelerazione

Lo spettro di risposta elastico in accelerazione è riferito a uno smorzamento convenzionale del 5%, valido per strutture con periodi di vibrazione minore o uguale a 4 secondi. Lo spettro di risposta può essere orizzontale o verticale. In questo lavoro si analizza solo il primo, mentre l'uso dello spettro di risposta verticale risulta necessario in particolari situazioni costruttive, benchè gli ultimi terremoti abbiano dimostrato l'importanza notevole della componente verticale dello spettro. Lo spettro di risposta orizzontale è composto da 4 tratti:

1. $0 \leq T < T_B$: tratto lineare in funzione di T , periodo di vibrazione;
2. $T_B \leq T < T_C$: *plateau* costante e pari a $a_g S \eta F_0$;
3. $T_C \leq T < T_D$: tratto discendente in funzione di $1/T$;
4. $T_D \leq T$: tratto discendente in funzione di $1/T^2$.

Il coefficiente $S = S_S S_T$ ed è funzione della categoria topografica e di sottosuolo. η è il fattore che altera la forma spettrale per coefficienti di smorzamento viscosi ζ diversi dal 5%, ed è maggiore o uguale a 0.55. F_0 è il valore massimo del fattore di amplificazione dello spettro in accelerazione orizzontale, al minimo pari a 2.2.

Lo spettro di risposta in spostamento, come già detto nella precedente sezione, si ottiene dallo spettro in accelerazione diviso per il quadrato della pulsazione (o frequenza) propria.

11.7 Cenni sul fattore di struttura

Si ritiene opportuno fare un cenno relativo al fattore di struttura e al suo ruolo di essenziale importanza per tenere conto del comportamento dissipativo delle strutture. Nella realtà, le strutture reali soggette a sisma dissipano una certa energia, sotto forma di attrito nelle connessioni, nel materiale, etc., come già illustrato in precedenza. La strategia alla base della progettazione anti-sismica relativa agli stati limite è conosciuta sotto il nome di *Performance Based Seismic Design*. In termini qualitativi, la struttura dovrebbe rispondere elasticamente ai terremoti di bassa entità e anelasticamente ai terremoti di medio-alta entità senza collassare. Un concetto essenziale è rappresentato dalla duttilità strutturale, ovvero la capacità della struttura di sconfinare in campo plastico. A parità di energia dissipata, una struttura potrebbe avere comportamento fragile e alta resistenza, o comportamento duttile e bassa resistenza.

Per tenere conto della capacità dissipativa della struttura, si abbatta fittiziamente l'entità dell'azione sismica di un fattore q , detto fattore di struttura (*behavior factor* in inglese), che dipende dal grado di iperstaticità della struttura e della sua non linearità. Secondo il punto 7.3.1 delle NTC08, il fattore di struttura q è dato da:

$$q = q_0 K_R \quad (92)$$

dove q_0 dipende dalla duttilità attesa della struttura, dalla tipologia strutturale e dal rapporto tra il valore dell'azione sismica per il quale si verifica la formazione di un numero di cerniere plastiche tale da rendere la struttura labile e quello per il quale il primo elemento strutturale raggiunge plasticizzazione a flessione. K_R è un fattore pari a 1 per costruzioni regolari in altezza e pari a 0.8 per costruzioni non regolari in altezza.

Più rigorosamente, il fattore di struttura potrebbe essere determinato in funzione del fattore di duttilità in base a un criterio di uguaglianza degli spostamenti o un criterio di equivalenza energetica. Il primo approssima bene situazioni con periodo del sistema superiore al periodo

dominante del sisma. Il secondo, invece, è adatto per strutture con periodo proprio iniziale intermedio.

12 ANALISI SISMICHE LINEARI

12.1 Combinazione sismica

Ai fini delle verifiche degli stati limite, tra le varie combinazioni da utilizzare per il progetto o verifica di una struttura, in ambito sismico è essenziale impiegare la combinazione sismica (punto 2.5.3 NTC08). L'effetto dell'azione sismica, indicato con E , si inserisce nella combinazione che assume la forma:

$$E + G_1 + G_2 + P + \sum_{j=1}^n \psi_{2j} Q_{kj} \quad (93)$$

dove $G_1 + G_2$ è la somma di carichi permanenti strutturali e non strutturali e Q_{kj} è la j -esima azione accidentale (con n loro numero totale). I coefficienti di combinazione ψ_{2j} da usare sono quelli della combinazione quasi permanente, ad esempio uguali a 0.3 per azioni accidentali in ambienti ad uso residenziale, 0 per vento, 0 per neve a quota < 1000 m, etc. (tab 2.5.I NTC08). L'azione sismica equivalente si ottiene a seconda del tipo di analisi da condurre.

Gli effetti della combinazione sismica sono da valutarsi tenendo conto delle seguenti masse associate ai carichi gravitazionali:

$$G_1 + G_2 + \sum_{j=1}^n \psi_{2j} Q_{kj} \quad (94)$$

12.2 Criteri di modellazione dell'azione sismica

Come recita il punto 7.2.6 delle NTC08, il modello della struttura deve essere tridimensionale e riprodurre adeguatamente le distribuzioni spaziali di massa, rigidezza e resistenza. Gli elementi cosiddetti secondari possono essere rappresentati in termini di massa, benchè sia sempre opportuna un'analisi critica del ruolo di tali elementi nella struttura soggetta a sisma. Gli orizzontamenti possono essere considerati infinitamente rigidi nel loro piano se realizzati in c.a. o in latero-cemento con soletta in c.a. di almeno 40 mm di spessore, i in struttura mista con soletta in c.a. di almeno 50 mm di spessore collegata da connettori a taglio opportunamente dimensionati. Occorre considerare la fessurazione dei materiali fragili, riducendo la rigidezza fino al 50% di quella degli elementi non fessurati. Nel caso di comportamento non dissipativo si adottano solo i modelli lineari, se dissipativo sia lineari sia non lineari. Laddove necessario, occorre considerare gli effetti del secondo ordine e l'interazione suolo-struttura.

Per tenere conto della variabilità spaziale del moto sismico e di incertezze nella localizzazione delle masse, bisogna considerare una eccentricità del centro di massa aggiuntiva rispetto a quella derivante dal calcolo. In particolare, questa non può essere considerata inferiore al 5% la dimensione dell'edificio misurata perpendicolarmente alla direzione di applicazione dell'azione sismica. Tale eccentricità è assunta costante, per entità e direzione, su tutti gli orizzontamenti.

12.3 Analisi statica equivalente

La Norma italiana NTC08 spiega che l'analisi statica lineare consiste nell'applicazione di forze statiche equivalenti alle forze di inerzia indotte dall'azione sismica e può essere effettuata per costruzioni con requisiti specifici, a condizione che il periodo del modo di vibrare principale nella direzione in esame (T_1) non superi $2.5 T_C$ o T_D e che la costruzione sia regolare in altezza.

Per costruzioni civili o industriali che non superino i 40 m di altezza e la cui massa sia approssimativamente uniformemente distribuita lungo l'altezza, T_1 può essere stimato, in assenza di calcoli più dettagliati, utilizzando la formula seguente:

$$T_1 = C_1 H^{\frac{3}{4}} \quad (95)$$

dove H è la altezza della costruzione in metri e C_1 un coefficiente che dipende dal materiale della struttura (0,085 per costruzioni con struttura a telaio in acciaio, 0,075 per costruzioni con struttura a telaio in calcestruzzo armato e 0,050 per costruzioni con qualsiasi altro tipo di struttura). L'entità delle forze si ottiene dall'ordinata dello spettro di progetto corrispondente al periodo T_1 e la loro distribuzione sulla struttura segue la forma del modo di vibrare principale nella direzione in esame, valutata in modo approssimato.

La forza da applicare a ciascuna massa della costruzione è:

$$F_i = F_h \frac{W_i z_i}{\sum_j W_j z_j} \quad (96)$$

dove F_h è la forza orizzontale funzione dell'ordinata dello spettro di risposta in accelerazione orizzontale $S_A(T_1)$, data da:

$$F_h = S_A(T_1) W \frac{\lambda}{g} \quad (97)$$

F_i è la forza da applicare alla massa i -esima, W è il peso totale della struttura, z_i e z_j le quote delle masse i e j rispetto al piano di fondazione, W_i e W_j i pesi delle masse i e j , λ un coefficiente pari a 0.85 se la costruzione ha almeno tre orizzontamenti e $T_1 < 2T_C$ ovvero se la costruzione è sufficientemente rigida, pari a 1 in tutti gli altri casi.

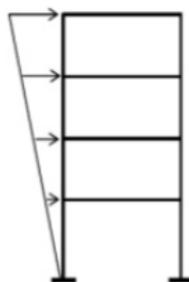


Figura 28 Esempio di azione sismica equivalente applicata su una struttura intelaiata (F_i applicata al piano i -esimo)

Per gli effetti torsionali accidentali, nel caso di costruzioni irregolari, si veda il punto 7.3.3.2 della Norma.

12.4 Analisi dinamica lineare (a spettro di risposta)

Supponiamo di considerare un comportamento della struttura non dissipativo, ovvero si assuma un fattore di struttura q unitario. Noto lo spettro di risposta (componente orizzontale e, se necessario, componente verticale) in accelerazione, è possibile effettuare un'analisi dinamica lineare, generalmente detta analisi a spettro di risposta.

Questa analisi prevede tre passaggi fondamentali:

1. **analisi modale**, con determinazione dei modi propri significativi della struttura, ciascuno avente una massa partecipante almeno del 5% e in modo che la somma di tutte le masse partecipanti, per ogni grado di libertà considerato, sia pari all'85%;
2. **calcolo degli effetti dell'azione sismica** rappresentata da uno spettro di risposta per ciascuno dei modi propri di vibrare considerati;
3. **combinazione di tali effetti** secondo la Combinazione Quadratica Completa (CQC).

$$E = \sum_i \sum_j \rho_{ij} E_i E_j \quad (98)$$

in cui ρ_{ij} è un coefficiente di correlazione tra il modo i e il modo j .

L'effetto così combinato, E , andrà quindi a inserirsi nella combinazione sismica già citata:

$$E + G_1 + G_2 + P + \psi_{21} Q_{k1} + \psi_{22} Q_{k2} + \dots \quad (99)$$

utilizzabile a questo punto per effettuare le varie verifiche agli stati limite.

Per quanto concerne il punto 1, l'analisi modale consiste nella soluzione dell'equazione del moto della struttura, in generale ad n gradi di libertà, in regime di oscillazioni libere (forzante nulla), con smorzamento convenzionale pari al 5%. Tranne che per casi particolari, tra cui per strutture con dissipatori o isolatori, si adotta generalmente questo valore di smorzamento. La configurazione deformata di una struttura, come già illustrato, è data dunque dalla sovrapposizione di deformate elementari, cui è associato un modo di vibrare e un periodo di vibrazione caratterizzante l'oscillazione armonica semplice. Alcuni modi di vibrare hanno un ruolo più significativo di altri nella configurazione deformata totale. La misura di tale ruolo si riconosce nella percentuale di massa partecipante. Esula dagli scopi di questi appunti la determinazione analitica di tali percentuali, che pure sarebbe essenziale in un'analisi lineare a spettro di risposta. Si rimanda ai testi in bibliografia per maggiori dettagli.

Se il centro di massa non corrisponde con il baricentro delle rigidezze ad ogni piano, occorre considerare gli effetti dell'eccentricità (quella accidentale sempre presente). Tali effetti possono essere computati considerando un momento torcente di piano pari alla risultante della forza agente su un piano moltiplicata per l'eccentricità accidentale del baricentro delle masse rispetto alla sua posizione di calcolo.

BIBLIOGRAFIA

1. Chopra, A. K. *Dynamics of Structures*; 4th ed.; Pearson, 2012.
2. Belluzzi, O. *Scienza delle Costruzioni, Volume 4*; Zanichelli, 1998.
3. DMI Decreto del Ministro delle Infrastrutture 14 gennaio 2008. Approvazione delle nuove norme tecniche per le costruzioni 2008.
4. CMIT Circolare del Ministro delle Infrastrutture e dei Trasporti 2 febbraio 2009, n. 617, contenente le Istruzioni per l'applicazione delle "Nuove norme tecniche per le costruzioni" di cui al DM 14 gennaio 2008 2009.