

Sinossi sull' ingegneria delle forme libere

Davide Tonelli

Marzo 2012

1 Introduzione

Le forme libere rappresentano l'espressione emblematica dell'architettura contemporanea.

Sono affascinanti ed audaci e difatti la loro realizzazione pone sistematicamente problemi di ingegnerizzazione: la cosiddetta fase di "razionalizzazione" del progetto architettonico - una razionalizzazione finalizzata a rendere fattibile l'intervento in termini prettamente economici.

Nella fattispecie questo processo si concretizza in una serie di accorgimenti quali la scelta del metodo di pannellizzazione della superficie, dei materiali per il rivestimento dell'involucro, dello schema statico e del sistema costruttivo. Scelte apparentemente incorrelate che invece si condizionano in maniera mutua e determinante.

Delle difficoltà insite in tale procedimento ci si è accorti ben presto, in particolar modo per ciò che concerne le superfici trasparenti. Il problema principale è la rielaborazione della superficie di progetto finalizzata alla suddivisione della medesima in pannelli discreti: questa è una fase complessa e pregena di conseguenze con specifico riferimento alla struttura portante, nonchè alla trasparenza globale dell'involucro.

Nella realizzazione dei primi progetti si è dialogato principalmente con il "problema di approssimazione" della superficie di progetto: sono stati impiegati metodi geometrici capaci di descrivere in maniera sufficientemente accurata la forma iniziale, attraverso superfici sfaccettate di tipo traslazionale, rotazionale e combinazione delle due con trasformazioni di espansione e/o contrazione.

Progressivamente si è poi preso coscienza dell'importanza di questo passaggio nel più ampio panorama dell'intero processo realizzativo e si è fatto ricorso ad algoritmi matematici per la suddivisione di superfici, sempre più accurati ed efficienti. Contemporaneamente l'attenzione della ricerca scientifica si è concentrata sul "problema di progetto" delle superfici, che dunque non saranno più completamente "libere" bensì soggette a vincoli di natura statica e/o inerenti le esigenze della produzione industriale dei materiali da costruzione.

È dunque emersa la necessità di guidare la progettazione delle forme, nonchè quella di dotarsi di opportuni strumenti capaci di gestire la complessità insita nel processo realizzativo di costruzioni tanto ardite. A tale scopo è indispensabile la collaborazione sinergica di più discipline: matematica, geometria, tecnologia e produzione.

È quello che afferma l'Arch. Niccolò Baldassini [3, section 5 - The New Challenges], membro del gruppo RFR con sede a Parigi:

*"(...) a more theoretical approach can expand geometrical knowledge and open a more radical approach to Free-Form design. Research addresses the development of mathematical algorithms: (...) **the interest is shifted from the definition to the subdivision of the surfaces.** Subdivision is the main point when (...) trying to couple glazing patterns with structural layouts.*

(...) Free-form design that is sustainable in terms of technologies, costs and aesthetics is in the foreseeable future. Mathematics, geometry, technology and production are all converging together."

2 Orientamenti attuali

Da quanto si è detto emerge banalmente che il cosiddetto processo di "razionalizzazione" del progetto architettonico di una superficie free-form ([18]), si concreta di fatto in una più circoscritta procedura di "ottimizzazione".

Questa a sua volta può essere intesa secondo due accezioni:

1. *Ottimizzazione a posteriori (approssimazione) -*

è il filone più sfruttato nel periodo recente e recentissimo ([14, 17, 29, 11, 21, 6, 20, 23, 18, 12]). Consiste nell'assumere la forma quale dato di input, sulla quale vengono poi applicate procedure di "post-razionalizzazione" finalizzate a migliorare le proprietà dell'involucro senza apportare modifiche sensibili alla geometria iniziale.

I risultati delle ricerche di settore confluiscono sostanzialmente verso algoritmi di suddivisione della superficie in pannelli: il tipo di mesh adottato infatti è un fattore dominante nel progetto, in quanto ha ricadute sul piano estetico, strutturale ed economico.

Questo tipo di studi trova fondamento in branche della matematica quali la topologia e la geometria differenziale e per tale motivo potrebbe essere classificato con la dizione "approccio matematico";

2. *Ottimizzazione a priori o diretta -*

in questo ambito si cerca di imporre condizioni di ottimo (che questo sia inteso dal punto di vista geometrico, strutturale, termo-acustico etc... poco importa) già nella fase di concepimento della forma medesima.

Con riferimento esplicito alla statica delle costruzioni si può affermare con certezza che questo è l'approccio più antico. La ricerca dell'ottimo strutturale ha infatti affascinato i grandi ingegneri del '900 (e precedenti); citiamo i più noti: Nervi, Morandi, Musmeci, Torroja, Gaudì, Candela. Gli strumenti di cui questi grandi personaggi si sono serviti per i loro studi sono:

- (a) le linee isostatiche;
- (b) i modelli fisici (modelli di acqua saponata, di materiale elastico, modelli appesi o "rovesci");
- (c) calcoli analitici manuali;
- (d) algoritmi di ottimizzazione topologica, anche detti algoritmi genetici (impiegati a partire dagli anni '50, sono ancora in fase di studio).

Oggi la sfida in questo territorio pare tutta calibrata sulla capacità di sfruttare le enormi potenzialità del calcolo automatico: è necessario sviluppare algoritmi opportuni che, una volta implementati in un codice di calcolo, permettano di esplorare innumerevoli configurazioni geometriche della costruzione di pari passo con le rispettive condizioni statiche.

Alcune idee in questa direzione sono già state messe sul tavolo, ma la complessità e soprattutto l'interdisciplinarietà dell'argomento richiedono un'ulteriore riflessione affinché queste possano portare a sviluppi futuri. Alcune caratteristiche di fondo però accomunano tutte le idee succitate:

- (a) la dualità tra l'analisi geometrica e quella statica;
- (b) l'ordine esatto e non invertibile con cui queste si susseguono;
- (c) l'iteratività del processo.

Alcune alternative ad esempio prevedono l'impiego congiunto di programmi di modellazione parametrica ed analisi agli elementi finiti ([16]). Altre invece effettuano un riesame critico della statica grafica in ambito tri-dimensionale e tramite questa esplorano le varie possibili configurazioni equilibrate della costruzione ([5]) - anche in questo caso è poi opportuno effettuare analisi agli elementi finiti.

Entrambe le tecniche permettono di compiere indagini interattive e lasciano una notevole libertà creativa e compositiva al progettista. In ambedue i casi manca ancora uno strumento opportuno che compendi ed integri le varie fasi progettuali: l'ingegnerizzazione delle forme complesse richiede lo sviluppo di strumenti idonei (*"The design of one's own task-specific design tools has itself to be considered as being part of the design process: to design by tool design"* [13]).

Il metodo di *ottimizzazione a priori* prende dunque spunto da considerazioni geometriche e statiche; per tale motivo può essere anche indicato quale *approccio ingegneristico*.

Entrambi gli orientamenti analizzati sono attualmente oggetto di studio da parte di vari gruppi di ricerca (Evolute, Smartgeometry, TU Wien, TU Berlin etc...). È senz'altro auspicabile che i risultati di tali ricerche vengano messi a sistema, integrati in un'unico potente strumento di progettazione capace di guidare (in maniera appropriata) lo sviluppo delle forme libere dalla fase di concezione fino a quella di realizzazione, implementando in maniera naturale e continua tutti quei vincoli e quelle prescrizioni il cui mancato rispetto, a vario titolo, oggi rende complessa (ed affascinante) la realizzazione delle free-forms. Tutto ciò può aver luogo nel breve periodo.

È dunque vero, a costo di essere ripetitivi, quello che afferma l'Arch. Baldassini [3, section 5 - The New Challenges]:

"Free-form design that is sustainable in terms of technologies, costs and aesthetics is in the foreseeable future. Mathematics, geometry, technology and production are all converging together."

3 Discretizzazione delle superfici

Un passaggio ineliminabile, di fondamentale importanza, che segna la transizione dalla fase di concezione a quella di realizzazione della forma in progetto è la suddivisione della medesima in elementi discreti, altresì detta *pannellizzazione*. Nel corso degli anni si sono avvicinate ed affiancate varie tecniche di pannelizzazione delle forme libere, le quali si differenziano in relazione alla capacità di soddisfare requisiti di:

1. economia (tipi di lavorazioni richieste, spreco di materiale);
2. fattibilità (semplicità dei nodi, efficacia della struttura portante);
3. aderenza alla geometria di progetto (grado di approssimazione della superficie, grado di trasparenza raggiunto (solo per costruzioni in vetro)).

3.1 Mesh Triangolari

Per il discreto grado di approssimazione raggiungibile, nonché per la possibilità di realizzare rivestimenti esclusivamente a mezzo di pannelli piani, la mesh triangolare è stata la prima tecnica di suddivisione adoperata. Con questa procedura di discretizzazione si ottengono strutture di supporto stabili ed al contempo possono essere foggiate involucri trasparenti su geometrie libere. Nonostante ciò gli svantaggi sono innumerevoli:

1. basso grado di trasparenza;
2. pesantezza della struttura di supporto;
3. torsione geometrica dei nodi;
4. impossibilità di realizzare una *offset mesh*, ovvero una mesh parallela (corrispondenza 1-1 tra vertici e lati delle due mesh) a distanza costante (in termini di vertici, di faccia o di lati), di fondamentale importanza per la costruzione della struttura di supporto.

Per tutti questi motivi le mesh triangolari non hanno trovato ampia diffusione, se non in casi notevoli quali le strutture geodetiche (vedi la Biosfera di Montreal dell'Expo '67, di R. Buckminster Fuller) o quelli in cui la complessità della superficie di progetto ne ha imposto l'uso ([24]).

3.2 Mesh Quadrilatero

Questo tipo di mesh permette di ridurre la complessità dei nodi (in cui si intersecano quattro aste e non più sei) e contestualmente semplifica la realizzazione dei pannelli, specie se fabbricati in materiale fragile quale il vetro, grazie alla maggiore ampiezza degli angoli.

A fronte dei vantaggi menzionati, le mesh quadrilatero non garantiscono a priori la *planarità delle facce*. Questo è un requisito sostanziale il cui soddisfacimento, perlomeno parziale, è da ritenersi irrinunciabile allo scopo di contenere i costi di realizzazione (almeno fino allo sviluppo della tecnica di piegatura a freddo del vetro [7, 9, 27, 4]) e per soddisfare il quale si è fatto ricorso a svariati metodi.

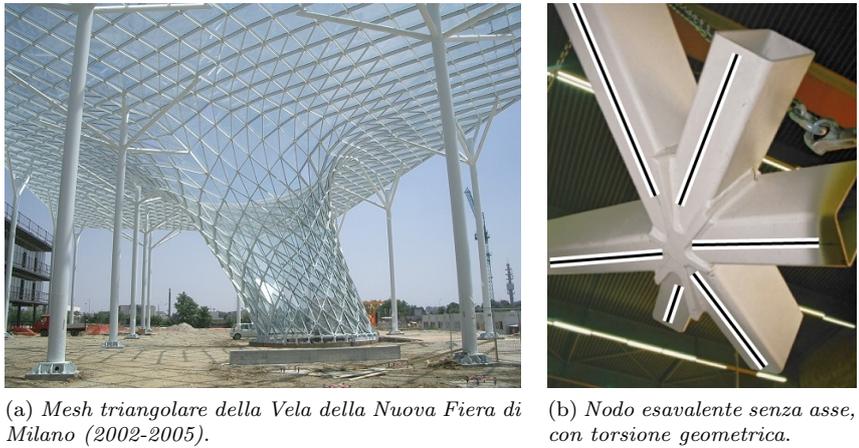


Figura 1: Mesh triangolari

[Scale-Trans Surfaces] Dapprima sono stati impiegati *metodi geometrici* con i quali si è tentato di approssimare le superfici di progetto, libere, con altre analoghe di tipo rigato, traslazionale, rotazionale e combinazioni delle ultime due con scalatura eccentrica. E' questo l'approccio adoperato da *Sclaich* nei propri progetti, almeno fino agli anni 2002-2005 ([14, 24]), coadiuvato peraltro dall'impiego di programmi di modellazione parametrica quali CATIA, i quali permettono l'implementazione dei vincoli di planarità e la modifica interattiva della geometria di progetto.

In seguito il panorama scientifico si è arricchito di ulteriori metodi di matrice squisitamente matematica, frutto della ricerca sul processo di razionalizzazione delle superfici libere. Queste procedure prevedono il ricorso ad *algoritmi* sostanzialmente finalizzati a disporre i vertici della mesh (quadrilatera nella fattispecie) in modo "opportuno" sulla superficie di progetto.

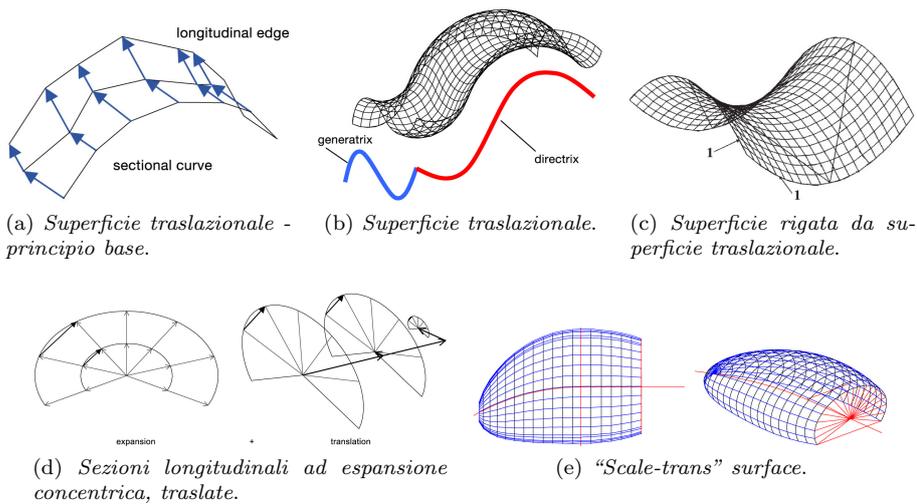


Figura 2: Mesh quadrilatere - metodo geometrico

[PQ perturbation e Mesh Coniche] Il primo contributo in ordine cronologico ([17]) introduce un algoritmo di perturbazione dei vertici che, applicato alla superficie data in maniera congiunta ed iterativa con ulteriori algoritmi generatori di mesh quadrilatere “grezze” quali Catmull-Clark o Doo-Sabin, consente di ottenere mesh quadrilatere con facce piane (*PQmesh*). Lo stesso articolo introduce i concetti di “*mesh conica*” e di “*mesh circolare*”, particolari tipi di *PQmesh* i cui offset, rispettivamente delle facce e dei vertici, generano ulteriori mesh dotate della *stessa connettività*. Vale a dire che le due mesh M e M' sono parallele (ovvero equivalenti dal punto di vista combinatorio - c'è una corrispondenza biunivoca tra vertici e lati delle due mesh) e la distanza di offset (rispettivamente delle facce e dei vertici) è costante lungo tutta l'estensione della mesh. Per inciso le mesh M e M' , per come sono state definite, vengono classificate sotto la categoria *offset meshes* (peraltro già menzionata nella sottosezione 3.1). Proprio in virtù di questa proprietà, che permette di realizzare una struttura di supporto geometricamente regolare e priva di torsione nei nodi, le mesh coniche risultano essere particolarmente convenienti se paragonate alle *PQmesh* ordinarie.

[TCD Fields] Sviluppi recentissimi ([29]) sfruttano la nozione di *reti di curve coniugate* per concepire mesh quadrilatere “grezze” sulla superficie di progetto, suscettibili di un successivo raffinamento rivolto ad imporre la planarità delle facce.

Le reti di curve coniugate consistono in due famiglie A, B di curve che coprono una data superficie Φ , tali che per ogni punto $\mathbf{p} \in \Phi$ c'è un'unica curva di A ed un'unica curva di B che passa per \mathbf{p} e, inoltre, le tangenti a tali curve in \mathbf{p} sono coniugate. Ciò comporta che l'involuppo dei piani tangenti una curva di una famiglia A è una *superficie sviluppabile*, le cui rette sono tangenti alle curva coniugata della famiglia B .

Le *PQmeshes* non sono altro che un gruppo di *PQstrips* (singole strisce di facce quadrilatere piane) contigue, ciascuna delle quali costituisce ovviamente una superficie sviluppabile discreta. Si intuisce dunque che le griglie di polilinee definite dalle *PQmesh* discretizzano le reti di curve coniugate.

È per tale motivo che, con procedimento logico inverso, le reti di curve coniugate possono essere adoperate come una guida per il progetto delle *PQmeshes*. Anzi, come affermato in [29]: “(...) *optimization of that mesh towards planarity in general succeeds if it follows a network of conjugate curves, and cannot be expected to succeed otherwise*”. Gli autori di questo articolo si dedicano dunque allo studio sistematico delle reti di curve coniugate: considerano la variabilità della

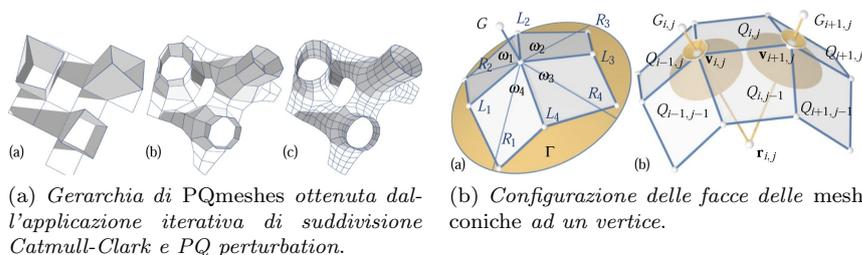


Figura 3: [17], lavoro di Liu et al.

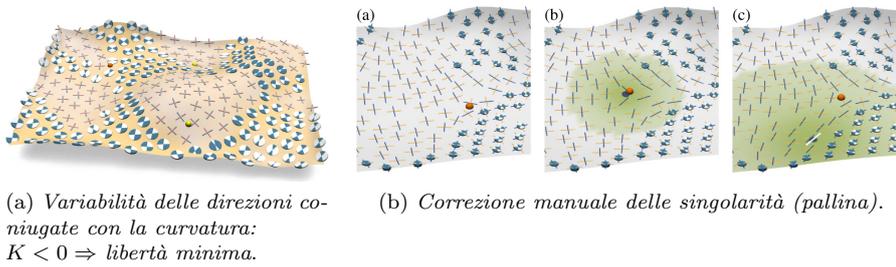


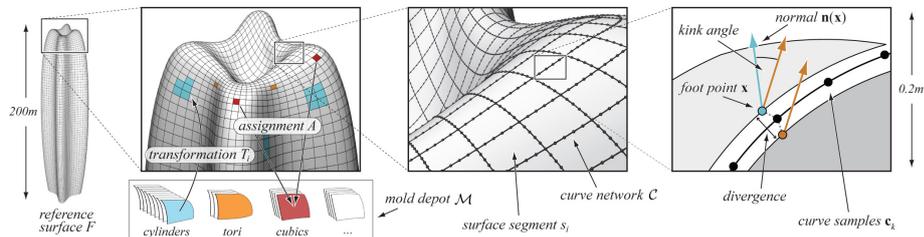
Figura 4: [29], lavoro di Zadavec et al.

condizione di trasversalità, la levigatezza, l’assenza di singolarità (che generano poi problemi di connettività nella mesh) ovvero la possibilità di confinamento delle stesse in zone predefinite della superficie.

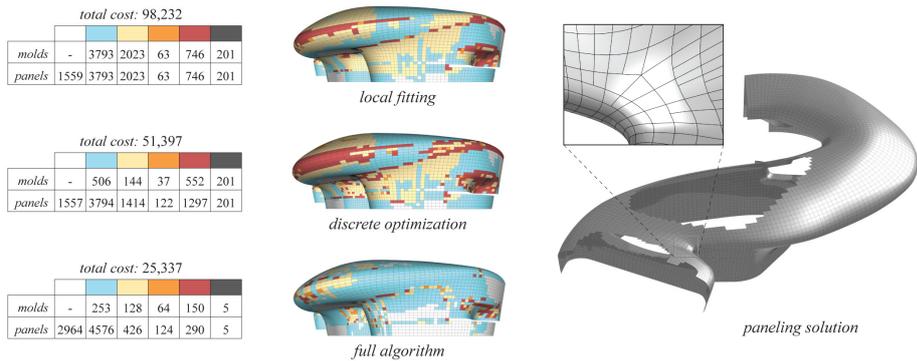
Una volta individuata una opportuna rete di curve coniugate vi si allinea una mesh quadrilatera, quindi si procede alla planarizzazione della medesima mediante perturbazione dei vertici secondo l’algoritmo riportato in [17].

[Paneling Algorithm] Ulteriori studi altrettanto recenti ([11]) affrontano in maniera sistematica il problema della realizzabilità delle forme libere su larga scala: è il caso degli “skyscrapers” e delle grandi superfici di copertura come ad esempio quella dello “Yas Viceroy Abu Dhabi Hotel”.

In questo approccio la rete di curve coniugate viene assunta quale dato di progetto, mentre ci si concentra in modo serrato sull’aspetto economico della fabbricazione. Il problema della corretta pannellizzazione diviene dunque di primaria importanza in quanto il costo complessivo dipende direttamente dalla dimensione dei pannelli medesimi, dal loro numero, dalla complessità della loro geometria e dal grado di reimpiego degli stampi. La sistematicità con cui gli autori svizzerano l’argomento è tale da portarli a definire compiutamente il *problema di pannellizzazione*: “*approssimare una superficie data con un determinato set di pannelli, cosicchè il costo totale di produzione è minimizzato mentre il risultato rispetta soglie predefinite di distanza e variazione angolare tra i singoli pannelli, nonchè riproduce fedelmente l’iniziale rete di curve coniugate*” (per motivi estetici). Questo viene risolto come un problema di ottimizzazione globale attraverso lo sviluppo e l’impiego di uno specifico *algoritmo di pannellizzazione*, che assume come dati di input la forma della superficie e la rete di curve coniugate, mentre fornisce quali dati di output il set di stampi necessari, la funzione di assegnamento (che associa ciascun pannello al relativo stampo), i parametri di formatura degli stampi stessi, le funzioni di allineamento (sostanzialmente trasformazioni di coordinate da locali a globali, attraverso cui disporre correttamente il pannello sulla superficie) e le polilinee di discretizzazione delle curve coniugate. Un algoritmo dalla potenza straordinaria che, se paragonato alle odierne tecniche di adattamento locale, permette di ridurre il costo globale in maniera drastica (anche del 50% ed oltre). Attualmente sono supportati solamente cinque tipi di pannelli: piani, cilindri, paraboloidi, tori e superfici cubiche, mentre le soglie di qualità (in termini di distanza e di variazione angolare tra i pannelli) possono essere assegnate solo in maniera globale. É però nella volontà degli autori di proseguire nello sviluppo dell’algoritmo, implementando nuovi stampi ed ulteriori possibilità per l’attribuzione selettiva e differenziata delle



(a) Terminologia e variabili usate nell'algoritmo.



(b) Confronto in termini di costo globale tra differenti metodi di pannellizzazione, a parità di grado di approssimazione della superficie iniziale.

Figura 5: [11], lavoro di Eigensatz et al.

tolleranze di approssimazione della superficie iniziale.

Rispetto alle tecniche precedentemente espone, questa prevede l'impiego di pannelli a curvatura variabile (nulla, singola e doppia): ciò implica al contempo un costo di costruzione più elevato ed un risultato estetico senz'altro migliore.

[Dstrips] L'approssimazione di una superficie libera con pannelli piani porta a superfici poliedrali, economiche ma dall'aspetto sfaccettato, mentre l'impiego di pannelli a curvatura variabile ([11]) conduce a risultati più aderenti alla forma iniziale (sebbene più costosi). Un compromesso tra questi due approcci è stato proposto da [21, Pottman et al.]: in questo articolo viene introdotto il concetto di *developable strip model*, l'equivalente semi-discreto di una rete di curve coniugate. Esse non sono altro che il risultato del raffinamento di una singola riga (o colonna) di una PQmesh, la quale a sua volta costituisce un modello discreto di una particolare rete di curve coniugate.

Le *developable strips* sono superfici a singola curvatura e, come dice il nome stesso, posseggono la notevole caratteristica di essere sviluppabili e dunque producibili a costi contenuti (con particolare riferimento al vetro). Allo stesso tempo essendo superfici curve conferiscono alla pannellizzazione un aspetto sufficientemente continuo e perciò realizzano un'ottima approssimazione della forma di progetto. Ciò si verifica a maggior ragione se la rete di curve coniugate da cui si parte (nella definizione delle *Dstrips*) è quella delle curvature principali: in tal caso i lati delle *Dstrips* seguono le linee di massima curvatura, mentre le rigature della striscia si allineano lungo le direzioni di curvatura minima.

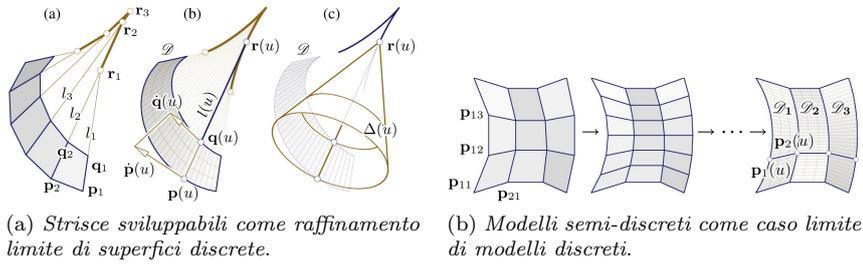


Figura 6: [21], lavoro di Pottman et al.

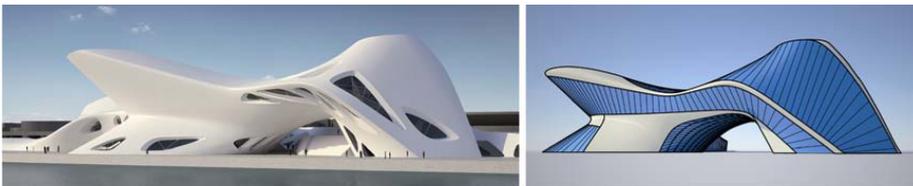
3.3 Superfici rigate

Le superfici rigate costituiscono una particolare categoria di superfici a semplice e doppia curvatura particolarmente appetibili allo scopo della pannellizzazione in ragione della possibilità di ottenere strutture di supporto semplificate, nonché di apportare economie nella realizzazione degli stampi (nel caso di materiali fragili quali il vetro o il calcestruzzo). Qualora poi il materiale di rivestimento sia di tipo flessibile, come ad esempio il metallo, il legno o i tessuti, il vantaggio nell'impiego di queste superfici è ancora più sensibile.

Nel più ampio filone dell'ottimizzazione a posteriori, alcuni autori ([12, 18]) hanno affrontato con successo il problema dell'approssimazione di intere facciate attraverso l'impiego di porzioni di superfici rigate, ovvero di più strisce di queste interconnesse in maniera opportuna e levigata. L'idea di base prende spunto dal constatare che tutte le superfici rigate hanno curvatura gaussiana negativa ($K \leq 0$). Da quest'idea scaturisce un algoritmo che procede per gradi:

1. dapprima calcola la curvatura gaussiana in ogni punto del modello e scarta tutte le regioni con curvatura gaussiana positiva;
2. dopodichè stima le direzioni asintotiche in un numero sufficiente di punti, sulle quali allinea le "rigature" (rette) di una superficie rigata di tentativo;
3. infine computa una versione migliorata della medesima superficie attraverso la minimizzazione della somma dei quadrati delle distanze tra i punti della superficie approssimante e quelli della superficie data.

Gli autori si accertano inoltre che la transizione da una striscia approssimante a quella contigua sia debitamente levigata: a tal fine richiedono la continuità parametrica del tipo C^k , ovvero che le derivate di ordine k (genericamente $k = 1; 2$) delle due superfici coincidano nei punti di bordo.



(a) Progetto del Museo di Arte Contemporanea di Cagliari.

Figura 7: [12], lavoro di Flory et al.

3.4 Mesh Esagonali

Le mesh esagonali costituiscono uno schema di suddivisione innovativo, ancora poco sfruttato eppure indubbiamente equipaggiato di una considerevole quantità di ottime proprietà. Tra queste si annovera senz'altro la *bassa valenza dei nodi* (3), che si traduce direttamente in semplicità di fabbricazione e, in maniera forse meno intuitiva, anche in una accresciuta flessibilità verso la possibilità di definire *mesh parallele* (per una definizione immediata vedi la sottosezione 3.2 a pagina 6; nella sottosezione 3.1 a pagina 4, punto 4 dell'elenco, ne vengono inoltre specificate le proprietà).

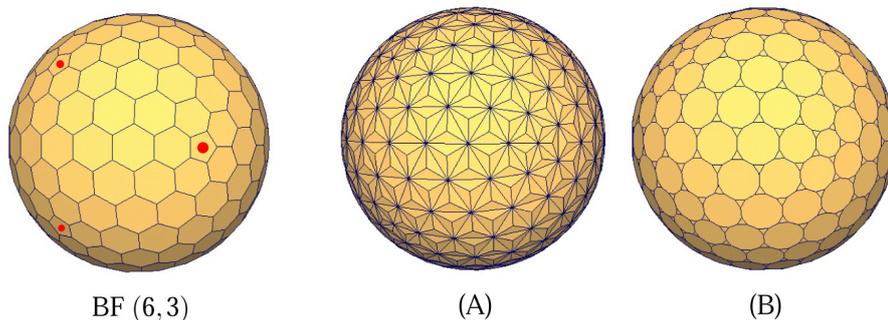
[Dualità Topologica] Una visione di più ampio respiro, circostanziata da una solida teoria matematica ([2]), può ulteriormente aiutare ad inquadrare la portata straordinaria del modello esagonale:

1. una *regione topologica* in una superficie S è un sottoinsieme $R \subseteq S$ ottenuto come chiusura della sua parte interna, il cui bordo è costituito da un numero finito di *curve di Jordan* (curve piane chiuse) disgiunte;
2. una *regione topologicamente regolare* è una regione (si suppone suddivisa in poligoni, non necessariamente piani) dove tutti i vertici hanno la stessa valenza e tutte le facce hanno lo stesso numero di lati. Il *simbolo di Schlafli* (n, m) è usato per caratterizzare queste regioni, dove n è il numero dei lati per faccia e m la valenza dei vertici.
Se poi “rilassiamo” la condizione di regolarità possiamo ottenere *regioni topologicamente semi-regolari*, in cui tutte le facce o tutti i vertici, ma non entrambi contemporaneamente, hanno la stessa struttura topologica;
3. solo le superfici di genere-1 (ovvero quelle con 1 ed 1 solo “buco”, come il toro ad esempio) possono essere suddivise usando solo regioni topologicamente regolari. Gli altri tipi di superfici non possono essere suddivise impiegando *solo* regioni topologicamente regolari: al limite possono essere suddivise con l'unione di più “pezzi” di regioni topologicamente regolari;
4. **esistono solo 3 tipi di regioni topologicamente regolari:** $(3,6)$, $(4,4)$, e $(6,3)$.

Quest'ultima affermazione è particolarmente densa di significato in quanto svela il “calibro” delle mesh esagonali. Il lettore avrà già avuto modo di notare come il numero $(3,6)$ stia a simboleggiare il modello di meshatura triangolare, il numero $(4,4)$ lo schema quadrilatero, mentre per il numero $(6,3)$ manca ancora il corrispettivo in termini di modelli di suddivisione di superfici (architettoniche). Lo stesso articolo ([2]) mette inoltre in evidenza la *proprietà di dualità* insita nelle tre succitate regioni topologicamente regolari:

1. le regioni $(3,6)$ sono duali delle regioni $(6,3)$, ovvero sussiste una corrispondenza biunivoca tra le facce dei triangoli della prima regione ed i vertici della seconda e viceversa;
2. la regione $(4,4)$ è autoduale.

Questa proprietà risulta estremamente utile per la definizione di schemi di suddivisione in mesh esagonali a partire da una meshatura iniziale di tipo triangolare (per tale motivo gli operatori duali, capaci di creare mesh duali, vengono detti *remeshing operators*).



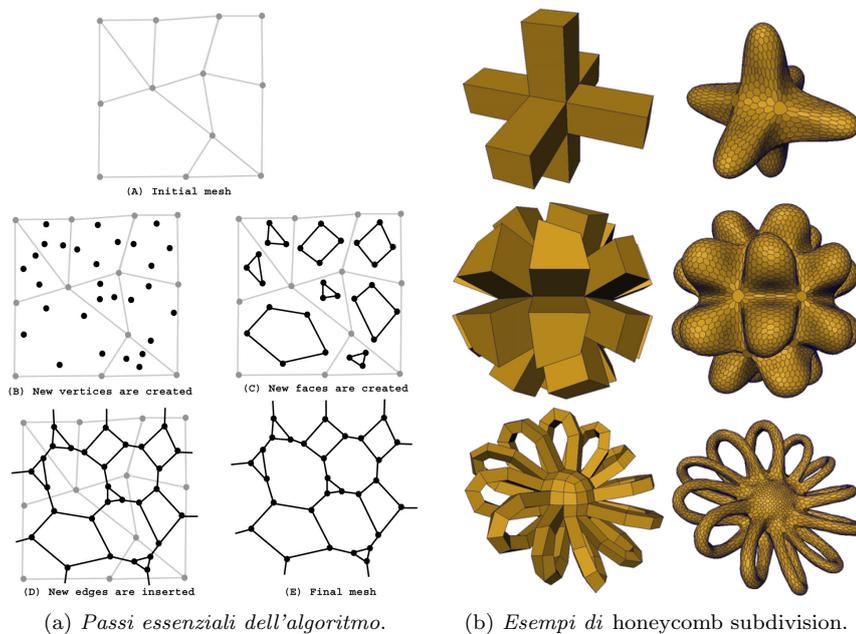
(a) *Superficie di genere-0, regione topologica semiregolare (vertici tutti della stessa valenza, facce con diverso numero di lati).*

(b) *Mesh duali: la (B) è ottenuta tramite l'applicazione di un operatore di remeshing alla regione topologicamente semi-regolare (A).*

Figura 8: [2], lavoro di Akleman E. e Mandal E.

[Honeycomb Subdivision] Sono gli stessi autori poi, in un secondo momento ([1]), ad introdurre un opportuno operatore di remeshing capace di produrre mesh duali dello schema triangolare: lo chiamano *Honeycomb Subdivision* per la forte somiglianza tra il nido d'api e le regioni topologicamente semi-regolari che questo schema produce.

Dopo la prima iterazione dell'algoritmo tutti i vertici diventano trivalenti, mentre il numero di elementi con più o meno di 6 facce resta costante durante i successivi raffinamenti della mesh. In Figura 9(a) viene data un'illustrazione



(a) *Passi essenziali dell'algoritmo.*

(b) *Esempi di honeycomb subdivision.*

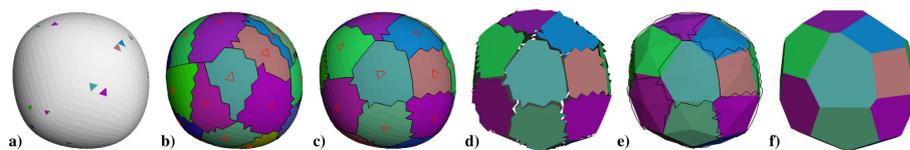
Figura 9: [1], lavoro di Akleman E. e Srinivasan V.

sommatoria dei criteri di funzionamento del suddetto algoritmo. È interessante notare inoltre come la *honeycomb subdivision* crei mesh dall'aspetto sorprendente (vedi Figura 9(b)), somiglianti a strutture effettivamente presenti in natura. È pure rilevante è, alla luce di quanto emergerà nel seguito, la forma convessa e non degenerare dei pannelli ubicati in zone di curvatura gaussiana negativa.

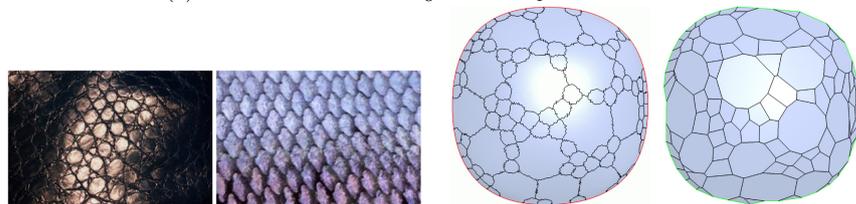
[Un Metodo Euristico] Altri autori ([6]) affrontano il problema generale della discretizzazione delle superfici con un approccio nettamente più euristico. Assumono quale vincolo di progetto la necessità di realizzare pannelli piani, per di più organizzati spazialmente in maniera da semplificare la realizzazione della sottostruttura e dei nodi. Riescono in conclusione a realizzare un algoritmo capace di adattare pannelli poligonali piani a superfici di input arbitrarie, garantendo all'utente il controllo esatto del numero di tali pannelli e sommario della forma degli stessi. Esso genera dapprima una triangolazione della superficie, quindi sceglie casualmente n (n è specificato dall'utente) triangoli attorno ai quali iniziare l'aggregazione dei triangoli contigui. A questo punto approssima ogni raggruppamento con un piano interpolante: le intersezioni di tali piani costituiscono i lati della mesh definitiva. La fase di raggruppamento (*clustering*) può essere gestita parzialmente dall'utente mediante la scelta di un'arbitraria metrica di aggregazione.

Il risultato dell'algoritmo è soddisfacente nelle zone a curvatura gaussiana positiva, mentre laddove $K \leq 0$ la forma dei pannelli diviene concava (*bowtie shaped*, ovvero a farfallino), inconsueta e di non facile realizzazione. Il carattere sostanzialmente euristico dell'algoritmo emerge con chiarezza al termine della procedura, quando ci si chiede se è possibile suddividere una data superficie di genere qualunque, con n pannelli piani di una prescritta topologia. La risposta al quesito non è nota: si può solo osservare in maniera empirica che i pannelli generati dall'algoritmo posseggono forma generalmente irregolare a sei lati.

Per tale motivo questo algoritmo, per i suoi caratteri di versatilità e semplicità d'uso, pare più utile come strumento di analisi e sperimentazione piuttosto che per il progetto definitivo della pannellizzazione.



(a) *Passi essenziali dell'algoritmo di pannellizzazione.*



(b) *Motivi di suddivisione di superfici in natura (rispettivamente pelle di elefante e di serpente).*

(c) *Simulazione delle suddivisioni naturali: è evidente la possibilità di controllo dell'algoritmo da parte dell'utente.*

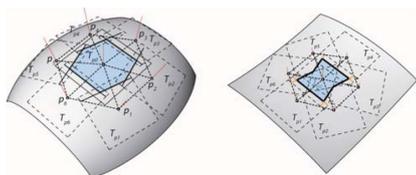
Figura 10: [6], lavoro di Cutler B. e Whiting E.

[TPI Algorithm] Un algoritmo ideato con l'obiettivo specifico di realizzare suddivisioni di superfici arbitrarie in pannelli piani esagonali è il *TPI - tangent plane intersection* ([26]). Anche in questo caso il punto di partenza è costituito da una meshatura della superficie con un motivo triangolare. Stavolta però la successiva suddivisione in esagoni non avviene nè tramite operatori duali, nè tramite interpolazioni lineari di raggruppamenti di triangoli: ciascun vertice della triangolazione rappresenta il punto di contatto tra un piano tangente alla superficie e la superficie medesima. L'intersezione dei tre piani passanti per i tre vertici di uno stesso triangolo, genera un vertice del ricercato pannello esagonale.

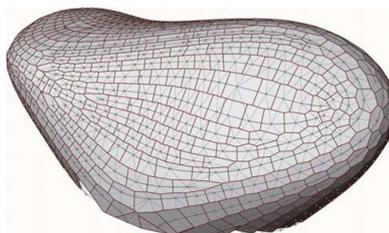
Pertanto è banale individuare nella triangolazione preliminare il momento cruciale dell'intera procedura. Al momento non è noto un metodo capace di stabilire a priori la bontà o meno di una determinata triangolazione; è per tale motivo che questa non viene elaborata a priori, bensì il posizionamento dei vertici sulla superficie avviene in maniera progressiva ed iterativa, dopo che è stata valutata la qualità dei pannelli già ottenuti. Un approccio promettente pare inoltre quello di posizionare i vertici dei triangoli lungo le linee di minima curvatura.

Analogamente a quanto accade con altri algoritmi generatori di pannelli esagonali ([6]), anche attraverso l'impiego del *TPI* si ottengono pannelli la cui forma varia in ragione del valore assunto dalla curvatura gaussiana: dove $K > 0$ il pannello è esagonale convesso, dove $K < 0$ è esagonale concavo (*bowtie shaped*), mentre quando $K = 0$ esso degenera in un rettangolo.

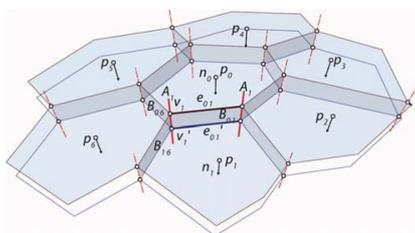
L'autore inoltre tiene a sottolineare che tra i vantaggi insiti nella tecnica di pannellizzazione esagonale, oltre alla nota possibilità di creare *offset meshes*, sussiste anche l'opportunità di realizzare strutture di supporto tridimensionali monolitiche come quella riportata in Figura 11(d).



(a) Pannelli esagonali generati dall'algoritmo TPI in funzione della curvatura.



(b) Esempio di superficie completamente meshata dal TPI.



(c) Offset mesh esagonale da TPI: piani di simmetria per le travi e assi nei nodi.



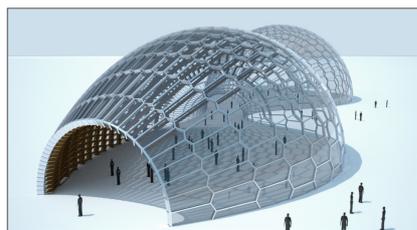
(d) Esempio di struttura di sostegno tridimensionale monolitica.

Figura 11: [26], lavoro di Troche C.

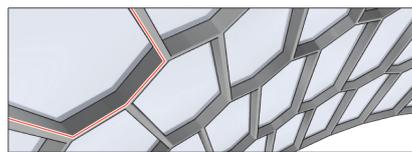
[EOmeshes] Altri autori giungono a definire metodi di suddivisione di superfici in pannelli esagonali per via del tutto indiretta, in certi casi addirittura come risultato di una ricerca indirizzata a problemi di diverso genere. È il caso di [20, Pottman et al.], che si pongono quale obiettivo quello di investigare una particolare categoria di offset meshes: le *edge offset meshes* (EOmeshes), ovvero motivi di suddivisione che posseggono mesh parallele in cui i lati delle facce si mantengono a distanza costante per tutta l'estensione della mesh. Come è immediato intuire infatti le superfici discrete, al contrario di quelle continue, possono disporre di tre tipi di offset: rispettivamente offset dei vertici, delle facce e dei lati della mesh. Le mesh che dispongono di EO in particolare sono estremamente interessanti in quanto permettono di realizzare una struttura di supporto con travi di altezza costante, dotate di piani di simmetria che si intersecano in un unico asse in corrispondenza dei nodi.

In questo articolo ([20]) vengono studiati di pari passo sia il problema di approssimazione che quello di progetto con EOmeshes: il prodotto della ricerca consiste nella constatazione che le EOmeshes sono una categoria estremamente restrittiva, ancor più delle sorelle mesh coniche e circolari, cosicché di fatto in generale non è possibile impiegarle per approssimare una superficie arbitraria. Ci si concentra piuttosto sulla definizione di alcune EOmeshes fondamentali che, sottoposte all'applicazione di opportune trasformazioni geometriche (nello spirito proprio della disciplina del *form-finding*), possono generare superfici idonee per propositi architettonici.

Quello che ne emerge è che le mesh esagonali, con facce piane e vertici di valenza tre, sono più flessibili ed hanno migliori proprietà di approssimazione di una data superficie rispetto alle gemelle quadrilatere. Anche in questo caso nelle zone della superficie con curvatura gaussiana negativa i pannelli, ancora esagonali, assumono forma concava.



(a) Superficie Free-form realizzata con EOmeshes.



(b) Particolare della struttura di supporto con travi ad altezza costante.



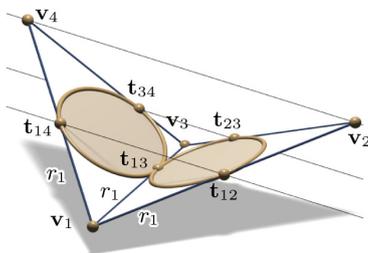
(c) Creazione di una superficie free-form M' dotata della proprietà di edge offset, ottenuta applicando una trasformazione di Laguerre al poliedro di Koebe con meshatura esagonale.

Figura 12: [20], lavoro di Pottman et al.

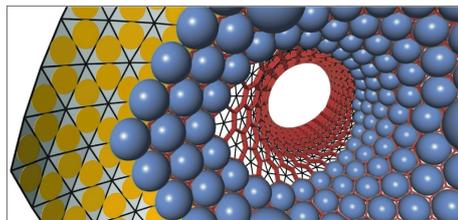
3.5 Mesh Ibride

[CPmeshes] Ancora una volta una (congrua) triangolazione preliminare della superficie di progetto può condurre ad una mesh duale dalle proprietà formidabili. È il caso delle *circle packing meshes* (CPmeshes), ovvero di quelle mesh triangolari dotate di cerchi inscritti che si toccano reciprocamente in corrispondenza dei lati dei triangoli che li contengono. Queste mesh dispongono di una “geometria ricca” e permettono di coprire la superficie con una notevole varietà di *strutture derivate*: motivi circolari, sferici, esagonali, nonché ibridi (ad esempio triangolari-esagonali). L’unica limitazione delle CPmeshes risiede nella topologia delle superfici da coprire: quelle idonee ad ospitarle sono infatti unicamente i cilindri ed i tori. Tuttavia queste superfici sono frequenti in architettura e, qualora ce ne fosse la necessità, si può anche far ricorso a numerose tecniche per la computazione di versioni approssimate delle CPmeshes.

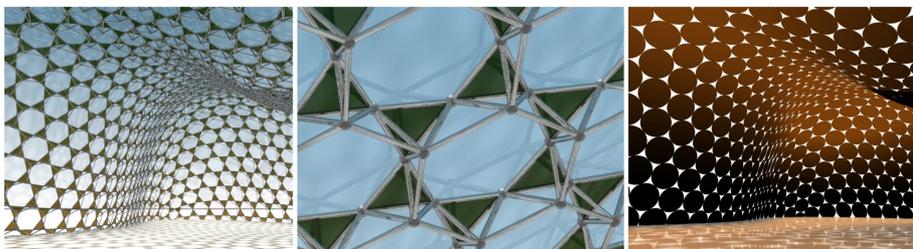
Tra le strutture derivate di maggior rilievo dobbiamo senz’altro menzionare le mesh con pannelli esagonali, purtroppo non piani, ottenuti unendo i centri dei cerchi inscritti. Di estremo interesse sono poi le *mesh ibride* triangolo-esagono (*tri-hex meshes*), ottenute unendo i punti di contatto tra i cerchi inscritti nella CPmesh: attorno ai nodi si configurano gli esagoni mentre i “buchi” restanti assumono forma triangolare. Queste mesh dispongono di pannelli piani, sono estremamente flessibili dal punto di vista progettuale e pregevoli secondo quello strutturale, in quanto realizzano nodi privi di torsione geometrica. Gli esagoni che si ottengono inoltre hanno forma piuttosto regolare, minimamente variabile nello spazio. Ma il punto di forza di queste mesh ibride è senza dubbio la possibilità di inserire pannelli esagonali, convessi e quasi regolari, perfino nelle zone con curvatura gaussiana negativa ($K \leq 0$), risultato assolutamente irraggiungibile con le mesh esagonali pure.



(a) Coppia di triangoli adiacenti in una CPmesh.



(b) Vista d'insieme di alcune delle possibili strutture derivabili da una CPmesh.



(c) Esempio di Tri-Hex mesh.

Figura 13: [23], lavoro di Schiftner et al.

4 Proposte per una progettazione integrata

Come si è avuto modo di capire, la materia della progettazione delle forme libere è tuttora in evoluzione e suscettibile di ulteriori sviluppi. Proprio negli ultimi anni la ricerca di settore ha conquistato traguardi estremamente interessanti, che se da un lato permettono di dialogare con forme sempre più arbitrarie e personalizzabili, dall'altro contribuiscono ad aumentare la complessità del processo progettuale. Ciò si è tradotto frequentemente in una acutizzazione della discrasia, peraltro connaturata alla disciplina (eccetto rari casi, vedi [14]), tra la fase di concezione geometrica delle forme medesime e quella della loro ingegnerizzazione. Sarebbe indubbiamente ragionevole e vantaggioso cercare di riunire questi due momenti, dar loro un'unica veste, sì da ottenere un risultato "ottimo" sotto vari punti di vista, altrimenti non conseguibile con tecniche di razionalizzazione a posteriori.

La sfida è tutt'altro che banale, anche perchè richiede la collaborazione di attori con competenze assai variabili: architetti, matematici, informatici, ingegneri, tecnici esperti dei materiali di pannellizzazione. La soluzione più appropriata a questo problema multidisciplinare pare quella di elaborare uno strumento di progettazione integrato, idealmente omnicomprensivo, da porre ad uso e consumo della figura principe del progetto: l'architetto. Un tale dispositivo dovrebbe compendiare al proprio interno tutti i vincoli di natura tecnica, tecnologica ed economica, che direttamente o indirettamente condizionano il progetto medesimo. Così facendo il disegno finale risulterebbe effettivamente "ottimo a priori" sotto svariati profili e non richiederebbe tutti quegli sforzi che, allo stato attuale, i tecnici approfondono in quella fase che prende il nome di "razionalizzazione" del progetto.

Parafrasando per l'ennesima volta l'Arch. Baldassini [3]: *"Free-form design that is sustainable in terms of technologies, costs and aesthetics is in the foreseeable future."* Queste parole confermano che un simile strumento può essere realizzato in tempi brevi. In particolare una strada specifica pare percorribile con successo: quella dell'implementazione di convenienti algoritmi su codice di calcolo, da integrare successivamente sotto forma di "plug-in" in programmi di modellazione CAD parametrico/associativi. I programmi parametrici sono da tempo impiegati nell'ambito meccanico e recentemente hanno trovato applicazione anche nel campo dell'architettura e del design. La loro utilità sta nel poter implementare grandezze relative (ad altre), nel poter introdurre vincoli dimensionali a loro volta funzione di specifiche quantità interne al disegno, ed in generale nella possibilità di effettuare operazioni guidate da opportuni parametri o formule. L'associatività è una funzione ulteriore che permette appunto di impostare una relazione di associazione tra due o più grandezze: tipici esempi sono il modello tridimensionale e le proiezioni bidimensionali (che dunque vengono create automaticamente), collegamenti funzionali tra oggetti distinti del modello etc... Tutte queste caratteristiche rendono di fatto *interattiva* la progettazione in quanto permettono di esplorare in maniera pressochè immediata diverse possibili configurazioni geometriche, tutte rispettose dei vincoli interni al progetto stesso (rapporti tra le parti, posizioni reciproche, dimensioni assolute, punti fissi etc...), semplicemente modificando il valore numero dei parametri predefiniti.

In quest'ottica perciò, compito dell'ingegnere strutturista è quello di elaborare metodi algoritmici capaci di guidare il progettista verso una soluzione che sia

soddisfacente sotto il profilo strutturale. Tra i molteplici modi in cui questo obiettivo può essere raggiunto, due mi paiono particolarmente convenienti:

1. interfacciare i suddetti CAD parametrici con programmi FEM. Ciò permetterebbe di condurre analisi statiche, seppur rozze e preliminari, in maniera interattiva e soprattutto immediata (è questa la forza del metodo). Così facendo le varie forme potrebbero essere confrontate con un criterio diverso da quello puramente estetico e le scelte verrebbero quindi effettuate in maniera più consapevole;
2. sviluppare un algoritmo che, attraverso una rielaborazione dei concetti della statica grafica, permetta al progettista di esplorare le distinte possibili configurazioni di equilibrio di un involucro reticolare (*grid shell*) compreso entro una frontiera limite determinata dal progettista stesso. Il metodo è totalmente grafico e lascia piena libertà all'operatore di disegnare i percorsi resistenti, nonché di scegliere la topologia della mesh con la quale la *grid shell* discretizza l'involucro.

Questo procedimento è apparentemente molto potente e può anche fungere da ispiratore di nuove inesplorate geometrie.

La prima procedura assume come dato di input una forma predefinita e la analizza al fine di giudicarne la validità sotto il profilo statico. Il processo viene iterato più volte, indifferentemente in maniera manuale o automatica, finché non si giunge all'individuazione di una configurazione ritenuta accettabile. Il secondo metodo invece compone molteplici nuove geometrie tridimensionali come conseguenza di indicazioni blande da parte dell'operatore.

Per tale motivo la prima tecnica può essere classificata come “*ottimizzazione di forma*”, mentre la seconda va sotto il nome di “*ottimizzazione topologica*”.

4.1 Algoritmi di Ottimizzazione di Forma

[2D Parametric Graphic Statics] I metodi descritti nell'articolo [16] rappresentano un primo passo verso il progetto strutturale “parametrico”, ovvero redatto con l'impiego di software CAD parametrici. L'obiettivo è quello di integrare considerazioni di carattere statico già dal momento di definizione della forma, impiegando i metodi propri della statica grafica. Con essa infatti i problemi strutturali possono essere risolti per via geometrica, divenendo di fatto “problemi di forma”.

Viene perciò introdotto un metodo grafico capace di generare una trave che, grazie alla propria forma, sotto il carico di progetto (peso proprio) presenta i correnti soggetti a solo sforzo assiale. È dunque un metodo che sfrutta la relazione di reciprocità tra il diagramma di forma e quello delle forze e che irrimediabilmente dà riprova del fatto che le tecniche della statica grafica possono essere impiegate sia per il calcolo che per il progetto delle strutture.

Quindi viene proposto un esempio di modello parametrico che integra vincoli di carattere strutturale, tramite l'impiego degli strumenti della statica grafica precedentemente esposti. Tale modello è dotato di quattro parametri: numero di travi, segmenti per trave, forza nei correnti e fattore di scala per il peso proprio. La modifica del valore numerico degli stessi permette l'esplorazione intuitiva delle varie alternative progettuali, anche grazie alla contestualità tra l'input di modifica e la visualizzazione della stessa.

È dunque possibile studiare le implicazioni strutturali delle scelte di forma.

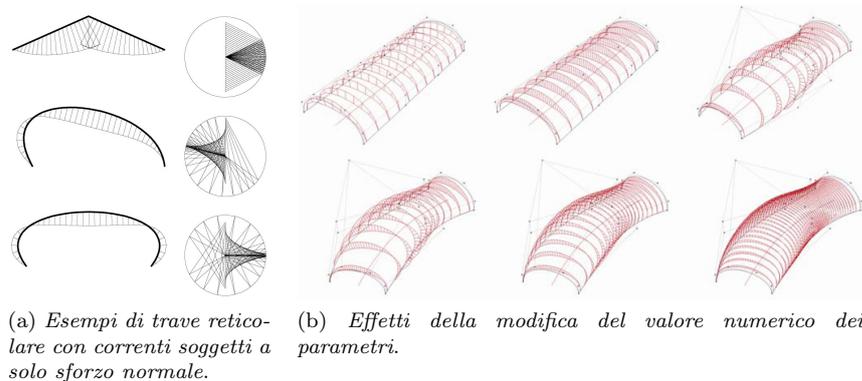


Figura 14: [16], lavoro di Lachauer L. and Kotnik T.

[Thin Shell Model] Altri autori ([22]) propongono un metodo capace di approssimare una forma data con mesh piane (PQmeshes), nonchè di orientare la struttura di supporto verso le direzioni di massimo sforzo (ovvero di massima elongazione). La procedura si compone di tre passi successivi:

1. trattare la superficie di progetto come un continuo, un guscio, da sottoporre ad analisi agli elementi finiti. Da questa si ottengono i campi vettoriali delle direzioni di massimo sforzo;
2. implementare una mesh (nella fattispecie quadrilatera) allineata con le suddette direzioni: queste rappresentano approssimativamente una famiglia di una delle possibili coppie di curve coniugate. Tale circostanza pone due ordini di vantaggi:
 - (a) miglioramento del comportamento strutturale della mesh dovuto alla disposizione del materiale all'incirca lungo le linee isostatiche;
 - (b) possibilità concreta di ottenere mesh piane: la planarità infatti può essere attesa se e solo se la mesh segue una rete di curve coniugate (per la definizione della famiglia di curve coniugate alla precedente si veda [29, TCD fields]).
3. ricerca della planarità delle facce della PQmesh attraverso l'applicazione dell'algoritmo di perturbazione dei vertici di [17, Liu et al.].

É evidente che l'allineamento della struttura portante alle direzioni di massima elongazione non potrà essere raggiunto perfettamente in maniera indistinta sull'intera superficie. A tale scopo è opportuno definire una soglia limite di elongazione, al di sotto della quale l'allineamento può essere trascurato (vedi Figura 15(a)).

L'accuratezza conseguibile con tale metodo è buona, all'incirca pari al 90 % di quella ottenibile con l'impiego delle mesh coniche (esse garantiscono la miglior approssimazione possibile, ma in generale non possono essere impiegate per lo scopo in esame in quanto vincolate a seguire le curvature principali).

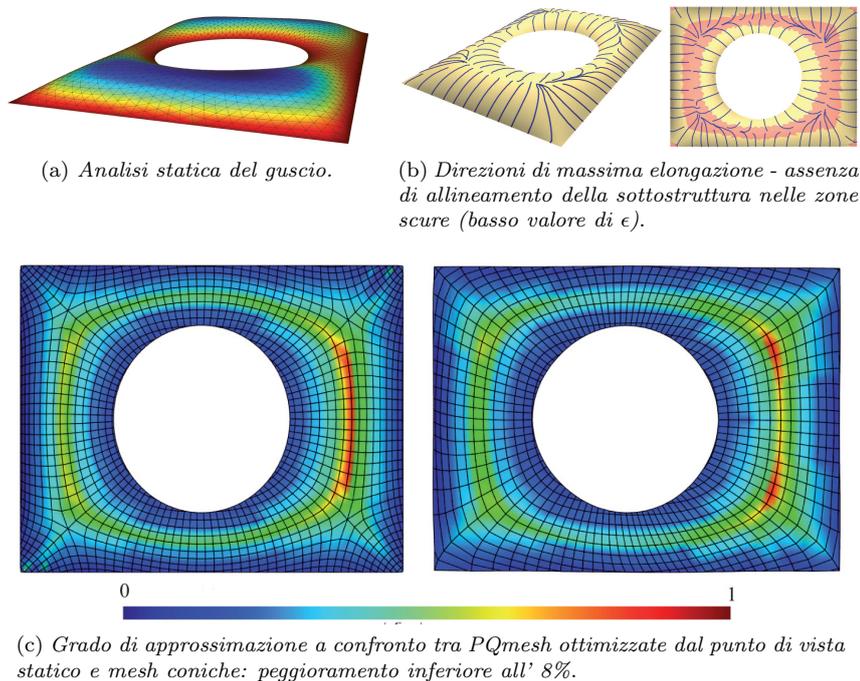


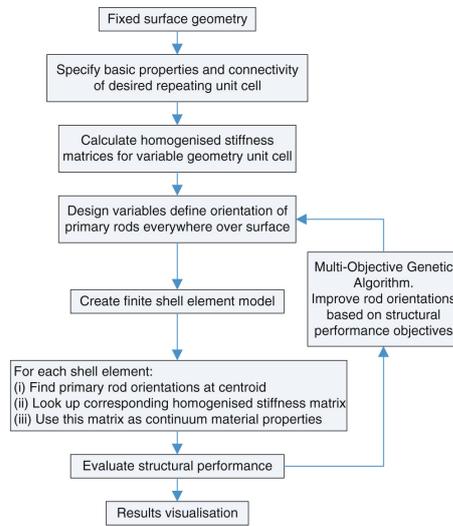
Figura 15: [22], lavoro di Schiftner A. and Balzer J.

[Multi Objective Optimization] Il metodo descritto da [28, Winslow et al.] opera esattamente nello spirito degli algoritmi di ottimizzazione di forma: esso costituisce uno strumento per la definizione di strutture reticolari ottime sulla superficie di progetto. In Figura 16 sono riportati i passi essenziali di cui si compone l'algoritmo.

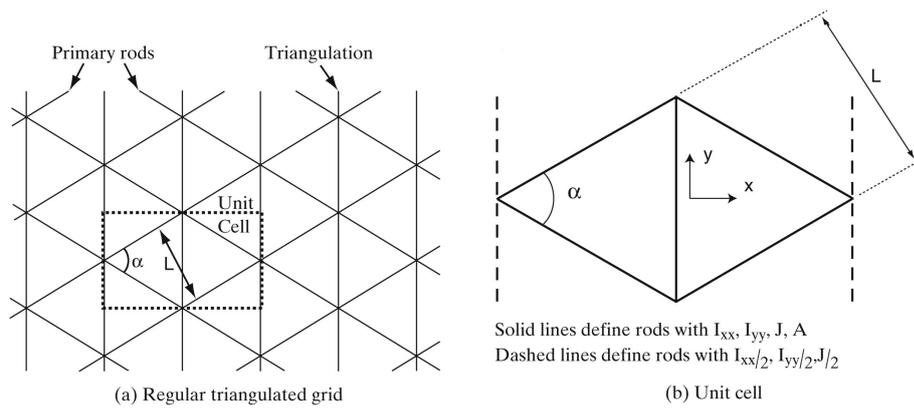
Come si vede parte dalla specificazione della geometria e delle proprietà inerziali della cella base della griglia, dopodichè ne calcola la matrice di rigidità locale. Una prima disposizione della mesh viene assegnata dal progettista. Quindi la superficie viene discretizzata in elementi finiti, per ciascuno dei quali vengono computate le direzioni dei due ordini principali di aste (è evidente il riferimento a maglie quadrilatera e/o triangolari). L'angolo α tra le due direzioni principali è di fondamentale importanza in quanto la sua conoscenza permette di aggiornare la matrice di rigidità (opportunamente computata per via parametrica) in maniera rapida; la direzione intermedia tra le due principali definisce l'orientamento del materiale anisotropo con rigidità equivalente alla struttura reticolare in esame. Il modello FEM viene dunque sfruttato per valutare il comportamento della struttura sotto diversi casi di carico.

Un elemento chiave di questo algoritmo è la definizione parametrica dell'orientamento delle direzioni principali delle aste della mesh. Questo accorgimento consente di esplorare una grande varietà di soluzioni progettuali differenti, senza per questo dover ricalcolare ed aggiornare la geometria (complessa) della griglia tridimensionale. Come risultato dell'algoritmo di ottimizzazione si hanno le proprietà del materiale anisotropo di un guscio continuo equivalente.

Allo stato attuale l'algoritmo permette di adottare qualunque tipo di cella base per la mesh globale, indifferentemente con topologia quadrilatera o triangolare.



(a) Descrizione del procedimento “MOGA”.



(b) Definizione della cella base per una mesh triangolare.

Figura 16: [28], lavoro di Winsolow P. et al.

Un’evoluzione ulteriore potrebbe arrivare a trattare anche mesh esagonali.

4.2 Algoritmi di Ottimizzazione Topologica

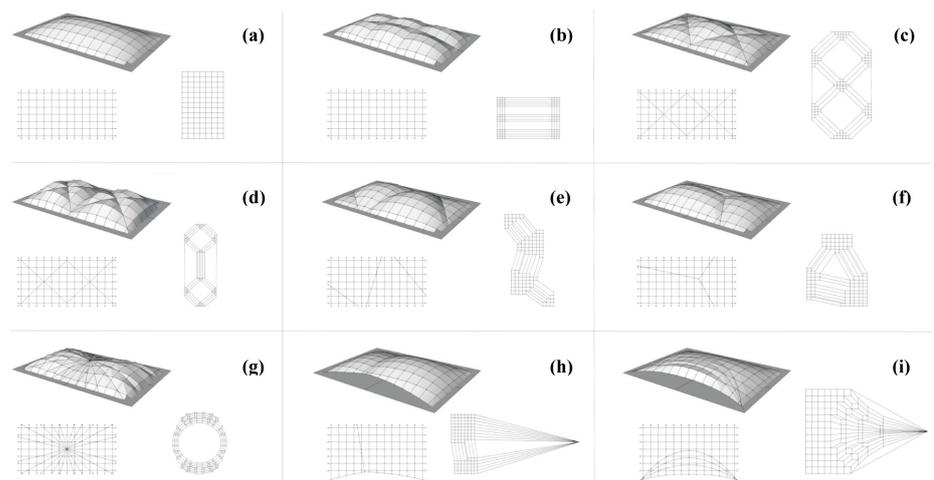
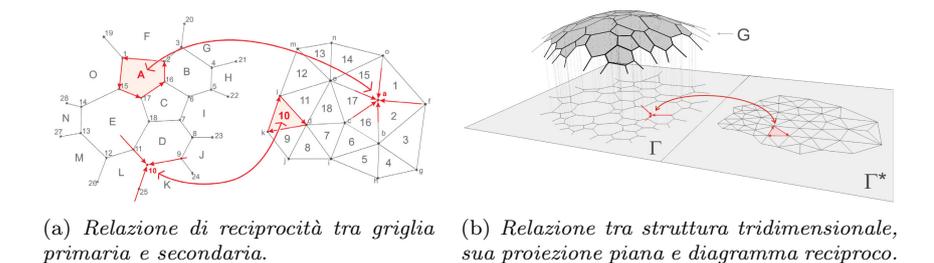
[**Thrust Network Analysis**] Nell’ articolo [5] viene presentata una rivisitazione intelligente ed interessante dei concetti della statica grafica, in un’ottica tridimensionale. Grande attenzione viene posta sul concetto base di *figure reciproche*.

Due figure (piane) sono reciproche quando: (1) consistono di un ugual numero di linee - (2) linee che si corrispondono nelle due figure sono parallele - (3) linee che si corrispondono nelle due figure e che convergono in un punto in una di queste, formano un poligono chiuso nell’altra.

Il concetto di reciprocità perciò lega indissolubilmente due diagrammi piani: il *diagramma di forma*, ovvero la proiezione orizzontale della struttura effettiva

tridimensionale, ed il *diagramma delle forze*, ovvero la rappresentazione visiva delle componenti orizzontali delle forze presenti nella struttura tridimensionale. Attraverso tale legame biunivoco è possibile operare ridistribuzioni di carico all'interno della struttura, attrarre forze verso linee di carico prestabilite, sperimentare differenti condizioni di supporto agli appoggi e così via. Il tutto in una maniera semplice ed intuitiva: è sufficiente ridisegnare o ritoccare la griglia primaria (diagramma di forma). L'algoritmo è stato infatti implementato su Matlab e Rhinoceros cosicché le modifiche possono essere effettuate attraverso semplici variazioni numeriche dei parametri, mentre la griglia secondaria (diagramma delle forze) viene ricomputata di volta in volta attraverso la risoluzione di due problemi consecutivi di ottimizzazione lineare.

Il *Thrust Network Analysis* è dunque un algoritmo efficace, attraverso il quale possono essere studiati di pari passo sia il problema della definizione della forma che quello della relativa capacità statica. Ogni tipo di mesh può essere impiegato; l'ambiente totalmente parametrico e l'automatizzazione del processo favoriscono altresì l'esplorazione di varie topologie di reti. Ciò permette anche di compiere analisi comparative tra le diverse soluzioni. L'intuitività del metodo garantisce inoltre un elevato livello di controllo del processo di form-finding da parte dell'utente.



(c) Esempi che mostrano la struttura tridimensionale e la relazione di reciprocità tra griglia primaria e secondaria.

Figura 17: [5], lavoro di Block P. and Ochsendorf J.

5 Conclusioni

In queste pagine è stata affrontata la tematica dell'ingegnerizzazione delle forme libere, tema estremamente attuale nel settore dell'architettura contemporanea. Dopo una panoramica sul problema e sugli approcci risolutivi attualmente in voga, è stata fatta una disamina dei possibili metodi di discretizzazione delle superfici, ordinati dal più tradizionale a quelli attualmente oggetto di ricerca. Successivamente l'attenzione è stata posta sul problema della dissociazione tra il momento della concezione delle forme e quello della successiva razionalizzazione, proponendo ragionevoli vie di riconciliazione. A tal fine sono stati descritti alcuni algoritmi che, opportunamente rielaborati e contestualizzati, potrebbero assurgere allo scopo.

Ciò che in definitiva emerge con chiarezza, a sintesi dell'intero percorso, è la natura duale del processo di ottimizzazione. Questa infatti può essere fatta a priori - ed in tal caso si configura come un problema di progetto - oppure può essere applicata a posteriori - ed allora si concretizza come un problema di approssimazione. È opportuno far notare che con il termine "ottimizzazione" ci si riferisce esclusivamente al problema dell'ottimizzazione del metodo di suddivisione della superficie ed alle sue implicazioni strutturali.

Per quanto concerne l'applicabilità dell'una o dell'altra "faccia" del processo di ottimizzazione ad un progetto specifico, si delineano a mio avviso due situazioni nettamente distinte, le quali necessitano di essere affrontate con due modalità altrettanto diverse:

1. *grandi progetti a forma libera* (vedi edifici interi e gli "skyscrapers"). La pannellatura di queste grandi superfici non può che essere affrontata attraverso l'impiego di sofisticati algoritmi capaci di associare ciascun pannello al relativo stampo, nonchè di garantire il rispetto delle dovute tolleranze di approssimazione (vedi [11]). La complessità progettuale e le esigenze sono tali per cui l'ottimizzazione va intesa nel senso di miglior approssimazione possibile della superficie data;
2. *coperture e facciate singole*. Le più modeste dimensioni e la presunta ridotta variabilità di curvatura e carichi applicati, lasciano spazio alla ricerca manuale dell'ottima forma geometrica. In questo contesto è ancora possibile ricercare l'intuizione capace di conferire un'eccezionale trasparenza dell'involucro, una ricercata eleganza formale della struttura di supporto o altre singolari proprietà. Questo a mio parere è il campo di applicazione proprio delle tecniche di ottimizzazione a priori.

In particolar modo ritengo che vada esplorato l'accoppiamento di certi fattori che, opportunamente abbinati, possono dar vita a progetti del tutto originali ed innovativi. In tal senso sono indubbiamente da menzionare i metodi di suddivisione delle superfici in pannelli esagonali, l'algoritmo *Thrust network analysis* e la tecnica di piegatura a freddo del vetro (*cold bending*).

Riferimenti bibliografici

- [1] Ergun Akleman and Vinod Srinivasan. Honeycomb subdivision. Visualization Sciences Program, Texas A&M University, 2003.
- [2] Ergun Akleman, Vinod Srinivasan, and Esan Mandal. Remeshing schemes for semi-regular tilings. *Proceedings of Shape Modeling International, Boston*, 1:–, 2005.
- [3] Niccolo Baldassini. Glazing technology: the hidden side of free-form design. *Advances in Architectural Geometry*, 1:41–44, 2008.
- [4] Jan Belis, Bart Inghelbrecht, Rudy Van Impe, and Dieter Callewaert. Experimental assessment of cold-bent glass panels. *Glass Performance Days, Tamglass*, 1:115–117, 2007.
- [5] Philippe Block and John Ochsendorf. Thrust network analysis: A new methodology for three-dimensional equilibrium. *J.IASS*, 48(3):167–173, 2007.
- [6] Barbara Cutler and Emily Whiting. Constrained planar remeshing for architecture. *Proceedings of the Graphics Interface, Montreal (Canada)*, 234 ACM Press:11–18, 2007.
- [7] Graham Dodd and Sebastian Thieme. Comparison of curved glass and cold bent panels. *Glass Performance Days, -:-*, 2007.
- [8] Stefano Lenci e Laura Consolini. *Percorsi per un metodo progettuale tra forma e struttura*. Aracne, 2007.
- [9] Mick Eekhout and Dries Staaks. Cold deformation of glass. *Glass Performance Days, -:-*, 2007.
- [10] Michael Eigensatz, Mario Deuss, Alexander Schiftner, Martin Kilian, Niloy J. Mitra, Helmut Pottmann, and Mark Pauly. Case studies in cost-optimized paneling of architectural freeform surfaces. *Advances in Architectural Geometry*, 1:–, 2010.
- [11] Michael Eigensatz, Martin Kilian, Alexander Schiftner, Niloy J. Mitra, Helmut Pottmann, and Mark Pauly. Paneling architectural freeform surfaces. *ACM Transactions on Graphics*, 29(3):–, 2010.
- [12] Simon Flory and Helmut Pottmann. Ruled surfaces for rationalization and design in architecture. In *Proceedings of the Conference of the Association for Computer Aided Design in Architecture (ACADIA)*, 2010.
- [13] Urs Fussler. Design by tool design. *Advances in Architectural Geometry*, 1:37–40, 2008.
- [14] James Glymph, Dennis Shelden, Cristiano Ceccato, Judith Musse, and Hans Schober. A parametric strategy for free-form glass structures using quadrilateral planar facets. *Automation in Construction*, 13:187–202, 2004.
- [15] Daniel Hambleton, Crispin Howes, Jonathan Hendricks, and John Kooymans. Study of panelization techniques to inform freeform architecture. *Glass Performance Days*, 1:239–243, 2009.

- [16] Lorenz Lachauer and Toni Kotnik. Geometry of structural form. In Cristiano Ceccato et al., editors, *Advances in Architectural Geometry 2010*, pages 193–203. Springer, 2010.
- [17] Yang Liu, Helmut Pottmann, Johannes Wallner, Young-Liang Yang, and Wenping Wang. Geometric modeling with conical meshes and developable surfaces. *ACM Transactions on Graphics*, 25:681–689, 2006.
- [18] Helmut Pottmann. Architectural geometry as design knowledge. *Architectural Design*, 80:72–77, 2010.
- [19] Helmut Pottmann, Sigrid Brell-Cokcan, and Johannes Wallner. Discrete surfaces for architectural design. *Curve and Surface Design (Avignon)*, 1:213–234, 2006.
- [20] Helmut Pottmann, Yang Liu, Johannes Wallner and Alexander Bobenko, and Wenping Wang. Geometry of multi-layer freeform structures for architecture. *ACM Trans. Graphics*, 26(3), 2007. Proc. SIGGRAPH.
- [21] Helmut Pottmann, Alexander Schiftner, Pengbo Bo, Heinz Schmiedhofer, Wenping Wang, Niccolo Baldassini, and Johannes Wallner. Freeform surfaces from single curved panels. *ACM SIGGRAPH*, 27(3):–, 2008.
- [22] Alexander Schiftner and Jonathan Balzer. Statics-sensitive layout of planar quadrilateral meshes. In Cristiano Ceccato et al., editors, *Advances in Architectural Geometry 2010*, pages 221–236. Springer, 2010.
- [23] Alexander Schiftner, Mathias Hobinger, Johannes Wallner, and Helmut Pottmann. Packing circles and spheres on surfaces. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 28(5):–, 2009.
- [24] Jorge Schlaich. New trade fair in milan - grid topology and structural behaviour of a free-formed glass-covered surface. *International Journal of Space Structures*, 20(1):–, 2005.
- [25] Soeren Stephan, Jaime Sanchez-Alvarez, and Klaus Knebel. Reticulated structures on free-form surfaces. *Proceedings of IASS Symposium in Montpellier*, 1:–, 2004.
- [26] Christian Troche. Planar hexagonal meshes by tangent plane intersection. *Advances in Architectural Geometry*, 1:57–60, 2008.
- [27] Laszlo I. Vakar and Marco Gaal. Cold bendable, laminated glass - new possibilities in design. *Structural Engineering International (SEI)*, 14(2):95–97, 2004.
- [28] P. Winsolw, S. Pellegrino, and S. B. Sharma. Multi-objective optimization of free-form grid structures. *Struct Multidisc Optim*, 40:257–269, 2010.
- [29] Mirko Zadavec, Alexander Schiftner, and Johannes Wallner. Designing quad-dominant meshes with planar faces. *Eurographics Symposium on Geometry Processing*, 29(5):1671–1679, 2010.