

Progettare Involti di Forma Libera: (2) - Ingegnerizzazione dell'Involturo

Davide Tonelli

Maggio 2013

1 Introduzione

Allo stato odierno la fase di *ingegnerizzazione dell'involturo* rappresenta l'unico momento del processo creativo dei progetti a forma libera effettivamente dominato da considerazioni razionali.

Il fascino, l'audacia e la libertà espressiva delle forme libere devono inesorabilmente confrontarsi con le difficoltà realizzative, talvolta con la pochezza delle maestranze e delle tecnologie costruttive a disposizione, quasi sempre con la limitatezza delle risorse finanziarie. Per tali ragioni ha origine, pressoché in maniera contestuale alla selezione del progetto, un suo lento processo di razionalizzazione. I passi fondamentali di tale percorso sono sostanzialmente due: la rielaborazione della superficie di progetto finalizzata alla sua suddivisione in pannelli discreti, e l'ideazione di un sistema portante in grado di sostenere l'involturo. Questi due momenti non sono sequenziali, ed anzi si condizionano in maniera reciproca e determinante: in particolar modo la scelta dello schema di suddivisione più opportuno (*il pattern*) riveste un ruolo essenziale in quanto, in dipendenza della particolare forma dell'involturo, è in grado di condizionare sensibilmente l'efficienza dell'intera sottostruttura.

La buona riuscita del processo di ingegnerizzazione è perciò di fondamentale importanza in quanto condiziona la *sostenibilità del progetto* in termini tecnologici, di gusto estetico e, non per ultimo, di costo. E' ciò che sostiene anche N. Baldassini in [2]: “(*...) the interest is shifted from the definition to the subdivision of the surfaces. Subdivision is the main point when (...) trying to couple glazing patterns with structural layouts. (...) Free-form design that is sustainable in terms of technologies, costs and aesthetics is in the foreseeable future. Mathematics, geometry, technology and production are all converging together.*”.

2 Il problema della Pannellizzazione

Il problema della pannellizzazione di superfici complesse non è banale, in quanto presuppone allo stesso tempo la disponibilità e la padronanza di potenti softwares informatici, di solide basi matematiche, di ottime conoscenze ingegneristiche nonché delle tecnologie e delle tecniche manifatturiere fruibili. Ad oggi il tema viene risolto attraverso lo sviluppo e l'implementazione di *algoritmi di suddivisione*: è perciò un approccio di tipo matematico, posto in essere mediante strumenti informatici avanzati, spesso sviluppati ad hoc per l'occasione.

Due sono dunque gli elementi chiave nel processo di pannellizzazione: il *pattern* adottato e l'*algoritmo di suddivisione* adoperato. Tra i patterns più frequentemente impiegati troviamo quelli triangolare e quadrilatero, in entrambe le varianti isotropa ed anisotropa, mentre di più recente applicazione è il pattern esagonale.

2.1 Mesh Triangolari

Le *mesh triangolari* presentano diversi vantaggi:

- un buon grado di approssimazione della superficie di input;
- facce piane;
- la disponibilità di molteplici algoritmi per la triangolazione di superfici, sviluppati nell'ambito della grafica 3D e dei computer games;
- un'intrinsica stabilità della struttura portante (la maglia triangolare è internamente isostatica).

Al contempo esse annoverano diversi svantaggi rispetto alle concorrenti:

- basso grado di trasparenza (per involucri vetrati);
- relativa pesantezza della struttura di supporto;
- torsione geometrica dei nodi;
- alta valenza dei nodi (6 per nodi regolari);

Un esempio notevole a livello nazionale di applicazione delle mesh triangolari è quello della Fiera di Milano [14] (Figura 1).



(a) *Mesh triangolare della Vela della Nuova Fiera di Milano (2002-2005).* (b) *Nodo esavalente senza asse, con torsione.*

Figura 1: Mesh triangolari

2.2 Mesh Quadrilateri

Le **mesh quadrilateri** sono più efficienti delle triangolari in termini di ridotta complessità dei nodi (la cui valenza scende da 4 a 6), di produzione semplificata dei pannelli, specie se di vetro, in virtù della maggiore ampiezza degli angoli. Esibiscono inoltre una trasparenza sensibilmente più marcata rispetto alle correnti, anche in virtù di una sottostruttura più leggera e meno ingombrante. A fronte di tali vantaggi la loro progettazione richiede maggior attenzione, sia dal punto di vista statico che geometrico. Basti pensare al grave inconveniente geometrico della possibile mancanza di planarità di un pannello quadrangolare. Per generare la mesh quadrilatera a partire da una superficie di progetto, tenendo conto al contempo di queste problematiche, sono stati sviluppati innumerevoli approcci. Nel seguito vengono brevemente elencati i principali.

[Superficie traslazionali, rotazionali, omotetiche e loro combinazioni]

Il loro impiego viene ben descritto in [6, 14]. Questo è un metodo di tipo puramente geometrico che permette di disegnare mesh quadrilateri con facce piane. La sua applicazione è macchinosa e richiede molta attenzione da parte dell'operatore; d'altro canto il suo impiego non richiede nè particolari abilità nè softwares specifici. È proprio per tale ragione che questo procedimento è stato uno dei primi ad essere impiegato nell'ingegnerizzazione delle forme libere (Figura 2).

[PQ Meshes] Sono meshes quadrilateri piane che vengono computate attraverso un'applicazione congiunta ed alternata di un algoritmo di suddivisione quadrilatera tipo Catmull-Clark e di un ulteriore algoritmo di perturbazione dei vertici descritto in [8] (Figura 3).

[Mesh Coniche e Circolari] Sono particolari tipi di PQ meshes, introdotte in [8], dotate di *face offset mesh* avente la *stessa connettività* della mesh madre (ovvero i piani di offset che definiscono la nuova mesh si incontrano ancora in

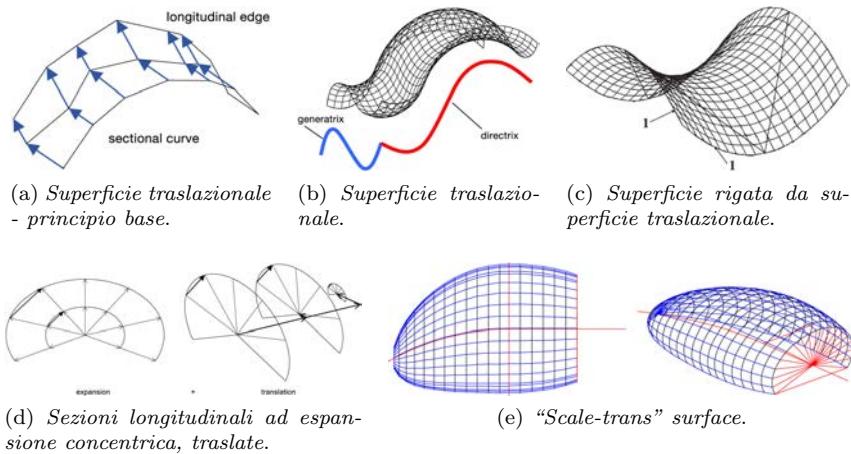


Figura 2: Mesh quadrilateri - metodo geometrico [6, 14].

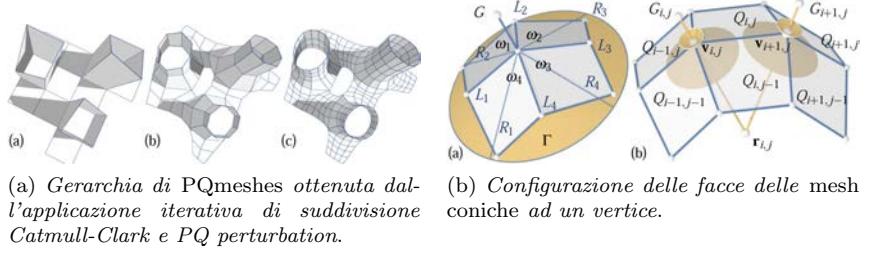


Figura 3: [8], lavoro di Liu et al.

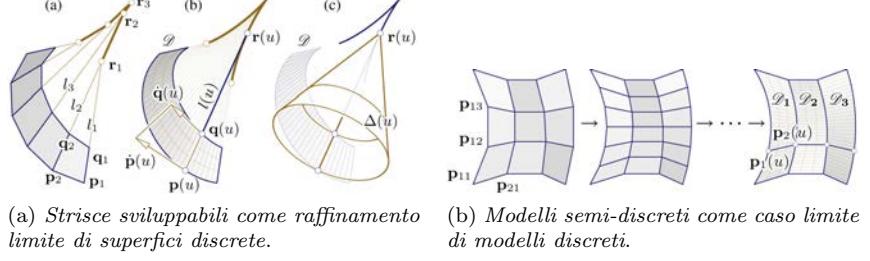


Figura 4: Pottman et Al. [11]

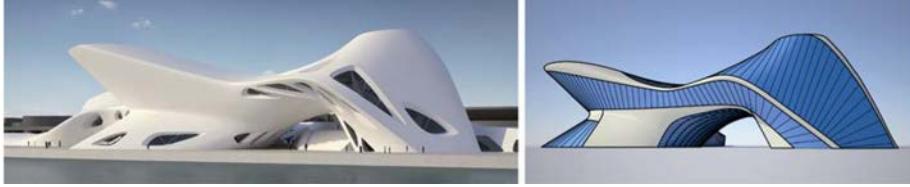
un punto comune). Ciò accade perché le facce della mesh in corrispondenza dei vertici regolari sono tangenti ad un cono di rivoluzione (Figura 3), il cui asse coincide perciò con la normale alla mesh nel vertice. Dunque tanto il vertice della mesh madre quanto quello della mesh figlia apparterranno al suddetto asse, ovvero alla normale.

Questa proprietà ha anche ulteriori risvolti: preso un lato della mesh, esso, il suo corrispondente nella offset mesh e i due assi dei coni agli estremi del lato giacciono su di un piano comune. In virtù di questo fatto le mesh coniche possono essere costruite con una *sottostruttura ortogonale* alla mesh medesima.

[Developable Strips] Rappresentano il raffinamento di una PQ mesh lungo una delle due direzioni. Le D-strips permettono di discretizzare la superficie di progetto con una superficie a singola curvatura (variabile in maniera discreta da striscia a striscia), e per come sono ottenute posseggono anche la particolare proprietà di essere sviluppabili, e dunque producibili a costi contenuti. L'innovazione forte rispetto alle PQ meshes risiede nel miglior grado di rappresentazione della superficie di progetto, che non pare più poliedrale bensì pressochè continua (Figura 4).

[Superfici Rigate] Questo approccio (descritto in [12, 10]), concettualmente antico ma di grande rilievo applicativo, consiste nell' approssimare la superficie con un *patchwork* di superfici rigate - ovvero con un insieme di porzioni di superfici rigate differenti, con le zone di transizione opportunamente levigate¹. Le superfici rigate sono interessanti in quanto sviluppabili, e dunque realizzabili facilmente a partire da elementi piani, ma hanno la forte limitazione di avere

¹si richiede continuità C^k , $k = 1, 2$ in genere.



(a) Progetto del Museo di Arte Contemporanea di Cagliari.

Figura 5: Flory et Al. [12]

ovunque curvatura gaussiana negativa ($K \leq 0$): potranno dunque approssimare unicamente le porzioni di superficie libera a curvatura negativa. La Figura 5 riporta un possibile esempio applicativo.

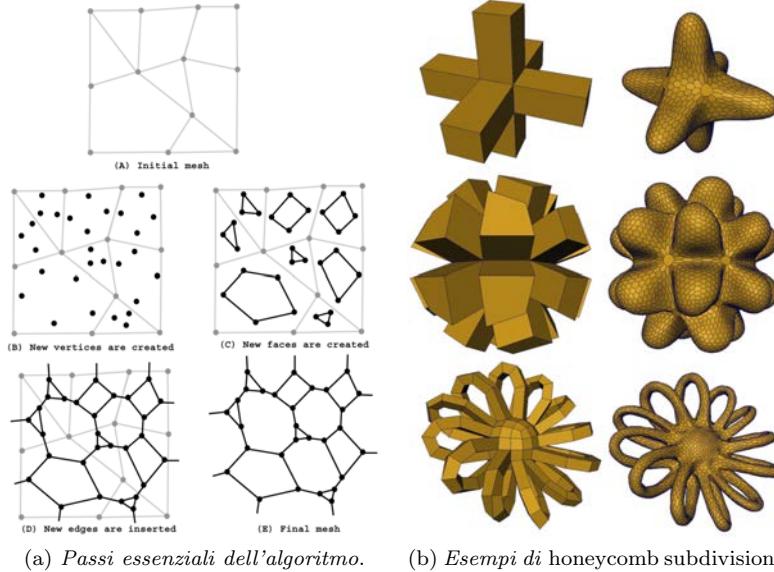
2.3 Mesh Esagonali

Le *mesh esagonali* infine rappresentano uno schema di suddivisione innovativo, indubbiamente dotato di una consistente quantità di ottime proprietà, e che tuttavia fino ad ora ha trovato scarsa applicazione - essenzialmente a causa della indisponibilità di strumenti di progetto idonei. Tra i vantaggi essenziali dello schema esagonale si annovera senz'altro la bassa valenza dei nodi (3 per i nodi regolari) ed uno schema statico della sottostruttura di tipo pienamente tridimensionale e dunque intrinsecamente efficiente.

Negli ultimi tempi l'interesse per questo pattern è cresciuto significativamente tanto che oggi esistono già alcuni algoritmi validati per la computazione di mesh esagonali. Se ne citano alcuni, quasi tutti incentrati sul concetto di *operatore duale* - anche detto *remeshing operator*.

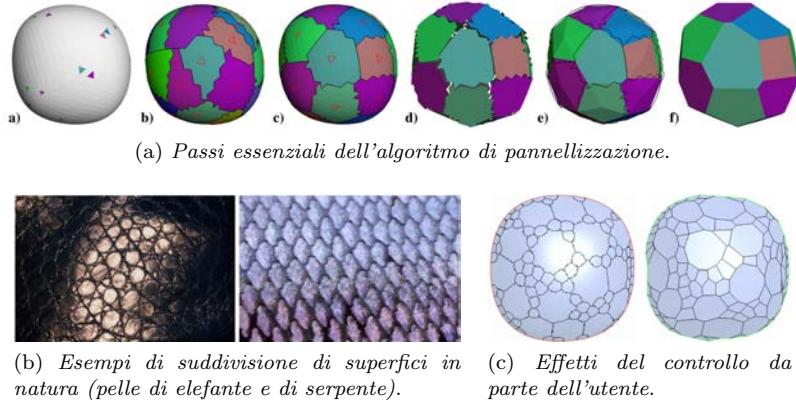
[Honeycomb Subdivision] A partire da una mesh totalmente non strutturata, dunque con vertici di valenza altamente variabile, si effettua un *point seeding* sulla mesh stessa facendo corrispondere ad ogni lato un punto (Figura 6). I punti interni a ciascuna faccia vengono collegati a formare le facce della nuova mesh, dopodichè ciascuna coppia di punti corrispondenti al medesimo lato viene unita. Le facce risultanti più piccole di una data misura vengono collassate in un punto. A questo punto la nuova mesh è formata: quasi tutti i vertici sono di tipo trivale, dunque la mesh è di tipo semi-regolare a connettività esagonale. Da notare che le meshes che si ottengono ricordano molto alcune forme organiche. Di rilievo anche la forma non convessa e non degenere dei pannelli esagonali ubicati in zone con $K \leq 0$.

[Metodo Euristico] Nel metodo presentato in [4] la superficie viene inizialmente triangolata in maniera densa, quindi un numero n di triangoli definito dall'utente viene scelto in maniera casuale. Tali triangoli fungono da *seeds*, ovvero da centri di aggregazione attorno ai quali i restanti triangoli vengono "clusterizzati" attraverso una funzione distanza, definita anch'essa dall'utente. I gruppi di triangoli vengono infine interpolati con dei piani, le intersezioni dei quali vanno a formare i lati dei pannelli.



(a) Passi essenziali dell'algoritmo. (b) Esempi di honeycomb subdivision.

Figura 6: Akleman E. e Srinivasan V. [1]



(a) Passi essenziali dell'algoritmo di pannellizzazione.
(b) Esempi di suddivisione di superfici in natura (pelle di elefante e di serpente).
(c) Effetti del controllo da parte dell'utente.

Figura 7: Cutler B. e Whiting E. [4]

Questo metodo consente di ottenere meshature di superfici arbitrarie con elementi piani in numero pari ad n fissato a priori. Per contro la sua applicabilità non è garantita per superfici qualunque e la forma dei pannelli non è né topologicamente regolare né isotropa.

[TPI Algorithm] Tale metodo [15] prevede di effettuare una triangolazione della superficie, dopodichè per ciascun vertice di questa vengono tracciati i piani tangenti alla superficie. L'intersezione dei tre piani appartenenti ad un certo triangolo genera un vertice della nuova mesh, che si intuisce avere connettività necessariamente esagonale. Dal punto di vista formale pare un metodo decisamente efficace, in realtà la buona riuscita del processo dipende strettamente dal tipo di triangolazione effettuata. In ogni caso i pannelli che si ottengono

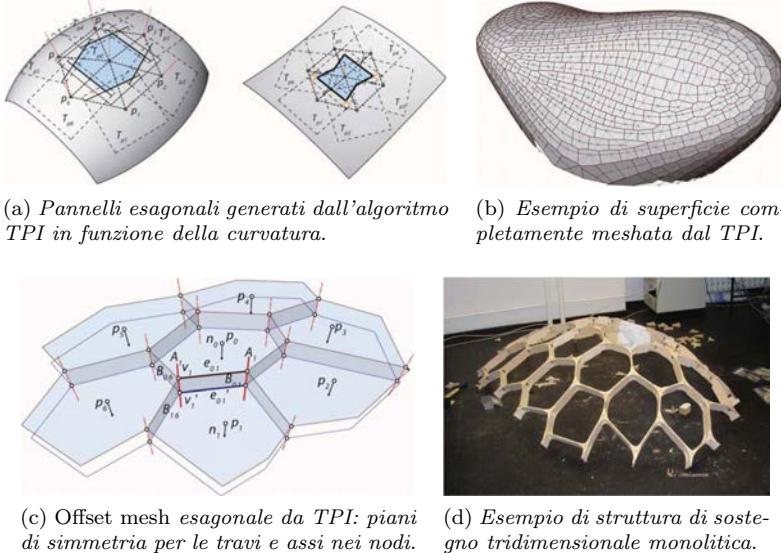


Figura 8: Troche C. [15]

hanno forma generalmente irregolare, che diviene poi sensibilmente convessa in corrispondenza delle zone con $K < 0$, ed addirittura degenere dove $K = 0$ (vedi Figura 8).

[CP Meshes] In [13] vengono introdotte le *circle packing meshes*, una categoria di meshes triangolari caratterizzate dall'avere cerchi inscritti che si toccano reciprocamente nel punto medio del lato del triangolo in esame (vedi Figura 9). CP meshes esatte possono essere computate solo per tori e cilindri, mentre per tutte le altre superfici possono essere ottenute solo delle versioni approssimate. Una volta ottenuta tale mesh è immediato ricavare la mesh esagonale ad essa duale, applicando l'*operatore duale o di remeshing*. Dall'osservazione della Figura 9 emerge che i pannelli sono tutti topologicamente regolari (almeno fin dove la triangolazione è regolare) e di forma pressoché isotropa, mentre le loro dimensioni variano con continuità in ragione della dimensione dei triangoli. Il metodo è di eccezionale portata, ed è stato anche implementato in un plugin per il software CAD Rhinoceros[©] [7]. L'unico grave inconveniente è che i pannelli non sono dotati di planarità.

[Centroidal Voronoi Tessellation] Un approccio molto usato per distribuire uniformemente un insieme di punti in due dimensioni, è quello di costruire una “tassellazione centrale alla Voronoi” (vedi [5]). Una tassellazione alla Voronoi, relativa ad un insieme di punti sparsi (Figura 10), non è altro che l'insieme delle celle i cui lati sono costituiti dai segmenti di retta equidistanti dai punti contigui. Ciò implica che tutte le celle Voronoi sono convesse. In particolare in una tassellazione alla Voronoi baricentrica il baricentro di ciascuna cella coincide con il punto che essa racchiude (vedi Figura 10).

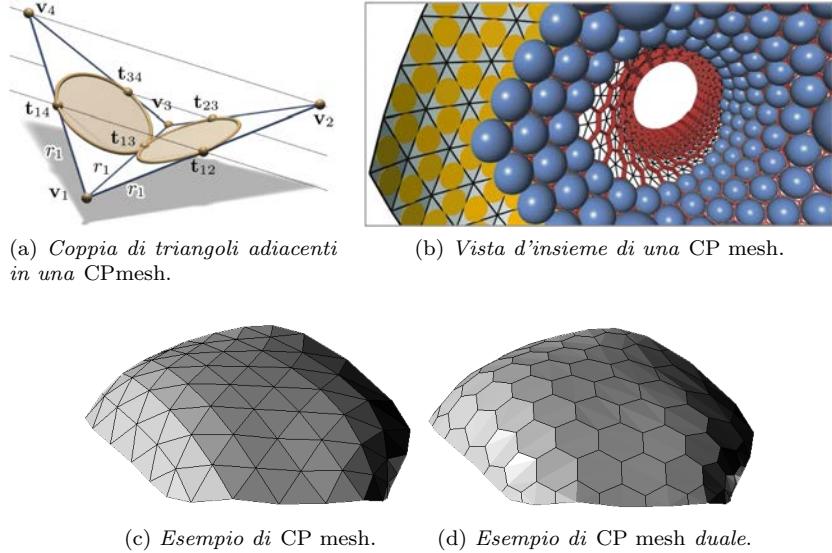
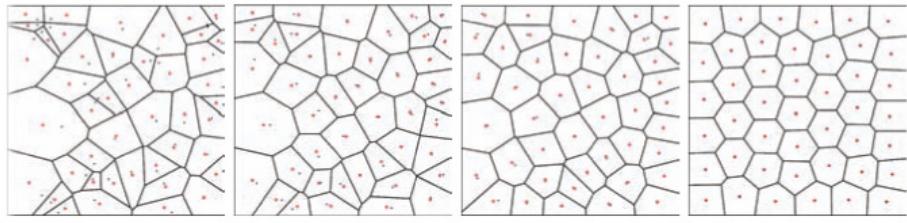


Figura 9: Schiftner et Al. [13]



(a) Applicazione dell'Algoritmo di Lloyd per computare Tessellazioni Centrali di Voronoi.

Figura 10: Tassellazioni Centrali di Voronoi [3].

La computazione di queste mesh richiede il calcolo del centro di massa c_i^2 di ogni singola regione, e dunque anche di una *funzione densità* con la quale si può regolare la variabilità della dimensione delle celle. Successivamente è sufficiente applicare in maniera ripetitiva l'algoritmo di Lloyd [9] fino a convergenza. Come si vede in Figura 10 la struttura di queste celle è estremamente interessante: ricorda forme organiche, è piuttosto regolare e può essere ottenuta sia nella variante uniforme che disuniforme. Inoltre la loro computazione è rapida. *

* Prosegue nel prossimo numero della Rivista.

$$c_i^2 = \frac{\int_{V_i} x \cdot \rho(x) dx}{\int_{V_i} \rho(x) dx}$$

Riferimenti bibliografici

- [1] E. Akleman and V. Srinivasan. “Honeycomb Subdivision”. Visualization Sciences Program, Texas A&M University, 2003.
- [2] N. Baldassini. “Glazing Technology: the Hidden Side of Free-Form Design”. *Advances in Architectural Geometry*, 1:41–44, 2008.
- [3] Mario Botsch, Leif Kobbelt, Mark Pauly, Pierre Alliez, and Bruno Levy. *Polygon Mesh Processing*. AK Peters, 2010.
- [4] B. Cutler and E. Whiting. “Constrained Planar Remeshing for Architecture”. *Proceedings of the Graphics Interface, Montreal (Canada)*, 234 ACM Press:11–18, 2007.
- [5] Q. Du, V. Faber, and M. Gunzburger. “Centroidal Voronoi Tessellations: Applications and Algorithms”. *SIAM Rev.*, 41(4):637–676, December 1999.
- [6] J. Glymph, D. Shelden, C. Ceccato, J. Musse, and H. Schober. “A parametric strategy for free-form glass structures using quadrilateral planar facets”. *Automation in Construction*, 13:187–202, 2004.
- [7] Evolute GmbH. “Evolute Plugin for Rhinoceros”.
- [8] Y. Liu, H. Pottmann, J. Wallner, Y. Yang, and W. Wang. “Geometric Modeling with Conical Meshes and Developable Surfaces”. *ACM Transactions on Graphics*, 25:681–689, 2006.
- [9] S. Lloyd. “Least Squares Quantization in PCM”. *IEEE Trans. Inf. Theor.*, 28(2):129–137, September 2006.
- [10] H. Pottmann. “Architectural Geometry as Design Knowledge”. *Architectural Design*, 80:72–77, 2010.
- [11] H. Pottmann, A. Schiftner, P. Bo, H. Schmiedhofer, W. Wang, N. Baldassini, and J. Wallner. “Freeform Surfaces from Single Curved Panels”. *ACM SIGGRAPH*, 27(3):–, 2008.
- [12] H. Pottmann S. Flory. “Ruled Surfaces for Rationalization and Design in Architecture”. In *Proceedings of the Conference of the Association for Computer Aided Design in Architecture (ACADIA)*, 2010.
- [13] A. Schiftner, M. Hobinger, J. Wallner, and H. Pottmann. “Packing Circles and Spheres on Surfaces”. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 28(5):–, 2009.
- [14] J. Sclach. “New Trade Fair in Milan - grid topology and structural behaviour of a free-formed glass-covered surface”. *International Journal of Space Structures*, 20(1):–, 2005.
- [15] C. Troche. “Planar Hexagonal Meshes by Tangent Plane Intersection”. *Advances in Architectural Geometry*, 1:57–60, 2008.