

# Sviluppo di tecniche generali per la generazione e l'analisi cinematica di ruote dentate

MARCO GABICCINI

*Dipartimento di Ingegneria Meccanica,  
Nucleare e della Produzione*

*Università degli Studi di Pisa*

III Ciclo del Corso di Dottorato in Ingegneria Meccanica

Curriculum: Tribologia

Tutors: Prof. M. Guiggiani, Ing. F. Di Puccio



## Attività svolte

1. Ottimizzazione del codice di calcolo per la generazione e l'analisi cinematica di ruote *Face* con shaper cilindrico a denti elicoidali e profilo ad evolvente di circonferenza;
2. Identificazione di condizioni notevoli per curva involuppo  $E$  e linea dei punti singolari  $L_S$ ;
3. Ricerca bibliografica in corso su:
  - Cinematica teorica;
  - Metodi geometrici nella robotica;
  - Algebra di Lie su gruppi differenziabili e teoria degli Screws;
4. Approccio mediante screws allo studio del moto relativo di due corpi;



# Test cases con angolo $\beta$ variabile

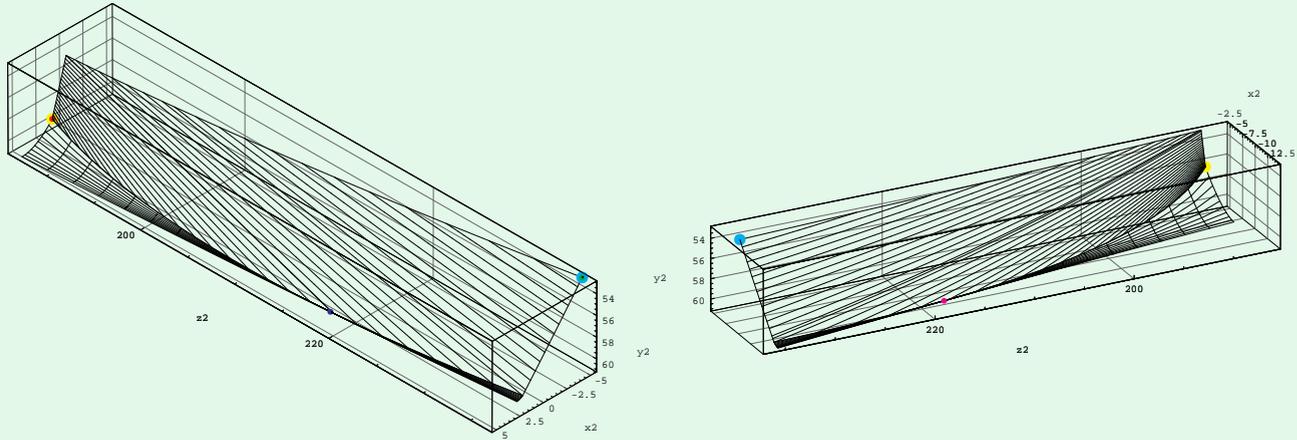
- dati geometrici dello shaper:
  - modulo  $m = 4$  mm;
  - angolo di pressione =  $25^\circ$ ;
  - numero denti = 28;
  - addendum =  $1.25 m$ ; dedendum =  $1.0 m$ ;
  - raccordo di testa =  $0.0 m$ ;
  - assenza di gioco normale.
- dati geometrici del face gear:
  - numero di denti = 100 ( $\tau = 0.28$ );
  - clearance =  $0.25 m$ ;
  - angolo fra gli assi  $\gamma = 90^\circ$ ;



Back

Close

# Linee di contatto e punti notevoli su FG



Angolo dell'elica del pignone  $\beta = 5^\circ$ .

GdR (destra) = 3.20, GdR (sinistra) = 2.95

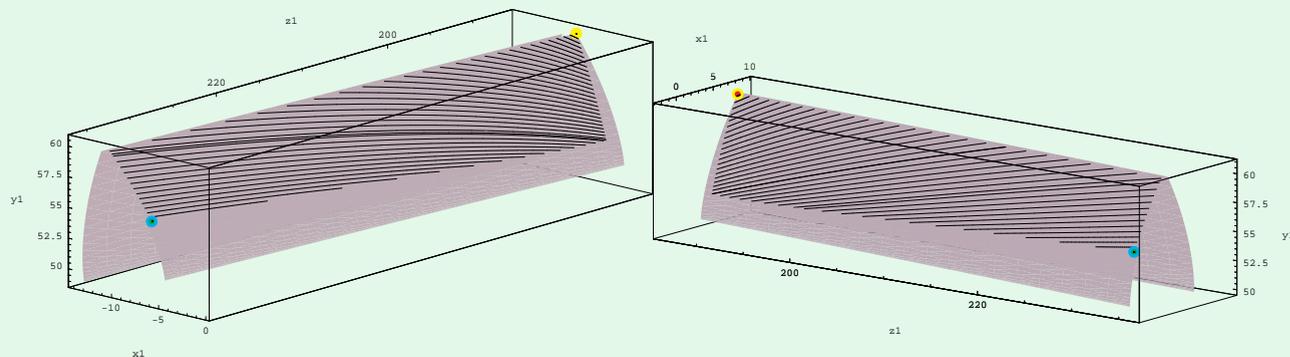
Ampiezza max fascia dentabile = 47.96 mm

Legenda colori:

verde: Pointing, rosso: Undercutting, blu: inizio contatto, giallo: fine contatto

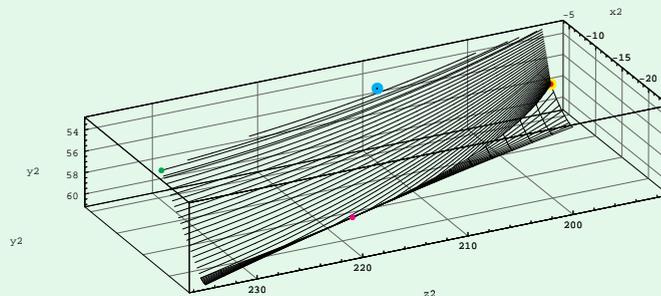
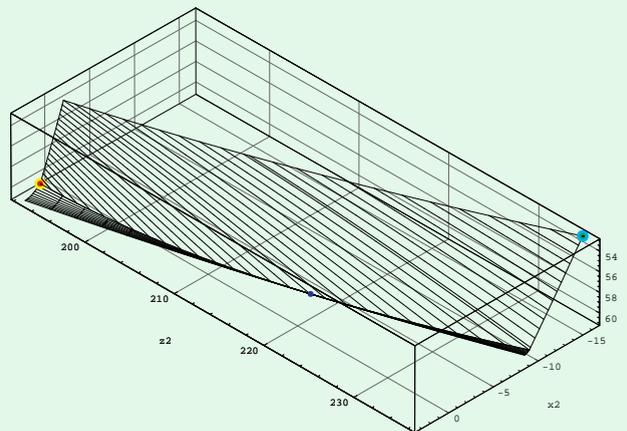


# Linee di contatto e punti notevoli su SH



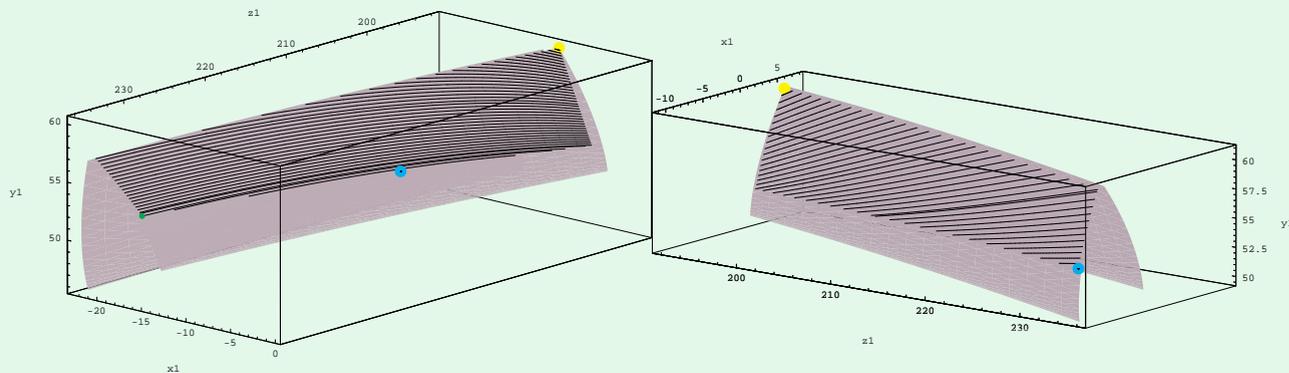
Angolo dell'elica del pignone  $\beta = 5^\circ$ .  
Raggio min dello shaper coinvolto  $R_{\min} = 53.00$  mm

# Linee di contatto e punti notevoli su FG



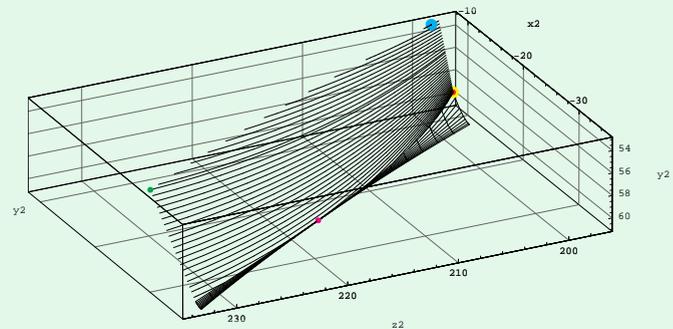
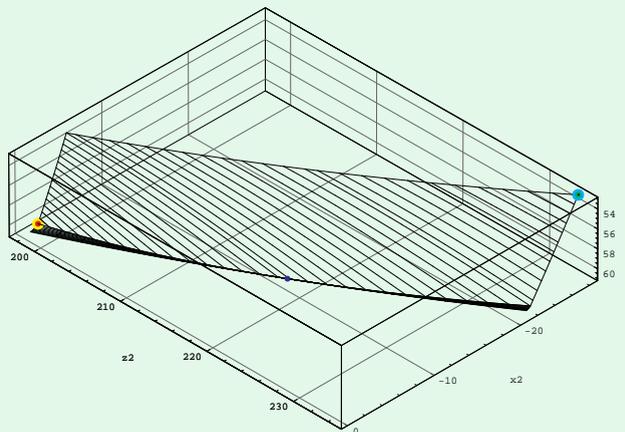
Angolo dell'elica del pignone  $\beta = 15^\circ$ .  
GdR (destra) = 3.25, GdR (sinistra) = 2.30  
Ampiezza max fascia dentabile = 42.71 mm

# Linee di contatto e punti notevoli su SH



Angolo dell'elica del pignone  $\beta = 15^\circ$ .  
Raggio min dello shaper coinvolto  $R_{\min} = 53.06$  mm

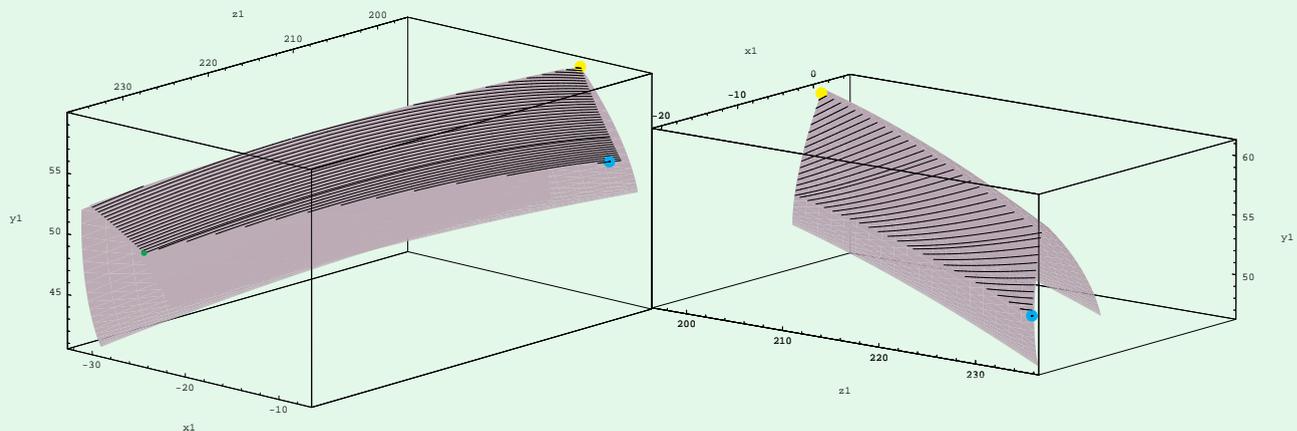
# Linee di contatto e punti notevoli su FG



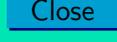
Angolo dell'elica del pignone  $\beta = 25^\circ$ .  
GdR (destra) = 3.39, GdR (sinistra) = 2.14  
Ampiezza max fascia dentabile = 37.48 mm



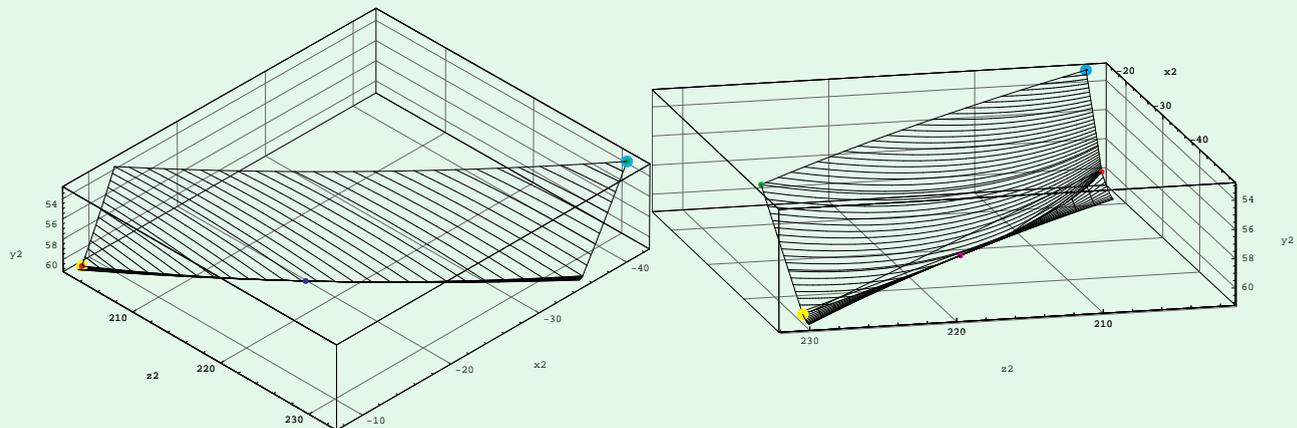
# Linee di contatto e punti notevoli su SH



Angolo dell'elica del pignone  $\beta = 25^\circ$ .  
Raggio min dello shaper coinvolto  $R_{\min} = 53.19$  mm

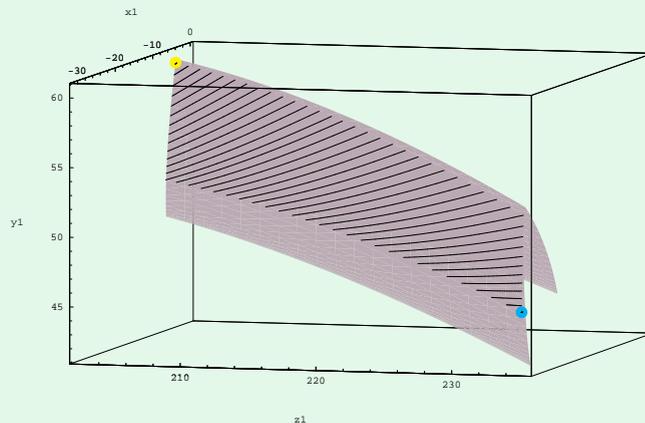
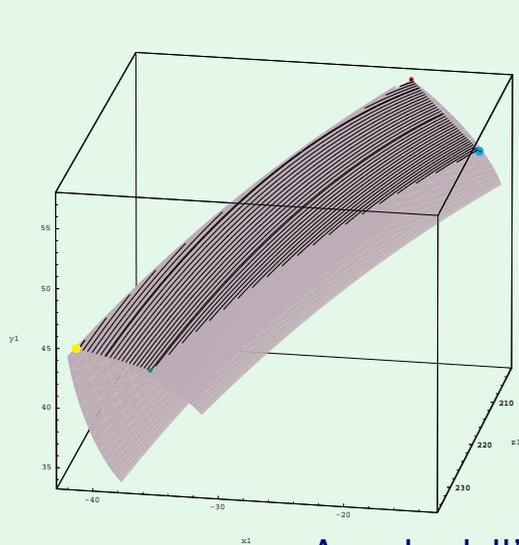


# Linee di contatto e punti notevoli su FG



Angolo dell'elica del pignone  $\beta = 35^\circ$ .  
GdR (destra) = 3.51, GdR (sinistra) = 2.29  
Ampiezza max fascia dentabile = 31.94 mm

# Linee di contatto e punti notevoli su SH



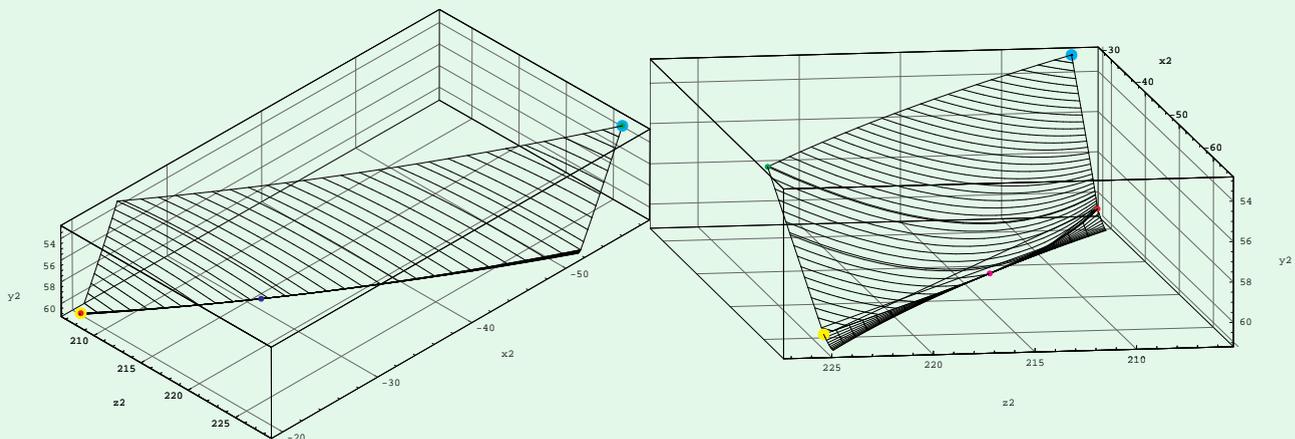
Angolo dell'elica del pignone  $\beta = 35^\circ$ .  
Raggio min dello shaper coinvolto  $R_{\min} = 53.33$  mm



Back

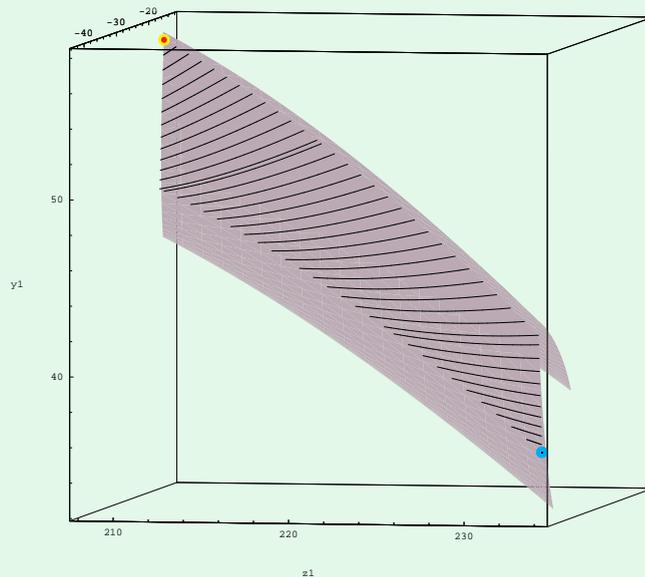
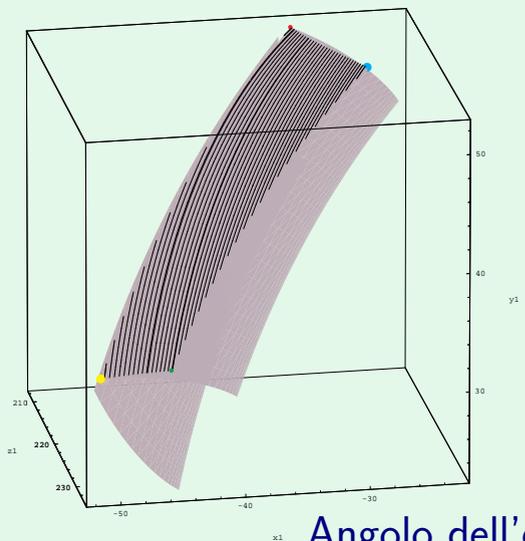
Close

# Linee di contatto e punti notevoli su FG



Angolo dell'elica del pignone  $\beta = 45^\circ$ .  
GdR (destra) = 3.53, GdR (sinistra) = 2.73  
Ampiezza max fascia dentabile = 25.67 mm

# Linee di contatto e punti notevoli su SH



Angolo dell'elica del pignone  $\beta = 45^\circ$ .  
Raggio min dello shaper coinvolto  $R_{\min} = 53.45$  mm



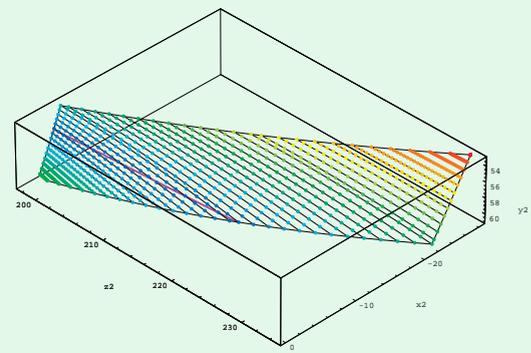
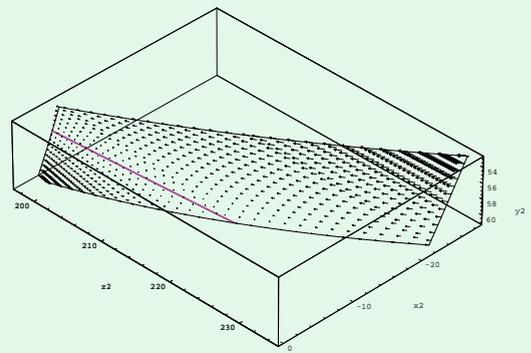
Back

Close

# Velocità di strisciamento

Campo vettoriale velocità di strisciamento normalizzata rispetto alla velocità angolare del Face Gear in  $S_4$

$$\frac{\mathbf{v}^{rel}}{\dot{\phi}} = \mathbf{r}_{4,\phi}$$



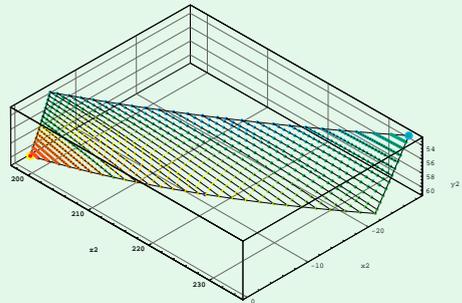
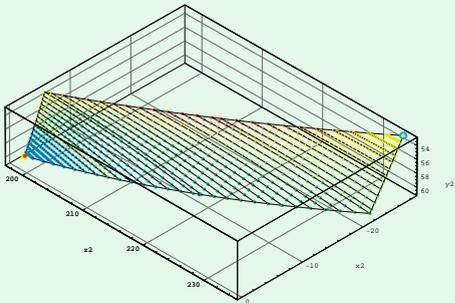
Campo  $r_{4,\phi}$  (a sinistra) e  $|r_{4,\phi}|$  (a destra).

# Velocità angolare di spin e rotolamento

La velocità angolare relativa  $\omega_4^{rel}$  nel sistema  $S_4$  è scomponibile nella direzione della normale  $\hat{n}_4(\xi, \phi)$  alla superficie del FG nelle sue componenti di spin e rotolamento:

$$\omega_4^{spin}(\xi, \phi) = [\hat{n}_4(\xi, \phi) \cdot \hat{n}_4(\xi, \phi)^T] \omega_4^{rel}(\xi, \phi)$$

$$\omega_4^{rot}(\xi, \phi) = [\mathbf{I} - \hat{n}_4(\xi, \phi) \cdot \hat{n}_4(\xi, \phi)^T] \omega_4^{rel}(\xi, \phi).$$



Rappresentazione di  $\frac{\omega_4^{spin}}{\dot{\phi}}$  (a sinistra) e  $\frac{\omega_4^{rot}}{\dot{\phi}}$  (a destra) con  $\beta = 25^\circ$ .

# Curva involuppo delle linee di contatto $E$

La curva  $E$  nello spazio delle coordinate parametriche  $(\xi, \theta)$  si determina risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} f(\xi, \theta, \phi) = [r_{4,\xi} \ r_{4,\theta} \ r_{4,\phi}] = 0 \\ f_{,\phi}(\xi, \theta, \phi) = 0. \end{cases}$$

La soluzione in cui si elimina  $\phi$  esiste ed è regolare

$$\xi_{env} = \xi(\theta) \Leftrightarrow f_{,\phi\phi} \neq 0.$$

Si è trovato che la  $E$  è:

$$\xi_{env}(\theta) = \chi \theta + \xi_{lim} \sqrt{1 - \left( \frac{\chi}{\xi_{lim}} \right)^2},$$

con  $\chi = \frac{r_b (1 - \tau \cos \gamma)}{c \tau \sin \gamma}$  e  $z = c \xi_{lim}$  distanza minima dall'asse del Face Gear raggiungibile nel contatto con il pignone a denti diritti.

La  $\xi_{env} = \xi(\theta)$  può essere trovata, in modo alternativo, come frontiera del campo di esistenza della equation of meshing  $f(\xi, \theta, \phi) = 0$  esplicitata rispetto a  $\phi$ , infatti:

$$\phi(\xi, \theta) = 2\tau \arctan \left( \frac{-A(\xi, \theta) - \sqrt{A(\xi, \theta)^2 + B(\xi, \theta)^2 - C(\xi, \theta)^2}}{C(\xi, \theta) - B(\xi, \theta)} \right)$$

da cui:

$$A(\xi, \theta)^2 + B(\xi, \theta)^2 - C(\xi, \theta)^2 = 0 \Rightarrow \xi_{env} = \xi(\theta)$$

La curva involuppo ha il significato di *frontiera* nei confronti dell'estensione del contatto in direzione dell'asse del FG. Tale limitazione è già contenuta nella  $\phi(\xi, \theta)$  da  $f(\xi, \theta, \phi) = 0$ , che ci indica quali punti del piano  $(\xi, \theta)$  prendono parte al processo di ingranamento, ossia sono raggiungibili dalla e.o.m. mediante un  $\phi \in \mathbb{R}$ .



Back

Close

## Tangenza fra $E$ ed $L_s$

Se  $\mathbf{P} = (\bar{\xi}, \bar{\theta}, \bar{\phi})$  punto tale che:

$$\begin{cases} f(\bar{\xi}, \bar{\theta}, \bar{\phi}) = [\mathbf{r}_{4,\xi} \ \mathbf{r}_{4,\theta} \ \mathbf{r}_{4,\phi}]_{\bar{P}} = 0 \\ f_{\phi}(\bar{\xi}, \bar{\theta}, \bar{\phi}) = 0 \\ g(\bar{\xi}, \bar{\theta}, \bar{\phi}) = (\tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n})_{\bar{P}} = 0, \end{cases}$$

i vettori tangenti in  $\bar{P}$  a  $E$  ed  $L_s$  hanno rispettivamente le seguenti espressioni:

$$\mathbf{t}^E = \frac{1}{|\mathbf{J}_3^E(\bar{P})|} \begin{bmatrix} f_{\theta}(\bar{P}) f_{\phi\phi}(\bar{P}) \\ -f_{\xi}(\bar{P}) f_{\phi\phi}(\bar{P}) \end{bmatrix} \quad \mathbf{t}^s = \frac{1}{|\mathbf{J}_3^s(\bar{P})|} \begin{bmatrix} f_{\theta}(\bar{P}) g_{\phi}(\bar{P}) \\ -f_{\xi}(\bar{P}) g_{\phi}(\bar{P}) \end{bmatrix}$$

dove i minori  $\mathbf{J}_3^E$  e  $\mathbf{J}_3^s$  sono:

$$\mathbf{J}_3^E = \begin{bmatrix} f_{\xi} & f_{\theta} \\ f_{\phi\xi} & f_{\phi\theta} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_3^s = \begin{bmatrix} f_{\xi} & f_{\theta} \\ g_{\xi} & g_{\theta} \end{bmatrix}.$$

da cui, indicando con  $(\mathbf{t}_1^E, \mathbf{t}_2^E)$  e  $(\mathbf{t}_1^s, \mathbf{t}_2^s)$  le componenti rispettivamente di  $\mathbf{t}^E$  e  $\mathbf{t}^s$  si può scrivere

$$C = \frac{f_{\phi\phi}(\bar{P})}{g_{\phi}(\bar{P})} = \frac{\mathbf{t}_1^E}{\mathbf{t}_1^s} = \frac{\mathbf{t}_2^E}{\mathbf{t}_2^s}.$$

Dunque i vettori tangenti alla curva involuppo delle linee di contatto sul pignone e la linea dei punti singolari sono fra loro paralleli nel punto d'incontro  $\bar{P}$ .

Risultati raccolti nell'articolo:

*“Geometry and kinematics of face gears mating with a helical spur pinion”*, 11th World Congress in Mechanism and Machine Science, Tianjin, China, August 18-21 2003.

# Strumenti di analisi: gli Screws

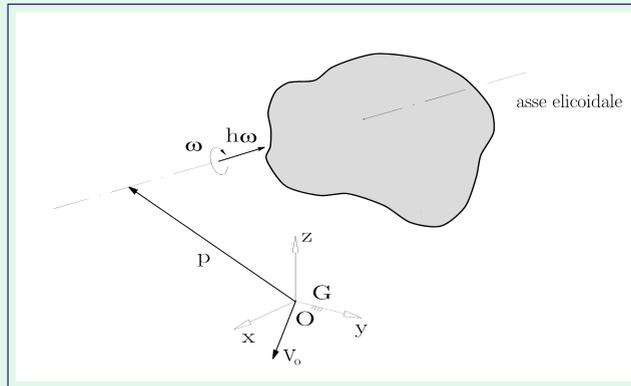
Lo screw è una rappresentazione vettoriale utilizzata per caratterizzare atti di moto (twist) o risultanti di sistemi di forze (wrench) rispetto ad un sistema di riferimento S.

Definito da:

- posizione  $\mathbf{p}$  dell'a.c. rispetto al polo di rappresentazione;
- vettore applicato lungo l'asse ( $\boldsymbol{\omega}$  o  $\mathbf{R}$ )
- passo  $h$ .

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ h\boldsymbol{\omega} + \mathbf{p} \wedge \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ h\mathbf{R} + \mathbf{p} \wedge \mathbf{R} \end{bmatrix}$$



# Lie Groups e Lie Algebras

Il gruppo  $SE(3)$  delle matrici di trasformazione omogenea  $\mathbf{A}$  fra terne solidali a corpi in movimento in  $\mathbb{E}^3$  è un Lie Group ed i twist  $\mathbf{T}$  in forma matriciale sono gli elementi della varietà tangente derivata dal Lie Group, ossia:

$$\mathbf{T} = \dot{\mathbf{A}}(t) \mathbf{A}^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} & h\boldsymbol{\omega} + \mathbf{p} \wedge \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}$$

Combinare linearmente gli screws (twists) significa comporre moti elicoidali istantanei (si lavora con elementi geometrici della Lie Algebra). Si definisce *screw system* l'insieme di tutti i moti possibili ottenuti come combinazioni da moti di partenza. Per risalire poi alla matrice di trasformazione associata al moto combinato si utilizza la:

$$\mathbf{A}(t) = e^{\mathbf{T}t}.$$



# Moto relativo fra 3 corpi

Dati 3 corpi in moto relativo, gli screws associati ai loro moti soddisfano

$$\mathcal{S}_{12} + \mathcal{S}_{23} + \mathcal{S}_{31} = \mathbf{0},$$

ossia la chiusura dei poligoni di velocità angolari e lineari. Se (1) e (2) sono due ruote e (3) è telaio, allora il moto relativo è rappresentabile come:

$$\mathcal{S}_{21} = \omega_2 \hat{\mathcal{S}}_2 - \omega_1 \hat{\mathcal{S}}_1, \quad \hat{\mathcal{S}}_i \text{ è } \mathcal{S}_i \text{ normalizzato rispetto a } \omega_i$$

Ci interessa

$$\tilde{\mathcal{S}}_{21} = \frac{\mathcal{S}_{21}}{\omega_1} = (\tau \hat{\mathcal{S}}_2 - \hat{\mathcal{S}}_1), \text{ per } \tau \in (-\infty, +\infty)$$

Gli assi elicoidali di tutti i possibili moti relativi descrivono una superficie cubica detta *cilindroide*. Questo è il “sostegno” dello screw system generato dai due screws di passo zero che rappresentano i moti rotatori delle ruote di partenza.

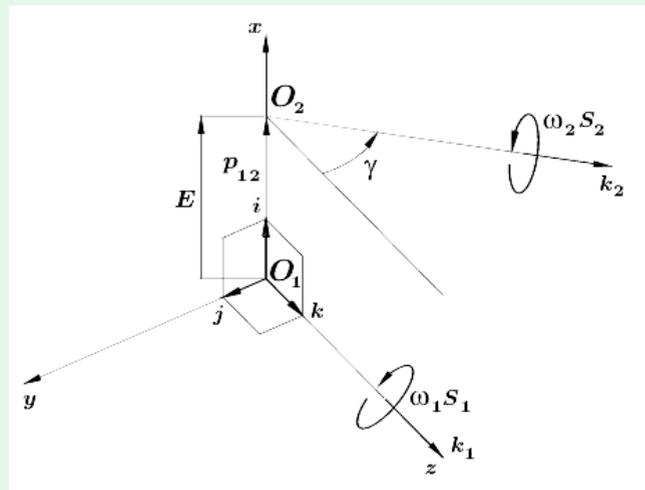
# Posizione assi e screws associati

Passo dello screw  $\tilde{S}_{21}$  è:

$$h_{21}(\tau) = \frac{\tilde{S}_{21} \cdot \tilde{S}_{o21}}{\tilde{S}_{21} \cdot \tilde{S}_{21}} = \frac{E \tau \sin \gamma}{\tau^2 - 2\tau \cos \gamma + 1},$$

il vettore distanza da  $\hat{S}_1$  è

$$\mathbf{r}_{isa} = \frac{\tilde{S}_{21} \wedge \tilde{S}_{o21}}{\tilde{S}_{21} \cdot \tilde{S}_{21}} = E \tau \frac{\tau - \cos \gamma}{\tau^2 - 2\tau \cos \gamma + 1}$$



Per  $\tau = \pm 1$  si trovano due screws  $\$_\beta$  e  $\$_\alpha$  particolari, detti screws principali, giacenti sullo stesso piano  $x = \frac{E}{2}$ , ortogonali fra loro e di passo massimo  $h_\beta$  e minimo  $h_\alpha$  ( $h_\beta h_\alpha < 0$ ,  $h_\beta > h_\alpha$ ). Scrivendo il passo e la quota rispetto ad una terna  $S_p$  con asse  $z_p \equiv x$ ,  $x_c$  direzione di  $\$_\beta$ ,  $y_c$  direzione di  $\$_\alpha$  e  $\theta$  angolo dello screw risultante rispetto a  $x_c$ , si dimostra che:

$$z_{isa}(\theta) = -\frac{1}{2} (h_\beta - h_\alpha) \sin(2\theta)$$

$$h_{21}(\theta) = \frac{1}{2} (h_\beta + h_\alpha) + \frac{1}{2} (h_\beta - h_\alpha) \cos(2\theta)$$

# Il cilindroide

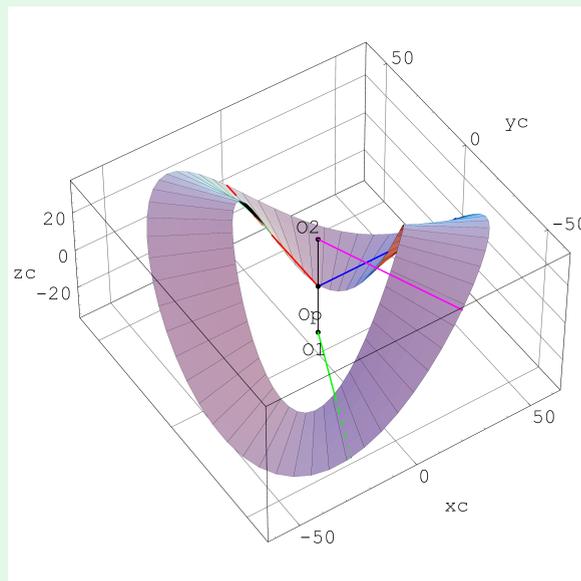
Superficie descritta da tutti i possibili candidati ISAs al variare del rapporto di trasmissione.

Equazione algebrica:

$$z_c(x_c^2 + y_c^2) + (h_\beta - h_\alpha)x_c y_c = 0,$$

Proprietà:

- Interseca il generico cilindro di asse  $z_c$  in una senoide che compie due oscillazioni complete per  $\theta \in [0, 2\pi]$  di ampiezza  $\Delta z_c$ ;
- Estensione lungo asse  $z_c$  data da  $\Delta z_c = E \csc \gamma$ ;
- Piano principale a  $z_c = \frac{E}{2}$ ;
- Screws principali  $\$ \alpha$  e  $\$ \beta$  ortogonali fra loro e appartenenti al piano principale;
- Screws estremi  $\$ a$  e  $\$ b$  rispettivamente a  $z_c = 0$  e  $z_c = E \csc \gamma$

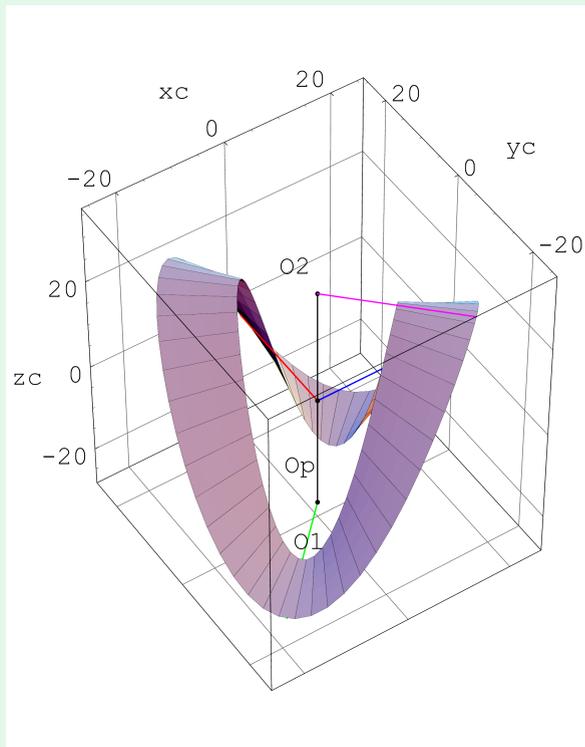


# Casi particolari

Assi sghembi ortogonali ( $E \neq 0$  e  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ), gli screws di passo zero (le rotazioni di partenza) anche sono gli screws estremi del cilindroide;

Assi paralleli ( $\gamma = 0$ ) cilindroide degenera nel piano individuato dagli assi paralleli;

Assi incidenti ( $E = 0$ ) cilindroide degenera nel piano individuato dagli assi incidenti;



# Conclusioni

- Analisi critica del processo di involuppo dal punto di vista matematico classico (generazione, equation of meshing, punti singolari, involuppo delle linee di contatto);
- Ottimizzazione del codice per FG elicoidali;
- Ricerca bibliografica in corso su cinematica e robotica per mutuare efficaci strumenti di analisi;
- Applicazione di tali strumenti al caso di ruote dentate di specifico interesse.



26/26



Back

Close