



UNIVERSITÀ DI PISA  
Facoltà di Ingegneria

---

Corso di Laurea specialistica in  
INGEGNERIA DELL'AUTOMAZIONE

# Analisi e Controllo Manipolazione Robotica

Relazione di Robotica

Antonino Lo Biondo  
Giulio Mancuso

Docenti:

Prof. Ing. Antonio Bicchi

Ing. Marco Gabiccini

---

Anno Accademico 2008-2009



# Sommario

Il termine *hand* (mano) o *end-effector* è usato per indicare l'interfaccia tra manipolatore ed ambiente senza nessun riferimento ad una possibile struttura antropomorfa. La maggior parte delle mani sono di struttura semplice: grippers, pinze o diversi dispositivi cedevoli. Molti di questi end-effector vengono progettati per una ben specifica operazione e quindi risultano essere poco versatili al variare del compito da svolgere. Altri problemi possono essere la poca destrezza nello svolgere compiti particolarmente facili, oppure il poter afferrare oggetti senza la possibilità di manipolarli. Un sistema *multi-fingered* o una mano articolata ovvia ai problemi esaminati prima donando al robot una certa versatilità e destrezza nelle operazioni da svolgere. L'abilità che ha una mano di riconfigurarsi permette di svolgere diversi compiti senza mai cambiare end-effector. L'introduzione nel mercato di sempre più leggeri attuatori combinati con i gradi di libertà della mano permettono lavorazioni efficienti e veloci con un consumo minimo di energia. Nel presente lavoro si esamina il problema di manipolazione di oggetti mediante mano robotica. Nello specifico si userà una mano a tre dita ognuno dei quali avrà 4 gradi di libertà mentre l'oggetto da manipolare è di forma toroidale. Verranno esaminate tutte le fasi di modellazione sia cinematica che dinamica ed in più verrà proposto un algoritmo sul controllo di posizione e forza di contatto. Il tutto verrà fatto usando la notazione esponenziale POE poco usata in ambito robotico ma che, come vedremo in seguito, permette un approccio computazionalmente più efficiente. Il lavoro infine ha permesso la creazione di un toolbox in ambiente *Matlab<sup>TM</sup>* che permette il calcolo in maniera automatica della cinematica diretta e le matrici dinamiche di un qualsiasi manipolatore seriale il tutto in maniera simbolica avendo solo i parametri *POE* (*product of exponential*).

# Indice

<b>Sommario</b>	<b>i</b>
<b>Indice</b>	<b>ii</b>
<b>Elenco delle figure</b>	<b>iii</b>
<b>1 Cinematica</b>	<b>1</b>
1.1 Cinematica del Contatto . . . . .	1
1.1.1 Definizione del Gauss frame . . . . .	3
1.1.2 Equazioni di Montana . . . . .	5
1.1.3 Parametrizzazione del toro . . . . .	6
1.1.4 Parametrizzazione della sfera . . . . .	8
1.2 Cinematica del dito . . . . .	10
1.3 Vincoli cinematici . . . . .	13
1.4 Calcolo della postura iniziale . . . . .	17
<b>2 Dinamica</b>	<b>21</b>
2.1 Dinamica del toro . . . . .	21
2.2 Dinamica del dito . . . . .	24
2.3 Dinamica vincolata . . . . .	25
<b>3 Controllo</b>	<b>28</b>
3.1 Computed torque . . . . .	28
3.2 Controllo sistema vincolato . . . . .	30
3.3 Controllo delle forze interne . . . . .	31
3.3.1 Algoritmo Force Control . . . . .	35
<b>4 Simulazioni</b>	<b>37</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>44</b>

# Elenco delle figure

1.1	Gauss frame. . . . .	3
1.2	Moto di due oggetti in contatto. . . . .	4
1.3	Parametrizzazione del toro. . . . .	7
1.4	Parametrizzazione della sfera. . . . .	9
1.5	Mappatura in 3 coordinate e in 2 parametri . . . . .	10
1.6	Schema del dito. . . . .	11
1.7	Sistema delle tre dita. . . . .	13
1.8	Diagramma di relazioni per multifingered grasp. . . . .	16
1.9	Cinematica inversa. . . . .	19
2.1	Sistema complessivo mano più toro. . . . .	25
3.1	Schema di controllo del computed torque . . . . .	28
3.2	Cono d'attrito . . . . .	32
3.3	Composizione del vincolo di momento e di forza . . . . .	34
3.4	Schema di controllo con forze control . . . . .	35
4.1	Schema simulink del sistema . . . . .	38
4.2	Schema simulink del modello mano - toro . . . . .	39
4.4	Riferimento controllore $\zeta_d$ . . . . .	40
4.3	Traiettoria del toro vista da diverse angolazioni. La terna al centro mostra il movimento del toro. . . . .	41
4.5	Errore di inseguimento. . . . .	41
4.6	Traiettoria Toro-Polpastrello 1. . . . .	42
4.7	Traiettoria Toro-Polpastrello 2. . . . .	43
4.8	Traiettoria Toro-Polpastrello 3. . . . .	43

# Capitolo 1

## Cinematica

Scopo di questo capitolo è descrivere il modello matematico del contatto di rotolamento tra superfici geometriche regolari. In seguito supporremo l'impenetrabilità degli oggetti e all'ammissibilità del contatto.

### 1.1 Cinematica del Contatto

Le dita umane e molte dita robotiche possono essere modellate come delle superfici, e la manipolazione di un oggetto comprende il rotolamento delle dita sulla superficie dell'oggetto.

Dato un oggetto in  $\mathbb{R}^3$  noi descriviamo la sua superficie usando un *mappa di coordinate locali*,  $c : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

La mappa  $c$  prende un punto  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  e la mappa in un punto  $x \in \mathbb{R}^3$  nella superficie dell'oggetto, scritto in coordinate oggetto di riferimento  $O$ .

Diremo che una superficie  $S$  è *regolare* se per ogni punto  $p \in S$  esiste un intorno  $V \subset \mathbb{R}^3$ , un insieme aperto  $U \subset \mathbb{R}^2$  e una mappa  $c : U \rightarrow V \cap S$  tale che:

1.  $c$  è differenziabile.
2.  $c$  è un omeomorfismo da  $U$  to  $V \cap S$ .
3. Per ogni  $\alpha = (u, v) \in U$ , la mappa  $\frac{\partial c}{\partial \alpha}(\alpha) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  è iniettiva.

Ad ogni punto dell'oggetto, possiamo definire un piano tangente che consiste nello spazio generato da tutti i vettori tangenti alla superficie dell'oggetto in un dato punto. Il piano tangente è combinazione lineare dei vettori di  $c_u := \frac{\partial c}{\partial u}$  e  $c_v := \frac{\partial c}{\partial v}$ . Ciò significa che ogni vettore appartenente al piano tangente alla superficie in un dato punto  $c(u, v)$  può essere spresso come

combinazione lineare dei vettori  $c_u$  e  $c_v$  calcolati nel punto. Un sistema di coordinate è ortogonale se  $c_u$  e  $c_v$  sono ortogonali. Molte situazioni di grasping comprendono contatti mobili che fissi. Per definire l'area della superficie [1], bisogna prima definire il prodotto interno tra i vettori tangenti nella superficie. Questo definisce l'area di un parallelogramma e l'area totale può essere calcolata integrando le aree infinitesime generate dai vari parallelogrammi generati nella superficie.

La prima forma fondamentale di una superficie descrive come il prodotto interno dei due vettori tangenti è correlato al naturale prodotto interno in  $\mathbb{R}^3$ . In un sistema di coordinate locali, esso è rappresentato da una forma quadratica  $I_p : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  che prende i due vettori tangenti attaccati al punto  $p = c(u, v)$  e restituisce il loro prodotto interno. Se  $c$  è una parametrizzazione locale allora la rappresentazione matriciale della forma quadratica è data da

$$I_p = \begin{bmatrix} c_u^T c_u & c_u^T c_v \\ c_v^T c_u & c_v^T c_v \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

. La prima forma fondamentale può essere usata per definire il *tensor metrico* della superficie. Il tensore metrico è dato dalla radice quadrata della prima forma fondamentale ed è usato per normalizzare i vettori tangenti. Definiamo la matrice  $M_p : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  come una matrice definita positiva che soddisfa

$$I_p = M_p M_p \quad (1.2)$$

Nel caso in cui la parametrizzazione è ortogonale,  $M_p$  ha la seguente forma

$$M_p = \begin{bmatrix} \|c_u\| & 0 \\ 0 & \|c_v\| \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Ad ogni punto sulla superficie  $S$ , possiamo definire un vettore unitario perpendicolare al piano tangente e uscente dalla figura facendo il prodotto vettoriale tra i vettori definiti nel piano tangente

$$N(u, v) = \frac{c_u \times c_v}{|c_u \times c_v|} \quad (1.4)$$

Le derivate direzionali della mappa di Gauss definiscono la *seconda forma fondamentale* della superficie normalizzata  $K_p : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  che da una misura della curvatura della superficie. Per un insieme di coordinate ortogonali, il *tensor di curvatura* della superficie è

$$K_p = \begin{bmatrix} \frac{c_u^T n_u}{\|c_u\|^2} & \frac{c_u^T n_v}{\|c_u\| \|c_v\|} \\ \frac{c_v^T n_u}{\|c_v\| \|c_u\|} & \frac{c_v^T n_v}{\|c_v\|^2} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

dove  $n_u := \frac{\partial n}{\partial u}$  e  $n_v := \frac{\partial n}{\partial v}$ . Si definisce finalmente la *forma di torsione* che misura la velocità con la quale cambia la curvatura della superficie. La torsione di una superficie è la misura di come i twist del Gauss frame si muovono sulla superficie, proiettandoli sul piano tangente. Definendo  $T_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  come

$$T_p = y^T \begin{bmatrix} \frac{x_u}{\|c_u\|} & \frac{x_v}{\|c_v\|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_v^T c_{uu}}{\|c_u\|^2 \|c_v\|} & \frac{c_v^T c_{uv}}{\|c_u\| \|c_v\|^2} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

dove  $x_u$  e  $x_v$  sono le derivate parziali di  $x$  rispetto ad  $u$  e  $v$ ,  $c_{uu} := \frac{\partial^2 c}{\partial u^2}$  e  $c_{uv} := \frac{\partial^2 c}{\partial u \partial v}$ .

Quindi data una parametrizzazione,  $(M_p, K_p, T_p)$  sono tutti parametri che identificano la geometria della superficie. Questi parametri descritti sopra giocano un ruolo importante nella cinematica del contatto. Prima di definire le equazioni di Montana si deve introdurre il sistema di coordinate sarà utilizzato negli oggetti.

### 1.1.1 Definizione del Gauss frame

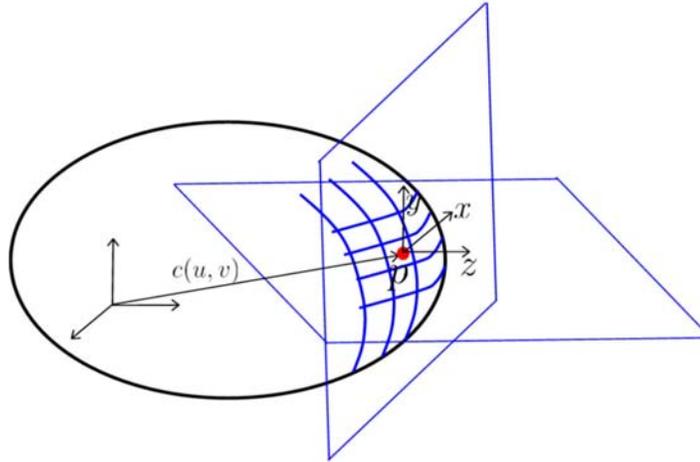


Figura 1.1: Gauss frame.

Prima di introdurre le equazioni di Montana, è necessario definire le caratteristiche di alcune particolari terne posizionate sulla superficie dell'oggetto, che prendono il nome di *Gauss frame*. Data una superficie  $S$  mappata da una carta  $c$  funzione di due parametri  $u$  e  $v$ , per ogni punto  $p = c(u, v)$  appartenente alla superficie si definisce una terna ortonormale i cui assi  $x$  e  $y$  appartengono al piano tangente alla superficie nel punto  $p$  e l'asse  $z$  è un

versore uscente dalla superficie appartenente al piano ortogonale agli assi  $x$  e  $y$  e sono definiti come

$$\begin{aligned} x &= \frac{c_u}{\|c_u\|} \\ y &= \frac{c_v}{\|c_v\|} \\ z &= \frac{c_u \times c_v}{\|c_u \times c_v\|} \end{aligned} \tag{1.7}$$

dove  $c_u = \frac{\partial c}{\partial u}$  e  $c_v = \frac{\partial c}{\partial v}$ . Adesso si considerino due oggetti con superficie  $S_f$  e  $S_o$  che si toccano in un punto come in figura 1.2. Date  $p_o(t) \in S_o$  e  $p_f(t) \in S_f$  le posizioni al tempo  $t$  del punto di contatto relative alle terne fissate rispettivamente nel corpo  $O$  e  $F$  rispettivamente. Dati  $c_o$  e  $c_f$  le carte che mappano le due superfici, con coordinate locali  $\alpha_o = c_o^{-1}(p_o) \in U_o$  e  $\alpha_f = c_f^{-1}(p_f) \in U_f$ . Si assume che  $c_o$  e  $c_f$  sono rappresentazioni ortogonali della superficie. Sia  $\psi$  l'angolo di contatto, definito come l'angolo tra i vettori tangenti  $\frac{\partial c_f}{\partial u_f}$  e  $\frac{\partial c_o}{\partial u_o}$ . Guardando la figura 1.2 si sceglie il segno positivo di  $\psi$  l'angolo, attorno al vettore uscente di  $S_o$ ,  $n_o$ , necessario per sovrapporre  $\frac{\partial c_o}{\partial u_o}$  con  $\frac{\partial c_f}{\partial u_f}$ .

Prendendo tutte le quantità che rappresentano il contatto, la variabile vettoriale  $\eta = (\alpha_f, \alpha_o, \psi)$  racchiude le *coordinate di contatto* per  $S_f$  e  $S_o$ . Questo sistema di coordinate non rimane fisso ma si va spostando con il punto di contatto.

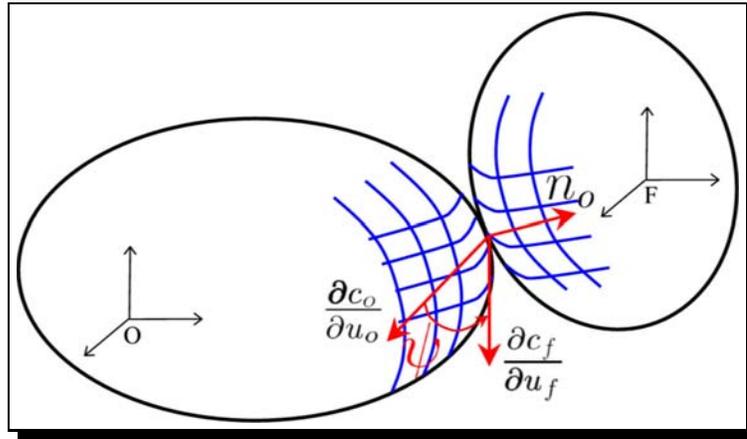


Figura 1.2: Moto di due oggetti in contatto.

### 1.1.2 Equazioni di Montana

Quindi le equazioni del modello di due superfici che rotolano senza strisciare, ricordando le eq.(1.6),(1.5) e (1.3) si ottiene

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_f &= M_f^{-1}(K_f + \tilde{K}_o)^{-1} \begin{bmatrix} -\omega_y \\ \omega_x \end{bmatrix} \\ \dot{\alpha}_o &= M_o^{-1}R_\psi(K_f + \tilde{K}_o^{-1}) \begin{bmatrix} -\omega_y \\ \omega_x \end{bmatrix} \\ \dot{\psi} &= T_f M_f \dot{\alpha}_f + T_o M_o \dot{\alpha}_o\end{aligned}\tag{1.8}$$

Dove:

$$\begin{aligned}\tilde{K}_o &= R_\psi K_o R_\psi \\ \alpha_f &= \begin{bmatrix} u_f \\ v_f \end{bmatrix} \\ \alpha_o &= \begin{bmatrix} u_o \\ v_o \end{bmatrix}\end{aligned}$$

con

$$R_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & -\cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\tag{1.9}$$

Le eq.(1.8) ricevono come ingresso la velocità relativa delle due superfici  $F$  e  $O$  espresse in coordinate  $O$ .

$$V_{lof_i}^{lf_i} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}\tag{1.10}$$

Nel caso che verrà presentato nel seguente lavoro, essendo un tipo di contatto *soft finger* le uniche componenti permesse sono  $\omega_x$  e  $\omega_y$  che forniscono il rotolamento senza strisciamento. Quindi se si vuole utilizzare tutto il vettore  $V_{lof_i}^{lf_i}$  nelle equazioni di montana si ottiene, definendo il vettore  $\eta = [\alpha_f \ \alpha_o \ \psi]^T$

$$\dot{\eta} = \Psi(\alpha_o, \alpha_f, \psi) K V_{lof_i}^{lf_i}\tag{1.11}$$

con  $K$  matrice che seleziona le componenti della velocità relativa permessa

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

e

$$\Psi = \begin{bmatrix} M_f^{-1}(K_f + \tilde{K}_o)^{-1} \\ M_o^{-1}R_\psi(K_f + \tilde{K}_o^{-1}) \\ (T_f + T_o)(K_f + \tilde{K}_o)^{-1} \end{bmatrix}, \quad (1.13)$$

### 1.1.3 Parametrizzazione del toro

Fino ad adesso sono stati introdotti gli strumenti e le equazioni per studiare il modo di puro rotolamento di due superfici. Nel caso in esame nella seguente relazione, al fine di studiare il caso dell'*Hand grasping* sono state scelte due tipologie di superfici, la sfera utilizzata per modellare i polpastrelli e il toro, utilizzato come oggetto da manipolare. Verranno quindi introdotte le parametrizzazioni dei suddetti oggetti. Le equazioni parametriche del *toro* sono

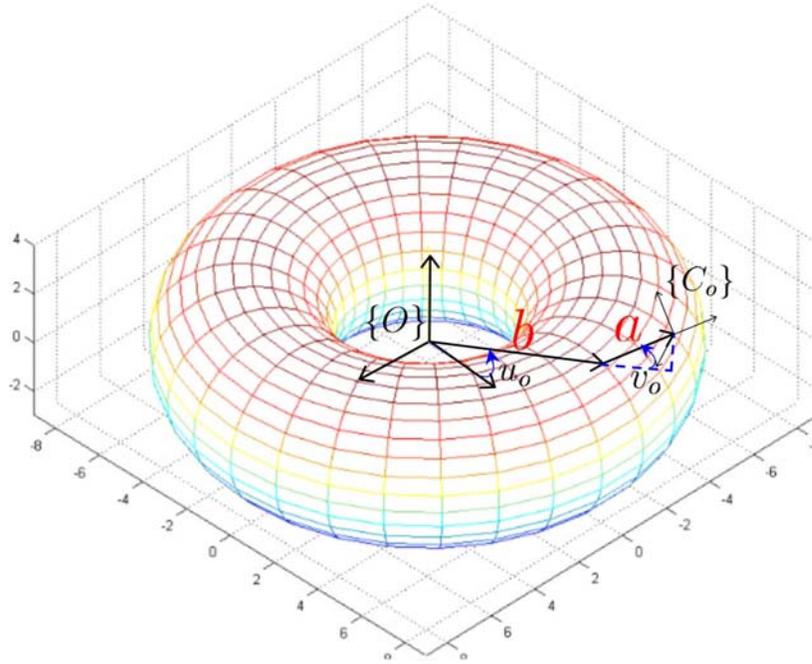


Figura 1.3: Parametrizzazione del toro.

$$c_o(u_o, v_o) = \begin{bmatrix} (b + a \cos v_o) \cos u_o \\ (b + a \cos v_o) \sin u_o \\ a \sin v_o \end{bmatrix} \text{ con } u_o \in [0, 2\pi), v_o \in [-\pi, \pi) \quad (1.14)$$

dove per ogni coppia  $(u_o, v_o)$  si identifica un punto appartenente alla superficie del toro. A tale scopo si trova una terna univocamente determinata da  $(u_o, v_o)$ , formata da due vettori ortogonali che stanno sul piano tangente definiti in questo modo

$$x_o = \frac{c_{o,u_o}}{\|c_{o,u_o}\|} = \begin{bmatrix} -\sin u_o \\ \cos u_o \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

$$y_o = \frac{c_{o,v_o}}{\|c_{o,v_o}\|} = \begin{bmatrix} -\sin v_o \cos u_o \\ -\sin v_o \sin u_o \\ \cos v_o \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

e un versore uscente normale alla superficie

$$z_o = \frac{c_{o,u_o} \times c_{o,v_o}}{\|c_{o,u_o} \times c_{o,v_o}\|} = \begin{bmatrix} \cos v_o \cos u_o \\ \sin u_o \cos v_o \\ \sin v_o \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

I versori  $x_o$ ,  $y_o$  e  $z_o$  sono quelli di un *sistema di riferimento di Gauss* e si definisce

$$R_{oc_o} = [x_o \quad y_o \quad z_o] \quad (1.18)$$

che è la matrice di rotazione del gauss frame sul toro rispetto al terna situata al centro dell'oggetto. Al fine di ricavare la matrice omogenea di trasformazione che lega le componenti espresse nel gauss frame a quelle espresse nella terna solidale al toro si ricava il vettore

$$p_{oc_o}(u_o, c_o) = c_o(u_o, v_o) \quad (1.19)$$

che fornisce la posizione di ogni punto sulla superficie del toro in coordinate base  $\{O\}$ . Si può adesso comporre la matrice omogenea che rappresenta la trasformazione di coordinate da  $\{C_o\}$  a  $\{O\}$

$$g_{oc_o} = \begin{bmatrix} R_{oc_o} & p_{oc_o} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

Viene riportata di seguito anche la forma esplicita, nel caso di oggetto toroidale dei parametri tipici che caratterizzano una superficie, ovvero *forma metrica*, di *curvatura* e di *torsione*

$$M_o(v_o) = \begin{bmatrix} b + a \cos v_o & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad K_o(v_o) = \begin{bmatrix} \frac{\cos v_o}{b + a \cos v_o} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}, \quad T_o(v_o) = \begin{bmatrix} \frac{\sin v_o}{b + a \cos v_o} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

#### 1.1.4 Parametrizzazione della sfera

Adesso verrà illustrata la parametrizzazione della sfera importante per modellare i polpastrelli. Le equazioni parametriche della sfera legano la terna solidale al centro della sfera  $\{F\}$  al gauss frame posto sulla superficie della stessa  $\{C_f\}$

$$c_f(u_f, v_f) = \begin{bmatrix} \rho \cos v_f \cos u_f \\ \rho \cos v_f \sin u_f \\ \rho \sin v_f \end{bmatrix} \text{ con } u_f \in [0, 2\pi), v_f \in [-\pi, \pi) \quad (1.22)$$

Allo stesso modo del toro si definisce il frame di Gauss [1] nella sfera introducendo i due vettori perpendicolari che appartengono al piano tangente

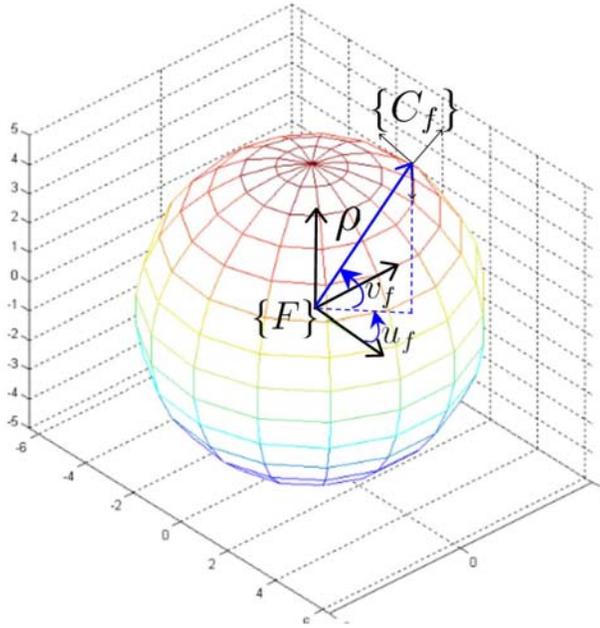


Figura 1.4: Parametrizzazione della sfera.

della superficie

$$x_f = \frac{c_{f,u_f}}{\|c_{f,u_f}\|} = \begin{bmatrix} -\sin u_f \\ \cos u_f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

$$y_f = \frac{c_{f,v_f}}{\|c_{f,v_f}\|} = \begin{bmatrix} -\sin v_f \cos u_f \\ -\sin v_f \sin u_f \\ \cos v_f \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

Infine si calcola anche il vettore uscente dalla superficie

$$z_f = \frac{c_{f,u_f} \times c_{f,v_f}}{\|c_{f,u_f} \times c_{f,v_f}\|} = \begin{bmatrix} \cos v_f \cos u_f \\ \sin u_f \cos v_f \\ \sin v_f \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

I versori  $x_f$ ,  $y_f$  e  $z_f$  sono quelli di un sistema di riferimento di Gauss e si definisce

$$R_{fc_f} = [x_f \quad y_f \quad z_f] \quad (1.26)$$

definendo il vettore dall'origine della terna di riferimento alla superficie della sfera

$$p_{fc_f}(u_f, v_f) = c_f(u_f, v_f) \quad (1.27)$$

si può adesso comporre la matrice omogenea che rappresenta la trasformazione di coordinate da  $\{C_f\}$  a  $\{F\}$

$$g_{fc_f} = \begin{bmatrix} R_{fc_f} & p_{fc_f} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

La forma metrica, di curvatura e di torsione della sfera sono le seguenti

$$M_f(v_f) = \begin{bmatrix} \rho \cos v_f & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix}, K_f = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{bmatrix}, T_f(v_f) = \begin{bmatrix} \frac{\tan v_f}{\rho} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

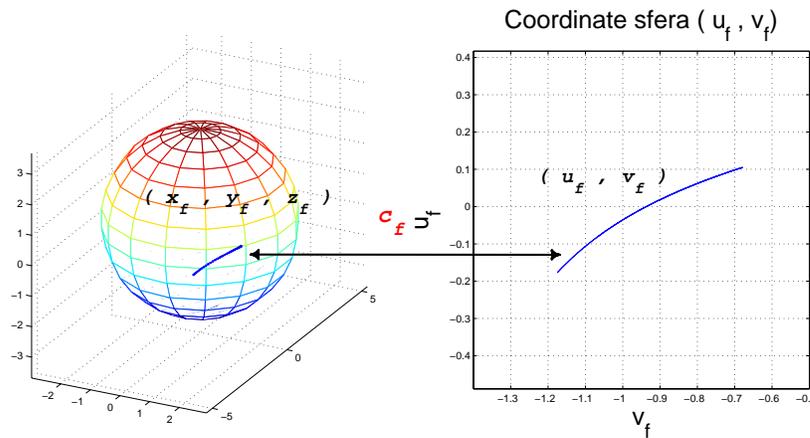


Figura 1.5: Mappatura in 3 coordinate e in 2 parametri

## 1.2 Cinematica del dito

Si passa adesso allo studio cinematico delle tre dita che costituiscono la mano. Le dita che compongono la mano risultano essere tutte cinematicamente uguali ma posizionate diversamente rispetto al palmo. Risulta allora sufficiente studiare cinematicamente un solo dito e poi infine, attraverso una matrice di rotazione riportare la base nella posizione desiderata rispetto al palmo. Il dito è formato da quattro link e quattro giunti rotoidali, tre disposti parallelamente al piano del palmo e uno perpendicolare allo stesso. Nel lavoro è stato scelto di utilizzare la tipologia di calcolo POE (*product of exponential*) e quindi è necessario ricavare i parametri caratteristici che risultano essere  $\omega$ ,  $q$  e  $\xi$ . Per definire la cinematica tra terna solidale al palmo  $\{P\}$  e terna

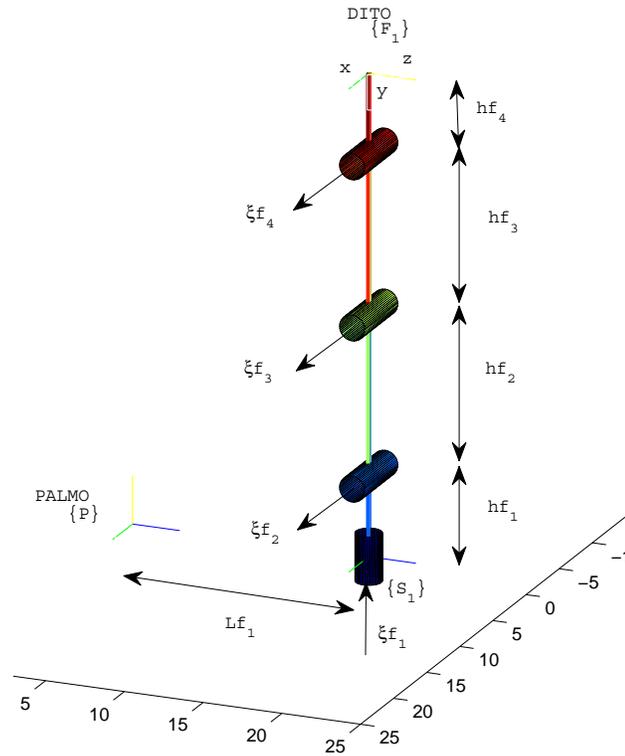


Figura 1.6: Schema del dito.

solidale al centro del polpastrello  $\{F\}$  con la POE è necessario conoscere l'offset iniziale tra questi due riferimenti che nel nostro caso risulta:

$$g_{sf_0} = \begin{bmatrix} R_x(-\pi/2) & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ hf_1 + hf_2 + hf_3 + hf_4 \end{pmatrix} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

La trasformazione omogenea tra base del dito e polpastrello è:

$$g_{sf}(\vartheta) = e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} \dots e^{\hat{\xi}_n \theta_n} g_{sf_0}, \quad (1.31)$$

Come detto in precedenza, la matrice di trasformazione delle tre dita risulta essere identica a meno del posizionamento della base rispetto al centro del palmo. Infatti le tre dita sono posizionate radialmente, rispetto al centro del palmo, rispettivamente a  $0$ ,  $\frac{2}{3}\pi$  e  $\frac{4}{3}\pi$ .

Le tre dita differiscono per una matrice di trasformazione che va a pre-moltiplicare la matrice  $g_{sf}$ , ottenendo quindi

$$g_{pf_i} = g_{ps_i} g_{sf} \quad (1.32)$$

link	$\omega$	$q$	$\xi$
1	(0 0 1)	(0 0 0)	(0 0 0 0 0 1)
2	(1 0 0)	(0 0 $hf_1$ )	(0 $hf_1$ 0 1 0 0)
3	(1 0 0)	(0 0 $hf_1 + hf_2$ )	(0 $hf_1 + hf_2$ 0 1 0 0)
4	(1 0 0)	(0 0 $hf_1 + hf_2 + hf_3$ )	(0 $hf_1 + hf_2 + hf_3$ 0 1 0 0)

Tabella 1.1: Parametri POE.

con

$$g_{ps_1} = \begin{bmatrix} I & \begin{pmatrix} 0 \\ L_f \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, g_{ps_2} = \begin{bmatrix} R_3(\frac{2\pi}{3}) & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g_{ps_1}, g_{ps_3} = \begin{bmatrix} R_3(\frac{2\pi}{3}) & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g_{ps_2} \quad (1.33)$$

Le matrici  $g_{pfi}$  non fanno altro che proiettare le componenti di posizione in terna  $\{F\}$  nella terna al centro del palmo  $\{P\}$ . Oltre allo studio delle posizioni è interessante, ai fini dello studio cinematico, studiare anche come si comportano le velocità nelle diverse terne poste sul manipolatore, specialmente le velocità della terna posta sull'ultimo link in funzione dell'variabili di giunto  $\theta_i$ .

Attraverso la notazione *POE* è possibile costruire lo jacobiano  $J_{st}^s(\theta) \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^6$ , che è una matrice dipendente dalla configurazione, la quale mappa le velocità dei giunti alle velocità dell'end-effector espresse tutte in terna  $S$ .

$$J_{st}^s(\theta) = [\xi_1 \quad \xi_2' \quad \dots \quad \xi_n'] \quad \xi_i' = Ad_{\left( e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} \quad \dots \quad e^{\hat{\xi}_{i-1} \theta_{i-1}} \right)} \xi_i \quad (1.34)$$

In virtù della definizione di  $\xi'$ , la *i-esima* colonna dello jacobiano dipende solamente da  $\theta_1, \dots, \theta_{i-1}$ . In altre parole, il contributo della velocità dell'*i-esima* giunto alla velocità dell'end-effector è indipendente alla configurazione dei giunti successivi nella catena cinematica. Perciò, la *i-esima* colonna dello jacobiano (1.34) corrisponde al twist del giunto *i-esimo*, trasformato da una trasformazione rigida  $e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} \dots e^{\hat{\xi}_{i-1} \theta_{i-1}}$ . Questa è una trasformazione di un corpo rigido che prende il sistema di riferimento dell'*i-esimo* giunto come suo riferimento alla configurazione corrente del manipolatore. Allora, la *i-esima* colonna dello jacobiano spaziale è il twist dell'*i-esimo* giunto, trasformato nella configurazione corrente del manipolatore.

$$V_{st}^s = J_{st}^s \dot{\theta} \quad (1.35)$$

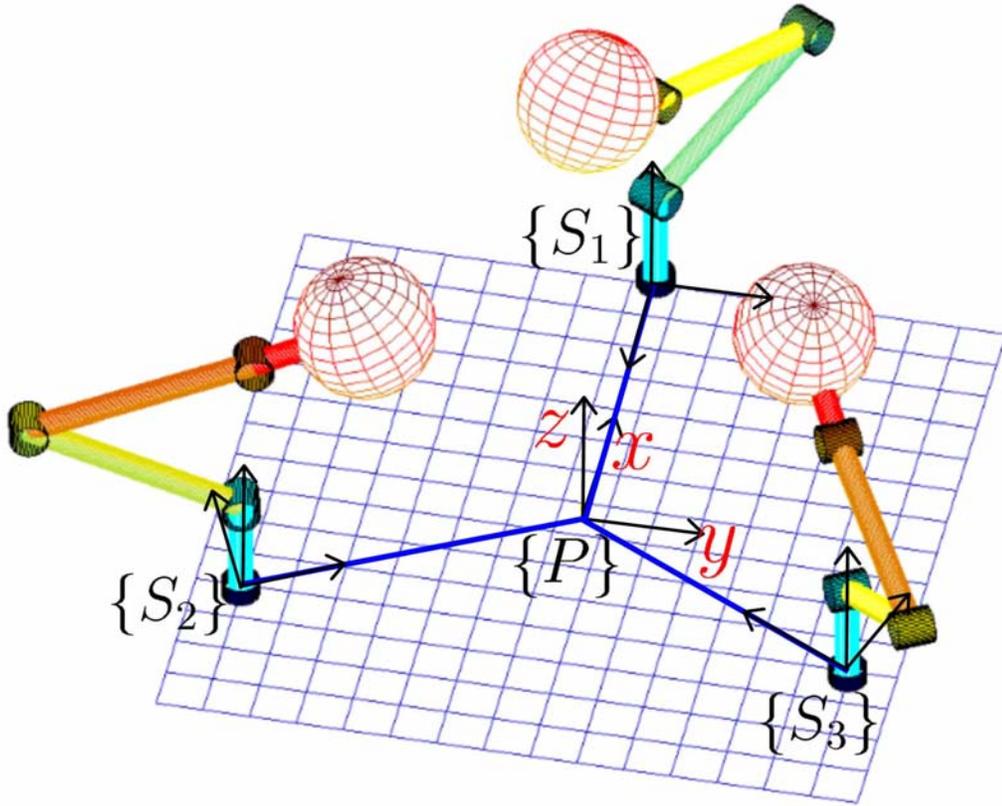


Figura 1.7: Sistema delle tre dita.

### 1.3 Vincoli cinematici

Si esamini ora la cinematica complessiva della mano. La mano è stata modellata come un insieme di robot seriali (dita) fissate in un'unica base (palmo). Per ogni dito della mano viene introdotto un frame alla sua base  $S_i$  ed un frame sul polpastrello nel punto di contatto  $L_{f_i}$ . Con la consueta simbologia si scrive la velocità dell'oggetto rispetto al palmo in coordinate del palmo come:

$$V_{po}^p = V_{psi}^p + V_{sifi}^p + V_{fio}^p = \text{Ad}_{g_{psi}} V_{sifi}^{s_i} - \text{Ad}_{g_{pf_i}} V_{fio}^{f_i} \quad (1.36)$$

Si noti ora che il termine  $V_{psi}^p$  risulta essere nulla in quanto le velocità della base del  $i$ -esimo dito  $S_i$  rispetto al palmo  $P$  è nulla.

$$V_{psi}^p = 0 \quad (1.37)$$

esprimendo inoltre la velocità del centro della sfera rispetto alla terna  $\{S\}$  in coordinate  $\{S\}$  può anche essere espressa, visto che parliamo di una catena

cinematica seriale, in termini di velocità dei giunti attraverso lo jacobiano

$$V_{s_i f_i}^{s_i} = J_{s_i f_i}^{s_i}(\theta_{f_i}) \dot{\theta}_{f_i} \quad (1.38)$$

Sostituendo le eq.(1.37),(1.38) nell'eq.(1.36) si ottiene:

$$V_{p_o}^p = \text{Ad}_{g_{p s_i}} J_{s_i f_i}^{s_i}(\theta_{f_i}) \dot{\theta}_{f_i} - \text{Ad}_{g_{p f_i}} V_{f_i o}^{f_i} \quad (1.39)$$

$$= \text{Ad}_{g_{p s_i}} J_{s_i f_i}^{s_i}(\theta_{f_i}) \dot{\theta}_{f_i} - \text{Ad}_{g_{p f_i}} \text{Ad}_{g_{f_i l f_i}} V_{l o l f_i}^{l f_i} \quad (1.40)$$

Lo stesso twist [2] dell'eq.(1.39) può essere espresso in componenti oggetto attraverso la trasformazione aggiunta Ad, la quale permette di esprimere le velocità rispetto a diversi poli

$$V_{p_o}^o = \text{Ad}_{g_{o f_i}} J_{s_i f_i}^{f_i}(\theta_{f_i}) \dot{\theta}_{f_i} - \text{Ad}_{g_{o l f_i}} V_{l o l f_i}^{l f_i} \quad (1.41)$$

Si cerca ora di ricavare  $V_{l o l f_i}^{l f_i}$ , che esprime la velocità relativa delle terne nel punto di contatto che si trovano sulle superfici rispettivamente della sfera e del toro espresse in coordinate del frame della sfera. Applicando alcune proprietà delle matrici di trasformazione e delle matrici aggiunte

$$\text{Ad}_{g_{o l f_i}}^{-1} = \text{Ad}_{g_{o f_i}^{-1}} = \text{Ad}_{g_{l f_i o}} \quad (1.42)$$

sostituendo all'eq.(1.41) e ricavando  $V_{l o l f_i}^{l f_i}$  si ottiene

$$V_{l o l f_i}^{l f_i} = \text{Ad}_{(g_{l f_i o} g_{o f_i})} J_{s_i f_i}^{f_i}(\theta_{f_i}) \dot{\theta}_{f_i} - \text{Ad}_{g_{l f_i o}} V_{p_o}^o \quad (1.43)$$

A questo punto denominando con  $B_i$  una base del wrench [3] esercitabile dal tipo di contatto allora segue che

$$B_i^T V_{l o l f_i}^{l f_i} = 0 \quad (1.44)$$

L'equazione sopra richiede semplicemente che si annulli la velocità relativa nella direzione in cui si può esercitare una forza non nulla.

Nel caso in esame il contatto è di tipo *soft-finger* [1] ovvero rotolamento senza strisciamento. La base  $B_i$  sarà allora:

$$B_i = \left[ \begin{array}{cccc} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \in \mathbb{R}^{6 \times 4} \quad (1.45)$$

Moltiplicando a sinistra l'eq.(1.43) per  $B_i$

$$0 = B_i^T V_{lolf_i}^{lf_i} = B_i^T \text{Ad}_{(g_{l_{f_i}o} g_{of_i})} J_{s_{if_i}^{f_i}}(\theta_{f_i}) \dot{\theta}_{f_i} - B_i^T \text{Ad}_{g_{l_{f_i}o}} V_{po}^o \quad (1.46)$$

riportando da una parte i termini moltiplicati per le velocità dei giunti e dall'altra quelli moltiplicati per le velocità dell'oggetto

$$B_i^T \text{Ad}_{(g_{l_{f_i}o} g_{of_i})} J_{s_{if_i}^{f_i}}(\theta_{f_i}) \dot{\theta}_{f_i} = B_i^T \text{Ad}_{g_{l_{f_i}o}} V_{po}^o \quad (1.47)$$

Al fine di giungere ad una formula nota nello studio dei sistemi meccanici vincolati si definisce la matrice

$$B_i^T \text{Ad}_{g_{l_{f_i}o}} = \left( \text{Ad}_{g_{l_{f_i}o}}^T B_i \right)^T =: G_i^T \quad (1.48)$$

dove  $G_i^T$  non è altro che la matrice che trasforma la velocità dell'oggetto rispetto al palmo  $V_{po}$  dalle componenti in terna oggetto  $V_{po}^o$  alle componenti in terna solidale al punto di contatto  $V_{po}^{lf}$ .

Si ha allora direttamente

$$B_i^T \text{Ad}_{(g_{l_{f_i}o} g_{of_i})} J_{s_{if_i}^{f_i}}(\theta_{f_i}) \dot{\theta}_{f_i} = G_i^T V_{po}^o \quad (1.49)$$

In generale per  $k$  contatti posso definire la matrice

$$J_h = \begin{bmatrix} B_1^T \text{Ad}_{(g_{l_{f_1}o} g_{of_1})} J_{s_{1f_1}^{f_1}}(\theta_{f_1}) \dot{\theta}_{f_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & B_k^T \text{Ad}_{(g_{l_{f_k}o} g_{of_k})} J_{s_{kf_k}^{f_k}}(\theta_{f_k}) \dot{\theta}_{f_k} \end{bmatrix} \quad (1.50)$$

ed ordinando le matrici  $G$  come di seguito

$$G^T = \begin{bmatrix} G_1^T \\ \vdots \\ G_k^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (B_1^T \text{Ad}_{g_{l_{f_1}o}})^T \\ \vdots \\ (B_k^T \text{Ad}_{g_{l_{f_k}o}})^T \end{bmatrix} \quad (1.51)$$

Si ricava il vincolo cinematico per contatti mobili

$$J_h(\theta_f, \eta) \dot{\theta}_f = G^T(\eta) V_{po}^o \quad (1.52)$$

e manipolando l'eq.(1.52) e riportandola nella forma vista in [3] si ottiene

$$A(q) \dot{q} = 0 \quad \text{con } q = [\theta \quad V_{po}^o]^T \quad (1.53)$$

con

$$A(q) = [J_h(\theta_f, \eta) \quad -G^T(\eta)] \quad (1.54)$$

Come si nota nell'eq.(1.52), le matrici  $J_h$  e  $G$  sono funzioni delle coordinate parametriche delle superfici in contatto  $\eta$ , nel nostro caso rappresentate da quelle dell'oggetto da manipolare (toro) e quella del polpastrello del singolo dito (sfera).

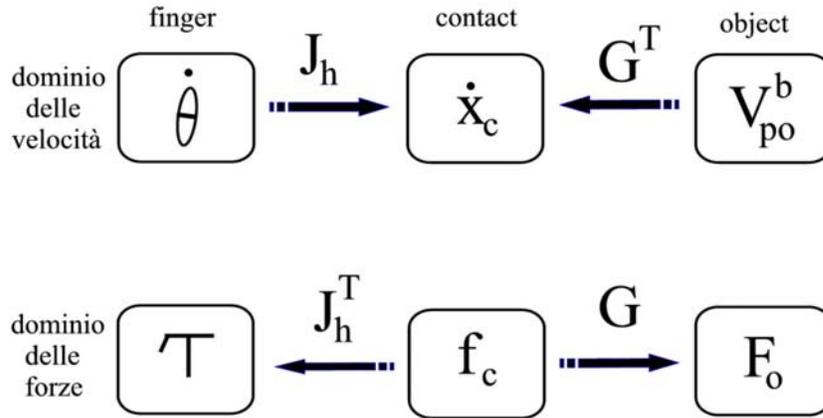


Figura 1.8: Diagramma di relazioni per multifingered grasp.

Attraverso l'eq.(1.43) è inoltre possibile esprimere le equazioni di Montana in una formula utile per l'implementazione cinematica della matrice di vincolo. Infatti sostituendo nella (1.13) l'eq.(1.43) si ottiene l'equazione differenziale di montana non più funzione della velocità relativa  $V_{lof_i}^{lfi}$  ma del twist di velocità del toro  $V_{po}^o$ . Quindi per i tre contatti la forma compatta risulta,  $\Sigma = [\eta_1 \quad \eta_2 \quad \eta_3]^T$ , la quale è un'unica equazione differenziale che descrive il moto dei tre punti di contatto

$$\dot{\Sigma} = \Gamma(\theta, \Sigma)V_{po}^o \quad (1.55)$$

avendo definito opportunamente le seguenti matrici

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Psi} &= \begin{bmatrix} \Psi_1 K & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_2 K & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_3 K \end{bmatrix} \\
 P &= \begin{bmatrix} \text{Ad}_{g_{l_{f_1 f_1}}} J_{s_{f_1}}^{f_1}(\theta_{f_1}) & 0 & 0 \\ 0 & \text{Ad}_{g_{l_{f_2 f_2}}} J_{s_{f_2}}^{f_2}(\theta_{f_2}) & 0 \\ 0 & 0 & \text{Ad}_{g_{l_{f_3 f_3}}} J_{s_{f_3}}^{f_3}(\theta_{f_3}) \end{bmatrix} \\
 D &= \begin{bmatrix} \text{Ad}_{g_{l_{f_1 o}}} \\ \text{Ad}_{g_{l_{f_2 o}}} \\ \text{Ad}_{g_{l_{f_3 o}}} \end{bmatrix} \\
 \Gamma &= \tilde{\Psi} P J_h^{-1}(\theta, \eta) G^T - \tilde{\Psi} D
 \end{aligned} \tag{1.56}$$

dove con il pedice  $i = 1, 2, 3$  si indicano le variabili relative all' $i$ -esimo dito e  $i$ -esimo contatto. Per la cinematica della mano allora bisognerà integrare la suddetta equazione differenziale insieme alle equazioni di vincolo, per un totale di 27 equazioni differenziali non lineari.

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \Sigma \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} J_h^{-1} G^T \\ \Gamma \end{bmatrix} V_{po}^o dt + \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \Sigma_0 \end{bmatrix} \tag{1.57}$$

Una proprietà importante, come si vede dalla figura 1.8, delle matrici  $J_h$  e  $G$  è che risulta possibile passare dal dominio delle velocità (o coppie) ai giunti a quelle delle velocità (o forze generalizzate) dell'end effector e viceversa.

## 1.4 Calcolo della postura iniziale

Come mostrato nella sezione precedente, per monitorare l'evoluzione cinematica del sistema è necessario integrare contemporaneamente le equazioni di Montata (1.11) con le equazioni di vincolo (1.52) dando come ingresso la velocità  $V_{po}^o$ . È necessario, quindi, avere 27 condizioni iniziali, relative alle variabili di cui è funzione il sistema. In questa sezione verrà mostrato come otterrerle imponendo alcune condizioni sulla cinematica inversa. Per trovare le configurazioni adatte si deve risolvere un sistema di equazioni algebriche le cui incognite sono le condizioni iniziali necessarie all'integrazione numerica.

Il sistema complessivo mano-toro ha sei gradi di libertà, quindi è possibile posizionare ed orientare come si vuole il toro nello spazio operativo destro. Imposte come variabili note  $u_o, v_o$ , ovvero il punto di contatto delle dita sul toro, la posizione e l'orientamento assoluto dell'oggetto  $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$  e per quanto riguarda la sfera  $v_f$  verranno ricavate le restanti variabili; ricordando

eq. Montana	dita
$(u_o, v_o, u_f, v_f, \psi)_1$	$\theta_1$
$(u_o, v_o, u_f, v_f, \psi)_2$	$\theta_2$
$(u_o, v_o, u_f, v_f, \psi)_3$	$\theta_3$

Tabella 1.2: parametri cinematica inversa.

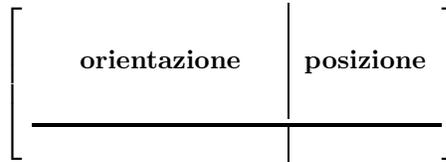
che la rappresentazione a due parametri nella sfera ha delle singolarità ai poli ( $v_f = \pm \frac{\pi}{2}$ ), si impone  $v_f = 0$  in modo tale da far toccare la sfera nella zona in cui non si hanno singolarità. Imposte le suddette variabili si risolve per ogni dito e in maniera indipendente, un sistema di cinque equazioni non lineari nelle incognite  $\theta_i$  e  $u_{f_i}$ .

Per risolvere tale problema si sfrutta l'uguaglianza

$$g_{pL_f} = g_{psi} g_{sif} g_{fL_f} = g_{po} g_{olo} g_{L_oL_f} \quad (1.58)$$

È possibile dividere le equazioni (1.58) in due parti indipendenti:

- parte di posizione
- parte di orientazione



*Parte di posizione.* Si impone che le componenti di posizione delle trasformazioni (1.58) debbano coincidere ( $p_{pl_o}^p = p_{pl_f}^p$ ), trascurando qui la trasformazione  $g_{l_oL_f}$  che influenza solo sulla parte di orientamento.

Esaminando le variabili note e quelle incognite si nota che la trasformazione

$$g_{pl_o}(u_o, v_o, x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = g_{po} g_{olo} = \begin{bmatrix} n_{pl_o} & s_{pl_o} & a_{pl_o} & p_{pl_o}^p \\ & 0 & & 1 \end{bmatrix} \quad (1.59)$$

risulta essere una matrice costante che sarà il termine noto delle tre equazioni di posizione; allo stesso modo si ricava

$$g_{pl_f}(u_f, v_f, \theta) = g_{ps} g_{sf} g_{fl_f} = \begin{bmatrix} n_{pl_o} & s_{pl_o} & a_{pl_f} & p_{pl_f}^p \\ & 0 & & 1 \end{bmatrix} \quad (1.60)$$

estrapolando i vettori di posizione delle 2 matrici in (1.59) e (1.60) si ottiene un sistema di tre equazioni nonlineari in 5 incognite al quale devono essere aggiunte altre 2 condizioni che possono essere ottenute dalla parte di orientazione.

*Parte di orientazione.* Per chiudere il sistema di equazioni e utilizzare

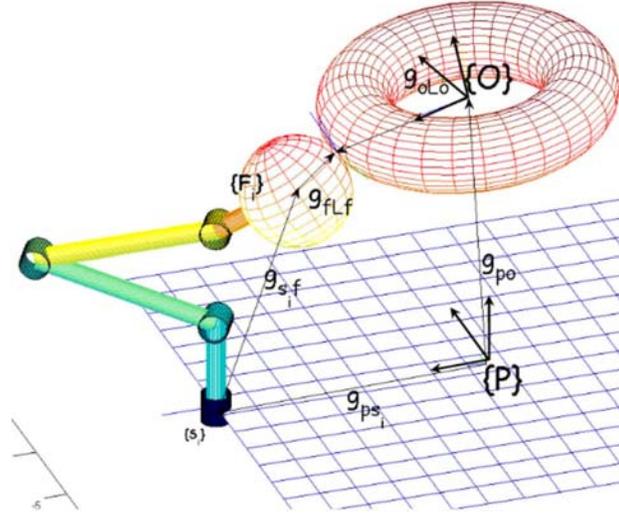


Figura 1.9: Cinematica inversa.

altre due equazioni linearmente indipendenti dalle altre 3, utilizzando la definizione di *Gauss frame* si inserisce il vincolo che impone che i due vettori normali alla sfera e al toro nel punto di contatto siano paralleli ma di direzione opposta

$$\begin{bmatrix} a_{pl_o x} \\ a_{pl_o y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{pl_f x} \\ a_{pl_f y} \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

In questo modo si ottiene per ogni dito un sistema di 5 equazioni nonlineari con 5 incognite che può essere facilmente risolto da un toolbox numerico, per esempio *fsolve* di *Matlab<sup>TM</sup>*.

Al fine di integrare tutte le equazioni differenziali, ricordando che le equazioni di Montana (1.11) hanno anche bisogno dell'angolo di sfasamento lungo l'asse  $z$  delle due terne del gauss frame  $\psi$  e ricordando anche la composizione della matrice  $R_\psi$  dell'eq.(1.9) si ricava l'ultimo parametro calcolando

$$R_\psi = R_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & -\cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = R_{pl_p}^{-1} R_{pl_f} \quad (1.62)$$

e selezionando il primo elemento della matrice della matrice (1.62) si ottiene

$$\psi = \cos^{-1}(R_{pl_p}^{-1}R_{pl_f}(1, 1)) \quad (1.63)$$

# Capitolo 2

## Dinamica

### 2.1 Dinamica del toro

Le equazioni di Lagrange sono un metodo generale per ricavare le equazioni del moto per un sistema meccanico [1], [3]. Comunque, implicitamente nel calcolo delle equazioni di Lagrange è assunto che lo spazio di configurazione del sistema può essere parametrizzato da un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$ , dove  $n$  è il numero di gradi di libertà del sistema. Per un corpo rigido con configurazione  $g \in SE(3)$ , le equazioni di Lagrange non possono essere direttamente utilizzate per determinare il moto a meno che non si scelga una parametrizzazione locale per lo spazio di configurazione (per esempio usando gli angoli di Eulero per descrivere l'orientazione dell'oggetto). Visto che tutte le parametrizzazioni di  $SE(3)$  sono singolari per alcune configurazioni, questa parametrizzazione può essere fatta solo localmente.

Data la matrice di trasformazione  $g = (\lambda, R)$  (con  $\lambda$  vettore di posizione ed  $R$  matrice di orientamento) che proietta le componenti dalla terna posta al centro dell'oggetto a quella inerziale, date le  $f$  come forze applicate al centro di massa espresse in frame inerziale possiamo descrivere la dinamica dell'oggetto con le equazioni di Newton-Eulero.

Per quanto riguarda il contributo traslazionale delle forze, avendo il corpo massa costante, il moto del centro di massa diventa

$$f = m\ddot{\lambda} \quad \text{con } \lambda = [x \ y \ z]^T \quad (2.1)$$

Queste equazioni sono indipendenti dal moto angolare del corpo rigido perchè si utilizza il centro di massa per rappresentare la posizione del punto.

Allo stesso modo le equazioni che descrivono il moto angolare possono essere ricavate indipendentemente dal moto traslazionale del sistema. Si consideri la rotazione di un corpo rigido attorno ad un punto, soggetto ad

una coppia esterna applicata  $\tau$ . Per ricavare l'equazione del moto, si deve eguagliare la variazione di momento angolare con la coppia applicata. Il momento angolare relativo al frame inerziale è dato da  $J'\omega^s$ , dove

$$J' = RJR^T \quad (2.2)$$

è il tensore istantaneo di inerzia relativo al frame inerziale e  $\omega^s$  è la velocità angolare spaziale. Le equazioni angolari del moto diventano

$$\tau = \frac{d(J'\omega^s)}{dt} = \frac{d(RJR^T\omega^s)}{dt} \quad (2.3)$$

dove  $\tau \in \mathbb{R}^3$  è espresso nel frame inerziale. Espandendo l'eq.(2.3) si ottiene

$$J'\dot{\omega}^s + \omega^s \times J'\omega^s = \tau. \quad (2.4)$$

L'equazione (2.4) è chiamata *equazione di Eulero*.

Le eq.(2.1) e (2.4) descrivono la dinamica di un corpo rigido in termini di forze e coppie applicate al centro di massa dell'oggetto.

Comunque, le coordinate dei vettori di forza e coppia non sono espresse in coordinate locali fissate al centro di massa dell'oggetto ma piuttosto rispetto alla terna inerziale. Quindi la coppia  $(f, \tau) \in \mathbb{R}^6$  non è il wrench applicato al corpo rigido, perchè il punto di applicazione non è l'origine delle coordinate inerziali.

Allo stesso modo, le velocità  $(\dot{\lambda}, \omega^s)$  non corrispondono alle velocità spaziali o alle velocità corpo, poichè  $\dot{\lambda}$  non è l'espressione corretta della velocità lineare in termini di coordinate corpo.

Per esprimere la dinamica in termini di twist e wrench, si riscrivono le equazioni usando le velocità corpo  $v^o = R^T\dot{\lambda}$ ,  $\omega^o = R^T\omega^s$ , le forze e le coppie espresse in terna corpo rispettivamente  $f^o = R^T f$  e  $\tau^o = R^T \tau$  ottenendo

$$\begin{bmatrix} mI & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}^o \\ \dot{\omega}^o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega^o \times mv^o \\ \omega^o \times J\omega^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^b \\ \tau^b \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Questa equazione è l'equazione *Newton-Eulero* in coordinate locali. Dalle equazioni finora mostrate, tutte le grandezze sono espresse in terna del toro che non sono vere coordinate quindi non integrabili. Si deve allora scrivere tutto in funzione di coordinate che possono essere integrate, sfruttando la relazione:

$$v^o = R_{p^o}^T \dot{\lambda} \quad (2.6)$$

$$\omega^o = G^o \dot{\Phi} \quad (2.7)$$

Dove  $R_{po}$  è la rotazione tra il palmo  $\{P\}$  e la terna del toro  $\{O\}$ , mentre  $G^o$  è lo jacobiano che lega le velocità angolari generalizzate  $\omega$  agli angoli di eulero  $\Phi = (\gamma, \beta, \psi)^T$  (con la convenzione  $ZXZ$ )

$$G^o = \begin{bmatrix} \sin \beta \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ \sin \beta \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \cos \beta & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Sostituendo le formule trovate nella (2.6) si ottiene

$$m(R_{po}^T \ddot{\lambda} + \dot{R}_{po}^T \dot{\lambda}) + (G^o \dot{\Phi}) \times m R_{po}^T \dot{\lambda} = F \quad (2.9)$$

$$I(G^o \ddot{\Phi} + \dot{G}^o \dot{\Phi}) + (G^o \dot{\Phi}) \times I G^o \dot{\Phi} = \tau \quad (2.10)$$

Definendo ora il vettore

$$\zeta = \begin{bmatrix} \lambda \\ \Phi \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Elaborando le equazioni precedentemente trovate si giunge alla seguente forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m R_{po}^T & 0 \\ 0 & I G^o \end{bmatrix}}_{B_o(\zeta)} \ddot{\zeta} + \underbrace{\begin{bmatrix} m \dot{R}_{po}^T + (G^o \dot{\Phi})^\wedge m R_{po}^T & 0 \\ 0 & I \dot{G}^o + (G^o \dot{\Phi})^\wedge I G^o \end{bmatrix}}_{C_o(\zeta, \dot{\zeta})} \dot{\zeta} = \begin{bmatrix} F \\ \tau \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

la quale non tiene conto delle forze gravitazionali. Se si considera la forza di gravità  $\vec{g}$  espressa in componenti  $\{P\}$

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.8 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

che premoltiplicata per  $R_{po}^T$  viene proiettata nella terna del toro; in questo modo si può aggiungere alle equazioni della dinamica il termine dovuto alla forza di gravità

$$B_o(\zeta) \ddot{\zeta} + C_o(\zeta, \dot{\zeta}) \dot{\zeta} + \begin{bmatrix} R_{po}^T m \vec{g} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ \tau \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

## 2.2 Dinamica del dito

Come noto dal capitolo precedente, ogni dito, preso in maniera indipendente, rappresenta una catena cinematica aperta. Visto le proprietà di simmetria delle dita, al fine di calcolare la dinamica complessiva delle dita, essendo disaccoppiate l'una dall'altra, in condizioni di *non chiusura cinematica* è necessario calcolare la dinamica del dito *i-esimo* utilizzando la formula del prodotto degli esponenziali semplicemente come se fosse un manipolatore seriale.

Si vedrà inoltre, che avendo utilizzato per la descrizione cinematica del singolo dito la POE, sarà più semplice ottenere la formula esplicita della matrice di Coriolis [1]. Per prima cosa si piazzano le terne di ogni singolo link nel centro di massa e allineando gli assi  $x$ ,  $y$  e  $z$  lungo gli assi principali d'inerzia in modo che la matrice di massa può essere scritta come

$$\mathcal{M}_i = \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 & & & \\ 0 & m_i & 0 & & & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & m_i & & & \\ & & & I_{xi} & 0 & 0 \\ & \mathbf{0} & & 0 & I_{yi} & 0 \\ & & & 0 & 0 & I_{zi} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

La matrice di massa nell'(2.15) espressa nel sistema di riferimento locale, deve essere riportata nella terna base del manipolatore attraverso la seguente matrice

$$A_{ij} := \begin{cases} Ad_{(e^{\xi_{j+1}\vartheta_{j+1}} \dots e^{\xi_i\vartheta_i})}^{-1} & i > j \\ I & i = j \\ 0 & i < j \end{cases} \quad (2.16)$$

Usando questa notazione, la  $j$ -esima colonna dello jacobiano body per l'*i*-esimo link è dato da  $Ad_{g_{sl_i}^{-1}} A_{ij} \xi_j$ :

$$J_i(\vartheta) = Ad_{g_{sl_i}^{-1}(0)} [A_{i1}\xi_1 \quad \dots \quad A_{ii}\xi_i \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (2.17)$$

combinando  $Ad_{g_{sl_i}^{-1}(0)}$  con la matrice di massa del link e definendo la trasformazione per l'*i*-esimo link:

$$\mathcal{M}'_i = Ad_{g_{sl_i}^{-1}(0)}^T \mathcal{M}_i Ad_{g_{sl_i}^{-1}(0)} \quad (2.18)$$

dove  $\mathcal{M}'_i$  rappresenta la matrice di massa del link *i-esimo* proiettata nella terna base del dito. Utilizzando la notazione definita sopra, le matrici di

inerzia e di Coriolis di un manipolatore a catena aperta possono essere definite come

$$\begin{aligned}
 M_{ij}(\theta) &= \sum_{l=\max(i,j)}^n \xi_i^T A_{li}^T \mathcal{M}'_i A_{li} \xi_i \\
 C_{ij}(\theta) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial M_{ij}}{\partial \theta_k} + \frac{\partial M_{ik}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial M_{kj}}{\partial \theta_i} \right) \dot{\theta}_k
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

## 2.3 Dinamica vincolata

La dinamica complessiva della mano con l'oggetto da manipolare si ottiene combinando la dinamica delle dita con quella dell'oggetto per mezzo dell'equazione di grasp [1].

La dinamica delle dita, come quella di un qualunque sistema meccanico per prima cosa si deve riportare il sistema in una forma adatta al controllo [4]

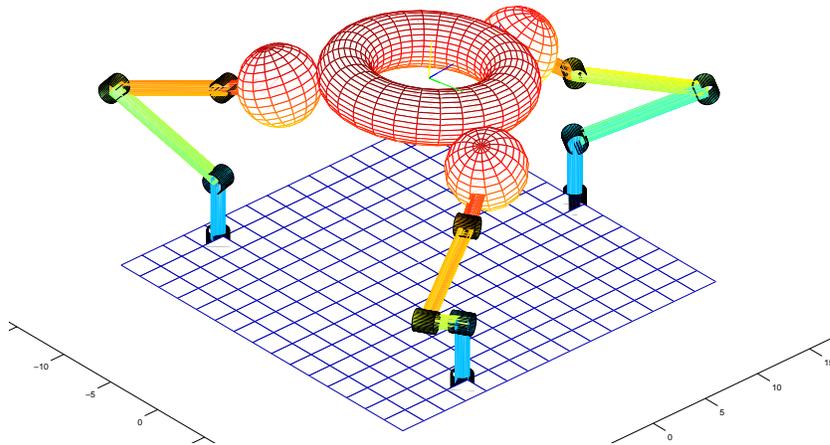


Figura 2.1: Sistema complessivo mano più toro.

$$M_f(\theta)\ddot{\theta} + C_f(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + N_f(\theta, \dot{\theta}) = \tau
 \tag{2.20}$$

dove  $\theta = (\theta_{f_1}, \dots, \theta_{f_k}) \in \mathbb{R}^n$  è il vettore degli angoli dei giunti di tutte le dita della mano, mentre  $\tau \in \mathbb{R}^n$  è il vettore relativo alle coppie ai giunti. I tre sistemi risultano essere per adesso indipendenti, le matrici  $M_f$ ,  $C_f$  ed  $N_f$

sono formate impilando diagonalmente le singole matrici dinamiche di ogni dito:

$$M_f = \begin{bmatrix} M_{f_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_{f_k} \end{bmatrix} \quad C_f = \begin{bmatrix} C_{f_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{f_k} \end{bmatrix} \quad N_f = \begin{bmatrix} N_{f_1} \\ \vdots \\ N_{f_k} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

La dinamica dell'oggetto è quella descritta da

$$M_o(\zeta)\ddot{\zeta} + C_o(\zeta, \dot{\zeta})\dot{\zeta} + N_o(\zeta) = F \quad \text{con } \zeta = [\lambda \quad \Phi]^T \quad (2.22)$$

Ricordando che il toro e le dita sono legate tra di loro attraverso la matrice di grasp dell'eq.(1.52) manipolando opportunamente le due equazioni dinamiche si ottiene una unica equazione che tiene conto anche dei vincoli. Il sistema complessivo può essere visto come un sistema con dinamica vincolata studiabile con diverse tecniche. Al fine di ottenere quanto detto in precedenza è stato utilizzato il metodo *Embedding Technique* dove vengono distinte le variabili dipendenti e variabili indipendenti del sistema [3].

Si definisce la Lagrangiana del sistema complessivo come

$$L = \frac{1}{2}\dot{\theta}^T M_f \dot{\theta} + \frac{1}{2}\dot{\zeta}^T M_o \dot{\zeta} - V_f(\theta) - V_o(\zeta) \quad (2.23)$$

dove  $V_f$  e  $V_o$  sono i termini potenziali dovuti alla gravità.

Il vincolo di velocità della (1.52) vincola gli spostamenti virtuali  $\delta\theta$  e  $\delta\zeta$  mediante l'equazione

$$\delta\theta = J_h^{-1} G^T \delta\zeta \quad (2.24)$$

Sfruttando l'equazione precedente e riscrivendo la Lagrangiana[1] si giunge alla dinamica del sistema complessivo

$$\tilde{M}(q)\ddot{\zeta} + \tilde{C}(q, \dot{q})\dot{\zeta} + \tilde{N}(q, \dot{q}) = F \quad (2.25)$$

dove:

$$\tilde{M} = M_o + G J_h^{-T} M_f J_h^{-1} G^T \quad (2.26a)$$

$$\tilde{C} = C_o + G J_h^{-T} (C_f J_h^{-1} G^T + M_f \frac{d}{dt} (J_h^{-1} G^T)) \quad (2.26b)$$

$$\tilde{N} = N_o + J_h^{-1} G^T N_f \quad (2.26c)$$

$$F = J_h^{-1} G^T \tau \quad (2.26d)$$

$$q = [\theta \quad \zeta]^T \quad (2.26e)$$

L'espressione scritta ha la stessa forma di un'equazione della dinamica di un manipolatore seriale. Si può anche dimostrare che l'equazione ha le stesse proprietà strutturali di un sistema non vincolato, ovvero

1.  $\tilde{M}(q)$  è simmetrica e definita positiva.
2.  $\dot{\tilde{M}}(q) - 2\tilde{C}$  è una matrice skew simmetrica.

# Capitolo 3

## Controllo

In questo paragrafo verrà analizzato il controllo di un sistema vincolato, nel caso in esame la catena cinematica chiusa[4] mano - toro attraverso l'algoritmo *computed torque* [4].

### 3.1 Computed torque

Il metodo di controllo a coppia calcolata o della dinamica inversa è tipicamente non lineare la cui schematizzazione è riportata in figura 3.1. Il controllo si basa sull'uso di due anelli di reazione: quello interno esegue il calcolo del controllo non lineare, attraverso un' interfaccia dedicata che riceve come ingressi  $q$  ,  $\dot{q}$  e  $v$  e fornisce come uscita  $u$ . L'anello esterno esegue il calcolo dell'ingresso aggiuntivo  $v$ . Il progetto di tale anello è in teoria semplificato

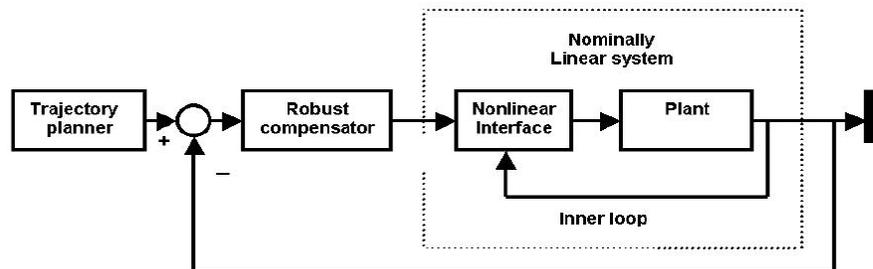


Figura 3.1: Schema di controllo del computed torque

in quanto deve pilotare un sistema che è lineare o è stato linearizzato dalla reazione dell'anello interno.

Verrà mostrato in seguito come ottenere quanto precedentemente esposto. Si considerino le equazioni dinamiche del manipolatore in forma matriciale:

$$M(q)\dot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = u \quad (3.1)$$

L'idea del controllo della dinamica inversa è quella di definire una legge di controllo:

$$u = f(q, \dot{q}) \quad (3.2)$$

tale che il sistema chiuso in reazione risulti lineare. Per raggiungere questo scopo si pone:

$$u = M(q)v + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) \quad (3.3)$$

Poichè la matrice  $M$  è invertibile per proprietà fisiche del sistema, con tale controllo si ottiene:

$$\ddot{q} = v \quad (3.4)$$

Il vettore  $v$  rappresenta il nuovo ingresso del sistema, che ora è diventato lineare. La precedente equazione si riferisce ad un sistema composto da  $n$  doppi integratori disaccoppiati. In pratica si è partiti da un sistema fortemente non lineare e si è giunti ad un sistema teoricamente lineare ad elementi non interagenti fra loro: ciò significa che ciascun ingresso  $v_k$  deve essere scelto per controllare un sistema scalare lineare. Inoltre poiché  $v_k$  è una funzione solo di  $q_k$  e delle sue derivate, essa agirà solo sulla  $k$ -esima variabile di giunto indipendentemente dal movimento degli altri link. Si sceglie  $v$  in modo da ottenere un sistema lineare del secondo ordine:

$$v = -K_0q - K_1\dot{q} + r \quad (3.5)$$

dove  $K_0$  e  $K_1$  sono matrici diagonali i cui elementi rappresentano i guadagni di posizione e di velocità. Il sistema reazionato è governato quindi dall'equazione:

$$\ddot{q} + K_1\dot{q} + K_0q = r \quad (3.6)$$

Data una traiettoria, espressa da  $q_d(t)$  dalle sue derivate, si sceglie il riferimento  $r(t)$  come

$$r(t) = \dot{q}_d(t) + K_1 \dot{q}_d(t) + K_0 q_d(t) \quad (3.7)$$

La dinamica dell' errore  $e(t) = q_d(t) - q(t)$  risulta quindi:

$$\ddot{e}(t) + K_1 \dot{e}(t) + K_0 e(t) = 0 \quad (3.8)$$

Globalmente il sistema in retroazione risulta disaccoppiato, e la risposta di ciascun giunto è pari a quella di un sistema del secondo ordine criticamente smorzato con frequenza naturale  $\omega_i$ . Questo schema di controllo richiede, però, che ad ogni istante venga calcolata la matrice di inerzia  $M(q)$  nonché i vettori relativi ai termini di Coriolis, centrifughi, gravitazionali e di smorzamento. Per quanto esposto fin qui, quello della coppia calcolata sembrerebbe un ottimo metodo di controllo, in quanto la dinamica fortemente non lineare ed accoppiata del manipolatore viene cancellata e sostituita da una semplice sistema disaccoppiato del secondo ordine. Purtroppo tale cancellazione non può essere mai ottenuta in maniera perfetta e quindi lo schema di controllo, pur mantenendo la sua validità, pone notevoli problemi di robustezza e sensitività ai disturbi che devono essere in qualche modo risolti.

## 3.2 Controllo sistema vincolato

Il problema di controllo può essere diviso in due parti principali:

1. Tracking di una traiettoria dato l'oggetto
2. Mantenere delle forze interne desiderate

Supponendo che la geometria dei link e dell'oggetto sia completamente conosciuta i due problemi possono essere relativamente disaccoppiati. Si trovano prima le coppie ai giunti che permettono l'inseguimento della traiettoria e successivamente vengono aggiunte altre coppie che mantengono l'oggetto in presa ovvero generando delle forze che stanno nel cono d'attrito tra dito e oggetto.

Nello specifico, avendo la dinamica del sistema robotico vincolato[4]

$$\tilde{M}(q)\ddot{\zeta} + \tilde{C}(q, \dot{q})\dot{\zeta} + \tilde{N}(q, \dot{q}) = F = GJ^{-T}\tau \quad (3.9)$$

con  $q = (\Phi, \zeta)$ , il problema di tracking è trovare le coppie ai giunti tale che il sistema tenda asintoticamente ad una data traiettoria nello spazio di lavoro

$\zeta_d$ . Non si perde di generalità se si considera la forza netta all'oggetto  $F$  come ingresso diretto del sistema. Successivamente supponendo che  $GJ^{-T}$  sia suriettiva, è possibile trovare un insieme di coppie ai giunti  $\tau$  che realizzano l'ingresso virtuale.

Come visto in precedenza l'equazione dinamica del sistema vincolato soddisfa tutte le proprietà strutturali di un'equazione associata ad un robot seriale semplice, è allora possibile usare algoritmi di controllo classici della robotica. In questo caso è stato utilizzato il *Computed Torque* [4] :

$$F = \tilde{M}(q)(\ddot{\zeta}_d - K_v\dot{e} - K_p e) + \tilde{C}(q, \dot{q})\dot{\zeta} + \tilde{N}(q, \dot{q}) \quad (3.10)$$

dove  $e := \zeta - \zeta_d$ . Notiamo che questo controllore dipende sia dalle variabili di giunto delle varie dita che dalle  $\zeta$ . Una volta determinata la  $F$  le coppie ai giunti possono essere determinate tale che soddisfino la relazione

$$GJ^{-T}\tau = F \quad (3.11)$$

questo sarà sempre possibile in quanto abbiamo supposto  $GJ^{-T}$  suriettiva.

Comunque, in generale, non esisterà solo un valore che soddisferà la (3.11), troveremo quindi una soluzione generale del tipo:

$$\tau = J^T G^\dagger F + J^T f_N = J^T (G^\dagger F + f_N) \quad (3.12)$$

dove  $G^\dagger = G^T(GG^T)^{-1}$  è la pseudoinversa di  $G$  e  $f_N \in \mathcal{N}\{G\}$ . Finché  $Gf_N = 0$ ,  $f_N$  può essere scelto in maniera arbitraria senza avere effetti sull'inseguimento della traiettoria calcolata dall'algoritmo di controllo di tracking.

Il grado di libertà extra sulle  $\tau$  può essere scelto per soddisfare alla seconda parte di controllo che dovrebbe regolare le forze interne. Per il problema di grasp le forze  $f_N$  devono essere scelte in modo tale che le forze di contatto giacciono nel cono d'attrito  $F_N$ .

### 3.3 Controllo delle forze interne

Come visto nelle sezioni precedenti, nell'eq.(2.25) della dinamica, il toro è soggetto a delle forze e dei momenti applicati nel centro di massa del toro espresse in terna base

$$F = Gf_c \quad (3.13)$$

dove  $f_c \in \mathbb{R}^{6 \times 12}$  sono il wrench nel contatto  $i$ -esimo espresso nel gauss frame del toro  $C_o$ ; nel nostro caso il vettore  $f_c$  può essere scomposto in 3 sotto-vettori  $f_{ci} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ :

$$f_{ci} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ M_z \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

che rappresentano i wrench applicati su ogni terna  $C_{oi}$  piazzata sulla superficie del toro. Si noti che nell'eq.(3.14) mancano le due componenti del momento  $M_x$  e  $M_y$  in quanto il tipo di contatto modellato (*soft-finger*) non permette la possibilità di applicare coppia lungo gli assi  $x$  e  $y$  ma sono permesse invece soltanto le velocità relative  $\omega_x$  e  $\omega_y$ .

La matrice  $G \in \mathbb{R}^{6 \times 12}$  è la matrice di grasp dell'intero sistema e può essere partizionata come si nota nell'eq. (1.51). Visto che  $G$  è rettangolare bassa e quindi possiede un nullo si ottiene

$$f_c = G^\dagger F + My = PF + My = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} F + \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} y \quad (3.15)$$

dove  $M \in Ker\{G\}$ ,  $M_i \in \mathbb{R}^{4 \times 6}$ . Quindi è possibile fornire delle coppie ai giunti che non trasmettono movimenti dinamici all'end effector (toro) ma permettono di imprimere delle forze interne in modo tale da rispettare alcune tipologie di vincolo che saranno introdotte in seguito.

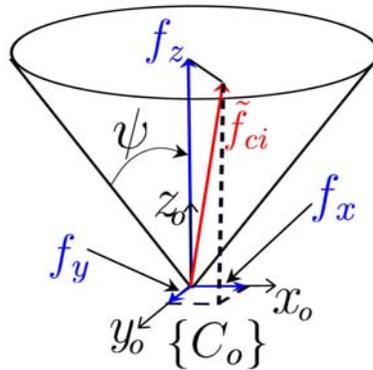


Figura 3.2: Cono d'attrito

Per il contatto *i*-esimo si utilizzeranno tre tipologie di vincolo:

- *vincolo di attrito coulombiano.* Per un corpo soggetto a un sistema di forze, affinché non ci sia strisciamento tra la sfera e il toro nel punto di contatto deve essere verificato il vincolo riportandolo nella forma affine in [5]

$$\sigma_{i1} = \alpha \|\tilde{f}_{ci}\| - \tilde{f}_{ci}^T n_z \quad (3.16)$$

$$= \alpha \|H_f f_{ci}\| - (H_f f_{ci})^T n_z = \alpha \left\| \begin{pmatrix} f_{cx} \\ f_{cy} \\ f_{cz} \end{pmatrix} \right\| - f_{cz} < 0 \quad (3.17)$$

dove  $\alpha = 1/\cos \psi$ , il vettore  $n_z$  e la matrice  $H_f$  sono utilizzati per selezionare rispettivamente la componente  $f_{cz}$  e il vettore complessivo delle forze

$$n_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad H_f = [I_{3 \times 3} \quad 0_{3 \times 1}] \quad (3.18)$$

- *vincolo di momento.* Visto che il tipo di contatto non è semplicemente *point friction contact* ma è *soft finger*, si deve anche introdurre un'altra limitazione sul momento permesso[1]

$$\sigma_{i2} = \mu \|\hat{f}_{ci}\| - (f_{ci})^T H_{fz} \quad (3.19)$$

$$= \mu \|H_M f_{ci}\| - (f_{ci})^T H_{fz} = \mu |M_z| - f_{cz} < 0 \quad (3.20)$$

dove

$$H_M^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad H_{fz} = \begin{pmatrix} n_z \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Si noti che le equazioni (3.16) e (3.19) non sono indipendenti ma la prima vale solo in assenza di momento e la seconda in assenza di forza. Sono stati fatti degli studi sulle interazioni delle due equazioni e la regione in cui non si avrebbe strisciamento ha una forma come quella in figura 3.3.b, tuttavia sarà utilizzata una configurazione più conservativa mostrata nella figura 3.3 dove saranno trascurate le iterazioni tra momenti e forze.

- *vincolo di forza massima.* Può essere introdotto un'altro vincolo, per fare in modo che la forza lungo l'asse z non superi un certo valore al fine di non comprimere troppo l'oggetto; a tale scopo

$$\sigma_{i3} = f_{min} - \tilde{f}_{ci}^T n_z \quad (3.22)$$

$$= f_{min} - (H_f f_{ci})^T n_z = f_{min} - f_{cz} < 0 \quad (3.23)$$

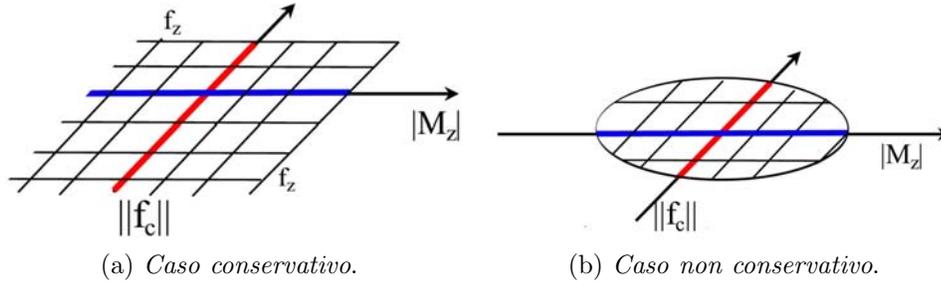


Figura 3.3: Composizione del vincolo di momento e di forza

Al fine di imprimere la giusta forza che rispetti contemporaneamente tutti i vincoli di tutti i contatti è necessario trovare il valore di  $y$ . Dato un insieme  $\Omega_{i,j}^k$ , che indica l'insieme delle variabili di grasp che soddisfano i vincoli (3.22), (3.16) e (3.19) con una piccola tolleranza  $k$  scalare positivo

$$\Omega_{i,j}^k := \{y | \sigma_{ij}(F, y) < -k\} \quad (3.24)$$

Per l' $i$ -esimo contatto e per il  $j$ -esimo vincolo, si consideri le funzioni

$$V_{ij}(F, y) = \begin{cases} (2\sigma_{ij}^2(F, y))^{-1} & y \in \Omega_{i,j}^k \\ a\sigma_{ij}^2(F, y) + b\sigma_{ij}(F, y) + c & y \notin \Omega_{i,j}^k \end{cases} \quad (3.25)$$

e associato al grasp una funzione  $V_{i,j}(F, y)$  definita come la somma dei termini

$$V(F, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1,2,3} V_{i,j}(F, y) \quad (3.26)$$

Un algoritmo per trovare la *force closure* [5] può essere basato sulla ricerca di  $y$  che minimizzi la funzione associata  $V$  integrando un'equazione differenziale nella forma

$$\dot{y} = -\zeta \frac{\partial^2 V_{ij}}{\partial y^2} \bigg|_{(0,y)}^{-1} \frac{\partial V_{ij}}{\partial y} \bigg|_{(0,y)} \quad (3.27)$$

Per completare la (3.27) è necessario trovare il gradiente e l'hessiano di  $V$  rispetto ad  $y$ ; visto che la funzione  $V$  è la sommatoria delle funzioni  $V_{ij}$ , il gradiente è dato dalla somma dei gradienti

$$\frac{\partial V_{ij}}{\partial y} = \begin{cases} -\sigma_{ij}^{-3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y} & y \in \Omega_{i,j}^k \\ (2a\sigma_{ij} + b) \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y} & y \notin \Omega_{i,j}^k \end{cases} \quad (3.28)$$

dove

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y} = \begin{cases} \alpha \tilde{M}_i^T \frac{\tilde{f}_{ci}}{\|\tilde{f}_{ci}\|} - \tilde{M}_i^T n_z & j = 1 \\ \mu \hat{M}_i^T \frac{\tilde{f}_{ci}}{\|\tilde{f}_{ci}\|} - M_i^T H_{fz} & j = 2 \\ -\tilde{M}_i^T n_z & j = 3 \end{cases} \quad (3.29)$$

con  $\tilde{M}_i = H_f M_i$  e  $\hat{M}_i = H_M M_i$ ; Per quanto riguarda l'Hessiano

$$\frac{\partial^2 V_{ij}}{\partial y^2} = \begin{cases} -\sigma_{ij}^{-3} \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial y^2} + 3\sigma_{ij}^{-4} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y} \frac{\partial \sigma_{ij}^T}{\partial y} & y \in \Omega_{i,j}^k \\ (2a\sigma_{ij} + b) \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial y^2} + 2a \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y} \frac{\partial \sigma_{ij}^T}{\partial y} & y \notin \Omega_{i,j}^k \end{cases} \quad (3.30)$$

dove

$$\frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial y^2} = \begin{cases} \alpha \frac{\tilde{M}_i^T (I - \tilde{f}_{ci} \tilde{f}_{ci}^T) \tilde{M}_i}{\|\tilde{f}_{ci}\|} & j = 1 \\ 0 & j = 2 \\ \mu \frac{\hat{M}_i^T (I - \hat{f}_{ci} \hat{f}_{ci}^T) \hat{M}_i}{\|\hat{f}_{ci}\|} & j = 3 \end{cases} \quad (3.31)$$

### 3.3.1 Algoritmo Force Control

L'algoritmo *Force Control*, visto nella sezione precedente utilizza le forze da applicare al toro fornite dal computed torque. Una volta definita l'equazione differenziale (3.27) può essere impostato l'algoritmo di force control

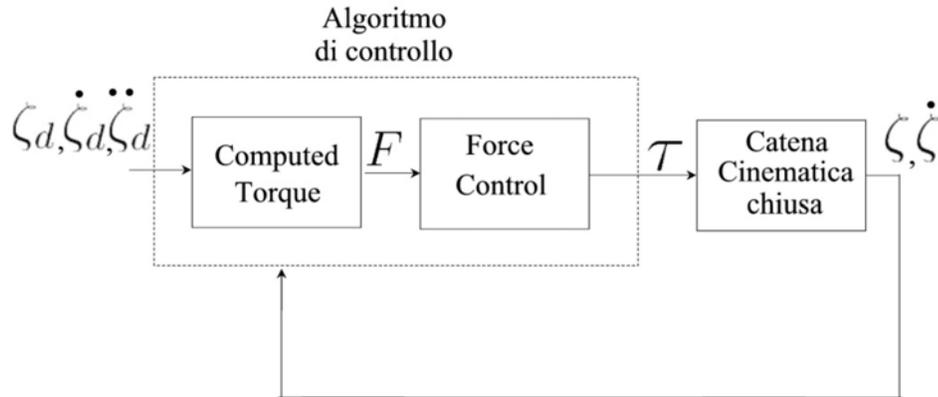


Figura 3.4: Schema di controllo con force control

1. All'istante  $\underline{t}$  attraverso il computed torque si ottiene un valore di  $F$

2. Si applica il controllo di forza, integrando l'eq.(3.27) con condizioni iniziali casuali finchè non vengono rispettati tutti i 9 vincoli ottenendo una  $\underline{y}$
3. si trovano le coppie che devono essere applicate ai giunti attraverso l'eq.(3.12)
4. All'istante  $\underline{t} + \Delta t$ ( quando si ottiene il nuovo valore dal computed torque) si ripete il punto 1

# Capitolo 4

## Simulazioni

Per effettuare le simulazioni, le varie equazioni sono state implementate in ambiente *Matlab-Simulink*. Per facilitare il lavoro sono state create diverse librerie in codice *matlab* che implementano le funzioni base sfruttando le POE. Si sono effettuate diverse prove imponendo diverse traiettorie del oggetto da manipolare. Le diverse simulazioni riguardano la cinematica e la dinamica. Successivamente è stato implementato il controllore *Computed Torque* utilizzando come riferimento una traiettoria del toro che rientri nello spazio di lavoro e verificata cinematicamente.

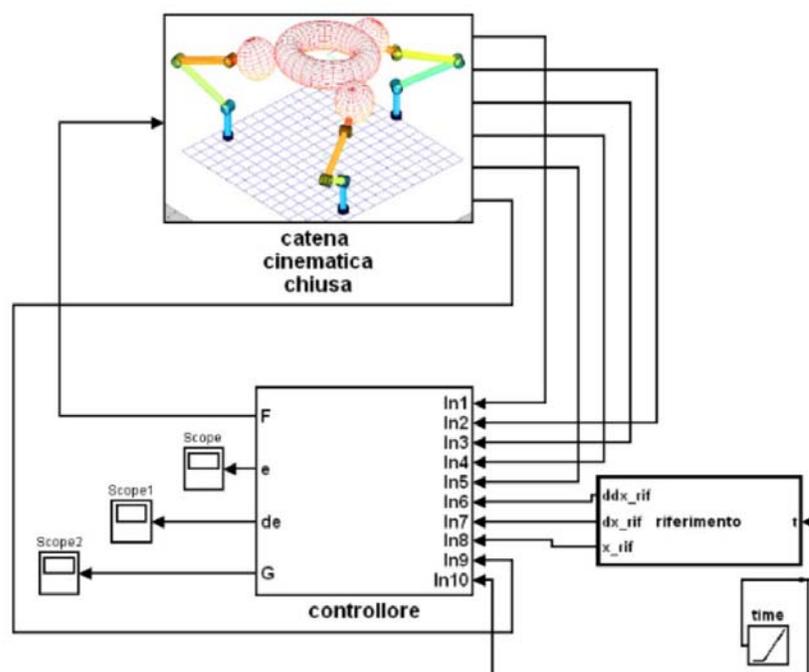


Figura 4.1: Schema simulink del sistema



Elemento	Parametri	massa(Kg)	Tens.d'Inerzia
Toro	$a_t = 2$ $b_t = 6$	1.298	$I_{toro} = \begin{pmatrix} 5062,39 & 0 & 0 \\ 0 & 2661 & 0 \\ 0 & 0 & 2661 \end{pmatrix}$
Sfera	$\rho = 3$	0.31	$I_{sfera} = \begin{pmatrix} 111.5 & 0 & 0 \\ 0 & 111.5 & 0 \\ 0 & 0 & 111.5 \end{pmatrix}$
Link 1	$l = 10$ $r = 0.5$	$2.15 \cdot 10^{-2}$	$I_{link1} = \begin{pmatrix} 18.06 & 0 & 0 \\ 0 & 18.06 & 0 \\ 0 & 0 & 0.268 \end{pmatrix}$
Link 2,3	$l = 5$ $r = 0.5$	$1.07 \cdot 10^{-2}$	$I_{link2} = \begin{pmatrix} 2.3 & 0 & 0 \\ 0 & 2.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.13 \end{pmatrix}$

Tabella 4.1: Parametri della simulazione.

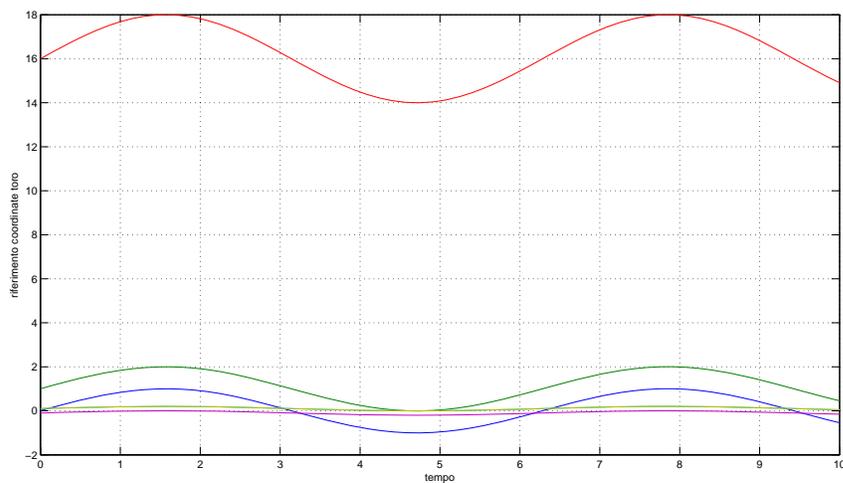


Figura 4.4: Riferimento controllore  $\zeta_d$

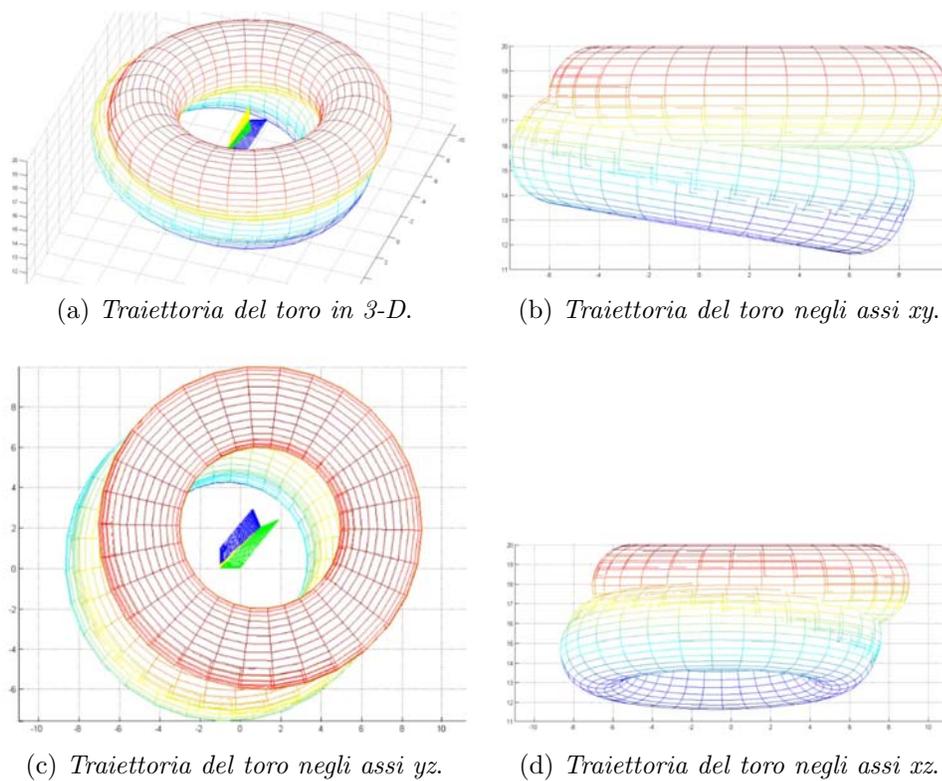


Figura 4.3: Traiettoria del toro vista da diverse angolazioni. La terna al centro mostra il movimento del toro.

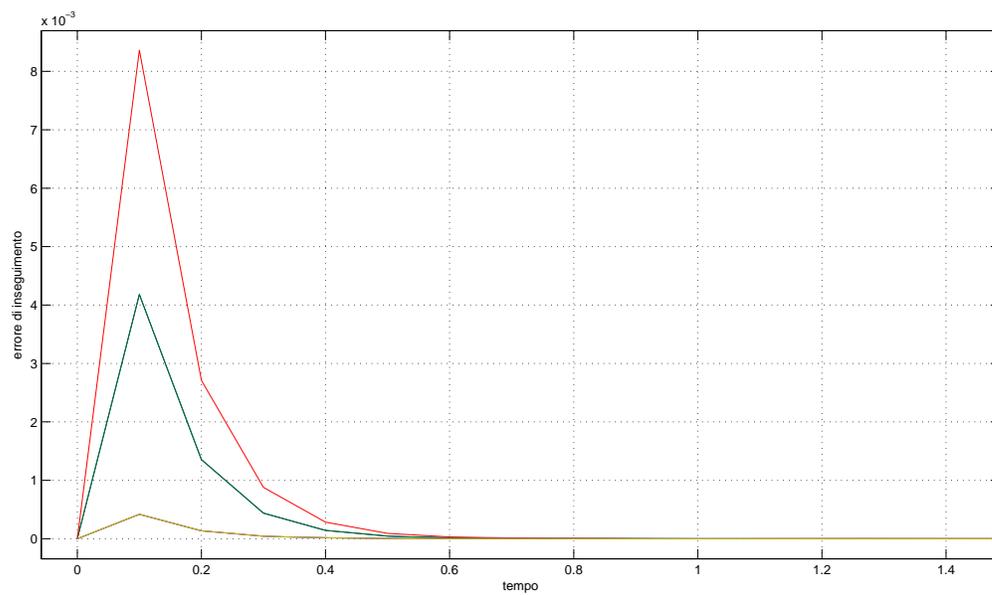


Figura 4.5: Errore di inseguimento.

Si noti che nella 4.5 l'errore di posizione e orientazione, in un primo momento è elevato, ma poi grazie alla taratura dei guadagni mostrati nell'eq.(3.8) il sistema tende asintoticamente ad errore nullo. Diversi andamenti dell'errore si possono avere variando le costanti  $K_p$  e  $K_v$  del controllore che equivale a cambiare in coefficiente di smorzamento del sistema *errore*.

Come descritto nelle sezioni 1.1.3, 1.1.4 sono state riportate traiettorie del contatto del polpastrello con il toro attraverso la mappa di coordinate locali

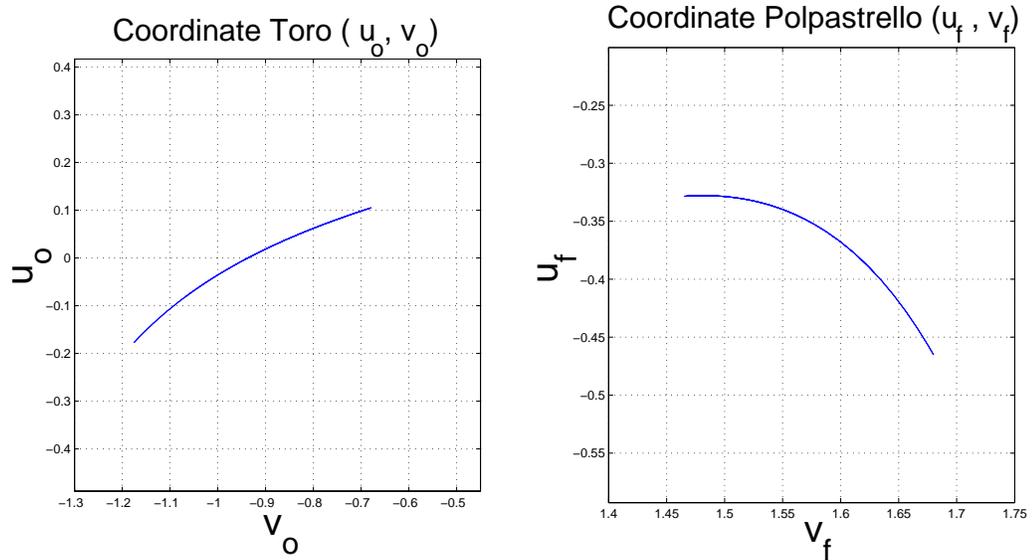


Figura 4.6: Traiettoria Toro-Polpastrello 1.

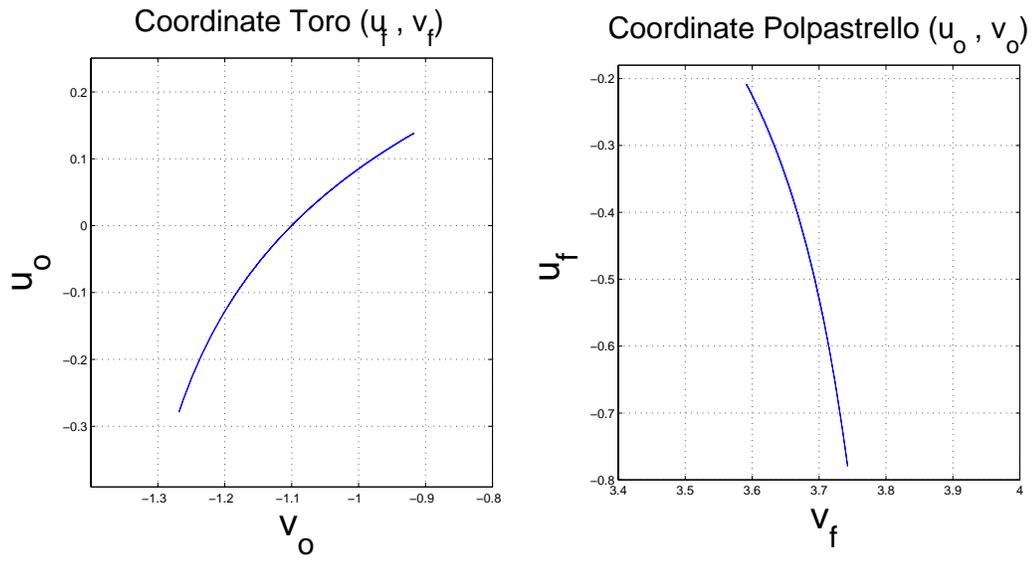


Figura 4.7: Traiettorie Toro-Polpastrello 2.

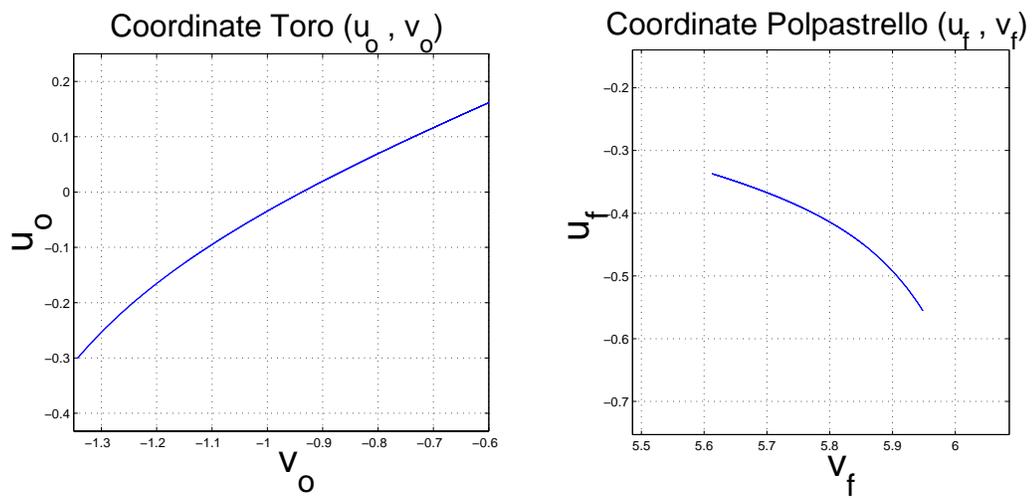


Figura 4.8: Traiettorie Toro-Polpastrello 3.

# Bibliografia

- [1] R. M. Murray, Z. Li, e S. Sastry, *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press, Boca Raton, FL (1994).
- [2] M. Gabbicini, *A twist exponential approach to gear generation with general spatial motions*. Dipartimento di Ingegneria Meccanica, Nucleare e della Produzione, Università di Pisa, Italia (2008).
- [3] M. Gabbicini, *Dispense del corso di robotica 1*. Università di Pisa, Pisa (2008).
- [4] A. Bicchi, *Dispense del corso di robotica 2*. Università di Pisa, Pisa, Italia (2008).
- [5] A. Bicchi, “On the Closure Properties of Robotic Grasping.” *Int. J. of Robotics Research* (1994).