

Docente : Ing. Marco Gabiccini (Dimnp)

Ricevimento : Giovedì pomeriggio 15 - 14.30, Dimnp, V piano

tel. ufficio 050 - 221.80.77 ; email: m.gabiccini@ing.unipi.it

Contenuti del corso :

homepage: www.dimnp.unipi.it/gabiccini-m/

•) analisi di posizione ed orientazione: esprimere rotazioni 3D generiche e rototraslazioni di corpo rigido nello spazio, parametrizzazione di rotazioni, trasformazioni omogenee, convenzioni di Denavit-Hartenberg, cinematica diretta ed inversa

•) cinematica (differenziale) : da conoscenze di meccanica (pre-requisiti) m. ff cinematica, teo. Rivals, teorema di composizione v (veloc.) ed a (acceleraz.) studiamo al corso generale usando un formalismo adeguato.

•) statica : pre-requisiti di meccanica (eq. sistemi di corpi rigidi) con eq. in coordinate, principio dei lavori virtuali per arrivare a formulazioni compatte e sistematiche.

•) dinamica : da eq. di Newton - Eulero, Eulero - Lagrange (omni da principio dei Lavori Virtuali Dinamico). Forme tipiche della dinamica di catene cinematiche seriali $B\ddot{q} + C\dot{q} + G = \tau$. Eq. di sistemi con vincoli (omni catene cinematiche chiuse) e varie tecniche per la loro trattazione.

Alla fine del corso lo studente sarà in grado di modellare (omni scrivere le eq. che regolano la dinamica e saperle attaccare con tecniche di integrazione numerica) qualsiasi tipo di robot, nella sua azione più ampia (veicoli su ruote, veicoli su gambe, velivoli, satelliti, robot seriali, paralleli, mani robotiche etc.)

Testi di riferimento :

- B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, G. Oriolo "Robotica: modellistica, pianificazione e controllo" 3a ed. Mc.Graw-Hill 2008
- Spong, Hutchinson, Vidyasagar "Robot Modeling and Control" Wiley
- Murray, Li, Sastry "A Mathematical Intro. to Robotic Manipulation", CRC press

o) J. Angeles "Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: theory, methods and algorithms", Springer, 2a edizione

o) Lung - Wen Tsai "Robot Analysis: the mechanics of serial and parallel manipulators", Wiley-Interscience.

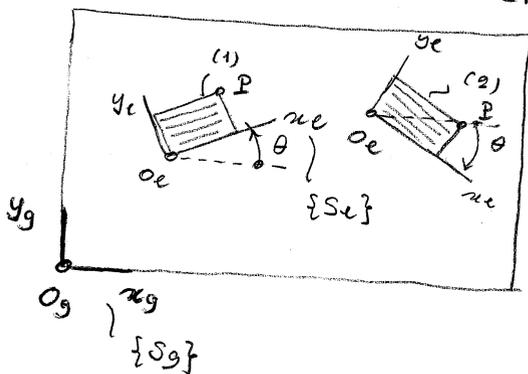
- Studio della postura di un corpo rigido -

Gradi di libertà: no. di movimenti - rotazioni e/o traslazioni - che il corpo rigido può compiere (corpo rigido = c.r.) = no di informazioni da dare per individuare univocamente la postura

o) nel 2D: devo dare posizione di un punto (x, y) ed una rotazione θ rispetto ad una direzione nota

o) nel 3D: devo dare posizione di un punto (x, y, z) e tre angoli (es. angoli di Eulero $[\varphi, \theta, \psi]$ vedremo meglio in seguito)

Es. libro sulla cattedra



Procedura

1) Si definisce un sistema di rif globale
 $\{Sg\} = \{Og; xg, yg, zg\}$ (fisso)

2) " " di rif locale
 $\{Se\} = \{Oe; xe, ye, ze\}$ (solidale al corpo)

note bene: dato che il corpo è RIGIDO, in questo sistema di riferimento le componenti sono costanti.

Prima questione: se conosco le coordinate di un punto P in $\{Se\}$, quali coordinate vede un osservatore in $\{Sg\}$?

ovvia se conosco (es. nel 2D) la $p_e = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \end{bmatrix}$ come calcolo $p_g = \begin{bmatrix} x_g \\ y_g \end{bmatrix}$?

Occorre quindi definire una trasformazione di coordinate

Facciamo quindi caso 2D con sola rotazione, poi estendiamo anche al 3D ed a traslazioni.

Fissiamo la notazione: P è un punto (generico)

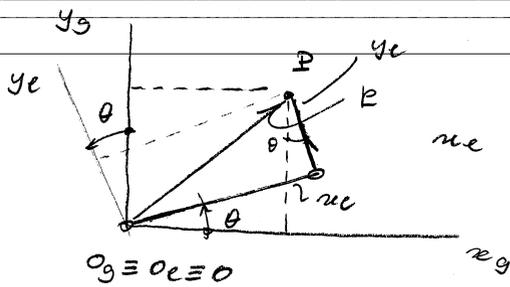
$O \equiv O_g \equiv O_e$ origini dei sistemi di riferimento (punti)

$OP = P - O \triangleq p$ (uguale a definizione, anche

$p := OP = P - O$

Quasi \underline{p} è vettore posizione del punto P .

s. sulla rotazione 2D



$O_g \equiv O_e \equiv O$

$[p]_g = \text{comp. di } \underline{p} \text{ in } \{S_g\}$

$[P]_g = \text{coordinate di } P \text{ in } \{S_g\}$

Nota bene che fra punti e vettori si scrive

$P = O + \underline{p}$ (deriva dalla definizione $\underline{p} := OP = P - O$)

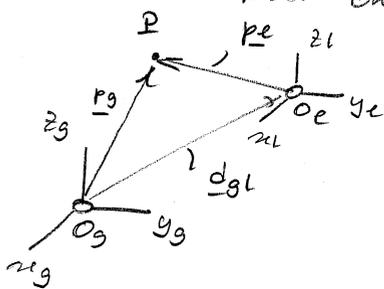
Se applico l'operatore $[\cdot]_g$ ottengo:

$[P]_g = [O]_g + [p]_g$ ma $O \equiv O_g$ ed $[O_g]_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ da cui

$[P]_g = [p]_g$

quindi se \underline{p} è spiccato dall'origine di $\{S_g\}$ le coord del punto P sono uguali alle compo del vettore

Attenzione però che se ho shift (spostamento) dell'origine allora



fra punti posso scrivere:
 $P = O_g + \underline{p}_g$ o anche $P = O_e + \underline{p}_e$

↓
 prendo le compen. in $\{S_g\}$
 $[P]_g = [O_g]_g + [p_g]_g$ $[P]_g = [O_e]_g + [p_e]_g$

considero che $\{S_e\}$ e $\{S_g\}$ siano paralleli

$[P]_g = [p_g]_g$

Dunque in generale le coordinate del punto sono diverse dalle componenti del vettore posizione. Sono uguali s. es. se ci si appoggia a punto che è origine del sistema di riferimento in cui si prendono coordinate/componenti

dalle (2) togliendo O_g :

$\underbrace{P - O_g}_{p_g} = \underbrace{O_e - O_g}_{d_{ge}} + \underbrace{p_e}_{p_e}$

anche relazione tutta fra vettori, omnia differente fra punti

Da analisi delle figure b.3 in cald $P = \underline{p} + \underline{o}_g$ $\underline{o}_g \equiv \underline{o}_e \equiv \underline{o}$

$$[\underline{p}]_e = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \end{bmatrix} ; [\underline{p}]_g = \begin{bmatrix} x_g \\ y_g \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_g &= x_e \cos \theta - y_e \sin \theta \\ y_g &= x_e \sin \theta + y_e \cos \theta \end{aligned} \iff \begin{bmatrix} x_g \\ y_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \end{bmatrix}$$

ovvia

$$[\underline{p}]_g = R_{ge} [\underline{p}]_e \quad \text{con, in questo caso, } R_{ge} = R_{2D}(\theta) := \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Quindi adesso stiamo considerando come uno stesso vettore abbia componenti diverse in differenti sistemi di riferimento.

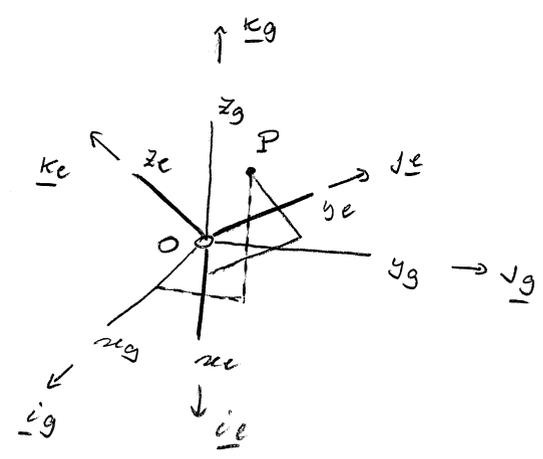
Adesso consideriamo il caso di rotazione 3D generale

- o) prendiamo un punto P nello spazio Euclideo \mathbb{E}^3 ;
- o) scelto un punto O , definiamo un vettore $\underline{p} \triangleq P - O$;
- o) introduciamo 2 frame (sistemi di riferimento) ortogonali di origine comune $O_g \equiv O_e \equiv O$ con $\{\underline{j}_g\} = \{O; x_g, y_g, z_g\}$ e $\{\underline{j}_e\} = \{O; x_e, y_e, z_e\}$. I due sistemi di riferimento hanno vettori $\{\underline{i}_g, \underline{j}_g, \underline{k}_g\}$ e $\{\underline{i}_e, \underline{j}_e, \underline{k}_e\}$.

Possiamo scrivere che:

$$\underline{p} = x_g \underline{i}_g + y_g \underline{j}_g + z_g \underline{k}_g = x_e \underline{i}_e + y_e \underline{j}_e + z_e \underline{k}_e \quad (1)$$

nota bene che tutte deve combaciare (componenti e vettori) perché tutto rimanga uguale



Trovarla la trasformazione che lega le componenti $[\underline{p}]_g$ alle componenti $[\underline{p}]_e$

ricordiamoci che $\underline{a} \cdot \underline{b} = \|\underline{a}\| \|\underline{b}\| \cos \theta$
 dunque $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$ se $\theta = \pi/2$

Ricordiamoci inoltre che le terne $\{\underline{j}_g\}$ e $\{\underline{j}_e\}$ sono ortogonali, ovvia $\underline{i}_g \cdot \underline{j}_g = \underline{j}_g \cdot \underline{k}_g = \underline{k}_g \cdot \underline{i}_g = 0$ e $\underline{i}_g \cdot \underline{i}_g = \underline{j}_g \cdot \underline{j}_g = \underline{k}_g \cdot \underline{k}_g = 1$

Allora moltiplichiamo scalarmente (1) per \underline{i}_g , \underline{j}_g e \underline{k}_g si ha

$$\underline{p} \cdot \underline{i}_g = x_g = \underline{i}_g \cdot \underline{i}_e x_e + \underline{i}_g \cdot \underline{j}_e y_e + \underline{i}_g \cdot \underline{k}_e z_e$$

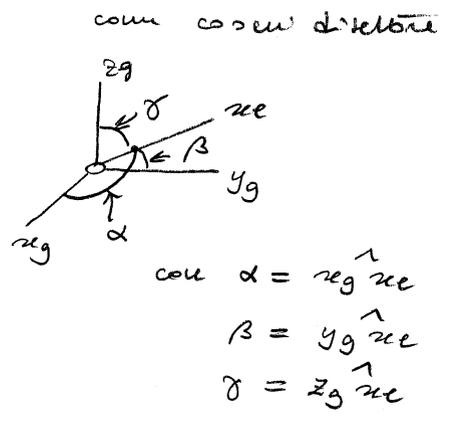
$$\underline{p} \cdot \underline{j}_g = y_g = \underline{j}_g \cdot \underline{i}_e x_e + \underline{j}_g \cdot \underline{j}_e y_e + \underline{j}_g \cdot \underline{k}_e z_e$$

$$\underline{p} \cdot \underline{k}_g = z_g = \underline{k}_g \cdot \underline{i}_e x_e + \underline{k}_g \cdot \underline{j}_e y_e + \underline{k}_g \cdot \underline{k}_e z_e$$

da cui in base alle def. ne

$$[\underline{p}]_g = \begin{bmatrix} \underline{i}_g \cdot \underline{i}_e \\ \underline{j}_g \cdot \underline{i}_e \\ \underline{k}_g \cdot \underline{i}_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_g \cdot \underline{j}_e \\ \underline{j}_g \cdot \underline{j}_e \\ \underline{k}_g \cdot \underline{j}_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_g \cdot \underline{k}_e \\ \underline{j}_g \cdot \underline{k}_e \\ \underline{k}_g \cdot \underline{k}_e \end{bmatrix} [\underline{p}]_e$$

\uparrow comp. di \underline{i}_e in $\{\underline{j}_g\}$ \uparrow comp. di \underline{j}_e in $\{\underline{j}_g\}$ \uparrow comp. di \underline{k}_e in $\{\underline{j}_g\}$



ovvero anche

$$\begin{bmatrix} \cos(\hat{x}_g \hat{x}_e) & \cos(\hat{x}_g \hat{y}_e) & \cos(\hat{x}_g \hat{z}_e) \\ \cos(\hat{y}_g \hat{x}_e) & \cos(\hat{y}_g \hat{y}_e) & \cos(\hat{y}_g \hat{z}_e) \\ \cos(\hat{z}_g \hat{x}_e) & \cos(\hat{z}_g \hat{y}_e) & \cos(\hat{z}_g \hat{z}_e) \end{bmatrix}$$

Per lavorare in modo compatto posso definire:

$$\underline{e}_g = [\underline{i}_g \quad \underline{j}_g \quad \underline{k}_g] \text{ come le base in forma "invariante" ed in partic.}$$

$$\underline{e}_g = [\underline{i}_g \quad \underline{j}_g \quad \underline{k}_g] \text{ di } \{\underline{j}_g\}$$

$$\underline{e}_e = [\underline{i}_e \quad \underline{j}_e \quad \underline{k}_e] \text{ di } \{\underline{S}_e\}$$

così come posso scrivere la (1) in modo compatto come

$$\underline{p} = \underline{e}_g [\underline{p}]_g = \underline{e}_e [\underline{p}]_e \quad (2)$$

Se moltiplico per \underline{e}_g^T entrambi i membri della eq. ne (2) si ha

$$\underline{e}_g^T \underline{e}_g [\underline{p}]_g = \underline{e}_g^T \underline{e}_e [\underline{p}]_e$$

\uparrow cosa sono? \downarrow

$$\underline{e}_g^T = \begin{bmatrix} \underline{i}_g^T \\ \underline{j}_g^T \\ \underline{k}_g^T \end{bmatrix} [\underline{i}_g \quad \underline{j}_g \quad \underline{k}_g] = \begin{bmatrix} \underline{i}_g^T \underline{i}_g & \underline{i}_g^T \underline{j}_g & \underline{i}_g^T \underline{k}_g \\ \underline{j}_g^T \underline{i}_g & \underline{j}_g^T \underline{j}_g & \underline{j}_g^T \underline{k}_g \\ \underline{k}_g^T \underline{i}_g & \underline{k}_g^T \underline{j}_g & \underline{k}_g^T \underline{k}_g \end{bmatrix} = \underline{I} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

L'altra invece risulta essere:

$$\underset{\sim}{e}_g^T \underset{\sim}{e}_e = \begin{bmatrix} \underline{i}_g^T \\ \underline{j}_g^T \\ \underline{k}_g^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_e & \underline{j}_e & \underline{k}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{i}_g^T \underline{i}_e & \underline{i}_g^T \underline{j}_e & \underline{i}_g^T \underline{k}_e \\ \underline{j}_g^T \underline{i}_e & \underline{j}_g^T \underline{j}_e & \underline{j}_g^T \underline{k}_e \\ \underline{k}_g^T \underline{i}_e & \underline{k}_g^T \underline{j}_e & \underline{k}_g^T \underline{k}_e \end{bmatrix} =: R_{ge}$$

ovvero $\underset{\sim}{e}_g^T \underset{\sim}{e}_e =: R_{ge}$ è la proiezione della base $\underset{\sim}{e}_e$ sulla base $\underset{\sim}{e}_g$.

Quindi quello che si ha è:

$$\boxed{[k]_g = \underset{\sim}{e}_g^T \underset{\sim}{e}_e [k]_e = R_{ge} [k]_e}$$

Attenzione che se invece proiettavo $\underset{\sim}{e}_g$ su $\underset{\sim}{e}_e$ avrei ottenuto

$$\boxed{[k]_e = \underset{\sim}{e}_e^T \underset{\sim}{e}_g [k]_g = R_{eg} [k]_g}$$

dove $\underset{\sim}{e}_e^T \underset{\sim}{e}_g = \begin{bmatrix} \underline{i}_e^T \\ \underline{j}_e^T \\ \underline{k}_e^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_g & \underline{j}_g & \underline{k}_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{i}_e^T \underline{i}_g & \underline{i}_e^T \underline{j}_g & \underline{i}_e^T \underline{k}_g \\ \underline{j}_e^T \underline{i}_g & \underline{j}_e^T \underline{j}_g & \underline{j}_e^T \underline{k}_g \\ \underline{k}_e^T \underline{i}_g & \underline{k}_e^T \underline{j}_g & \underline{k}_e^T \underline{k}_g \end{bmatrix} = R_{eg}$

è evidente che $R_{eg} = R_{ge}^{-1} = R_{ge}^T$

osservazioni:

1) Dato che $R_{eg} = R_{ge}^{-1} = R_{ge}^T$, ovvio $R^{-1} = R^T$, cioè significa che la matrice R è una matrice ortogonale $R R^T = R^T R = I$ (attenzione che non tutte le matrici ortogonali sono rotazioni, anche le riflessioni sono ortogonali)

2) La matrice $R_{ge} = \begin{bmatrix} \underline{i}_e^T \underline{i}_g & \underline{i}_e^T \underline{j}_g & \underline{i}_e^T \underline{k}_g \\ \underline{j}_e^T \underline{i}_g & \underline{j}_e^T \underline{j}_g & \underline{j}_e^T \underline{k}_g \\ \underline{k}_e^T \underline{i}_g & \underline{k}_e^T \underline{j}_g & \underline{k}_e^T \underline{k}_g \end{bmatrix}$ ← colonne

3) La condizione (ulteriore) da richiedere perché la terza sia l'origine è che $\underline{i}_e \times \underline{j}_e = \underline{k}_e$ che in componenti risulta

$$[\underline{i}_e]_g \times [\underline{j}_e]_g = [\underline{k}_e]_g$$

— se adesso moltiplico scalarmente per $[\underline{k}_e]_g$ si ha

$$([\underline{i}_e]_g \times [\underline{j}_e]_g) \cdot [\underline{k}_e]_g = [\underline{k}_e]_g \cdot [\underline{k}_e]_g = 1$$

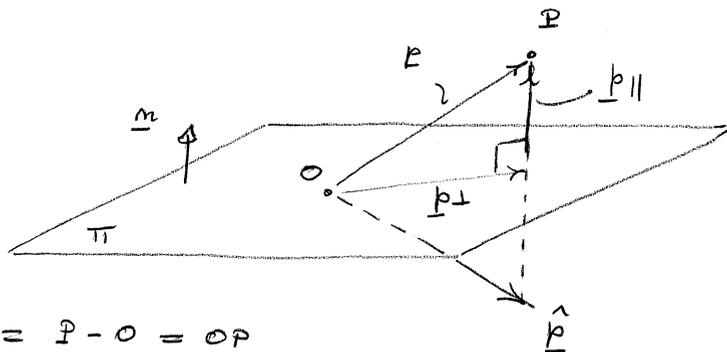
ma questo prodotto misto $\underline{a} \times \underline{b} \cdot \underline{c} = \det([\underline{a} \ \underline{b} \ \underline{c}])$ è equiv. allo sviluppo del determinante delle matrici che ha come colonne $\underline{a}, \underline{b}$ e \underline{c}

Allora la ulteriore condizione è che

$$([i e]_g \times [j e]_g) \cdot [k e]_g = \det(R_g) = 1$$

Quindi la ulteriore condizione che $\det(R) = 1$ è quella che discrimina le sole rotazioni.

s. excursus sulle riflessioni



Consideriamo vettore $\underline{p} := P - O = OP$

vettore \underline{n} è normale al piano π

Decomposizione: $\underline{p} = \underline{p}_{||} + \underline{p}_{\perp}$ con $\underline{p}_{||}$ parallelo ad \underline{n}

$$\begin{aligned} \circ) \underline{p}_{||} &= (\underline{p} \cdot \underline{n}) \underline{n} = \underline{n} (\underline{n}^T \underline{p}) = (\underline{n} \underline{n}^T) \underline{p} \\ &\underline{p}_{\perp} \text{ perpend. ad } \underline{n} \text{ (ovvia sul piano)} \end{aligned}$$

$$\circ) \underline{p}_{\perp} = \underline{p} - \underline{p}_{||} = (\mathbf{I} - \underline{n} \underline{n}^T) \underline{p}$$

$$\text{il } \hat{\underline{p}} \text{ (riflesso)} = \underline{p}_{\perp} - \underline{p}_{||} = (\mathbf{I} - 2 \underline{n} \underline{n}^T) \underline{p}$$

Allora la matrice di riflessione H è data da

$$H = (\mathbf{I} - 2 \underline{n} \underline{n}^T) \quad \text{n.b. che } H = H^T$$

Anche H è ortogonale $H^{-1} = H^T$ (se ci si riflette 2 volte si torna identici)

Verifica che $H^{-1} = H$ ossia che $H^{-1} H = H H = \mathbf{I}$

Allora:

$$(\mathbf{I} - 2 \underline{n} \underline{n}^T)(\mathbf{I} - 2 \underline{n} \underline{n}^T) = \mathbf{I} - 4 \underline{n} \underline{n}^T + 4 (\underline{n} \underline{n}^T)^2$$

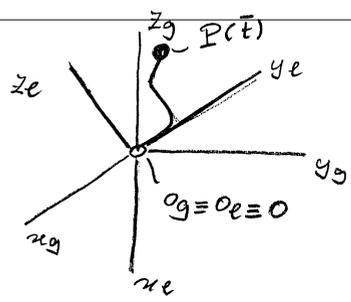
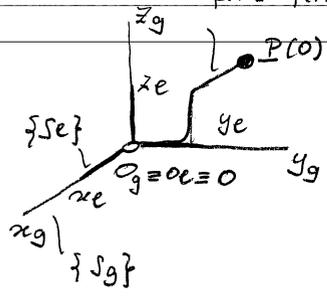
ma $\underline{n} \underline{n}^T$ è idempotente ossia $\underline{n} \underline{n}^T = (\underline{n} \underline{n}^T)^k$, $k \in \mathbb{N}$

$$= \mathbf{I} - 4 \underline{n} \underline{n}^T + 4 \underline{n} \underline{n}^T = \mathbf{I} \quad \text{c.v.d.}$$

Passaggio anche così $(\underline{n} \underline{n}^T)(\underline{n} \underline{n}^T) = \underline{n} (\underline{n}^T \underline{n}) \underline{n}^T = \underline{n} \underline{n}^T$ etc

Guardiamo adesso alla matrice di rotazione come ad un modo per esprimere una rotazione rigida

fil di ferro collegato ad {Se}



a $t=0$: $\{Se(0)\} \equiv \{Sg\}$
 $P \in \{Se\}$ (sempre)
 $[OP(0)]_g = [OP(0)]_{e(0)}$

a $t=T$ $\{Se(T)\} \neq \{Sg\}$
 $P \in \{Se\}$ naturalmente
 $OP(0)$ vettore iniziale
 $OP(T)$ vettore finale (ruotato)

Ci chiediamo: che relazione c'è fra le componenti, sempre nello stesso $\{Sg\}$, di $OP(0)$ ed $OP(T)$?

Definisco $\underline{p} := OP$, da cui $\underline{p}(0) = OP(0)$, $\underline{p}(T) = OP(T)$

Che relazione c'è fra $[\underline{p}(0)]_g$ e $[\underline{p}(T)]_g$?

Dato che $P \in \{Se\}$ allora $[\underline{p}(0)]_g = [\underline{p}(0)]_{e(0)} = [\underline{p}(t)]_{e(t)} \quad \forall t$ allora

(1) $\underline{p}(T) = \underline{e}_e(T) [\underline{p}(T)]_{e(T)} = \underline{e}_e(T) [\underline{p}(0)]_g$ vers. c. componenti in $\{Se(T)\}$

ma potrei esprimerlo anche con base + componenti in $\{Sg\}$, ossia

(2) $\underline{p}(T) = \underline{e}_g [\underline{p}(T)]_g$

Eguagliando (1) a (2) si ottiene:

$$\underline{e}_e(T) [\underline{p}(0)]_g = \underline{e}_g [\underline{p}(T)]_g, \text{ premoltip. scalarmente per } \underline{e}_g^T$$

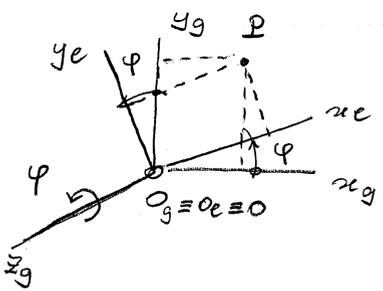
$$[\underline{p}(T)]_g = \underline{e}_g^T \underline{e}_e(T) [\underline{p}(0)]_g =: R_{ge}(T) [\underline{p}(0)]_g$$

dove ci si è riconvolti alla $R_{ge} := \underline{e}_g^T \underline{e}_e$

Dunque si è ottenuto l'importante risultato che la matrice R_{ge} non gioca solo il ruolo di matrice del cambiamento di coordinate da $\{Se(T)\}$ a $\{Sg\}$, ma anche il ruolo di matrice che ci dice come una rotazione da una configurazione $\{Sg\}$ (iniziale) ad una

configurazione $\{Se(\bar{t})\}$ (finale) cambia le componenti del vettore che viene ruotato n.b. nello stesso sistema di riferimento di partenza $\{Sg\}$

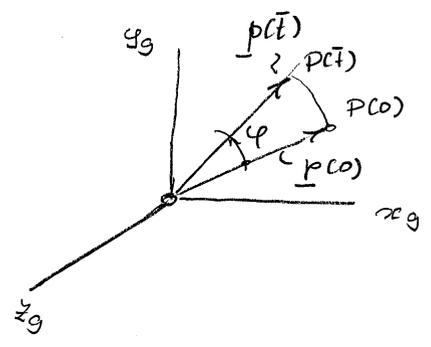
Dunque come
CAMBIAMENTO DI COORDINATE



$$[P]_g = R_{ge}(\varphi) [P]_e$$

con $R_{ge}(\varphi) = R_z(\varphi)$

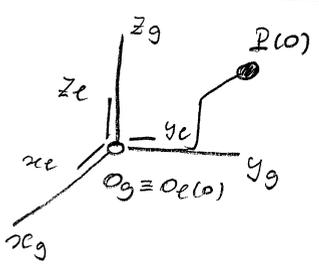
come
ROTAZIONE RIGIDA



$$[p(\bar{t})]_g = R_{ge}(\bar{t}) [p(0)]_g$$

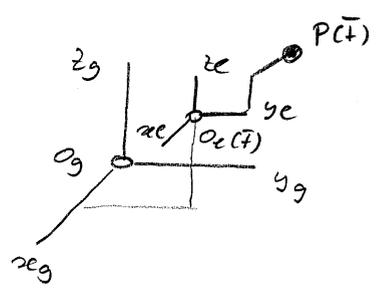
In questo caso il sistema di riferimento locale serve solo per "esplicitare" la rotazione che porta il vettore dalla config. iniziale a quella finale. Le componenti sono espresse nello stesso $\{Sg\}$ di partenza.

Solo shift origine come spostamento rigido



$t=0 : O_e(0) \equiv O_g$
 $e_g(0) = \underline{e}_g$
 $P \in \{Se\}$

trasl. rigida
→



$t=T : O_e(T) \neq O_g$
 $e_g(T) = \underline{e}_g$ (non ruoto)
 $P \in \{Se\}$

Che relazione c'è fra le componenti, sempre in $\{Sg\}$, di $O_g P(0)$ e $O_g P(\bar{t})$?

Si definisce $O_g P(0) = \underline{p}_g(0)$; $O_g P(\bar{t}) = \underline{p}_g(\bar{t})$

Nella config. finale : $O_g P(\bar{t}) = O_g O_e(\bar{t}) + O_e(\bar{t}) P(\bar{t}) = O_g O_e(\bar{t}) + O_g P(0)$
 $\underline{p}_g(\bar{t}) = d_{ge}(\bar{t}) + \underline{p}_e(\bar{t}) = d_{gl}(\bar{t}) + \underline{p}_g(0)$

da cui evidentemente

$$\underline{p}_g(\bar{t}) = d_{gl}(\bar{t}) + \underline{p}_g(0)$$

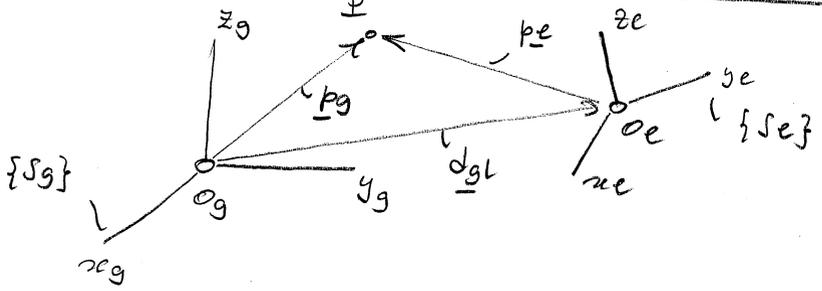
Se quindi ne prendo le componenti in $\{S_g\}$ si ha:

$$[p_g(\bar{T})]_g = [d_{gl}(\bar{T})]_g + [p_g(\omega)]_g$$

ovvero

$$\begin{bmatrix} x_g(\bar{T}) \\ y_g(\bar{T}) \\ z_g(\bar{T}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{gl1}(\bar{T}) \\ d_{gl2}(\bar{T}) \\ d_{gl3}(\bar{T}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_g(\omega) \\ y_g(\omega) \\ z_g(\omega) \end{bmatrix}$$

Caso generale: rotazione e shift dell'origine



relazione fra vettori in forma "invariante"

$$\begin{matrix} O_g P & = & O_g O_e & + & O_e P \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \underline{p}_g & & \underline{d}_{gl} & & \underline{p}_e \end{matrix}$$

$$\underline{p}_g = \underline{d}_{gl} + \underline{p}_e$$

Se ne prendo le componenti in $\{S_g\}$ mediante l'operatore $[\cdot]_g$

$$[p_g]_g = [d_{gl}]_g + [p_e]_g$$

comodo comodo scomodo

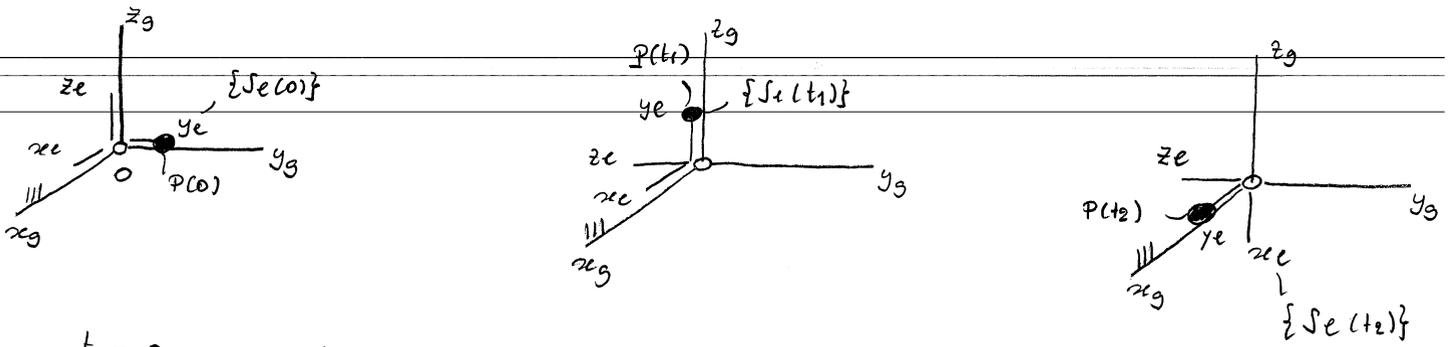
→ si può usare relazione viste senza shift origine da cui

$$[p_e]_g = R_{ge} [p_e]_e$$

ottenendo infine:

$$[p_g]_g = [d_{gl}]_g + R_{gl} [p_e]_e$$

relazione di trasformazione per le componenti di vettori spaziali fra 2 sistemi di riferimento in config. generici



$t = 0 \rightarrow$ ruoto attorno a x_g di $\pi/2 \rightarrow t = t_1 \rightarrow$ ruoto a y_g di $\pi/2 \rightarrow t = t_2$

come visto prima $OP(t) = p(t)$

Effettua la composizione di rotazioni in assi fissi

1^a rotazione $[p(t_1)]_g = [R_{x(t_0)t_1}]_g [p(0)]_g ;$

2^a rotazione $[p(t_2)]_g = [R_{y(t_1)t_2}]_g [p(t_1)]_g ;$

Dunque come unica trasformazione si ha:

$$[p(t_2)]_g = [R_{y(t_1)t_2}]_g [R_{x(t_0)t_1}]_g [p(0)]_g ;$$

\leftarrow verso di composizione
 \uparrow questa è avvenuta per prima
 \uparrow questa per seconda

attenzione che qui abbiamo tutte pedice "g" quindi sono tutte definite in assi fissi, ma in $\{S_g\}$.

Quindi, se espresse in assi fissi, le rotazioni si "assemblano" da destra verso sinistra: ma non che si fanno rotazioni successive le si aggiungono a premoltiplicate, anzi a sinistra.

Nel caso di figura ad esempio

$$[R_{x(t_0)t_1}]_g = R_x(\pi/2)$$

$$[R_{y(t_1)t_2}]_g = R_y(\pi/2)$$

Ed in definitiva si ha

$$[p(t_2)]_g = R_y(\pi/2) R_x(\pi/2) [p(0)]_g$$

(facciamo anche riferimento allo schema precedente)

Effettuo rotazioni in am locali (o mobili, o correnti) omnia quelli sempre più aggiornati fino all'operazione in esame

1^a rotazione
$$[p(t_1)]_g = [R_{e(t_0)e(t_1)}]_g [p(t_0)]_g = [R_{e(t_0)e(t_1)}]_{e(t_0)} [p(t_0)]_{e(t_0)}$$

questo poiché $\{S_{e(t_0)}\} = \{S_g\}$ ed anche $[p(t_0)]_g = [p(t_0)]_{e(t_0)}$

Adesso la seconda rotazione voglio esprimerla in $\{S_{e(t_1)}\}$, omnia nel frame locale

Effettuo questa procedura:

a. cambio coordinate
$$[p(t_1)]_{e(t_1)} = [R_{e(t_1)g}]_{e(t_1)} [p(t_1)]_g$$

b. scrivo la rotazione in coordinate $\{S_{e(t_1)}\}$, omnia:

$$[p(t_2)]_{e(t_1)} = [R_{e(t_1)e(t_2)}]_{e(t_1)} [p(t_1)]_{e(t_1)}$$

c. riporto le componenti di $p(t_2)$ nel sistema di riferimento globale $\{S_g\}$

$$[p(t_2)]_g = [R_{ge(t_1)}]_g [p(t_2)]_{e(t_1)}$$

$$\Rightarrow \text{da b.} = [R_{ge(t_1)}]_g [R_{e(t_1)e(t_2)}]_{e(t_1)} [p(t_1)]_{e(t_1)}$$

$$\Rightarrow \text{da c.} = [R_{ge(t_1)}]_g [R_{e(t_1)e(t_2)}]_{e(t_1)} [R_{e(t_1)g}]_{e(t_1)} [p(t_1)]_g$$

$$\Rightarrow \text{da 1}^{\text{a}} \text{ rot} = [R_{ge(t_1)}]_g [R_{e(t_1)e(t_2)}]_{e(t_1)} [R_{e(t_1)g}]_{e(t_1)} [R_{e(t_0)e(t_1)}]_g [p(t_0)]_g$$

Shella vola le sistemame $e(t_0) = g$; $e(t_1) = e_1$; $e(t_2) = e_2$

$$[p(t_2)]_g = [R_{ge_1}]_g [R_{e_1e_2}]_{e_1} \underbrace{[R_{e_1g}]_{e_1}}_I [R_{ge_1}]_g [p(t_0)]_g$$

omnia $\begin{matrix} \text{avemute per} \\ 1^{\text{a}} \end{matrix}$ $\begin{matrix} \text{avemute per} \\ 2^{\text{a}} \end{matrix}$

$$[p(t_2)]_g = [R_{ge_1}]_g [R_{e_1e_2}]_{e_1} [p(t_0)]_g$$

Le matrici associate a rotazioni successive espresse in frame locali si compongono per post moltiplicazione, omnia da sinistra a destra

$$[R_{ge_1}]_g [R_{e_1e_2}]_{e_1} = [R_{e_1e_2}]_{e_1} [R_{ge_1}]_g \Leftrightarrow [R_{e_1e_2}]_g = [R_{ge_1}]_g [R_{e_1e_2}]_{e_1} [R_{ge_1}]_g^T$$

Riferendoci sempre alle fig. di pag. 41, in frame locali

$$[R_{g1}]_g = R_x(\pi/2)$$

$$[R_{e12}]_{e1} = R_z(-\pi/2)$$

da cui

$$[k^{(2)}]_g = R_x(\pi/2) R_z(-\pi/2) [k^{(1)}]_g$$

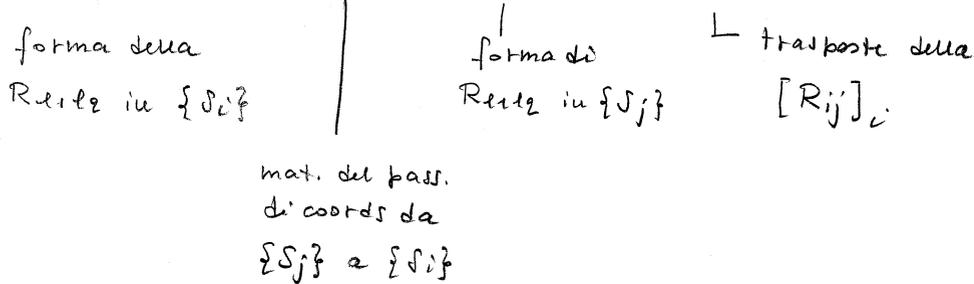
Nota bene che dalle relazioni precedenti si evince che

$$[R_{g1}]_g [R_{e12}]_{e1} \overbrace{[R_{e1g}]_{e1}}^{=[R_{g1}]_g^T} = [R_{e12}]_g$$

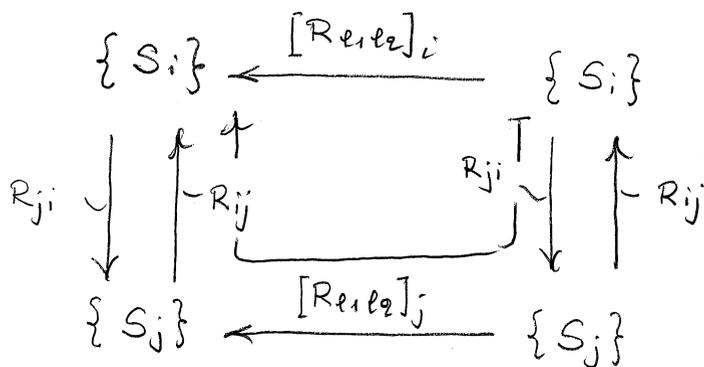
che ci fornisce la legge di trasformazione (x congruenza) di una matrice ortogonale di rotazione

In generale si ha che

$$[R_{e12}]_i = [R_{ij}]_i [R_{e12}]_j [R_{ij}]_i^T$$



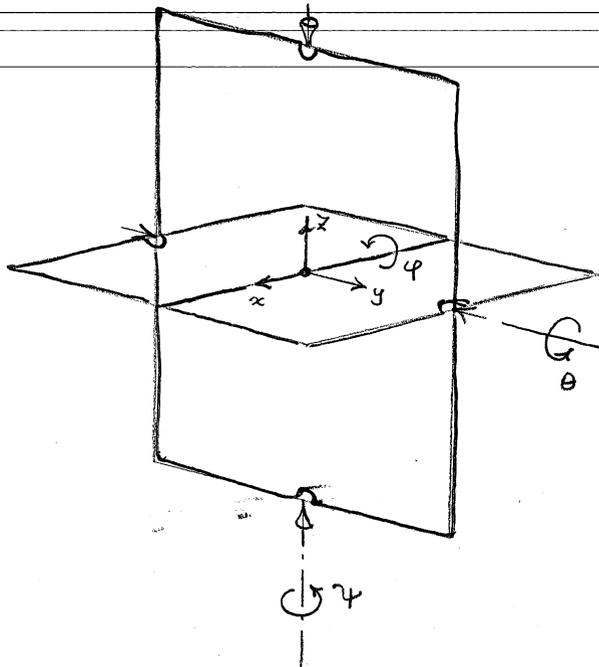
Schematicamente:



con $[R_{ij}]_i^T = [R_{ji}]_j$

III Percorso diretto: $[R_{e12}]_i$

III Percorso indiretto: $[R_{ij}]_i [R_{e12}]_j [R_{ij}]_i^T$



Sequenza di rotazioni
da $\{S_0\}$ solidale al telaio
ad un $\{S_3\}$ solidale al
perno blu.

- o) $\{S_0\}$ e telaio
- o) $\{S_1\}$ e frame nero
- o) $\{S_2\}$ e frame rosso
- o) $\{S_3\}$ e perno blu

Sequenza di rotazioni è data da: (in coordinate locali)

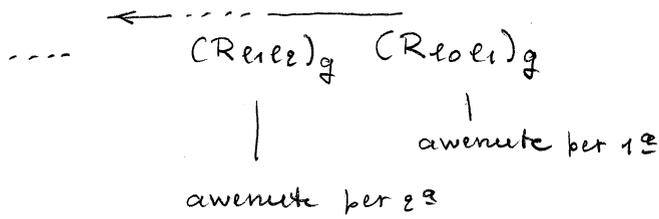
$$\{S_0\} \xrightarrow{R_z(\psi)} \{S_1\} \xrightarrow{R_y(\theta)} \{S_2\} \xrightarrow{R_x(\varphi)} \{S_3\}$$

Allora

$$[p(\psi, \theta, \varphi)]_{e_0} = [R_{e_0 e_1}(\psi)]_{e_0} [R_{e_1 e_2}(\theta)]_{e_1} [R_{e_2 e_3}(\varphi)]_{e_2} [p(0)]_{e_0} = R_{zyx}(\psi, \theta, \varphi) [p(0)]$$

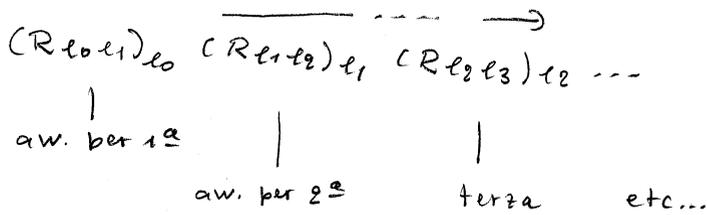
Regole di composizione

o) in assi fissi, ora in $\{S_g\}$, assembla da destra verso sinistra



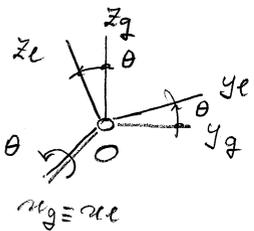
n.b. $\{S_{e12}\} = \{S_g\}$

o) in assi locali, ora di volta in volta nello $\{S_{e_i}\}$ corrente, assembla da sinistra verso destra

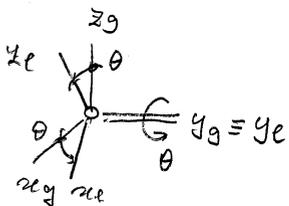


n.b. $\{S_{e12}\} = \{S_g\}$

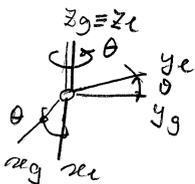
Matrici di rotazione elementari



$$\rightarrow R_x(\theta) = [R_{g1}]_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



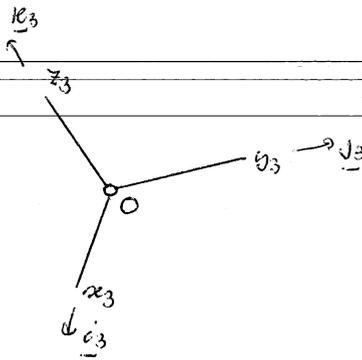
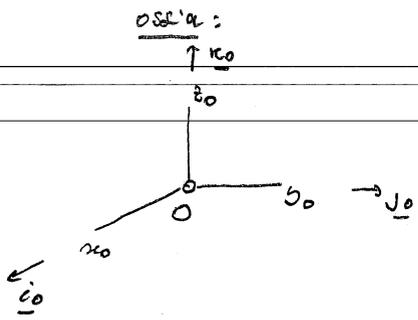
$$\rightarrow R_y(\theta) = [R_{g2}]_g = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$



$$\rightarrow R_z(\theta) = [R_{g3}]_g = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Come portare da una terna $\{S_0\}$ ad una terna $\{S_3\}$?

14. bis



considero assi z_0 e z_3 di
vettori \underline{k}_0 e \underline{k}_3

Allora definisco:

$$1) \quad \underline{j}_1 = \underline{j}_2 := \frac{\underline{k}_0 \times \underline{k}_3}{\sin \sigma}$$

$$2) \quad \underline{k}_1 = \underline{k}_0$$

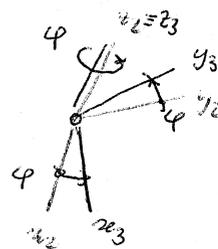
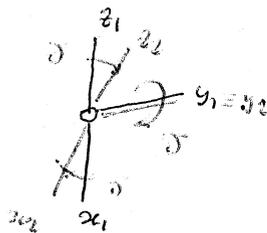
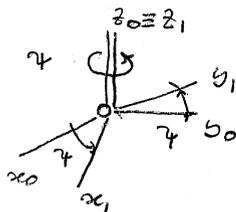
$$3) \quad \underline{k}_2 = \underline{k}_3$$

4) Allora i sistemi di riferimento $\{S_0\}$ ed $\{S_1\}$ hanno stesso asse z ossia $z_0 \equiv z_1$.
Dunque posso trovare una φ di rotazione attorno a $z_0 \equiv z_1$ che allinea $\{S_0\}$ a $\{S_1\}$

5) Poi posso trovare una γ di rot. attorno a y ossia $y_1 \equiv y_2$ che allinea $\{S_1\}$ a $\{S_2\}$

6) Poi posso trovare una φ di rot. attorno a z ossia $z_2 \equiv z_3$ che allinea $\{S_2\}$ a $\{S_3\}$

ossia graficamente:



Dunque le tre rotazioni sono composte in "assi correnti" in questo modo

$$[R_{01}]_0 [R_{12}]_1 [R_{23}]_2 = R_z(\varphi) R_y(\gamma) R_z(\varphi)$$

Questo è una parametrizzazione (3,2,3) di Eulero.

Come si fa a scrivere la matrice di rotazione relativa ad una "rotazione rigida generata" in modo che la R (mat. di rotazione) verifichi:

$$\left. \begin{aligned} & \cdot) R^T R = R R^T = I \\ & \cdot) \det(R) = 1 \end{aligned} \right\} R \in SO(3) \text{ (gruppo speciale ortogonale)}$$

Infatti la R in generale è tale che: $R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = [r_1 \ r_2 \ r_3]$

con vincoli che:

$$R^T R = \begin{bmatrix} r_1^T \\ r_2^T \\ r_3^T \end{bmatrix} [r_1 \ r_2 \ r_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(r_1 \times r_2) \cdot r_3 = 1$$

Se partiamo da due frame $\{S_g\}$ ed $\{S_e\}$ è naturale (e facile) definire

$$R_{ge} = \underline{e}_g^T \underline{e}_e$$

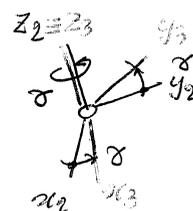
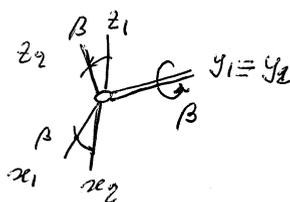
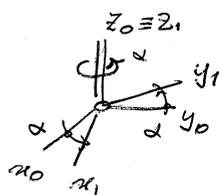
Tuttavia cerchiamo delle parametrizzazioni delle rotazioni (o di $SO(3)$) che ci permettano di definire una rotazione usando un numero minimo di parametri

Per teorema di Eulero sappiamo che è possibile passare da una terna ad un'altra con 3 rotazioni elementari. Queste parametrizzazioni è detta minime perché usa un no. di param. minimo, ossia solo 3.

Allora ad es. faccio 3 rotaz. successive attorno agli assi correnti.

Parametrizzazione di Eulero ZYZ

dove z_0 e z_3 definisco $y_1 \equiv y_2$ come



$$\begin{aligned} \underline{J}_1 &= \underline{J}_2 = \underline{K}_0 \times \underline{K}_1 \\ & \sin(\beta) \\ \text{con } \underline{K}_0 &= \underline{K}_1 \\ \underline{J}_1 &= \underline{J}_2 \\ \underline{K}_2 &= \underline{K}_3 \end{aligned}$$

$$\{S_0\} \xrightarrow{R_z(\alpha)} \{S_1\} \xrightarrow{R_y(\beta)} \{S_2\} \xrightarrow{R_z(\gamma)} \{S_3\}$$

come spostamento da $\{S_0\}$ a $\{S_1\}$

$$\text{Allora } R_{ZYZ}(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z(\gamma) \quad (ZYZ \text{ o } 323)$$

sono assemblate pensando che siano avvenute rispetto agli assi locali e dunque da sinistra a destra.

Così come ho scelto ZYZ potero scegliere altre sequenze: in quanti modi diversi?
 La regola è che due rotazioni consecutive (adiacenti) avvengano attorno ad assi
 distinti, altrimenti sono la stessa rotazione.

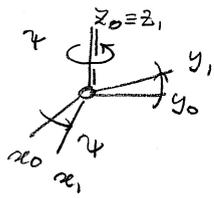
es. $R_x(\alpha) R_x(\beta) = R_x(\alpha+\beta) = R_x(\tilde{\alpha})$ conta come unica rotazione

- Allora su X Y Z
 1ª scelta su 3 assi → ho scelto Z
 2ª scelta su 2 assi (0 X o Y) → ho scelto Y
 3ª scelta su 2 assi (0 X o Z) → ho scelto Z

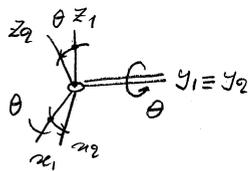
Allora ci sono $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ parametrizzazioni possibili con rotazioni elementari

sequenza ZYX o RPY (roll, pitch, yaw)

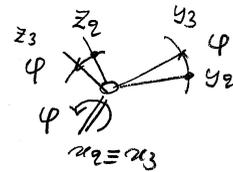
Se avessi scelto la sequenza ZYX avrei seguito



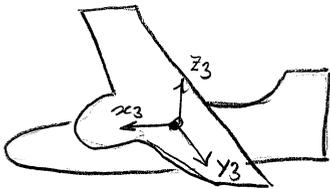
IMBARDATA = YAW
 ψ



BECCHERIO = PITCH
 θ



ROLLIO = ROLL
 ϕ



Allora $R_{RPY}(\psi, \theta, \phi) = R_z(\psi) R_y(\theta) R_x(\phi)$
 (ZYX o 321)

Si parla di: angeli di Eulero quando la 1ª e la 3ª rotazione sono =
 = di Cardano quando tutte e 3 le rotazioni sono ≠.

Esplacitemente per Eulero ZYZ

$$R_{ZYZ}(\psi, \theta, \psi) = R_z(\psi) R_y(\theta) R_z(\psi) = \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta c_\psi - s_\psi s_\psi & -c_\psi c_\theta s_\psi - s_\psi c_\psi & c_\psi s_\theta \\ s_\psi c_\theta c_\psi + c_\psi s_\psi & -s_\psi c_\theta s_\psi + c_\psi c_\psi & s_\psi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{bmatrix}$$

osservazione: che succede per $\theta = 0$?

$$R_z(\psi) R_y(0) R_z(\psi) = \begin{bmatrix} c_\psi c_\psi - s_\psi s_\psi & -c_\psi s_\psi - s_\psi c_\psi & 0 \\ s_\psi c_\psi + c_\psi s_\psi & -s_\psi s_\psi + c_\psi c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\psi+\psi} & -s_{\psi+\psi} & 0 \\ s_{\psi+\psi} & c_{\psi+\psi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Questo è una sola $R_z(\psi+\psi)$. Dunque il pb è che se si deve risolvere

il problema inverso, onia data la R numerica (matrice con elementi numerici) e si devono trovare gli angoli della parametrizzazione, in questo caso si riesce solo a discriminare la somma ($\psi + \varphi$) ma non φ e ψ singolarmente.

In generale invece (ovvia se $\theta \neq 0$) se considero di avere in ingrosso una R così fatta

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

si ha che: $r_{13} = c\varphi s\theta$; $r_{23} = s\varphi s\theta \rightarrow r_{13}^2 + r_{23}^2 = s^2\theta \neq 0$

Allora definendo $\theta \in (0, \pi)$ (sic $\theta > 0$) allora

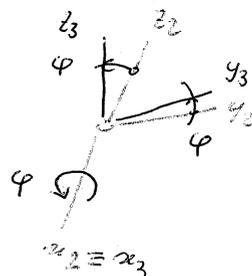
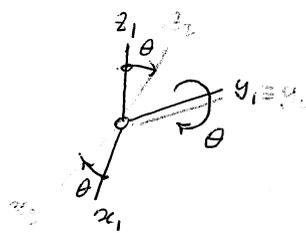
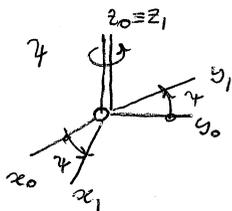
$$\varphi = \text{atan2}(r_{23}, r_{13})$$

$$\theta = \text{atan2}\left(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}\right)$$

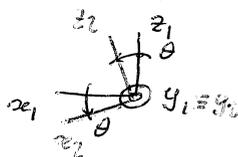
$$\psi = \text{atan2}(r_{32}, -r_{31})$$

dove $\text{atan2}(y, x)$ è f.ne arctan che fornisce angolo tenendo conto del quadrante in cui siamo sulla base dei segni di x e di y

Considerazioni analoghe possono farsi per tutte le altre parametrizzazioni, ad es. per RPY. La RPY ad es. ha singolarità per $\theta = \frac{\pi}{2}$, ovvero la condizione che fa in modo che l'asse z_2 sia allineato anche se con verso opposto all'asse z_1 , ovvia rende l'ultima rotazione dipendente dalla prima e quindi non è una vera rotazione 3D ma solo 2D. In questo caso nel pb. inverso si riesce solo a discriminare $\psi - \varphi$ ma non ψ e φ singolarmente



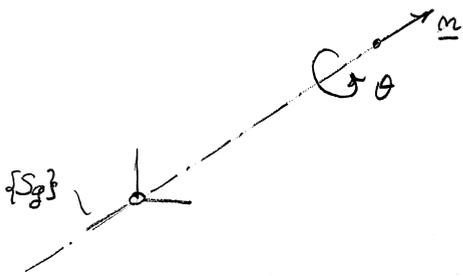
Quando $\theta = \pi/2$ le rotazioni finali attorno all'asse z_2 avviene attorno a x_2 che è con stesso dir. e verso opposto



quindi in pb. inverso riesce a dire solo $\psi - \varphi$.

Voglio esprimere la matrice di rotazione date le componenti del vettore

dell'asse e l'angolo di cui ruota, vettore \underline{m} di θ indotto dalla scelta di \underline{m} sull'asse di rotazione

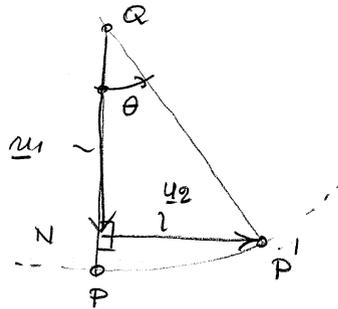
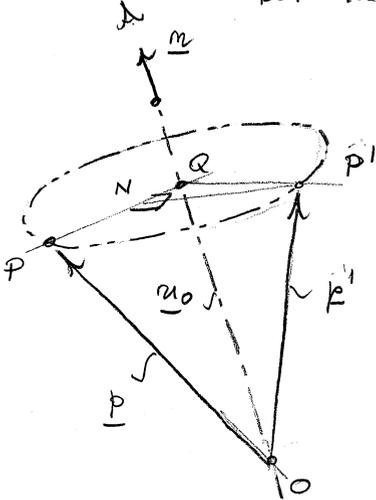


Fornisco $[\underline{m}] = m$ componenti di \underline{m} in un qualche frame

θ angolo orientato

I parametri sono 4 $\underline{m} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}$ e θ con vincolo che $m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1$ (vettore)

Via diretta per la costruzione



allora: $OP = \underline{p}$; $OP' = \underline{p}'$
 vettore iniziale ; vettore ruotato

$$OQ = \underline{u}_0 ; QN = \underline{u}_1 ; NP = \underline{u}_2$$

$$\underline{p}' = OP' = OQ + QN + NP' = \underline{u}_0 + \underline{u}_1 + \underline{u}_2$$

dove

$$\underline{u}_0 = \underline{m} (\underline{m}^T \underline{p}) = (\underline{m} \underline{m}^T) \underline{p} \quad \text{con } \underline{m} \underline{m}^T \text{ mat di proiezione su asse } \underline{m}$$

$$QP = \underline{p} - (\underline{m} \underline{m}^T) \underline{p} = (\underline{I} - \underline{m} \underline{m}^T) \underline{p}$$

$$QN = QP \cos \theta = \cos \theta (\underline{I} - \underline{m} \underline{m}^T) \underline{p} = \underline{u}_1$$

$$NP' = \underline{m} \times QP \sin \theta = \underline{m} \times (\underline{I} - \underline{m} \underline{m}^T) \underline{p} \sin \theta = \underline{m} \times \underline{p} \sin \theta = \underline{u}_2$$

$$\text{Poichè } \underline{m} \times (\underline{m} \underline{m}^T) \underline{p} = \underline{0} = \underbrace{(\underline{m} \times \underline{m})}_{\underline{0}} \underline{m}^T \underline{p} = \underline{0}$$

Queste operazioni sono poi da effettuarsi in componenti

$$\underline{p}' = (\underline{m}\underline{m}^T)\underline{p} + (\underline{I} - \underline{m}\underline{m}^T)\cos\theta \underline{p} + \underline{m} \times \underline{p} \sin\theta$$

Lavoriamo in componenti, ora applichiamo $[\cdot]$ e definiamo $[\underline{p}] = p$ etc.

Allora introduciamo

$$\hat{\underline{m}} = \begin{bmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{bmatrix} = S(\underline{m}) \quad \text{con} \quad \hat{\underline{m}} = -(\hat{\underline{m}})^T \text{ antisimmetrica}$$

$$S(\underline{m}) = -S(\underline{m})^T \text{ (SKEW-SYMMETRIC)}$$

conciat' potremo scrivere

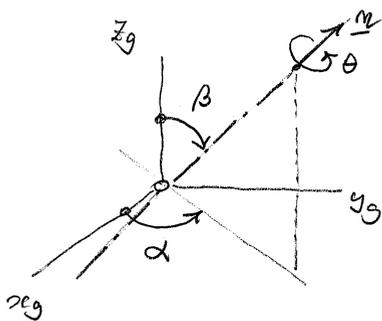
$$\underline{m} \times \underline{p} = \hat{\underline{m}} \underline{p} \text{ con } \hat{\underline{m}} \text{ matrice}$$

$$\underline{p}' = [\underline{m}\underline{m}^T + (\underline{I} - \underline{m}\underline{m}^T)\cos\theta + \hat{\underline{m}}\sin\theta] \underline{p} =: R_{\underline{m}}(\theta) \underline{p}$$

Dunque è definita la matrice di rotazione in funzione dei parametri $\underline{m} = [n_x \ n_y \ n_z]^T$ e angolo θ

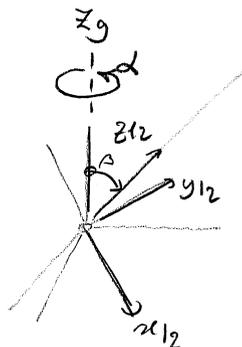
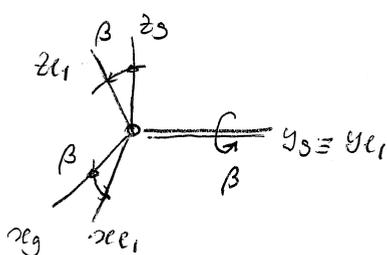
$$R_{\underline{m}}(\theta) = \underbrace{\underline{m}\underline{m}^T + (\underline{I} - \underline{m}\underline{m}^T)\cos\theta}_{R_{ms}} \text{ (parte simm.)} + \underbrace{\hat{\underline{m}}\sin\theta}_{R_{msS}} \text{ (parte antisimm.)}$$

Via indiretta per la costruzione di $R_{\underline{m}}(\theta)$ da rotazioni elementari



Sarebbe comodo scrivere $R_{\underline{m}}(\theta)$ se avessi un sistema di rif. aux. che avesse un'asse allineato con \underline{m} , così potrei esprimerla come rotazione elementare

Allora introduco



conciat' $\{V_{l2}\}$ ha
asse z allineato
con \underline{m} ora
 $\underline{k}_{l2} = \underline{m}$

Allora scrivo componendo in assi fissi

$$[R_{ge2}]_g = [R_{rl2}]_g [R_{gl1}]_g = R_z(\alpha) R_y(\beta)$$

Se in $\{S_{e2}\}$ voglio descrivere la rotazione attorno ad \underline{m} di θ vengo

$$[R_m(\theta)]_{e2} = R_z(\theta)$$

Ma ricordandosi che \rightarrow

si ha:

$$\begin{array}{ccc} \{S_g\} & \xleftarrow{[R_m(\theta)]_g} & \{S_g\} \\ & \uparrow R_{gl2} & \downarrow R_{gl2}^T \\ \{S_{e2}\} & \xleftarrow{R_z(\theta)} & \{S_{e2}\} \end{array}$$

$$[R_m(\theta)]_g = R_{gl2} R_z(\theta) R_{gl2}^T = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z(\theta) R_y(-\beta) R_z(-\alpha)$$

$$[R_{gl2}]_g^T = R_y^T(\beta) R_z^T(\alpha) = R_y(-\beta) R_z(-\alpha)$$

Quindi si costruisce la $R_m(\theta)$ assemblando 5 matrici di rotazione elementari, per quanto si parla di via indiretta.

$$R_m(\theta) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z(\theta) R_y(-\beta) R_z(-\alpha)$$

Nota bene che se si vanno ad esprimere le componenti del vettore m in funzione di $c_\alpha, s_\alpha, c_\beta, s_\beta$ le espressioni di $R_m(\theta)$ da via diretta ed indiretta sono ovviamente identiche

$$m_x = s_\beta c_\alpha$$

$$m_y = s_\beta s_\alpha$$

$$m_z = c_\beta$$

come da fig. a p. 19.

In particolare, se si vanno a scrivere esplicitamente gli elementi della matrice di rotazione da m e / angolo via diretta si ha:

$$R_m(\theta) = \begin{bmatrix} m_x^2 \mathcal{J}_\theta + c_\theta & m_x m_y \mathcal{J}_\theta - m_z s_\theta & m_x m_z \mathcal{J}_\theta + m_y s_\theta \\ m_x m_y \mathcal{J}_\theta + m_z s_\theta & m_y^2 \mathcal{J}_\theta + c_\theta & m_y m_z \mathcal{J}_\theta - m_x s_\theta \\ m_x m_z \mathcal{J}_\theta - m_y s_\theta & m_y m_z \mathcal{J}_\theta + m_x s_\theta & m_z^2 \mathcal{J}_\theta + c_\theta \end{bmatrix}$$

dove $c_\theta = \cos \theta$, $s_\theta = \sin \theta$, $\mathcal{J}_\theta = (1 - \cos \theta) = 1 - c_\theta$

note bene che $R_m(\theta) = R_{(-m)}(-\theta)$, ma rotazioni sono a coppie.

Se ci interessa il problema inverso, omnia data

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad \text{determinate } \underline{m} \text{ e } \theta$$

per esprimere della forma \cos/\sin e angolo θ si vede che

$$\begin{aligned} r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1 &= m_x^2 \cos \theta + \cos \theta + m_y^2 \cos \theta + \cos \theta + m_z^2 \cos \theta + \cos \theta - 1 = \\ &= \cancel{1} - \cos \theta + 3 \cos \theta - \cancel{1} = 2 \cos \theta \end{aligned}$$

allora

$$\begin{cases} \theta = \arccos \left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2} \right) \\ \underline{m} = \frac{1}{2 \sin \theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \end{cases}$$

che vale se $\sin \theta \neq 0$, in fatti se $\theta = 0$ \underline{m} è indeterminato (arbitrario poiché posso ruotare di angolo nullo attorno a qualsiasi \underline{m} ed ho sempre vettore di partenza)

Quali radici ha questo risultato?

Deriva dalle decomposizioni cartesiane di una matrice $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) = A_S + A_{SS}$$

dove

$$A_S = \frac{1}{2}(A + A^T) \quad \text{parte simmetrica ;}$$

$$\begin{aligned} \text{perché } A_{SS}^T &= \frac{1}{2}(A^T - A) = -\frac{1}{2}(A - A^T) = -A_{SS} \\ &\text{quindi per def. di skew-symm} \\ A_{SS} &= \frac{1}{2}(A - A^T) \quad \text{parte anti-simmetrica} \\ &\quad \text{(skew symmetric)} \end{aligned}$$

invarianti lineari sono

•) il $\text{vect}(A) = \underline{a} = (A_{SS})^\vee$, dove A_{SS} è tale che $A_{SS} \underline{v} = \underline{a} \times \underline{v}$

•) la $\text{tr}(A)$ che è uguale alla $\text{tr}(A_S)$

$$\text{calcolo esplicito per una } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

potrà a

$$\underline{a} = (A_{SS})^\vee = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{32} - a_{23} \\ a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} \end{bmatrix}$$

$$\text{e } \text{tr}(A) = \text{tr}(A_S) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_{ii}$$

Se applichiamo la decomposizione Cartesiana alla forma delle matrici di rotazione R in param. \cos/\sin e angolo θ si ottiene

$$R = \underbrace{m m^T + \cos \theta (I - m m^T)}_{R_S} + \underbrace{\hat{m} \sin \theta}_{R_{SS}}$$

gli invarianti lineari sono quindi costanti da:

$$o) \text{vect}(R) = (R_{SS})^V = (\hat{m} \sin \theta)^V = m \sin \theta$$

ricorda che $n = [n_x \ n_y \ n_z]^T$

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{operatore}$$

$$\text{inversa e' } (\hat{M})^V = m$$

Ovvero anche

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{bmatrix}^V = \begin{bmatrix} -c \\ b \\ -a \end{bmatrix}$$

$$\text{ma } \text{vect}(R) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

Perciò eguagliando si ha:

$$m = \frac{1}{2 \sin \theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

$$o) \text{tr}(R) = \text{tr}(R_S) = \text{tr}(m m^T + \cos \theta (I - m m^T)) = \frac{1}{m^T m} + \cos \theta (3 - \frac{1}{m^T m}) = 1 + \cos \theta (3 - 1) = 1 + 2 \cos \theta$$

dove si è usato: $\text{tr}(m m^T) = m^T m$ e $m^T m = 1$ poiché m è vettore

Perciò eguagliando si ha:

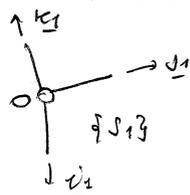
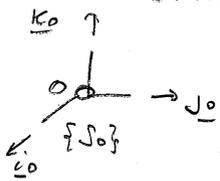
$$r_{11} + r_{22} + r_{33} = \text{tr}(R) = 1 + 2 \cos \theta \rightarrow \cos \theta = \frac{\text{tr}(R) - 1}{2}$$

Da cui si calcolano

$$\text{Per } 1^\circ \quad \cos \theta = \frac{\text{tr}(R) - 1}{2} \rightarrow \theta$$

$$\text{per } 2^\circ \quad m = \frac{1}{2 \sin \theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \rightarrow m$$

Comoda conoscere il cosiddetto "lemma dei vettori"



$$R_{01} = \frac{e_0^T e_1}{e_2^T e_1} = \begin{bmatrix} e_0^T \\ e_1^T \\ e_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{ovviamente } \text{tr}(R_{01}) = e_0^T e_1 + e_1^T e_2 + e_2^T e_3$$

$$\text{mentre si ha che } e_0 \times e_1 + e_1 \times e_2 + e_2 \times e_3 = 2 m \sin \theta$$

$$\text{ovvia } \hat{e}_0 e_1 + \hat{e}_1 e_2 + \hat{e}_2 e_3 = \begin{bmatrix} \hat{e}_0 & \hat{e}_1 & \hat{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = 2 m \sin \theta$$

"quaternioni unitari"

16 ottobre 1843 da Sir William R Hamilton

inciso su ponte Brougham Bridge, Dublino
atto di vandalismo matematico

Un quaternione può essere considerato la generalizzazione di un numero complesso

ed è definito come

$$Q = q_0 + q_1 \underline{i} + q_2 \underline{j} + q_3 \underline{k} = (q_0, \underline{q})$$

dove:

q_0 componente scalare e $\underline{q} = (q_1, q_2, q_3)$ è la componente vettoriale

Si definisce un'algebra sui quaternioni definendo un prodotto "•" che può essere definito una volta stabilite queste "regole"

$$\underline{i} \cdot \underline{i} = \underline{j} \cdot \underline{j} = \underline{k} \cdot \underline{k} = \underline{i} \cdot \underline{j} \cdot \underline{k} = -1$$

$$\underline{i} \cdot \underline{j} = -\underline{j} \cdot \underline{i} = \underline{k} ; \underline{j} \cdot \underline{k} = -\underline{k} \cdot \underline{j} = \underline{i} ; \underline{k} \cdot \underline{i} = -\underline{i} \cdot \underline{k} = \underline{j}$$

Si definisce coniugato di un quaternione Q il quaternione

$$Q^* = (q_0, -\underline{q})$$

Il modulo al quadrato del quaternione verifica

$$\|Q\|^2 = Q \cdot Q^* = (q_0^2 + \underline{q}^T \underline{q}, 0) = (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2, 0)$$

L'inverso di un quaternione Q^{-1} ossia tale che $Q^{-1}Q = (1, 0) = \text{identità}$ nei quaternioni per operazione di moltiplicazione, è ottenibile come

$$Q^{-1} = \frac{Q^*}{\|Q\|^2}$$

Il prodotto fra due quaternioni $Q = (q_0, \underline{q})$ e $P = (p_0, \underline{p})$ può anche essere effettuato come

$$Q \cdot P = (q_0 p_0 - \underline{q}^T \underline{p}, q_0 \underline{p} + p_0 \underline{q} + \underline{q} \times \underline{p})$$

Tale regola elimina necessità di usare le regole moltiplicative fornite precedentemente

Per quaternioni unitari $\|Q\| = 1$, $Q^{-1} = Q^*$

Si può associare ad una rotazione una sua rappresentazione mediante

q.u. si parte dalla forma $R_m(\theta)$ ossia \underline{m}, θ e si definisce il Q associato a tale rotazione come

$$Q_R = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \underline{m} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$$

n.b. rotazione att. \underline{m} di θ fornisce stesso q.u. di rot. att. a $-\underline{m}$ di $-\theta$.

Viceversa, dato un q.u. $Q = (q_0, \underline{q})$ la rotazione corrispondente è

$R_m(\theta)$ con

$$\theta = 2 \arccos q_0, \quad \underline{m} = \left(\frac{1}{\sin(\theta/2)}\right) \underline{q} = \begin{cases} \frac{1}{\sin(\theta/2)} \underline{q}, & \text{se } \theta \neq 0 \\ \underline{0}, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Inoltre dato due matrici di rotazione R_1 ed R_2 ed i rispettivi quaternioni associati Q_{R_1} e Q_{R_2} si ha

$$Q_{R_1} \cdot Q_{R_2} = Q_{(R_1 R_2)}$$

ovvia il quaternioni associato al prodotto $R_1 R_2$ è uguale al prodotto dei quaternioni. Questo fornisce un modo più efficiente computazionalmente per comporre rotazioni.

Inoltre per fare il prodotto fra 2 matrici di rotazione e $\mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$\text{es. } R^{(c)} = R^{(a)} R^{(b)}$$

a livello di componenti si fa

$$R_{ij}^{(c)} = R_{ik}^{(a)} R_{kj}^{(b)} \quad \forall i, j \text{ ho 3 moltiplicazioni} \rightarrow i=1, \dots, 3 \quad j=1, \dots, 3 \text{ ed allora di fatto } 3^3 = 27 \text{ moltiplicazioni}$$

sommata su k

Invece per componenti corrispondenti $Q^{(a)}$ e $Q^{(b)}$ per trovare $Q^{(c)}$ si fa

$$Q^{(a)} \cdot Q^{(b)} = \left(\underbrace{q_0^{(a)} q_0^{(b)}}_{1 \text{ moltip. scalate}} - \underbrace{\underline{q}^{(a)T} \underline{q}^{(b)}}_{3 \text{ moltip.}}, \underbrace{q_0^{(a)} \underline{q}^{(b)}}_3 + \underbrace{q_0^{(b)} \underline{q}^{(a)}}_3 + \underbrace{\underline{q}^{(a)} \times \underline{q}^{(b)}}_6 \right)$$

$$\text{in totale sono } 1 + 9 + 6 = 16$$

Ho quindi dimezzato il costo computazionale!

Se voglio ricostruire la matrice di rotazione associate al quaternioni posso scrivere la R in funzione di \underline{m} e θ ottenendo

$$R_m(\theta) = \underline{m} \underline{m}^T + (\mathbf{I} - \underline{m} \underline{m}^T) \cos \theta + \hat{\underline{m}} \sin \theta$$

ci serve sapere che per $\|\underline{m}\| = 1$ con $\underline{m} = (\hat{\underline{m}})^V$ valgono:

$$\hat{\underline{m}}^1 = -\hat{\underline{m}}^T, \quad \hat{\underline{m}}^2 = -(\mathbf{I} - \underline{m} \underline{m}^T), \quad \hat{\underline{m}}^3 = -\hat{\underline{m}}$$

e ricorrendo:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{m}}^{(2k+1)} &= (-1)^k \hat{\underline{m}} \\ \hat{\underline{m}}^{(2k)} &= (-1)^k (\mathbf{I} - \underline{m} \underline{m}^T) \end{aligned} \quad k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

Allora

$$R_m(\theta) = \underbrace{I + \frac{\hat{m}^2}{m m^T}}_{m m^T} - \underbrace{\frac{\hat{m}^2}{(I - m m^T)}}_{(I - m m^T)} \cos \theta + \frac{\hat{m}^2}{m} \sin \theta = I + \frac{\hat{m}^2}{m} \sin \theta + \frac{\hat{m}^2}{m} (1 - \cos \theta)$$

ma dalle formule di p. 24 esendo

$$q_0 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{con } \underline{q}_R = (q_0, \underline{q}) = \left(\cos \frac{\theta}{2}, \frac{m}{2} \sin \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\underline{q} = \frac{m}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

si operano le seguenti trasformazioni

$$\sin \theta = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\cos \theta = 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

da cui

$$\begin{aligned} R_m(\theta) &= R(q_0, \underline{q}) = I + \frac{\hat{q}}{m} \left(2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) + \frac{\hat{q}^2}{m} \left(1 - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \\ &= I + 2 \hat{q} \left(\underbrace{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}_{q_0} + \hat{q} \right) = I + 2 \hat{q} (q_0 I + \hat{q}) \end{aligned}$$

Dunque ho scritto la matrice di rotazione in f.ze delle componenti del quaternione. Tali componenti, ossia (q_0, q_1, q_2, q_3) sono anche dette parametri di Euler.

I quaternioni possono essere usati anche per effettuare direttamente operazioni su rotazioni sui punti

ovvia voglio fare

$$\begin{aligned} [P(\bar{t})]_g &= R q_e [P(o)]_g \\ \downarrow & \qquad \qquad \downarrow \\ \begin{bmatrix} x(\bar{t}) \\ y(\bar{t}) \\ z(\bar{t}) \end{bmatrix} & \qquad \qquad \begin{bmatrix} x(o) \\ y(o) \\ z(o) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Le coordinate di un punto in forma di quaternione le scriverò così

$$P(o) = (0, (x(o), y(o), z(o)))$$

La rotazione sarà

$$R q_e = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \frac{m}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) = (q_0, \underline{q})$$

Il punto rotato sarà:

$$P(\bar{t}) = R q_e P(o) R q_e^* \quad \text{conjugato}$$

I quaternioni sono utili per interpolazione fra pose

Se P e Q sono orientazioni relative a 2 pose diverse, se definisco un parametro

$t \in [0, 1]$, posso definire l'orientazione fra P e Q associata al parametro t come

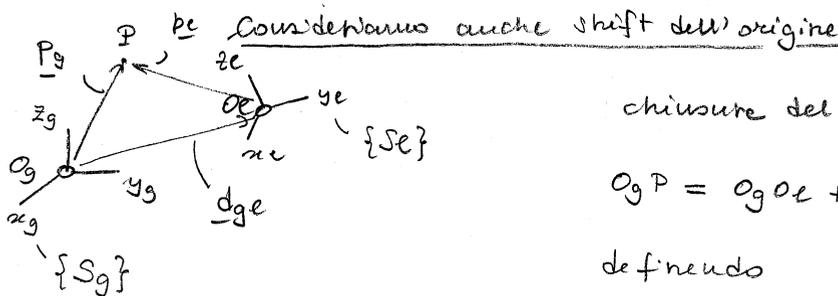
$$s(t; P, Q) = \frac{\sin\left[\frac{\theta}{2}(1-t)\right] P + \sin\left[\frac{\theta}{2}t\right] Q}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

così come

$$s(0; P, Q) = P \quad ; \quad s(1; P, Q) = Q$$

dove θ : angolo fra pose P e Q in parametrizzazione om/angolo (m, θ)

Il campionamento uniforme in t fornisce pose equispaziate e pose intermedie più naturali che con altre parametrizzazioni come angoli di Eulero, etc.



chiusura del triangolo $O_g \triangle O_e P$

$$O_g P = O_g O_e + O_e P$$

definendo

$$O_g P =: \underline{p}_g \quad ; \quad O_g O_e =: \underline{d}_{ge} \quad ; \quad O_e P =: \underline{p}_e$$

Si può scrivere fra vettori in forma invariante

$$\underline{p}_g = \underline{p}_e + \underline{d}_{ge}$$

relazione fra vettori in forma invariante

Se scivolo:

nota bene che \underline{p}_g e \underline{d}_{ge} sono comp. in $\{S_g\}$, \underline{p}_e in $\{S_e\}$

$$\underline{p}_g = \underline{e}_g \underline{p}_g \quad ; \quad \underline{p}_e = \underline{e}_e \underline{p}_e \quad ; \quad \underline{d}_{ge} = \underline{e}_g \underline{d}_{ge}$$

$$\text{ho ha } (\underline{p}_g = [\underline{p}_g]_g \quad ; \quad \underline{p}_e = [\underline{p}_e]_e \quad ; \quad \underline{d}_{ge} = [\underline{d}_{ge}]_g)$$

$$\underline{e}_g \underline{p}_g = \underline{e}_e \underline{p}_e + \underline{e}_g \underline{d}_{ge} \quad \rightarrow \text{premultiplico per } \underline{e}_g^T \text{ ottenendo:}$$

$$\underline{e}_g^T \underline{e}_g \underline{p}_g = \underline{e}_g^T \underline{e}_e \underline{p}_e + \underline{e}_g^T \underline{e}_g \underline{d}_{ge} \quad \text{ovvero...}$$

$$\underline{p}_g = R_{ge} \underline{p}_e + \underline{d}_{ge}$$

relazione fra le componenti

Queste relazioni non è più lineare bensì affine, infatti si trasforma qualcosa di tipo (#) in $(\underline{d}_{ge} + R_{ge} \#)$

x linearità varrebbero che

$$L(\alpha p) = \alpha L(p) \quad (\text{omogeneità})$$

$$L(p_1 + p_2) = L(p_1) + L(p_2) \quad (\text{additività})$$

Nel nostro schema invece ($d_{ge} = d$, $R_{ge} = R$)

$$L(\alpha p) = d + R(\alpha p) = d + \alpha R p \neq \alpha L(p) = \alpha d + \alpha R p$$

Si introducono perciò le coordinate omogenee che consentono di recuperare la linearità.

Definizioni di coordinate omogenee per vettori posizionali e vettori generici

-) p_g componenti del vettore posizione \underline{p}_g in $\{S_g\}$.

esplicitamente
$$\begin{bmatrix} p_{gx} \\ p_{gy} \\ p_{gz} \end{bmatrix}$$

\bar{p}_g coordinate omogenee, $\bar{p}_g = \begin{bmatrix} p_g \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$

-) v_g componenti di un vettore generico (velocità, accel., forza, mom., etc.) \underline{v}_g in $\{S_g\}$.

esplicitamente
$$\begin{bmatrix} v_{gx} \\ v_{gy} \\ v_{gz} \end{bmatrix}$$

\bar{v}_g coordinate omogenee, $\bar{v}_g = \begin{bmatrix} v_g \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$

Per un vettore \underline{v}_g lo shift dell'origine non ha nessuna influenza

In termini di componenti un vettore posizionale cambia così

$$p_g = R_{ge} p_e + d_{ge}$$

mentre per un vettore non di posizione le componenti cambiano così

$$v_g = R_{ge} v_e$$

Introduco la matrice omogenea

$$T_{ge} := \left[\begin{array}{c|c} R_{ge} & d_{ge} \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

dove $R_{ge} \in SO(3) \subset \mathbb{R}^{3 \times 3}$ matrice di rotazione $R_{ge} = \underline{e}_g^T \underline{e}_e$

$d_{ge} = [d_{ge}]_g \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ componenti del vettore traslazione dell'origine O_e rispetto ad O_g , ossia $\underline{d}_{ge} = O_e - O_g$

$\mathbf{0}^T \in \mathbb{R}^{1 \times 3} \rightarrow [0 \ 0 \ 0]$

1 di \mathbb{R} (numero 1)

$$T_{ge} \bar{p}_e = \left[\begin{array}{c|c} R_{ge} & d_{ge} \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} p_e \\ 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} R_{ge} p_e + d_{ge} \\ 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} p_g \\ 1 \end{array} \right] = \bar{p}_g$$

dunque le prime tre componenti sono le coordinate in $\{S_g\}$ a partire da quelle in $\{S_e\}$. L'ultima componente vale 1.

Se la applico ad un vettore

$$T_{ge} \bar{v}_e = \left[\begin{array}{c|c} R_{ge} & d_{ge} \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} v_e \\ 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} R_{ge} v_e \\ 0 \end{array} \right] = \bar{v}_g$$

Dunque un vettore generico rimane un vettore generico e le sue componenti cartesiane si modificano correttamente senza l'influsso della traslazione che viene filtrata.

In questo modo la moltiplicazione delle coordinate omogenee del vettore p_g , ossia \bar{p}_g , per la T_{ge} è sufficiente per effettuare il cambiamento di coordinate tra i frame $\{S_e\}$ e $\{S_g\}$ disposti genericamente l'uno rispetto all'altro.

Allora

$$\bar{p}_g = T_{ge} \bar{p}_e$$

E per la trasformazione inversa? $\bar{p}_e = T_{ge}^{-1} \bar{p}_g = T_{eg} \bar{p}_g$

come si fa T_{ge}^{-1} ?

$$\text{Partendo da } T = \left[\begin{array}{c|c} R & d \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right]$$

$$T^{-1} : T^{-1} T = I_{4 \times 4} = \left[\begin{array}{c|c} I & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right]$$

Chiamiamo

$$T^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} X & y \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right] \quad \text{e infatti } T^{-1} T = \left[\begin{array}{c|c} X & y \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} R & d \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} I & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right]$$

a blocchi:

$$\begin{cases} X R = I \rightarrow X = R^T & (\text{poichè } R \text{ è di } SO(3)) \\ X d + y = \mathbf{0} \rightarrow y = -X d = -R^T d \end{cases}$$

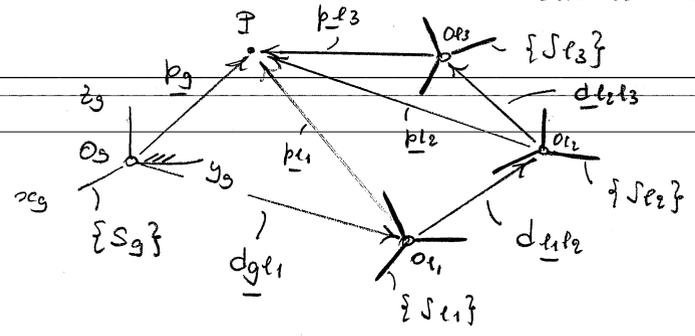
Allora

$$T^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} R^T & -R^T d \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right]$$

fatte da calcolare a blocchi.

Attenzione T non è ortogonale.

Vediamo la comodità del suo utilizzo



$$\underline{p}_1 = \underline{d}_{112} + \underline{p}_2 \rightsquigarrow \text{in comp in } \{S_1\} \rightsquigarrow p_1 = R_{112} p_2 + d_{112}$$

$$\underline{p}_g = \underline{d}_{g11} + \underline{p}_1 \rightsquigarrow \text{in comp in } \{S_g\} \rightsquigarrow p_g = R_{g11} p_1 + d_{g11}$$

allora:

$$\begin{aligned} p_g &= R_{g11} (R_{112} p_2 + d_{112}) + d_{g11} = \\ &= \underbrace{R_{g11} R_{112}}_{R_{g12}} p_2 + \underbrace{R_{g11} d_{112} + d_{g11}}_{d_{g12}} = R_{g12} p_2 + d_{g12} \end{aligned}$$

Usiamo le matrici omogenee

$$\bar{p}_1 = T_{112} \bar{p}_2$$

$$\bar{p}_g = T_{g11} \bar{p}_1$$

allora

$$\bar{p}_g = T_{g11} T_{112} \bar{p}_2 = T_{g12} \bar{p}_2$$

$$T_{g12} = \left[\begin{array}{c|c} R_{g11} & d_{g11} \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} R_{112} & d_{112} \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} R_{g11} R_{112} & R_{g11} d_{112} + d_{g11} \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right]$$

e effettuando la moltiplicazione matriciale $T_{g12} \bar{p}_2$, nelle prime 3 componenti si ha proprio $R_{g12} p_2 + d_{g12}$.

Dunque il nuovo modo fra matrici può essere usato per comporre rototraslazioni successive espresse da matrici omogenee.

Dunque matrici omogenee di rototraslazione hanno struttura di tipo

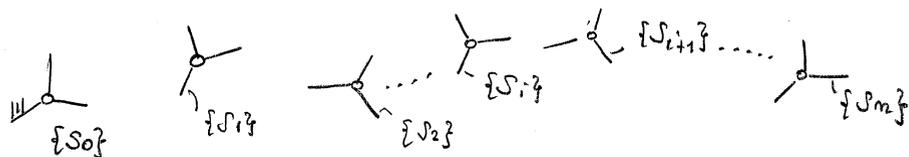
$$T = \left[\begin{array}{c|c} R & d \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right] \text{ con } R \in SO(3), d \in \mathbb{R}^3 \text{ n.b. } \det(R) = 1 \text{ sono isometrie che preservano il verso di percorrenza (terme levogite vengono chiamate in terme levogite)}$$

Interessante interpretazione di una Tgl come

$$T_{gl} = \begin{bmatrix} [i\bar{e}]_0 & [j\bar{e}]_0 & [k\bar{e}]_0 & [d\bar{g}]_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{i}\bar{e} & \bar{j}\bar{e} & \bar{k}\bar{e} & \bar{d}\bar{g} \end{bmatrix}$$

dove $\bar{i}\bar{e}, \bar{j}\bar{e}, \bar{k}\bar{e} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ sono coordinate omogenee di vettori (che sono vettori $N \times N$ di posizione, e hanno perciò 0 appeso come ultima componente) mentre $\bar{d}\bar{g} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ sono coord di vettore posizione (ed infatti ha 1 appeso come ultima componente).

In questo modo se si ha una catena di sistemi di riferimento arbitrariamente lunga si può scrivere la trasform. omogenea complessiva combinando le trasformazioni successive



allora:

•) in art. mobili (o correnti): $[T_{0m}]_0 = \begin{matrix} \text{insieme da sin. a destra} \\ \longrightarrow \end{matrix} [T_{01}]_0 [T_{12}]_1 \dots [T_{i,i+1}]_i \dots [T_{m-1,m}]_{m-1}$

•) in art. fissi: $[T_{0m}]_0 = [T_{m-1,m}]_0 \dots [T_{i,i+1}]_0 \dots [T_{12}]_0 [T_{01}]_0$

Questa dimostrazione è formalmente identica a quella vista per le rotazioni. Come fatto per le rotazioni si possono definire le trasformazioni omogenee elementari che sono date da

•) Rotazioni elementari

$$T_{R_x}(\theta) = \left[\begin{array}{c|c} R_x(\theta) & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right]; \quad T_{R_y}(\theta) = \left[\begin{array}{c|c} R_y(\theta) & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right];$$

$$T_{R_z}(\theta) = \left[\begin{array}{c|c} R_z(\theta) & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right];$$

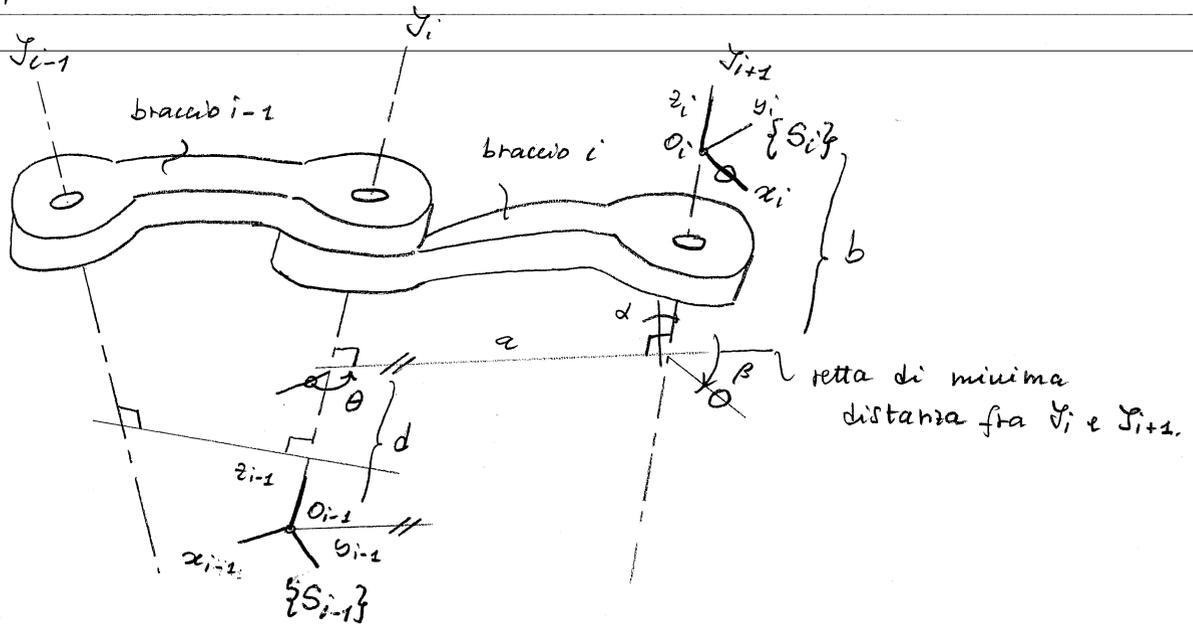
•) Traslazioni elementari

$$T_{T_x}(a) = \left[\begin{array}{c|c} I & \begin{matrix} a \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right]; \quad T_{T_y}(a) = \left[\begin{array}{c|c} I & \begin{matrix} 0 \\ a \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right];$$

$$T_{T_z}(a) = \left[\begin{array}{c|c} I & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ a \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right];$$

Convezione di Denavit-Hartenberg per la parametrizzazione di catene cinematiche seriali

Prima questione



considero di

- 1) Numerare le link (bracci) da L_0, L_1, \dots, L_m (L_0 è telaio)
- 2) Numerare giunti da J_1, \dots, J_m
- 3) attaccare ad ogni link un sistema di r.f. solide con asse Z_i coincidente con asse del giunto a valle del link, perciò J_{i+1}

La situazione è perciò quella in figura.

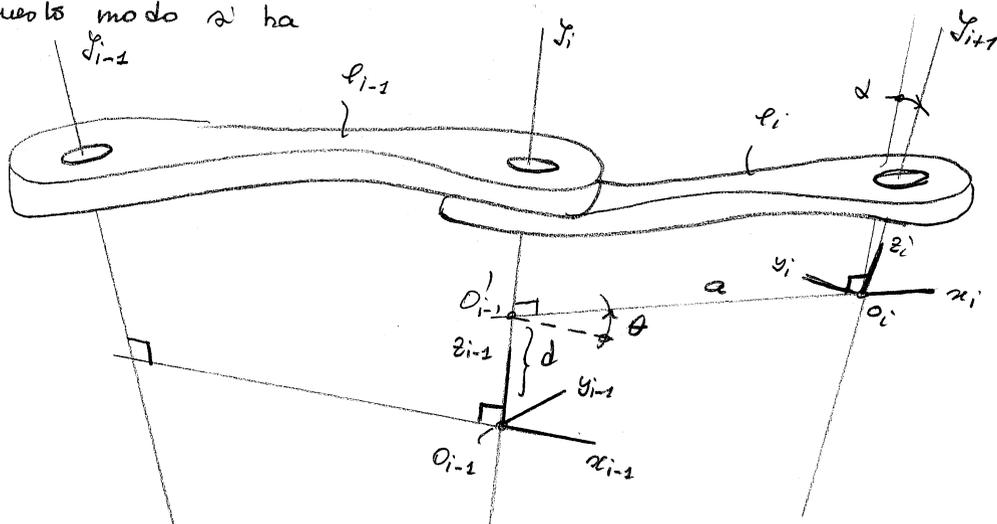
Attaccando in modo arbitrario $\{S_{i-1}\}$ a L_{i-1} e $\{S_i\}$ a L_i ottengo che la trasformazione generica $T_{i-1,i}$ è data da

$$T_{i-1,i} = TR_z(\theta) TT_z(d) TR_x(a) TR_x(\alpha) TT_z(b) TR_z(-\beta)$$

6 trasformazioni elementari, ciascuna fra di un solo parametro

Idea di D.-H.: risparmiare 2 trasformazioni stabilendo che frame del link è scelto in modo che $b=0, \beta=0$.

In questo modo si ha



Attenzione che se si fa:

$$T_{Trz}(a) T_{Rz}(\theta) = \begin{bmatrix} I & \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_z(\theta) & \underline{0} \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_z(\theta) & \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (*)$$

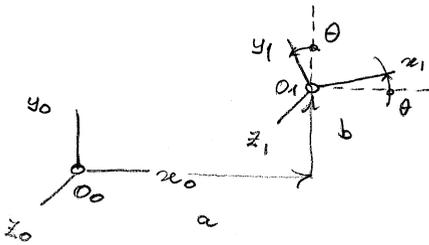
si ottiene proprio la matrice omogenea "standard". Da cui il significato evidente del $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ come traslazione in componenti nel sistema di rif. fisso ed $R_z(\theta)$ come rot nel sistema di rif. fisso (in tale caso insostituibile dal locale)

Invece se si fa:

$$T_{Rz}(\theta) T_{Trz}(a) = \begin{bmatrix} R_z(\theta) & \underline{0} \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_z(\theta) & R_z(\theta) \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (**)$$

si sta facendo (in am. fiss) prima una traslazione e poi una rotazione attorno all'origine del frame fisso.

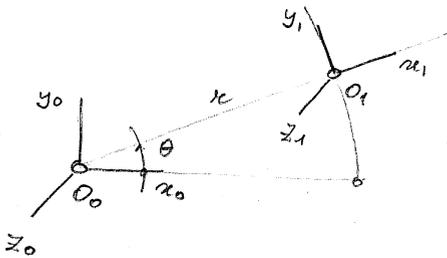
Dunque se ho una rototraslazione così:



comode scrivete nel modo naturale (*)

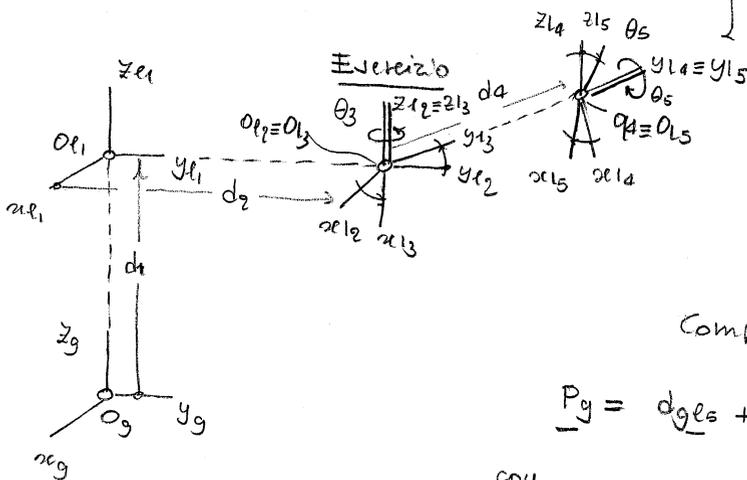
$$T_{O1} = \begin{bmatrix} R_z(\theta) & \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

Se invece ne ho una così:



comodo scrivete così: (**)

$$T_{O1} = \begin{bmatrix} R_z(\theta) & \underline{0} \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_z(\theta) & R_z(\theta) \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_z(\theta) & \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$



Allora date le coordinate di un punto espresse in $\{S_{e5}\}$, quali sono le coordinate in $\{S_g\}$?

Componendo in am. corrente

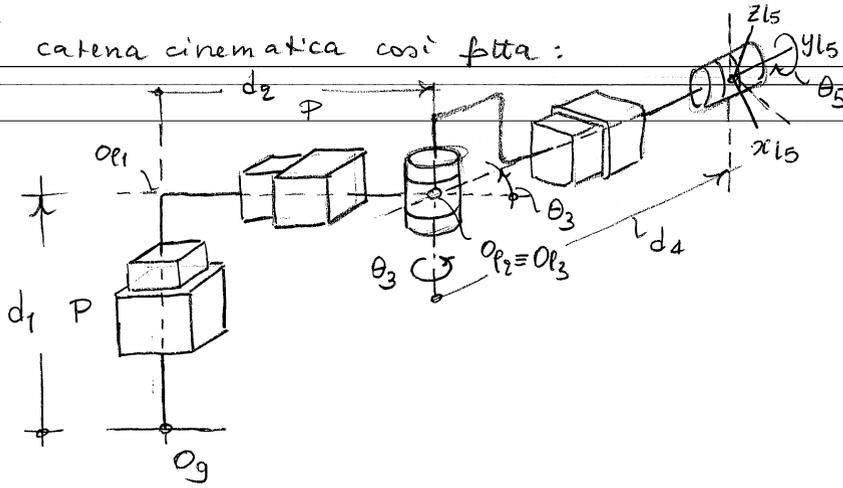
$$\underline{P}_g = d_{g15} + \underline{P}_{e5} \rightarrow \text{in comp.} \rightarrow \bar{P}_g = T_{g15} \bar{P}_{e5}$$

con

$$T_{g15} = T_{g1} T_{12} T_{23} T_{34} T_{45}$$

$$T_{g1} = T_{Tz}(d_1); T_{12} = T_{Tx}(d_2); T_{23} = T_{Rz}(\theta_3); T_{34} = T_{Ty}(d_4); T_{45} = T_{Rz}(\theta_5).$$

Effettuando composizioni in am corrente abbiamo di fatto parametrizzato una catena cinematica così fatta:

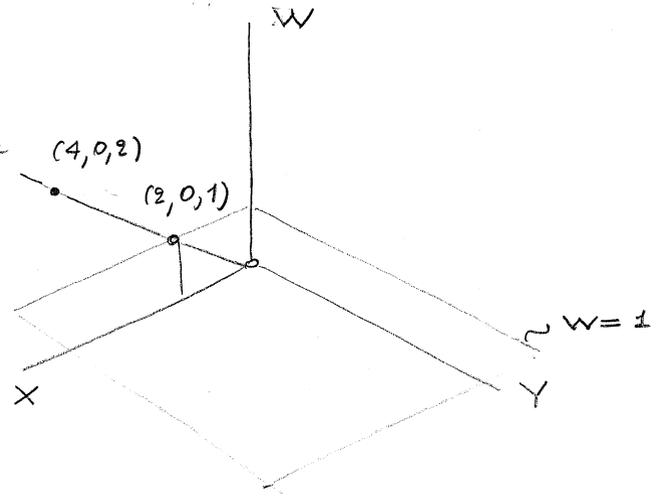


Perché coordinate omogenee?

Quando passiamo da (x, y) cartesiane nel 2D a $(x, y, 1)$ omogenee nel 2D stanno dicendo che vediamo il piano cartesiano come il piano $W=1$ nello spazio Euclideo 3D.

Allora ad un punto (X, Y, W) basta associare la sua proiezione verso l'origine $(X/W, Y/W, 1)$ su piano $W=1$.

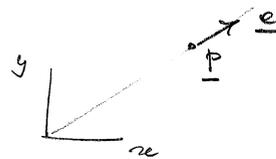
Se "fa fede" quello che succede su $W=1$, punti (X, Y, W) e $\lambda(X, Y, W) = (\lambda X, \lambda Y, \lambda W)$



sono perfettamente equivalenti

Allora la proprietà $(X, Y, W) \sim \lambda(X, Y, W)$ è OMogeneità e fornisce il nome alle coordinate.

Da punto $x = \frac{X}{W}$, $y = \frac{Y}{W}$



Dunque da $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}$ ora $\underline{p} \rightarrow \begin{bmatrix} \underline{p} \\ 1 \end{bmatrix} = \bar{\underline{p}}$

ma $\underline{p} = \underline{e} \|\underline{p}\|$ allora $\begin{bmatrix} \|\underline{p}\| \underline{e} \\ 1 \end{bmatrix} = \|\underline{p}\| \begin{bmatrix} \underline{e} \\ 1/\|\underline{p}\| \end{bmatrix}$

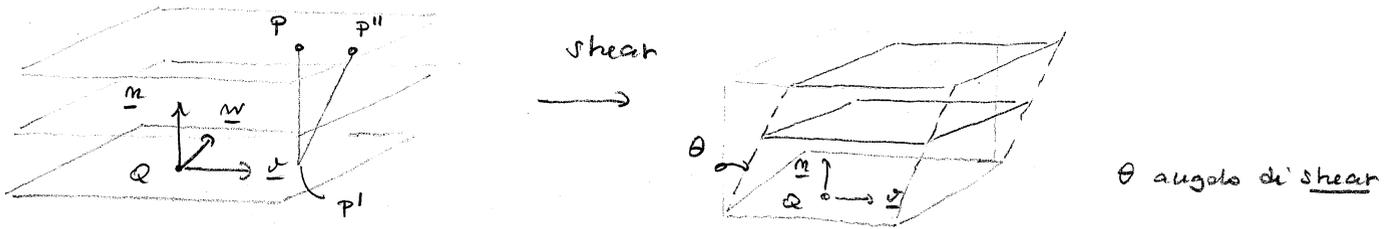
Se adesso voglio esprimere un punto all'infinito posso scrivere

$$\lim_{\|\underline{p}\| \rightarrow \infty} \bar{\underline{p}} = \lim_{\|\underline{p}\| \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \underline{p} \\ 1 \end{bmatrix} = \lim_{\|\underline{p}\| \rightarrow \infty} \|\underline{p}\| \begin{bmatrix} \underline{e} \\ 1/\|\underline{p}\| \end{bmatrix} = \left(\lim_{\|\underline{p}\| \rightarrow \infty} \|\underline{p}\| \right) \begin{bmatrix} \underline{e} \\ 0 \end{bmatrix}$$

e si definisce $\bar{\underline{p}}_{\infty} = \begin{bmatrix} \underline{e} \\ 0 \end{bmatrix}$ dunque un punto all'infinito ha solo una direzione

$$H = \begin{bmatrix} T_{3 \times 3} & d_{3 \times 1} \\ f_{1 \times 3} & s_{1 \times 1} \end{bmatrix}$$

Definisco una trasformazione di "shearing" (taglio) nello spazio in questo modo. Prendo un piano nello spazio identificato dal punto Q e dalla sua normale \underline{m} , prendo sul piano la direzione \underline{v} di shear in modo che lo spazio viene deformato così.



Allora un punto P viene mappato nel punto P'' .

$$\underline{QP} = d_{qp} \text{ di cui } \underline{QP}'' = \underline{QP} + \underline{PP}''$$

allora se $\underline{OP} = \underline{p}$

$$(\underline{m} + \underline{v} \tan \theta) p_m + \underline{v} p_v + \underline{w} p_w$$

$$\underline{p} = d_{oq} + \begin{bmatrix} \underline{m} & \underline{v} & \underline{w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_m \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix}$$

$$\underline{m} p_m + \underline{v} p_v + \underline{v} p_m \tan \theta + \underline{w} p_w$$

$$\underline{p}'' = d_{oq} + \begin{bmatrix} \underline{m} & \underline{v} & \underline{w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_m \\ p_v + p_m \tan \theta \\ p_w \end{bmatrix} =$$

$$= d_{oq} + \begin{bmatrix} \underline{m} + \underline{v} \tan \theta & \underline{v} & \underline{w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_m \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix}$$

dunque la trasformazione di shear è data da

$$\underline{p}'' - d_{oq} = \begin{bmatrix} \underline{m} + \underline{v} \tan \theta & \underline{v} & \underline{w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_m \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix}$$

con $\begin{bmatrix} p_m \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix}$ che sono coordinate in $\{S\}$

se prendo il piano per $\begin{bmatrix} \underline{m}^T \\ \underline{v}^T \\ \underline{w}^T \end{bmatrix}$ ottengo

$$\begin{bmatrix} \underline{m}^T \\ \underline{v}^T \\ \underline{w}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{m} + \underline{v} \tan \theta & \underline{v} & \underline{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{m}^T \underline{m} + \underline{m}^T \underline{v} \tan \theta & \underline{m}^T \underline{v} & \underline{m}^T \underline{w} \\ \underline{v}^T \underline{m} + \underline{v}^T \underline{v} \tan \theta & \underline{v}^T \underline{v} & \underline{v}^T \underline{w} \\ \underline{w}^T \underline{m} + \underline{w}^T \underline{v} \tan \theta & \underline{w}^T \underline{v} & \underline{w}^T \underline{w} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tan \theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il risultato della moltiplicazione di queste matrici per $\begin{bmatrix} p_m \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix}$ sono le nuove coordinate del vettore deformato che infatti vale

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tau \theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_m \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_m \\ p_m \tau \theta + p_v \\ p_w \end{bmatrix}$$

Queste trasformazioni sono nella forma attuale $\{S_e\}$. Se la voglio scrivere in $\{S_g\}$ sono andati da $\{S_g\}$ ad $\{S_e\}$ con rototraslazio.

in coords omogenee

$$H = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \tau \theta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] ; \quad \bar{p}_e^{(shear)} = \begin{bmatrix} p_m \\ p_m \tau \theta + p_v \\ p_w \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad \bar{p}_e = \begin{bmatrix} p_m \\ p_v \\ p_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

così che $\bar{p}_e^{(shear)} = H \bar{p}_e$

poi $\bar{p}_g = T_{gl} \bar{p}_e ; \quad \bar{p}_e = T_{gl}^{-1} \bar{p}_g$

Allora

$$\bar{p}_e^{(shear)} = H \bar{p}_e = H T_{gl}^{-1} \bar{p}_g$$

$$\bar{p}_g^{(shear)} = T_{gl} \bar{p}_e^{(shear)} = \underbrace{T_{gl} H T_{gl}^{-1}}_{\text{shear in } \{S_g\}} \bar{p}_g$$

$$T_{i-1,0}(\theta, d, a, \alpha) = \overbrace{T_{R_z}(\theta)} T_{T_z}(d) \overbrace{T_{T_x}(a)} T_{R_x}(\alpha)$$

$$T_{R_z}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_{T_z}(d) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{etc...}$$

Forma finale

$$T_{i-1,i} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\cos \alpha \sin \theta & \sin \alpha \sin \theta & a \cos \theta \\ \sin \theta & \cos \alpha \cos \theta & -\sin \alpha \cos \theta & a \sin \theta \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

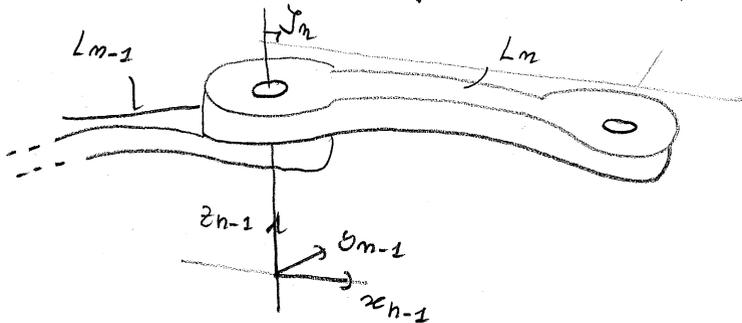
Quindi regole sono (oltre numerazioni)

- o) allineare gli assi z_i con l'asse del giunto J_{i+1} . La direzione positiva (verso) è scelta in modo arbitrario.
- o) gli assi z_i sono scelti come la perpendicolare comune a z_{i-1} (J_i) e z_i (J_{i+1}) il verso è da O_{i-1} a O_i . Cosa può andare storto?
 - J_i e J_{i+1} sono //, nel qual caso ci sono ∞ normali comuni \rightarrow scelgo generalmente quelle per cui $d=0$.
 - J_i e J_{i+1} si intersecano, allora O_{i-1} e O_i sono coincidenti ed allora è indefinito verso di z_i . Potrebbe essere $\underline{e}_i = \pm \frac{\underline{e}_{i-1} \times \underline{e}_i}{\sin(\alpha)}$
- o) il verso di z_i è stabilito dalla condizione che $\{S_i\}$ sia levogira.

Come si scelgono la $\{S_0\}$ e la $\{S_m\}$?

$\{S_0\}$ non ha giunto a monte per stabilità distorsione x_0 . Quindi si sceglie per convenienza.

$\{S_m\}$ non ha giunto a valle per stabilità z_m e neppure z_m !



Si sceglie z_m in modo che sia perpendicolare a z_{m-1} e z_m come direzione di approach.

Struttura della matrice per passare (come spostamento) da $\{S_0\}$ a $\{S_1\}$, o (come cambiamento di coordinate) da $\{S_1\}$ a $\{S_0\}$.

$${}^0T_1 = T_{tr}(z, d) T_{rot}(z, \theta) T_{tr}(x, a) T_{rot}(x, \alpha)$$

dove a, α, d, θ sono i parametri di Denavit-Hartenberg.

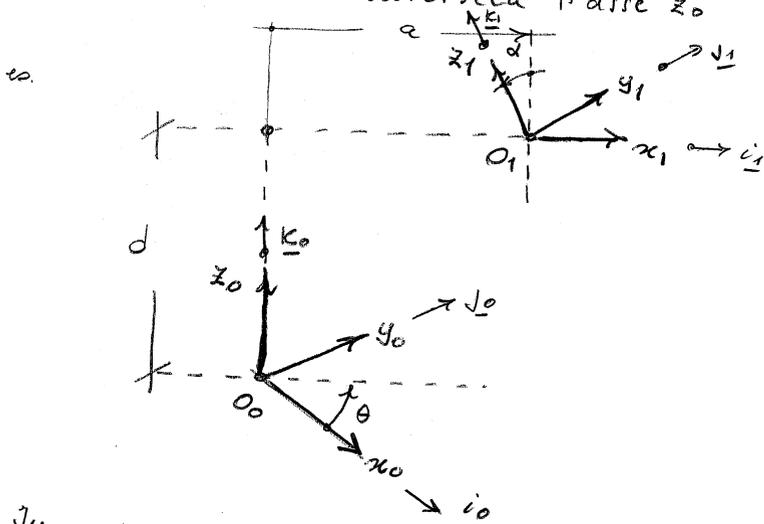
La forma generale della matrice di Denavit-Hartenberg risulta,

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta c\alpha & s\theta s\alpha & a c\theta \\ s\theta & c\theta c\alpha & -c\theta s\alpha & a s\theta \\ 0 & s\alpha & c\alpha & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dimostriamo che le seguenti condizioni DH1 e DH2 garantiscono che dati due frame $\{S_0\}$ ed $\{S_1\}$ $\exists!$ la trasformazione di D.-H. che ne esprime la postura relativa.

(DH 1) l'asse x_1 è ortogonale a z_0

(DH 2) l'asse x_1 interseca l'asse z_0



In sostanza, data una matrice omogenea che rappresenta la rototraslazione fra un $\{S_0\}$ ed un $\{S_1\}$ che verificano (DH1) e (DH2), ormai una 0A_1 numerica allora è possibile trovare a, α, d e θ tali che:

$${}^0T_1(a, \alpha, d, \theta) = {}^0A_1$$

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}$$

Supponiamo che 0A_1 abbia la struttura classica ${}^0A_1 = \left[\begin{array}{c|c} {}^0R_1 & {}^0d_1 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right]$

Se la (DH1) è verificata ossia x_1 è ortogonale a z_0 , allora fra i vettori \underline{i}_1 e \underline{k}_0 si ha $\underline{i}_1^T \underline{k}_0 = 0$. Se esprimiamo queste condizioni in $\{S_0\}$ allora

$$[\underline{i}_1]_0 [\underline{k}_0]_0 = 0 \text{ risulta}$$

$$[\underline{k}_0]_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; [\underline{i}_1]_0 = \begin{bmatrix} R_{11} \\ R_{21} \\ R_{31} \end{bmatrix}$$

Allora questa condizione risulta esplicitamente:

$${}^0\underline{c}_1^T {}^0\underline{k}_0 = [R_{11} \ R_{21} \ R_{31}] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = R_{31} = 0$$

Questa condizione implica che $R_{31} = 0$.

Inoltre la parte di rotazione dei pendenti solo delle 2 rotazioni $R_z(\alpha)$ e $R_z(\theta)$ quindi la 0R_1 in funzione dei pari di D.-H. risulta

$${}^0R_1 = R_z(\theta) R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \cos\alpha & \sin\theta \sin\alpha \\ \sin\theta & \cos\theta \cos\alpha & -\cos\theta \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Diunque dato che $R_{31} = 0$ la struttura torna con quella che esce da D.-H.

Inoltre eguagliando

$$\begin{bmatrix} R_{11} \\ R_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [R_{32} \ R_{33}] = [\sin\alpha \ \cos\alpha]$$

si determinano α e θ

Per dalle assunzioni (DH2) ora che z_0 interseca z_1 significa che per andare da O_0 ad O_1 sono viaggiare lungo z_0 e poi z_1 .

Allora

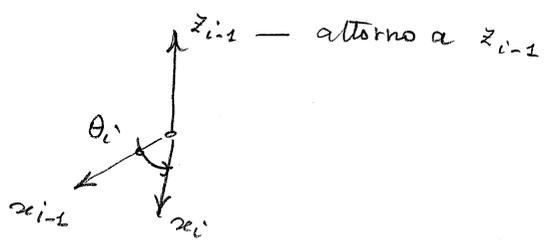
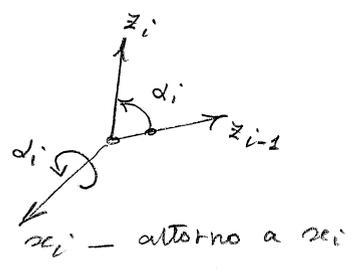
$${}^0\underline{d}_1 = d {}^0\underline{k}_0 + a {}^0\underline{c}_1 = d \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos\theta \\ a \sin\theta \\ d \end{bmatrix}$$

Diunque dall'eguaglianze di

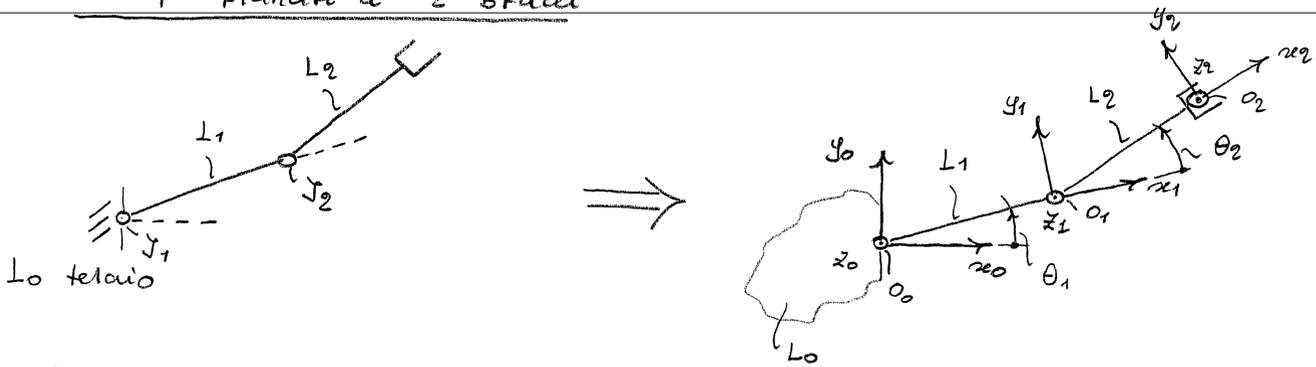
$$\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow \\ {}^0\underline{d}_1(3) = d & \text{e, nota } \theta, & {}^0\underline{d}_1(1,2) = \begin{bmatrix} a \cos\theta \\ a \sin\theta \end{bmatrix} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{determino } d & & \text{determino } a \end{matrix}$$

Diunque se sono verificate DH1 e DH2 allora $\exists!$ 0T_1 di D.-H. tali che ${}^0A_1 = {}^0T_1$.

Ricordarsi che al passo generico:



Mamp. planate a 2 bracci



numerazione DH: L_i collega sempre J_i e J_{i+1} , numero diute da L_0, L_1, L_2 , numero giunti J_1 e J_2 .

Assi di J_1 è z_0 , assi di J_2 è z_1 .

Origine di $\{S_1\}$ la pongo sul piano del braccio ed axe x_1 è determinato.

Scelti vetti uscenti del foglio per axe z_0 e z_1 , allora y_1 è determinato da $\{S_1\}$

tenna levogira. Per $\{S_0\}$ ho solo z_0 , scelgo O_0 in modo che $d_1=0$ e axe x_0

in modo che sia definita la direzione orizzontale preferita, y_0 viene da

conseguenze de $\{S_0\}$ levogira. Per $\{S_2\}$ non ho giunto a valle ma basta che scelga

$x_2 \perp$ a z_1 e che interseca z_1 . Origine per fare in modo che d_2 scelgo

O_2 sullo stesso piano di O_0 e O_1 .

Allora la tabella di Denavit-Hartenberg risulta:

Linke	a_i	α_i	d_i	θ_i
$\{S_0\} \rightarrow \{S_1\}$	1	a_1	0	θ_1^*
$\{S_1\} \rightarrow \{S_2\}$	2	a_2	0	θ_2^*

Dunque a partire dalle forma generale

$${}^i T_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si ottiene

$${}^0 T_1 = (\text{da 1ª riga della tabella}) = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & a_1 \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & a_1 \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1 T_2 = (\text{da 2ª riga della tabella}) = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & a_2 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & a_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

com'èché:

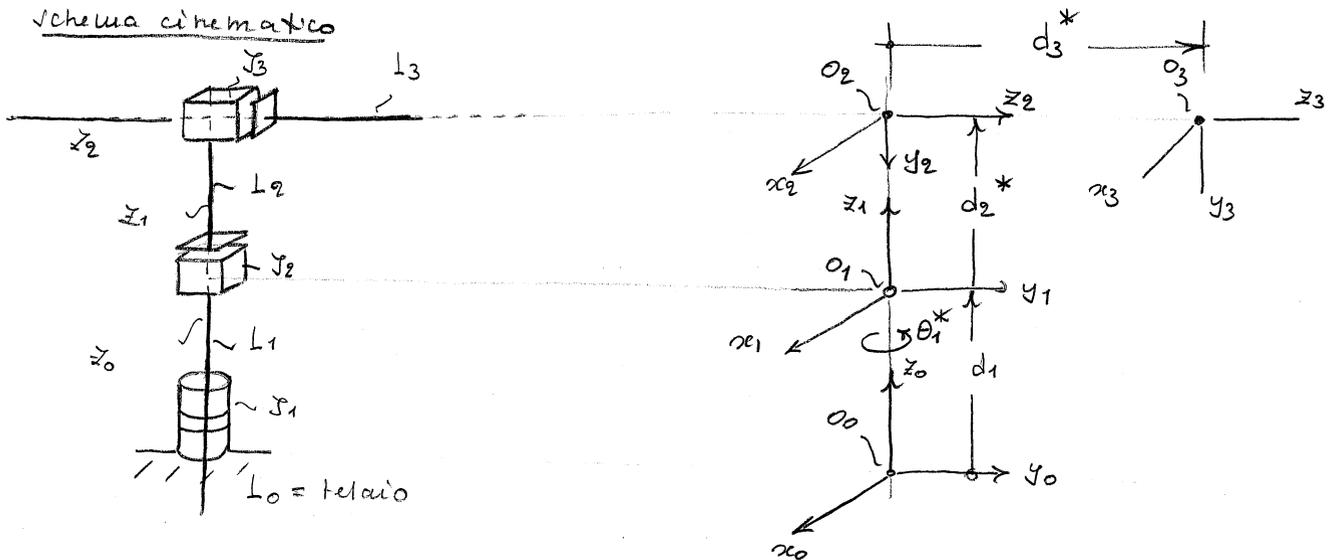
$${}^0T_2 = {}^0T_1 {}^1T_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con il ben noto significato delle porzioni di 0T_2

$${}^0T_2 = \begin{bmatrix} {}^0R_2 & | & {}^0d_2 \\ \hline 0^T & | & 1 \end{bmatrix}$$

Robot cilindrico a 3 bracci

Schema cinematico



In questo caso il unico origine che possa fissare è O_2 . $z_0 \equiv z_1$ com'èché non riesce a fissare O_1 . Anche direzione degli assi li stabilisce con una certa dose di arbitrarietà. Fissato z_1 verso l'alto e z_2 verso destra, fissa x_2 uscente com'èché da z_1 verso su z_2 ruotando di $d_2 = -\pi/2$ attorno a x_2 . Poi y_2 viene verso il basso. La O_1 la fissa all'alternativa del "centro" della coppia prismatica "forza di assi y_2 ". Prendo z_1 verso l'alto e x_1 uscente com'èché e $x_1 \equiv x_2$. Poi metto O_0 in basso "al suolo" con z_0 verso l'alto e x_0 allineato nella config. di riferimento con x_1 e y_0 da $\{S_0\}$ levogira.

Allora nel disegno identifico i vari parametri di Denavit-Hartenberg

Mentre per $\{S_3\}$ posso scegliere un frame traslato lungo z_2 di d_3^*

Basta che x_3 sia ortog. ed intersechi z_2 .

Segue la tabella di Denavit-Hartenberg, per queste scelte di assi ed origini.

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	0	d_1	θ_1^*
2	0	$-\pi/2$	d_2^*	0
3	0	0	d_3^*	0

Le singole matrici risultano (anche direttamente ad occhio)

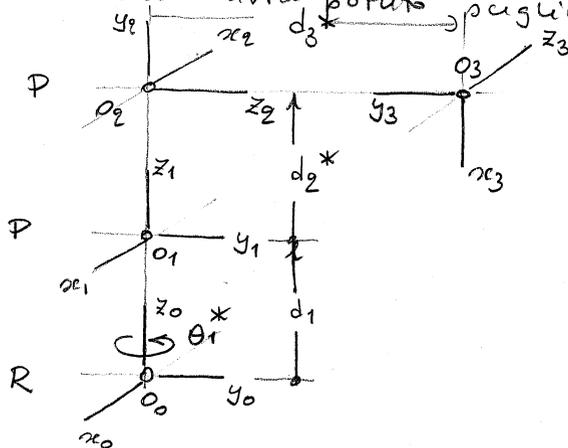
$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;$$

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;$$

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;$$

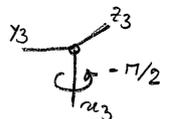
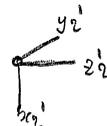
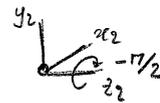
Allora ${}^0T_3 = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 = {}^0T_3(\theta_1, d_2, d_3)$

Vediamo come avrei potuto pagliarmi fra me altrimenti



In questo caso, ormai per queste scelte dei sistemi di riferimento, la tabella di D-H risulta

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	0	d_1	θ_1^*
2	0	$\pi/2$	d_2^*	π
3	0	$-\pi/2$	d_3^*	$-\pi/2$



Vediamo ancora un'altro caso

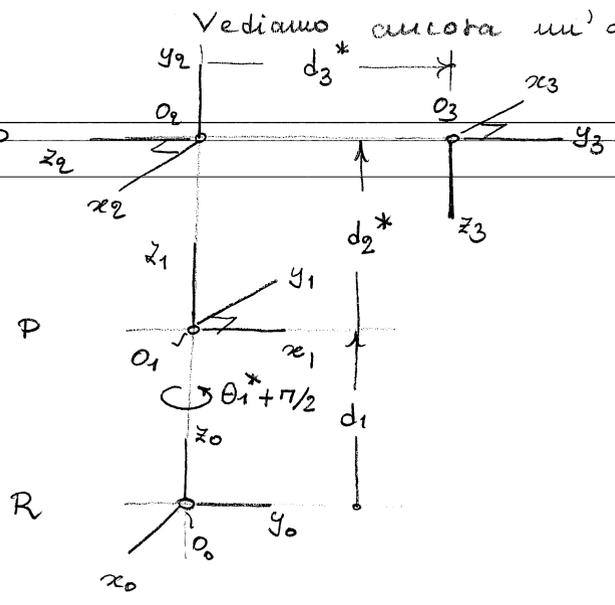
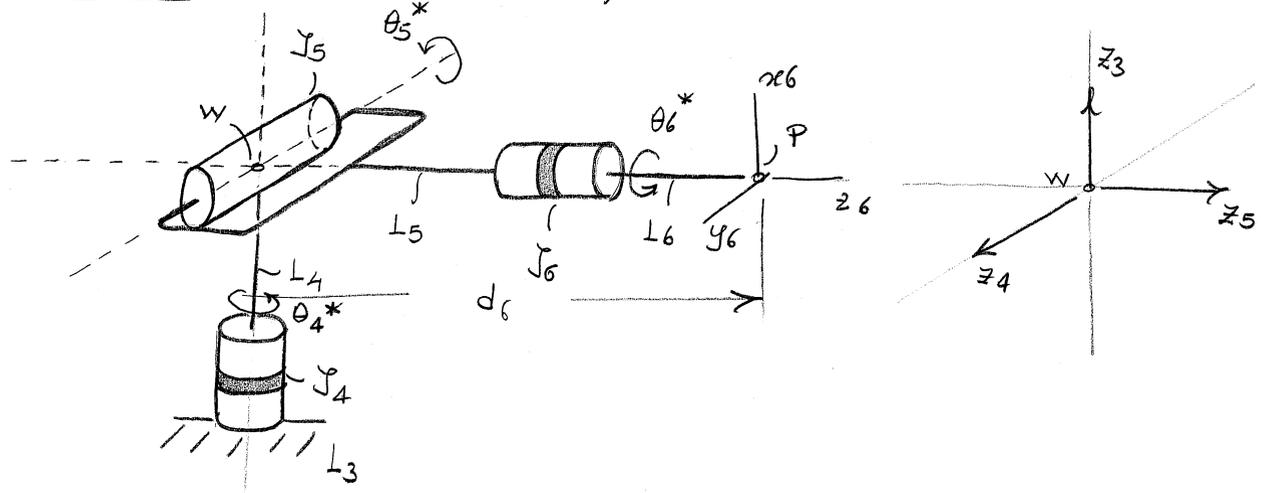


tabella di D-H in questo caso

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	0	d_1	$\theta_1^* + \pi/2$
2	0	$\pi/2$	d_2^*	$-\pi/2$
3	0	$-\pi/3$	d_3^*	π

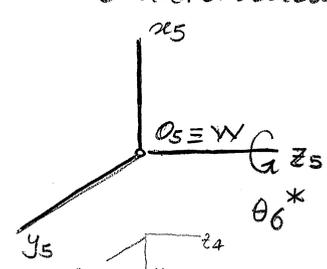
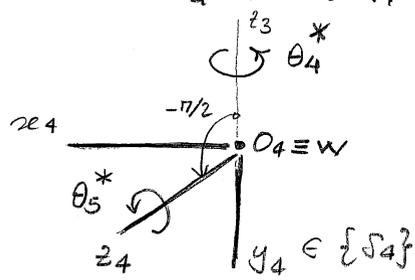
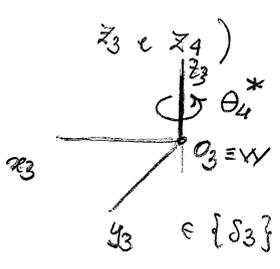
Altro caso

Polso sferico (spherical wrist)



hominous links di base come L_3 come le fermi a valle di tre moti (di già) ed i link sono L_4, L_5 ed L_6 .

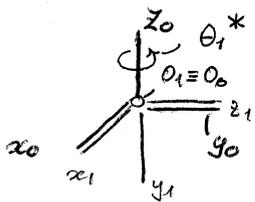
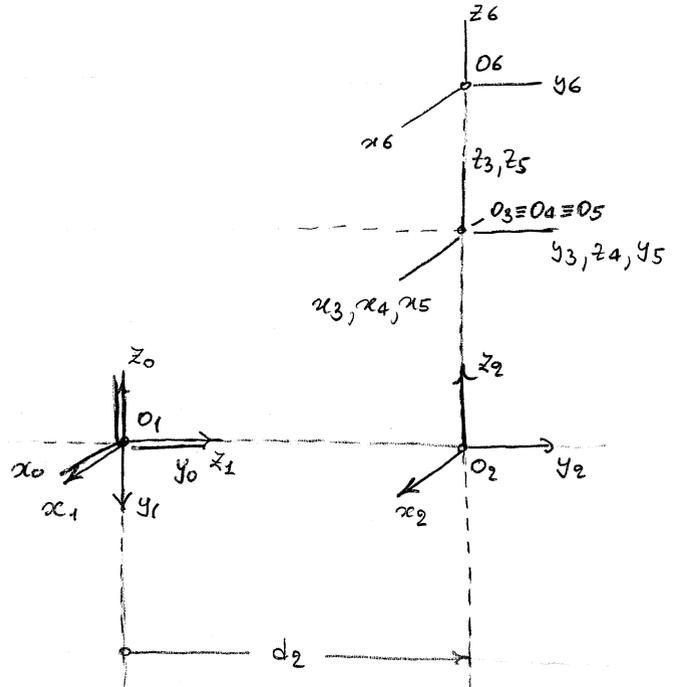
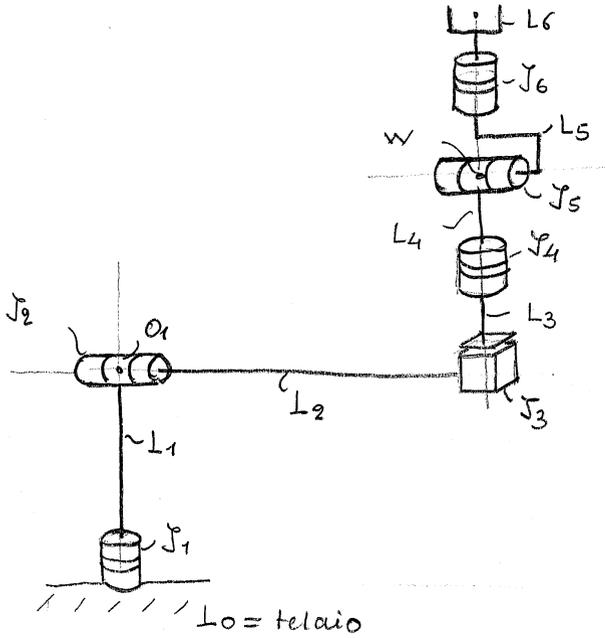
Per gli altri si può fissare z_3, z_4 e z_5 come in figura (in modo ^{nuovo} arbitrario) l'origine di $\{S_4\}$, ossia O_4 è in W (ossia nella intersezione fra



Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
$\{S_3\} \rightarrow \{S_4\}$	0	$-\pi/2$	0	θ_4^*
$\{S_4\} \rightarrow \{S_5\}$	0	$\pi/2$	0	$\theta_5^* - \pi/2$
$\{S_5\} \rightarrow \{S_6\}$	0	0	d_6	θ_6^*

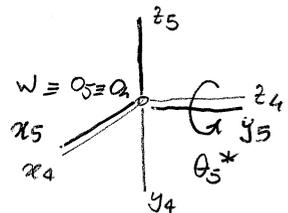
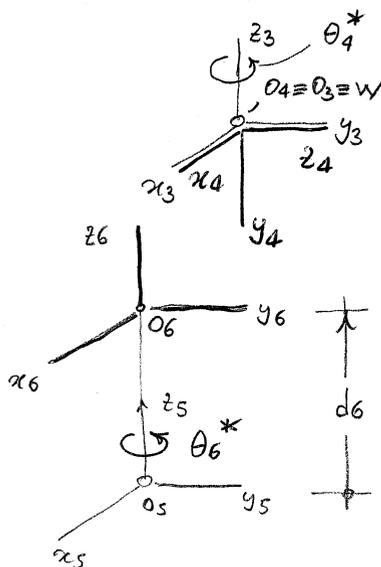
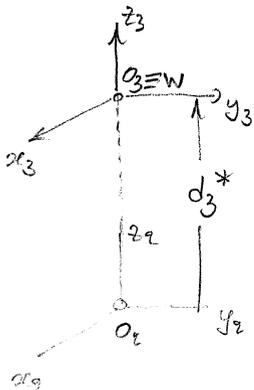
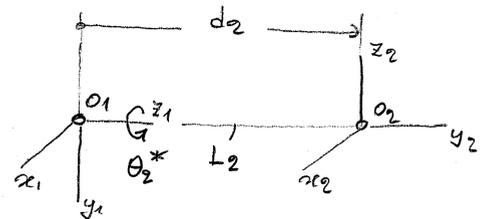
← attenzione all'offset di angolo per $\theta_5^* = \pi$ ma al fatto che per $\theta_5^* = 0$ gli assi z_4 e z_5 non sono allineati ed equiverti.

Manipolatore di Stanford



$\{S_0\}$ fisso, e telaio

$\{S_1\}$ e L_1 , O_1 e z_1 su e dell'asse giunto a valle (y_2)



Allora per queste scelte dei sistemi di riferimento si ha:

Tabella di D-H per manipolatore di Stanford

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i	
$\{S_0\} \rightarrow \{S_1\}$	1	0	$-\pi/2$	0	θ_1^*
$\{S_1\} \rightarrow \{S_2\}$	2	0	$\pi/2$	d_2	θ_2^*
$\{S_2\} \rightarrow \{S_3\}$	3	0	0	d_3^*	0
$\{S_3\} \rightarrow \{S_4\}$	4	0	$-\pi/2$	0	θ_4^*
$\{S_4\} \rightarrow \{S_5\}$	5	0	$\pi/2$	0	θ_5^*
$\{S_5\} \rightarrow \{S_6\}$	6	0	0	d_6	θ_6^*

dunque la trasformazione complessiva risulta

$${}^0T_6(\theta_1, \theta_2, d_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6) = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6$$

"Rules of thumb" per fissare frame di Denavit-Hartenberg ed estrarre i parametri da mettere in tabella.

- 1) Fissare assi z_{i-1} come assi dei giunti J_i (z_0 è axe di J_1)
- 2) Fissare x_i in modo che sia possibile sovrapporre z_{i-1} a z_i ruotando di α_i attorno a x_i
- 3) Stare attenti al fatto che se $\theta_i = 0$, $x_{i-1} \equiv x_i$
- 4) d_i è la componente di $O_{i-1}O_i$ lungo z_{i-1}
 a_i è la componente di $O_{i-1}O_i$ lungo x_i

Cinematica diretta / inversa.

con Denavit-Hartenberg definiamo

$$T_{0,m}(\underline{q}) = T_{0,m}(q_1, q_2, \dots, q_m) = T_{0,1}(q_1) T_{1,2}(q_2) \dots T_{m-1,m}(q_m)$$

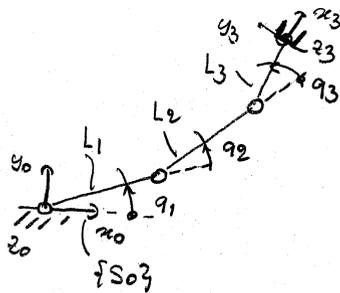
con $q_i = \begin{cases} \theta_i, & \text{giunto R} \\ d_i, & \text{giunto P} \end{cases}$ in modo indifferente.

Se vogliamo aggiustare terra su E-E possiamo introdurre una $T_{m,e}$ (costante), mentre volendo cambiare postura in blocco (globalmente) ad un robot possiamo introdurre una $T_{b,0}$ (costante) tali che:

nuova matrice omogenea per descrivere robot risulta

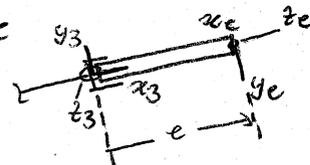
$$T_{b,e}(\underline{q}) = \begin{matrix} \text{globale} & & \text{locale rispetto a link m} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_{b,0} & T_{0,m}(\underline{q}) & T_{m,e} \end{matrix}$$

es.

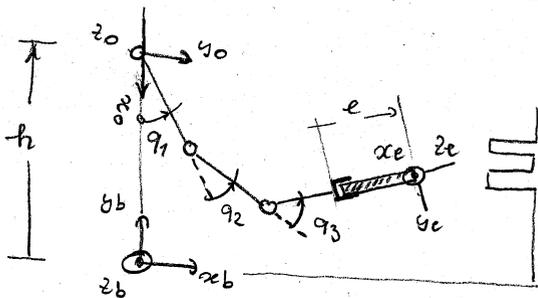


ho una $T_{0,3}(q_1, q_2, q_3)$

eventualmente



vc voglio descrivere una catena cinematica che costi:



allora $T_{b,0} = \begin{bmatrix} R_z(-\pi/2) & \begin{bmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$

$$T_{3,e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \begin{bmatrix} e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 & -1 & 0 & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 1 & 0 & 0 & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0^T & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi $T_{b,e}(q_1, q_2, q_3) = T_{b,0} T_{0,3}(\underline{q}) T_{3,e}$

III Allora pb. cinematico diretto \rightarrow si può det. una fine $\underline{\Lambda}(\underline{q})$ per passare dalle variabili di giunto $\underline{q} \in \mathbb{R}^n$ (n. g.d.l. o dof del manip.) a posizione/orientaz. dell'E-E, ossia $T_{b,e}(\underline{q})$. Se si parametrizza la $T_{b,e}$ ossia si usano param. quelli traslazione origine terra $\{S_e\}$ rispetto a $\{S_b\}$ si vede che

$$\underline{\Lambda} : \mathcal{Q} \rightarrow SE(3)$$

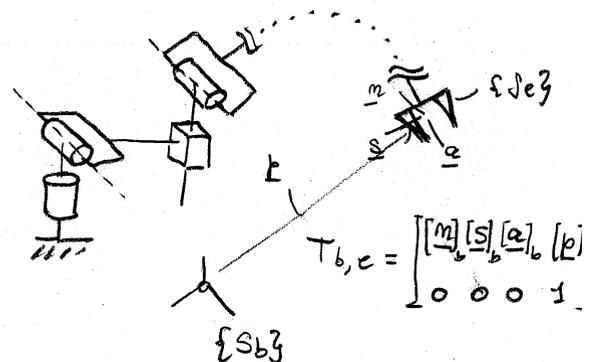
$$\underline{q} \mapsto \underline{\Lambda}(\underline{q}) = \underline{x_e} \in SE(3) \quad \text{con } \underline{q} \in \mathcal{Q}$$

\uparrow parametrizzazione

III Problema cinematico inverso sarà descrivibile come

$$\underline{\Lambda}^{-1} : SE(3) \rightarrow \mathcal{Q}$$

$$\underline{x_e} \mapsto \underline{\Lambda}^{-1}(\underline{x_e}) = \underline{q} \in \mathcal{Q}$$



Il problema cin. diretto per una catena cin. versatile si riduce al calcolo della $T_{b,e}(q)$ o $T_{o,m}(q)$
 se $T_{b,o} = T_{m,e} = I_{4 \times 4}$.

Pb. cin. inverso in generale dice: data una $H \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ omogenea tale che $H \in SE(3)$

$$H = \begin{bmatrix} R & d \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$$

trovare (se esiste/esistono) le soluzioni di questo set di equazioni non lineari nelle q

$$T_{o,m}(q_1, q_2, \dots, q_m) = H$$

↙ assegnate

allora

$$\begin{cases} R_{o,m}(q) = R \\ d_{o,m}(q) = d \end{cases} \begin{array}{l} \text{sono 9 equazioni} \\ \text{sono in generale 12 eq. non lineari nelle } q \in \mathbb{R}^m \end{array}$$

Soluzioni possono essere: una unica, nessuna, no finito, no infinito.

Approccio numerico (se uno non ha altre risorse) e scrivere

$$\underline{F}(q) = \underline{0} \in \mathbb{R}^6$$

consideriamo un caso semplice in cui $q \in \mathbb{R}^6$ (es. manip. di Stanford)

allora numericamente una parte da un "initial guess" q_0 e dice

$$\underline{F}(q_0 + \Delta q) \approx \underline{F}(q_0) + \left. \frac{\partial \underline{F}(q)}{\partial q} \right|_{q_0} \Delta q \quad \text{con } \frac{\partial \underline{F}}{\partial q} =: \underline{F}_{,q} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$$

e cercare dove questa approx si annulla cioè

$$\underline{F}(q_0) + \underline{F}_{,q}(q_0) \Delta q = \underline{0} \quad \rightarrow \quad \Delta q = -[\underline{F}_{,q}(q_0)]^{-1} \underline{F}(q_0)$$

questo Δq è tale che posso scrivere $q_1 = q_0 + \Delta q$

Dato che ho annullato l'approx. lineare, $\underline{F}(q_1) \neq \underline{0}$ ed allora ripeto la procedura per cui al passo generico k , partendo da q_k

$$\Delta q_k \approx -[\underline{F}_{,q}(q_k)]^{-1} \underline{F}(q_k)$$

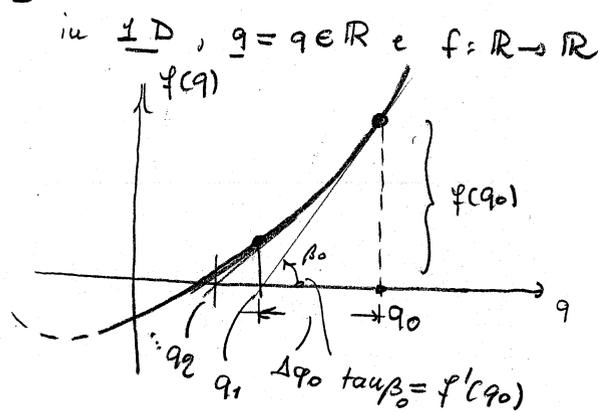
$$q_{k+1} = q_k + \Delta q_k$$

con $k = 0, 1, \dots, \infty$ fino a convergenza

$$f(q + \Delta q) \approx f(q_0) + f'(q_0) \Delta q_0 = 0$$

$$\hookrightarrow \Delta q_0 = -\frac{f(q_0)}{f'(q_0)}$$

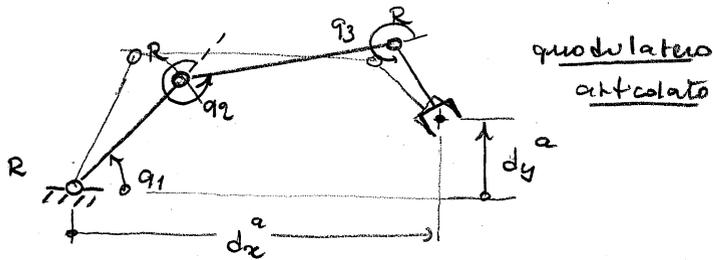
metodo di Newton-Raphson



Nota bene che c'è influenza della scelta dell'initial guess sulla soluzione trovata.

Inoltre potrebbero esistere soluzioni multiple in numero finito o infinito.

es. RRR con solo vincolo di posizione su EE



$$\begin{cases} d_x(q_1, q_2, q_3) = d_x^a \\ d_y(q_1, q_2, q_3) = d_y^a \end{cases}$$

⇓

$$\begin{cases} d_x(q_1, q_2, q_3) - d_x^a =: F_1(q_1, q_2, q_3) = 0 \\ d_y(q_1, q_2, q_3) - d_y^a =: F_2(q_1, q_2, q_3) = 0 \end{cases}$$

ovvia diventa una

$$F(\underline{q}) = \underline{0} \quad \text{con } F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$\underline{q} \in \mathbb{R}^3$

allora uno si chiede ad esempio, data una soluzione, come trovare (se esistono) altre soluzioni vicine. Qui interviene teorema di Dini. Cosa dice, come si applica?

Consideriamo $F(q_1, q_2, q_3) = \underline{0}$ alle due rotture pilotare le soluzioni, cioè il momento dell'RRR a posizione di EE fermo muovendo q_1 .

allora chiamiamo

$$\mathbb{R}^1 \ni \underline{x} = q_1; \quad \underline{y} = (q_2, q_3) = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

$F: \mathbb{R}^{1+2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ derivabile con continuità ed \mathbb{R}^{1+2} ha coords. (x_1, y_1, y_2)

e sia $x^0 \in \mathbb{R}^1, \underline{y}^0 \in \mathbb{R}^2$ e $(x^0, \underline{y}^0): F(x^0, \underline{y}^0) = \underline{0}$

Allora se $\underline{F}_{,y}(x^0, \underline{y}^0) = \frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \Big|_{(x^0, \underline{y}^0)} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ è invertibile

esiste aperto $U \subset \mathbb{R}$ contenente x^0 ed aperto $V \subset \mathbb{R}^2$ contenente \underline{y}^0 ed una $\underline{g}: U \rightarrow V$ tale che

$$\{(x, \underline{g}(x))\} = \{(x, \underline{y}): F(x, \underline{y}) = \underline{0}\} \cap (U \times V)$$

ovvia che la funzione def dip funz $\underline{y} = \underline{g}(x)$ in $U \times V$

Poi essendo

$$F(x, \underline{g}(x)) = \underline{0} \quad \text{allora derivando } \frac{D}{Dx} \text{ si ha:}$$

$$\frac{DF}{Dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \frac{d\underline{y}}{dx} = \underline{0} \rightarrow \frac{d\underline{y}}{dx} = - \left[\frac{\partial F}{\partial \underline{y}} \right]^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{y}}{dx} &\in \mathbb{R}^{2 \times 1} \\ \frac{\partial F}{\partial \underline{y}} &\in \mathbb{R}^{2 \times 2} \\ \frac{\partial F}{\partial x} &\in \mathbb{R}^{2 \times 1} \end{aligned}$$

Esempio:

$$a_1 \begin{bmatrix} c q_1 \\ s q_1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} c(q_1+q_2) \\ s(q_1+q_2) \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} c(q_1+q_2+q_3) \\ s(q_1+q_2+q_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}$$

$$\underline{F}(q_1, q_2, q_3) = \begin{bmatrix} a_1 c q_1 + a_2 c(q_1+q_2) + a_3 c(q_1+q_2+q_3) - d_x \\ a_1 s q_1 + a_2 s(q_1+q_2) + a_3 s(q_1+q_2+q_3) - d_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{F}(x, y_1, y_2) = \begin{bmatrix} a_1 \cos x + a_2 \cos(x+y_1) + a_3 \cos(x+y_1+y_2) - d_x \\ a_1 \sin x + a_2 \sin(x+y_1) + a_3 \sin(x+y_1+y_2) - d_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

allora:

$$\frac{\partial \underline{F}}{\partial x} = \begin{bmatrix} -a_1 \sin x + a_2 \sin(x+y_1) - a_3 \sin(x+y_1+y_2) \\ a_1 \cos x + a_2 \cos(x+y_1) + a_3 \cos(x+y_1+y_2) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \underline{F}}{\partial y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}$$

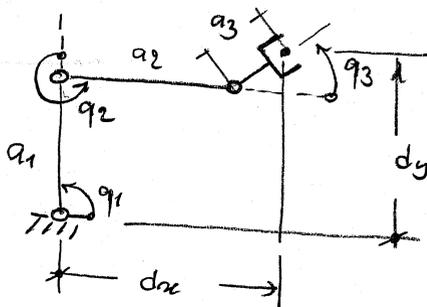
$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1} = -a_2 \sin(x+y_1) - a_3 \sin(x+y_1+y_2)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_2} = -a_3 \sin(x+y_1+y_2)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_1} = a_2 \cos(x+y_1) + a_3 \cos(x+y_1+y_2)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_2} = a_3 \cos(x+y_1+y_2)$$

Allora



$$\left. \begin{aligned} d_x &= a_2 + a_3 \cos(\pi/4) \\ d_y &= a_1 + a_3 \sin(\pi/4) \end{aligned} \right\} \text{costanti}$$

$$x^0 = q_1^0 = \pi/2$$

$$\underline{y}^0 = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2^0 \\ q_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\pi/2 \\ \pi/4 \end{bmatrix}$$

allora

$$\begin{cases} d_x = a_2 + a_3 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ d_y = a_1 + a_3 \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

è chiaro che $\underline{F}(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}) = \underline{0}$. Inoltre

$$\frac{\partial \underline{F}}{\partial y} \Big|_{(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})} = \begin{bmatrix} -a_3/\sqrt{2} & -a_3/\sqrt{2} \\ a_2 + \frac{a_3}{\sqrt{2}} & \frac{a_3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\text{Det} \left(\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{y}} \right) \Big|_{(\pi/2, -\pi/2, \pi/4)} = \frac{a_2 a_3}{\sqrt{2}} \neq 0 \quad \text{con } a_2, a_3 > 0.$$

Quindi localmente (intorno a $(\pi/2, -\pi/2, \pi/4)$) si ha una dip. funzionale di \underline{y} data
 omnia si ha $\underline{y} = \underline{y}(\alpha)$, omnia $q_2(q_1)$ e $q_3(q_1)$.

$$\text{Inoltre} \quad \frac{d\underline{y}}{d\alpha} = - \left[\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{y}} \right]^{-1} \frac{\partial \underline{F}}{\partial \alpha} = \begin{bmatrix} -\frac{a_2 + a_1 \csc(\gamma_2) \sin(\gamma_1 + \gamma_2)}{a_2} \\ a_1 \csc(\gamma_2) \left(\frac{\sin \gamma_1}{a_3} + \frac{\sin(\gamma_1 + \gamma_2)}{a_2} \right) \end{bmatrix}$$

e localmente

$$\frac{d\underline{y}}{d\alpha} \Big|_{(\pi/2, -\pi/2, \pi/4)} = \begin{bmatrix} -\frac{a_2 - a_1}{a_2} \\ -\sqrt{2} a_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2} a_2} + \frac{1}{a_3} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2'(q_1) \\ q_3'(q_1) \end{bmatrix} \Big|_{(\pi/2, -\pi/2, \pi/4)}$$

Nota bene che questo teorema ci dice che le $q_2(q_1)$ e $q_3(q_1)$ esistono ma non ci dice
come trovarle!

Numericamente posso trovare $q_2(q_1)$ e $q_3(q_1)$ con Newton-Raphson.

es. partendo da $\alpha^0 = \pi/2$, cambio α (var. indep.) e voglio che valga $\bar{\alpha} = 110^\circ \approx 1.916$

Allora bloccato $\bar{\alpha}$ itero così

$$\underline{y}^0 = \begin{bmatrix} -\pi/2 \\ \pi/4 \end{bmatrix}$$

$$\Delta \underline{y}_k = - \left[\underline{F}_{, \underline{y}}(\bar{\alpha}, \underline{y}_k) \right]^{-1} \underline{F}(\bar{\alpha}, \underline{y}_k)$$

$$\underline{y}_{k+1} = \underline{y}_k + \Delta \underline{y}_k$$

, $k = 0, 1, \dots$, ... fino a convergenza

es di iterazione

partendo da $\underline{y}_0^0 = \begin{bmatrix} -\pi/2 \\ \pi/4 \end{bmatrix}$ che è soluzione di $\underline{F}(\alpha^0, \underline{y}^0) = \underline{0}$ con $\alpha = \alpha^0$, cerco

quale \underline{y} è associato a $\bar{\alpha}$ e trovo:

$$\underline{y}^0 = \begin{bmatrix} -1.5708 \\ 0.7853 \end{bmatrix}; \quad \underline{y}^1 = \underline{y}^0 + \Delta \underline{y}^0 = \begin{bmatrix} -1.57409 \\ 0.449354 \end{bmatrix}; \quad \underline{y}^2 = \underline{y}^1 + \Delta \underline{y}^1 = \begin{bmatrix} -1.54184 \\ 0.314061 \end{bmatrix};$$

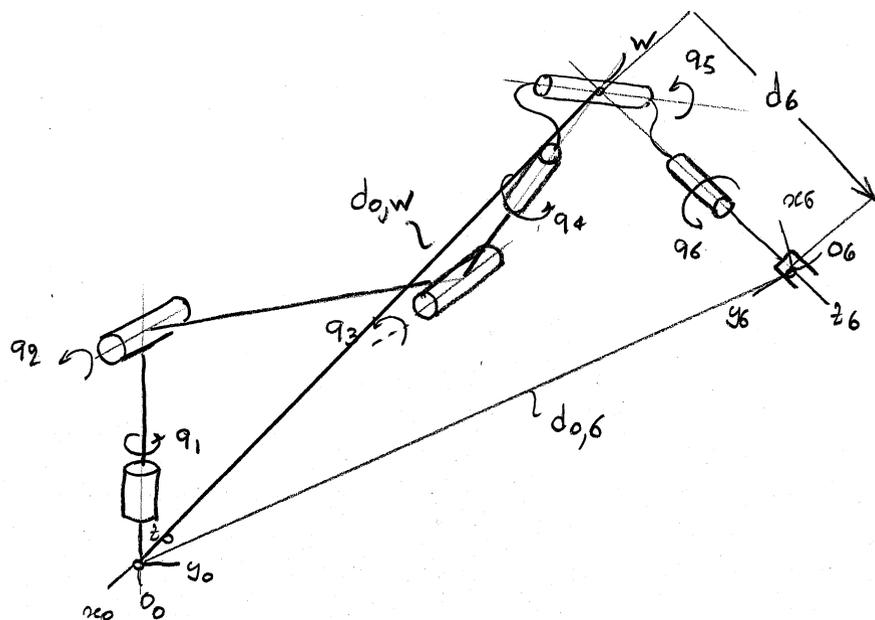
$$\underline{y}^3 = \begin{bmatrix} -1.53563 \\ 0.285526 \end{bmatrix}; \quad \underline{y}^4 = \begin{bmatrix} -1.53568 \\ 0.284124 \end{bmatrix}; \quad \underline{y}^5 = \begin{bmatrix} -1.53567 \\ 0.284120 \end{bmatrix}$$

$$\text{con } \underline{F}(\bar{\alpha}, \underline{y}^0) = \begin{bmatrix} -0.0632005 \\ 0.059375 \end{bmatrix}; \quad \underline{F}(\bar{\alpha}, \underline{y}^1) = \begin{bmatrix} -0.0107429 \\ -0.00950795 \end{bmatrix}$$

$$\dots \underline{F}(\bar{\alpha}, \underline{y}^5) = \begin{bmatrix} -1.1068 \cdot 10^{-12} \\ -3.56043 \cdot 10^{-13} \end{bmatrix}$$

Questo per ciò che concerne soluzioni numeriche del problema cinematico
 inverso. Per particolari situazioni si riesce a determinare una soluzione
 analitica ovvero in forma chiusa (closed form)

Caso particolare di quando si ha un robot a 6 g.d.l. con polso sferico
 esempio un robot antropomorfo, con polso sferico



In generale si deve imporre che, data postura della terna EE

$$H = \begin{bmatrix} R & | & d \\ \hline 0 & I & | & 1 \end{bmatrix}, \text{ onia } R \text{ e } d \text{ desiderate, sia}$$

$$\begin{cases} R_{0,6}(q_1, \dots, q_6) = R \\ d_{0,6}(q_1, \dots, q_6) = d \end{cases} \quad R = \begin{bmatrix} m & s & e \\ x_6 & | & y_6 \\ & & z_6 \end{bmatrix}$$

- 1) Si calcola posizione del centro del polso che deriva da aver specificato la terna EE questa sarà $p_w = d - a d_6$;
- 2) Dato che gli angoli del polso q_4, q_5 e q_6 non influenzano la posizione del centro del polso p_w , allora p_w lo deve ottenere mediante la struttura portante perciò risolve $p_w = d_{0,3}(q_1, q_2, q_3)$ e determino \bar{q}_1, \bar{q}_2 e \bar{q}_3
- 3) Questa soluzione costa anche una orientazione associata che è $R_{0,3}(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3)$.
- 4) Dato che alla fine deve avere $R_{0,6}(q_1, \dots, q_6) = R$ ma
 $\underbrace{R_{0,3}(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3)}_d \underbrace{R_{3,6}(q_4, q_5, q_6)}_{\text{a' già bloccata}} = R \rightarrow$ determino rotazione residua da far eseguire al polso
 $R_{3,6}(q_4, q_5, q_6) = R_{0,3}^T(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3) R$
 e determino $\bar{q}_4, \bar{q}_5, \bar{q}_6$

Allora problema risulta di accoppiato poi risolvo prima nelle (q_1, q_2, q_3) per posizionare il centro del bobo e poi determino le (q_4, q_5, q_6) delle stazioni residue del bobo per avere completamente la postata cercata

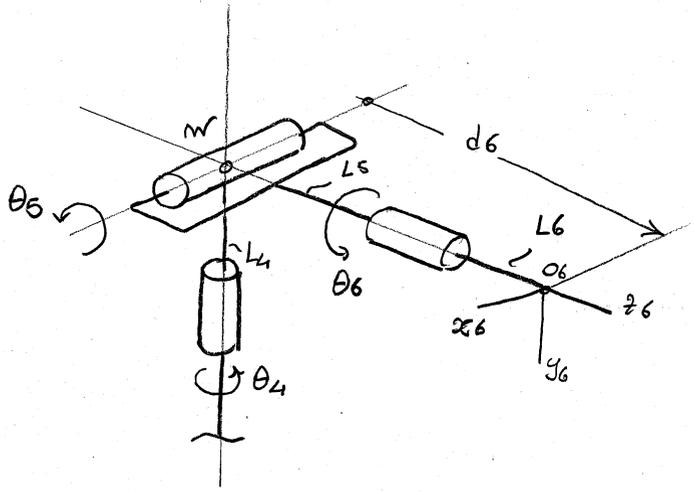
Soluzione posizionamento del bobo sferico pu per manip. antipomotorfo (vedi slide)

Soluzione (a rulli) del bobo sferico una volta nota la $R_{3,6}$ da ottenere.

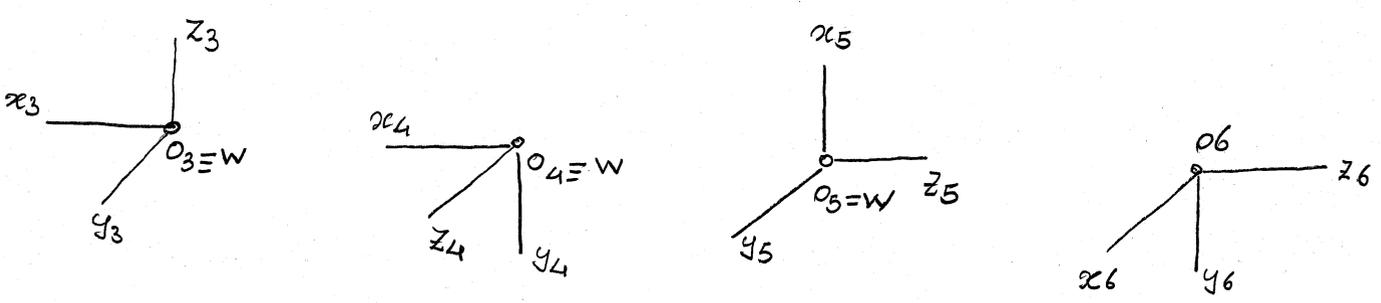
Nota che la $R_{3,6}(q_4, q_5, q_6)$ e' equivalente alla $RZYX(q_4, q_5, q_6)$

per convenzione di D.H. quindi le formule della cinematica inversa sono quelle viste quando e' stata fatta param. di $SO(3)$.

 Attenzione: discorso su convenzione D.H. e config. iniziale e quello che NON c'è scritto sui libri



con scelta

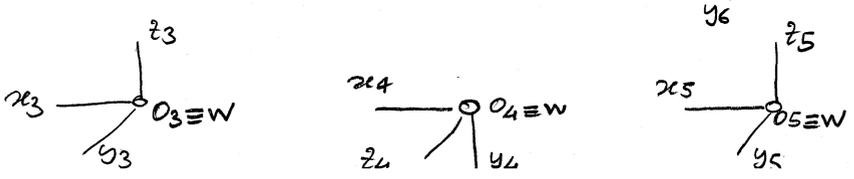


e tabella dati

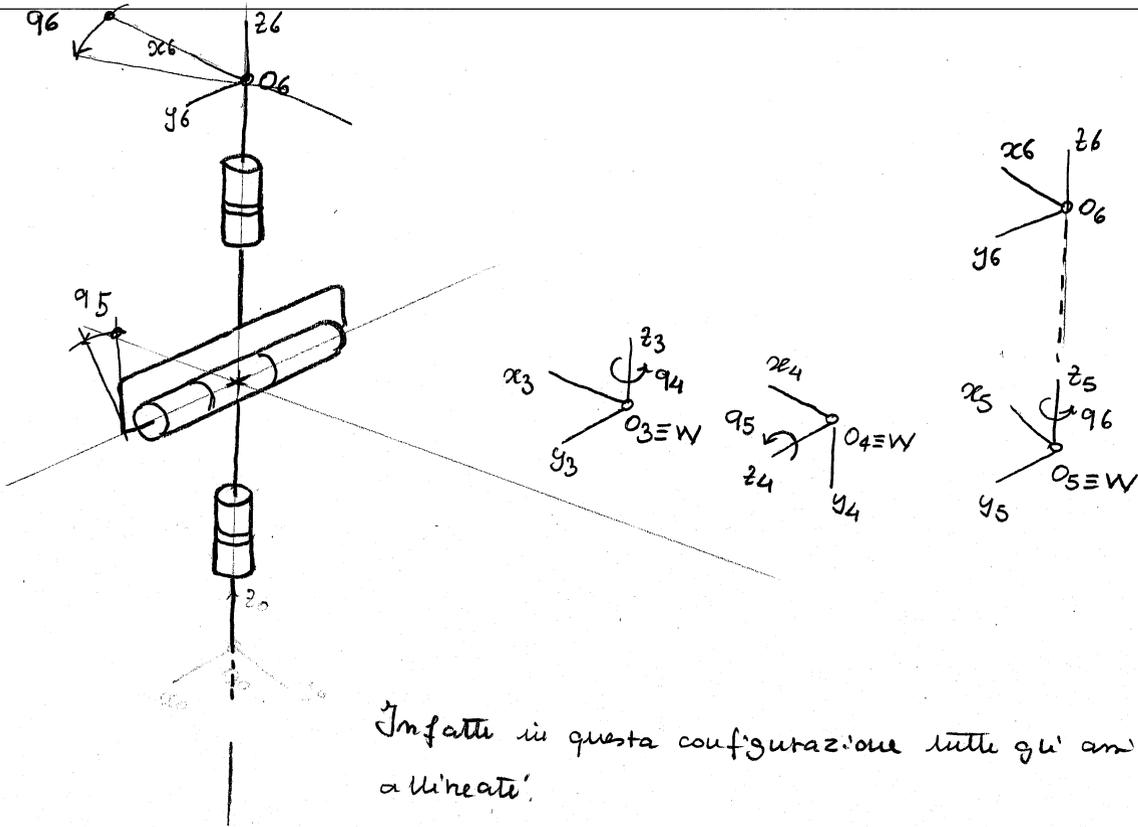
Link	a	α	d	θ	$\theta_{rif.}$
4	0	$-\pi/2$	0	θ_4	0
5	0	$\pi/2$	0	θ_5	$-\pi/2$
6	0	0	d_6	θ_6	$\pi/2$

aggiungo una colonna alla tabella per ricordarmi che nelle config. disegnata, con quei θ senza offset, ci sono per $\theta = \theta_{rif.}$

Per $\theta = 0$ sono medie costi:



Ciò per $\theta = 0$ il bobo è in questa config.

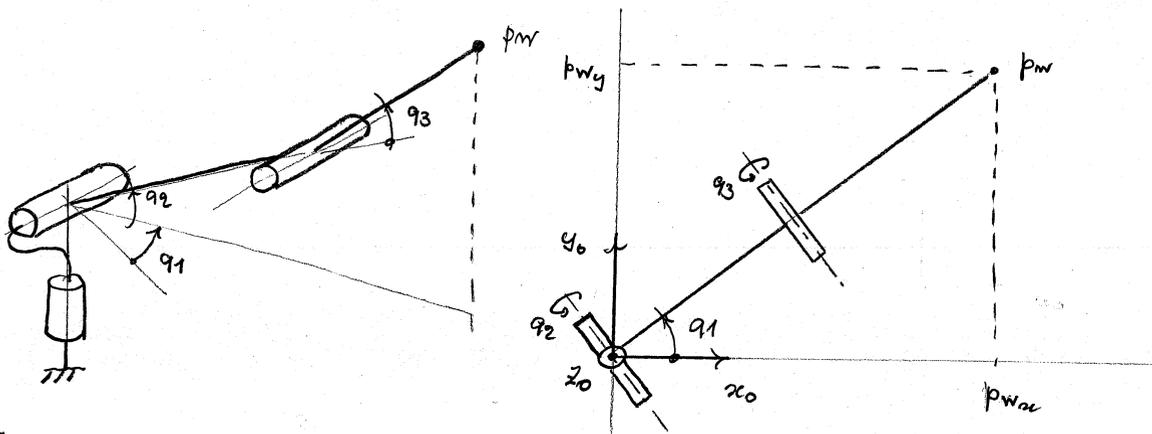


Notate che le rotazioni attorno agli assi z_3, z_4 e z_5 degli angoli q_4, q_5 e q_6 ossia la

$$R_{3,6}(q_4, q_5, q_6) = R_{3,4}(q_4) R_{4,5}(q_5) R_{5,6}(q_6)$$

corrisponde ad una $R_{ZYZ}(q_4, q_5, q_6)$ ossia attorno ad assi consecutivi $3, 2, 3$ se letti nella terna $\{S_3\}$.

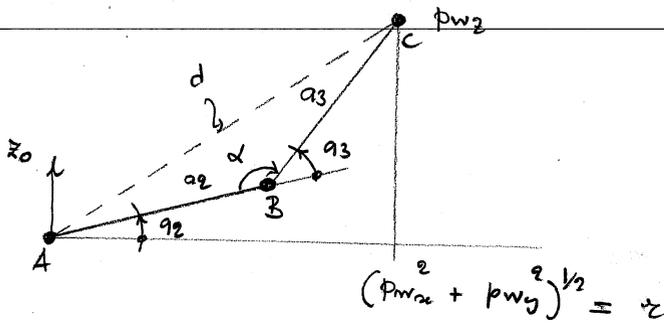
Posizionamento del centro del bobo p_w nel manipolatore antropomorfo.



Dalle proiezioni sul piano x_0, y_0 si ha

$$q_1 = \arctan(p_{wy}, p_{wx}) \quad \text{oppure} \quad q_1 = q_1 + \pi.$$

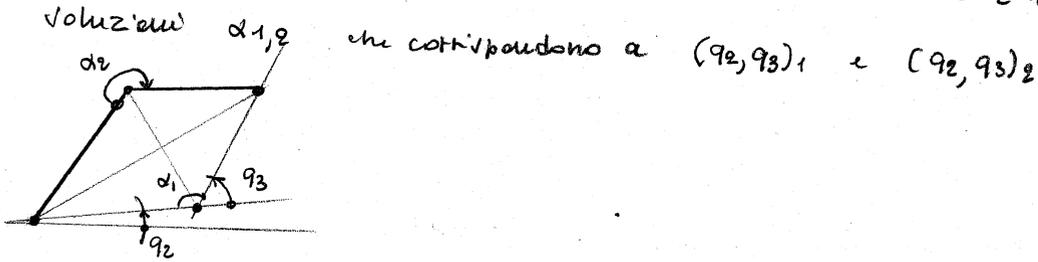
Una volta determinata soluzione per q_1 , la struttura risulta planare negli angoli q_2 e q_3 .
 Ora determinate q_2 e q_3 tali per cui:



La distanza $d = (r^2 + pw_z^2)^{1/2} = (pw_x^2 + pw_y^2 + pw_z^2)^{1/2} \Rightarrow d^2 = pw_x^2 + pw_y^2 + pw_z^2$

Da teorema di Carnot $d^2 = a_2^2 + a_3^2 - 2a_2a_3 \cos \alpha$

da cui $\cos \alpha = \frac{a_2^2 + a_3^2 - d^2}{2a_2a_3} \Rightarrow \alpha = \arccos \left(\frac{a_2^2 + a_3^2 - d^2}{2a_2a_3} \right)$



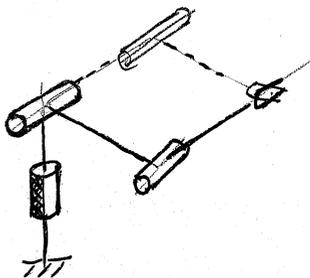
Questo perché dato un certo valore per α , $q_3 = \pi - \alpha$.

A questo punto conosco dove è posizionato il gomito, ora deve essere che

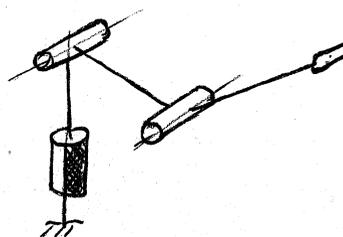
$$\begin{cases} a_2 \cos q_2 + a_3 \cos (q_2 + q_3) = r \\ a_2 \sin q_2 + a_3 \sin (q_2 + q_3) = pw_z \end{cases} \quad \text{con } q_3 = \pi - \alpha \quad (\text{note})$$

isolando $\sin q_2$ e $\cos q_2$ e poi $q_2 = \arctan_2(\sin q_2, \cos q_2)$.

In definitiva, le soluzioni sono 4 ossia



Spalla destra -
gomito alto/basso



Spalla sinistra -
gomito alto/basso.

Calcoliamo accelerazione delle particella

$$\underline{a}_P = \overset{(tr)}{\underline{a}_P} + \overset{(rel)}{\underline{a}_P} + \overset{(Co)}{\underline{a}_P}$$

$$\overset{(tr)}{\underline{a}_P} = (\text{blocco particella rispetto a scivolature}) = \underbrace{\omega_e \underline{k}_e \times \underline{OP}}_{\text{acc. tang.}} - \underbrace{\omega_e^2 \underline{OP}}_{\text{acc. centripeta}}$$

che accelerazione residua di trascinamento ha?

$$\begin{aligned} &= \omega_e \underline{k}_e \times [x \underline{i}_e + y \underline{j}_e] - \omega_e^2 [x \underline{i}_e + y \underline{j}_e] = \\ &= -\omega_e y \underline{i}_e + \omega_e x \underline{j}_e - \omega_e^2 x \underline{i}_e - \omega_e^2 y \underline{j}_e = \\ &= (-\omega_e y - \omega_e^2 x) \underline{i}_e + (\omega_e x - \omega_e^2 y) \underline{j}_e \end{aligned}$$

$$\overset{(rel)}{\underline{a}_P} = (\text{giusto solo se che avviene}) = \ddot{x} \underline{i}_e + \ddot{y} \underline{j}_e = 0 \underline{i}_e + 2ac^2 \underline{j}_e = 2ac^2 \underline{j}_e$$

rispetto a Σ sulla sinistra

$$\overset{(Co)}{\underline{a}_P} = (\text{di se } \Sigma \text{ ha moto rotatorio e } \underline{N}^{(rel)} \neq \underline{0}) = 2 \overset{(tr)}{\omega} \times \overset{(rel)}{\underline{N}_P} = 2 \omega_e \underline{k}_e \times [c \underline{i}_e + 2ac^2 t \underline{j}_e] = 2 \omega_e [c \underline{j}_e - 2ac^2 t \underline{i}_e]$$

In definitiva:

$$\underline{a}_P = (-\omega_e y - \omega_e^2 x - 4ac^2 \omega_e t) \underline{i}_e + (\omega_e x - \omega_e^2 y + 2ac^2 + 2\omega_e c) \underline{j}_e$$

$$\text{con } x(t) = ct$$

$$y(t) = ac^2 t^2$$

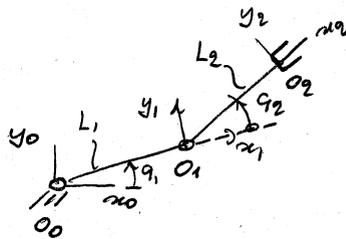


Ritorniamo sui movimenti

esercizi tr

Vogliamo attraverso determinare

\underline{N}_{02} e $\underline{\omega}_2$.



1) Partiamo dal link L_1

$$\begin{cases} \underline{N}_{01} = \underline{N}_{00} + \underline{\omega}_1 \times \underline{O_0 O_1} = \underline{0} + \dot{q}_1 \underline{k}_0 \times \underline{O_0 O_1} \\ \underline{\omega}_1 = \dot{q}_1 \underline{k}_0 \end{cases}$$

2) Consideriamo link L_2

$$\begin{cases} \underline{N}_{02} = \underline{N}_{01} + \underline{\omega}_2 \times \underline{O_1 O_2} \quad (\text{da f.f. cinematica}) \quad (\text{formula fondamentale della cinem.}) \\ \underline{\omega}_2 = \overset{(tr)}{\underline{\omega}_2} + \overset{(rel)}{\underline{\omega}_2} = \dot{q}_1 \underline{k}_0 + \dot{q}_2 \underline{k}_1 \end{cases}$$

Quindi, concatenando le espressioni,

$$\begin{aligned} \underline{N}_{02} &= \dot{q}_1 \underline{k}_0 \times \underline{O_0 O_1} + (\dot{q}_1 \underline{k}_0 + \dot{q}_2 \underline{k}_1) \times \underline{O_1 O_2} = \\ &= \dot{q}_1 \underline{k}_0 \times (\underline{O_0 O_1} + \underline{O_1 O_2}) + \dot{q}_2 \underline{k}_1 \times \underline{O_1 O_2} = \dot{q}_1 \underline{k}_0 \times \underline{O_0 O_2} + \dot{q}_2 \underline{k}_1 \times \underline{O_1 O_2} \end{aligned}$$

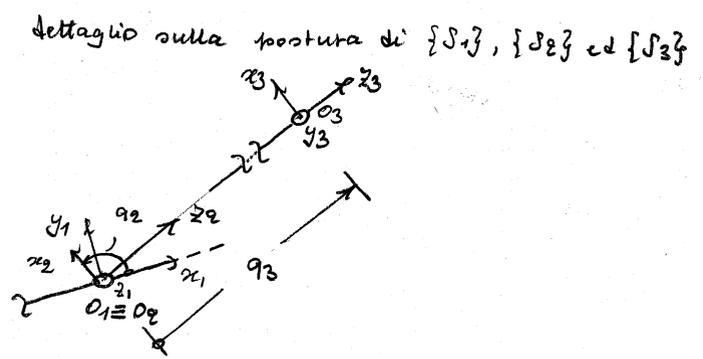
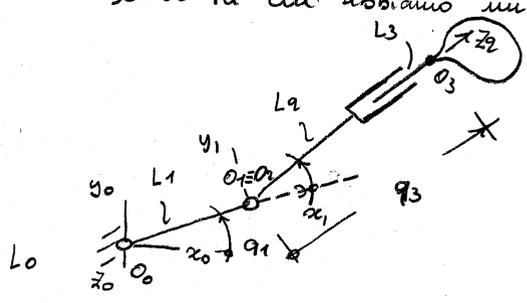
Se adesso introduciamo un vettore, definito come twist, che impila \underline{v}_{02} e $\underline{\omega}_2$ si può fattorizzare tutto nel modo seguente

$$\begin{bmatrix} \underline{v}_{02} \\ \underline{\omega}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{k}_0 \times \underline{o}_{02} & \underline{k}_1 \times \underline{o}_{12} \\ \underline{k}_0 & \underline{k}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} =: \underline{J}(\underline{q}) \dot{\underline{q}}$$

$\underline{J}(\underline{q})$ jacobiano geometrico, in generale (se $\underline{q} \in \mathbb{R}^n$, ossia n giunti) $\underline{J} \in \mathbb{R}^{6 \times n}$

$$\underline{J}(\underline{q}) = \begin{bmatrix} \underline{J}_p(\underline{q}) \\ \underline{J}_o(\underline{q}) \end{bmatrix} \text{ con } \underline{J}_p \in \mathbb{R}^{3 \times n} \text{ di posizione (lega } \underline{v}_{02} \text{ a } \dot{\underline{q}}) \\ \underline{J}_o \in \mathbb{R}^{3 \times n} \text{ di orientaz. (lega } \underline{\omega}_2 \text{ a } \dot{\underline{q}})$$

caso in cui abbiamo un RRP planare



$$\underline{o}_2 \equiv \underline{o}_1; \quad \underline{v}_{02} = \underline{v}_{01}; \quad \underline{\omega}_2 = \dot{q}_1 \underline{k}_0 + \dot{q}_2 \underline{k}_1$$

Il link 3 viene guardato da un osservatore posto sul link 2 e si scrive, usando la formula di composizione dei moti relativi:

$$\begin{aligned} \underline{v}_{03} &= \overset{(rel)}{\underline{v}_{03}} + \overset{(tr)}{\underline{v}_{03}} = \dot{q}_3 \underline{k}_2 + (\underline{v}_{01} + \underline{\omega}_2 \times \underline{o}_{13}) = \\ &= \dot{q}_1 \underline{k}_0 \times \underline{o}_{01} + (\dot{q}_1 \underline{k}_0 + \dot{q}_2 \underline{k}_1) \times \underline{o}_{13} + \dot{q}_3 \underline{k}_2 = \\ &= \dot{q}_1 \underline{k}_0 \times \underline{o}_{03} + \dot{q}_2 \underline{k}_1 \times \underline{o}_{13} + \dot{q}_3 \underline{k}_2 \end{aligned}$$

Per quanto riguarda le velocità angolari:

$$\underline{\omega}_3 = \underline{\omega}_2 = \dot{q}_1 \underline{k}_0 + \dot{q}_2 \underline{k}_1 \text{ (fra } L_2 \text{ e } L_3 \text{ c'è una coppia prismatica, quindi non c'è velocità angolare relativa)}$$

Allora posso giustapporre \underline{v}_{03} ed $\underline{\omega}_3$ in un vettore \underline{J}_{03} così fatto

$$\underline{J}_{03} = \begin{bmatrix} \underline{v}_{03} \\ \underline{\omega}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{k}_0 \times \underline{o}_{03} & \underline{k}_1 \times \underline{o}_{13} & \underline{k}_2 \\ \underline{k}_0 & \underline{k}_1 & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} =: \underline{J}(\underline{q}) \dot{\underline{q}}$$

dove si è definito il jacobiano geometrico induttivamente. Queste matrici, dipendente dalla configurazione \underline{q} , mappa le velocità ai giunti $\dot{\underline{q}}$ nella velocità lineare di O_3 (\underline{v}_{03}) e nella velocità angolare di L_3 ($\underline{\omega}_3$)

4
 È importante osservare che il vettore \underline{v}_{O_3} caratterizza univocamente l'atto di moto di L_3 . Infatti, nota \underline{v} l'incante di un punto di un corpo rigido e la velocità angolare la \underline{v} l'incante di un qualsiasi altro punto si nota, infatti

$$\text{da } \underline{v}_{O_3} \text{ e } \underline{\omega}_3 \quad ; \quad P_3 \in L_3 \quad \underline{v}_{P_3} = \underline{v}_{O_3} + \underline{\omega}_3 \times \underline{O_3 P_3}$$

$$= \underline{v}_{O_3} - \hat{\underline{O_3 P_3}} \underline{\omega}_3$$

La velocità angolare è invece una proprietà globale del corpo rigido, indep. dal punto, che non ha proprio nessun ruolo.

Allora lo stesso atto di moto (dello stesso corpo rigido) può essere espresso da twist differenti, che differiscono solo per la scelta del punto rispetto al quale si esprime la velocità lineare

Quindi il modo di variare di un twist di uno stesso atto di moto al variare del "polo" di rappresentazione risulta (in forma matriciale)

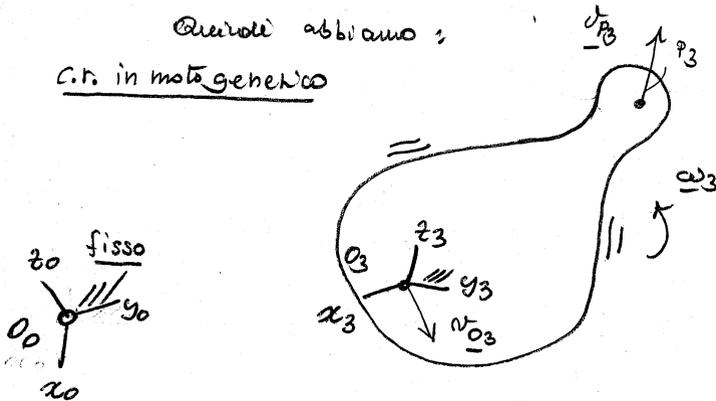
$$\underline{v}_{P_3} = \begin{bmatrix} \underline{v}_{P_3} \\ -\underline{\omega}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & -\hat{\underline{O_3 P_3}} \\ \underline{O_3 P_3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_{O_3} \\ -\underline{\omega}_3 \end{bmatrix} =: M_{P_3 O_3} \underline{v}_{O_3}$$

l'inversa è data da: (ribaltando i ruoli di O_3 e P_3 nella f.f. della cir.)

$$\underline{v}_{O_3} = \begin{bmatrix} \underline{v}_{O_3} \\ -\underline{\omega}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & \hat{\underline{O_3 P_3}} \\ \underline{O_3 P_3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_{P_3} \\ -\underline{\omega}_3 \end{bmatrix} =: M_{O_3 P_3} \underline{v}_{P_3}$$

Quindi abbiamo:

c.r. in moto generico



x definiti suo atto di moto uso equivalentemente

\underline{v}_{O_3} o \underline{v}_{P_3} questi sono legati dalla trasformazione $M_{P_3 O_3}$

Inoltre se uso due sistemi di riferimento diversi, ad esempio $\{3\} \in L_3$ e $\{5\}$ fido rispetto al terreno allora posso scrivere, semplicemente cambiando le componenti di vettore velocità (n.b. soltanto solo cambiam di orientazione)

$${}^0 \begin{bmatrix} \underline{v}_{O_3} \\ -\underline{\omega}_3 \end{bmatrix} = {}^0 R_3 \begin{bmatrix} \underline{v}_{O_3} \\ -\underline{\omega}_3 \end{bmatrix}$$

$${}^0 \begin{bmatrix} \underline{v}_{O_3} \\ -\underline{\omega}_3 \end{bmatrix} = {}^0 R_3 \begin{bmatrix} \underline{v}_{O_3} \\ -\underline{\omega}_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{da cui } {}^0 \begin{bmatrix} \underline{v}_{O_3} \\ -\underline{\omega}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0 R_3 & \underline{O_3 P_3} \\ \underline{O_3 P_3} & {}^0 R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_{P_3} \\ -\underline{\omega}_3 \end{bmatrix} = {}^0 L_3 \begin{bmatrix} \underline{v}_{P_3} \\ -\underline{\omega}_3 \end{bmatrix}$$

Allora se ad esempio dalla rappresentazione dell'atto di moto ${}^0 \begin{bmatrix} \underline{v}_{O_3} \\ -\underline{\omega}_3 \end{bmatrix}$ voglio passare alla rappresentazione ${}^3 \begin{bmatrix} \underline{v}_{P_3} \\ -\underline{\omega}_3 \end{bmatrix}$ si può usare le precedenti leggi di trasformazione

ossia voglio determinare ${}^3 [{}^{\hat{}}\underline{v}_{P_3}] = [\quad] [{}^0 [{}^{\hat{}}\underline{v}_{O_3}]$

matrice

Possiamo ragionare così:

1) Prima, a parità di polo O_3 , cambio le coordinate da $\{S_0\}$ e $\{S_3\}$ così:

$${}^3 [{}^{\hat{}}\underline{v}_{O_3}] = {}^3 L_0 [{}^0 [{}^{\hat{}}\underline{v}_{O_3}]] \quad \text{con } {}^3 L_0 = \left[\begin{array}{c|c} {}^3 R_0 & 0 \\ \hline 0 & {}^3 R_0 \end{array} \right]$$

2) Poi, a parità di sistema di rif $\{S_3\}$, cambio polo da O_3 a P_3 così:

$${}^3 [{}^{\hat{}}\underline{v}_{P_3}] = {}^3 M_{P_3 O_3} [{}^3 [{}^{\hat{}}\underline{v}_{O_3}]] \quad \text{con } {}^3 M_{P_3 O_3} = \left[\begin{array}{c|c} I_{3 \times 3} & -{}^3 (\hat{O}_3 P_3) \\ \hline 0 & I_{3 \times 3} \end{array} \right]$$

Allora si ottiene, concatenando le equazioni da sopra

$${}^3 [{}^{\hat{}}\underline{v}_{P_3}] = {}^3 M_{P_3 O_3} {}^3 L_0 [{}^0 [{}^{\hat{}}\underline{v}_{O_3}]] = {}^{3,0} M_{P_3, O_3} [{}^0 [{}^{\hat{}}\underline{v}_{O_3}]]$$

dove

$${}^{3,0} M_{P_3, O_3} = \left[\begin{array}{c|c} I & -{}^3 (\hat{O}_3 P_3) \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} {}^3 R_0 & 0 \\ \hline 0 & {}^3 R_0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} {}^3 R_0 & -{}^3 (\hat{O}_3 P_3) {}^3 R_0 \\ \hline 0 & {}^3 R_0 \end{array} \right]$$

nota bene: il prodotto $-{}^3 (\hat{O}_3 P_3) {}^3 R_0$ è costante poiché compare in queste equazioni.

$${}^3 [{}^{\hat{}}\underline{v}_{P_3}] = {}^3 R_0 [{}^0 [{}^{\hat{}}\underline{v}_{O_3}]] - {}^3 (\hat{O}_3 P_3) {}^3 R_0 [{}^0 [{}^{\hat{}}\underline{v}_{O_3}]]$$

${}^3 (\hat{O}_3 P_3)$ è costante poiché $O_3, P_3 \in L_3$ e $\{S_3\}$ solidale a L_3 .

Il secondo blocco di eq. mi invece fornisce

$${}^3 [{}^{\hat{}}\underline{v}_{O_3}] = {}^3 R_0 [{}^0 [{}^{\hat{}}\underline{v}_{O_3}]]$$

ed è un semplice cambio di componenti poiché non ha senso cambiare polo alla velocità angolare.

Avrei potuto anche ragionare in ordine inverso, ossia

1) Prima, a parità di sistema di riferimento $\{S_0\}$, cambio polo da O_3 a P_3

$${}^0 [{}^{\hat{}}\underline{v}_{P_3}] = {}^0 M_{P_3 O_3} [{}^0 [{}^{\hat{}}\underline{v}_{O_3}]] \quad \text{con } {}^0 M_{P_3 O_3} = \left[\begin{array}{c|c} I_{3 \times 3} & -{}^0 (\hat{O}_3 P_3) \\ \hline 0 & I_{3 \times 3} \end{array} \right]$$

2) Poi, a parità di polo P_3 , cambio sistema di riferimento da $\{S_0\}$ a $\{S_3\}$:

$${}^3 [{}^{\hat{}}\underline{v}_{P_3}] = {}^3 L_0 [{}^0 [{}^{\hat{}}\underline{v}_{P_3}]] \quad \text{con } {}^3 L_0 \text{ come visto prima}$$

Allora, di nuovo concatenando le espressioni come prima si ottiene stavolta:

$${}^3 \underline{J}_{P_3} = {}^3 \underline{I}_0 {}^0 M_{P_3, O_3} {}^0 \underline{J}_{O_3} = (\text{di nuovo}) = {}^{3,0} M_{P_3, O_3} {}^0 \underline{J}_{O_3}$$

dove si ha questa forma alternativa, ma equivalente,

$${}^{3,0} M_{P_3, O_3} = \left[\begin{array}{c|c} {}^3 R_0 & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & {}^3 R_0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \underline{I}_{3 \times 3} & -{}^0 \hat{\underline{O_3 P_3}} \\ \hline \underline{0} & \underline{I}_{3 \times 3} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} {}^3 R_0 & -{}^3 R_0 {}^0 \hat{\underline{O_3 P_3}} \\ \hline \underline{0} & {}^3 R_0 \end{array} \right]$$

il primo blocco di eq. (1) risulta adesso

$${}^3 \underline{N}_{P_3} = {}^3 R_0 {}^0 \underline{N}_{O_3} - {}^3 R_0 {}^0 \hat{\underline{O_3 P_3}} {}^0 \underline{\omega_3}$$

che è identico a prima poiché

$$\begin{aligned} -{}^3 \hat{\underline{O_3 P_3}} {}^3 R_0 {}^0 \underline{\omega_3} &= -{}^3 \hat{\underline{O_3 P_3}} \times [{}^3 R_0 {}^0 \underline{\omega_3}] = \\ &= -{}^3 R_0 {}^0 R_3 {}^3 \hat{\underline{O_3 P_3}} \times [{}^3 R_0 {}^0 \underline{\omega_3}] = -{}^3 R_0 \{ +{}^0 R_3 {}^3 \hat{\underline{O_3 P_3}} \times [{}^0 \underline{\omega_3}] \} = \\ &= -{}^3 R_0 \{ {}^0 \hat{\underline{O_3 P_3}} \times [{}^0 \underline{\omega_3}] \} = -{}^3 R_0 {}^0 \hat{\underline{O_3 P_3}} {}^0 \underline{\omega_3} \quad \text{c.v.d.} \end{aligned}$$

anche dalla identità $(R \underline{a})^\wedge = R \hat{\underline{a}} R^T$ $R \in SO(3)$, $\hat{\underline{a}} = -\hat{\underline{a}}^T$

questa viene da

$$(R \underline{a})^\wedge \underline{b} = (R \underline{a}) \times \underline{b} = R \underline{a} \times (R R^T \underline{b}) = R (\underline{a} \times R^T \underline{b}) = R \hat{\underline{a}} R^T \underline{b}$$

per arbitrarietà di \underline{b}

$$(R \underline{a})^\wedge = R \hat{\underline{a}} R^T$$

(ma $-{}^3 R_0 {}^0 \hat{\underline{O_3 P_3}}$ ma ${}^0 \hat{\underline{O_3 P_3}} = ({}^0 R_3 {}^3 \hat{\underline{O_3 P_3}})^\wedge =$

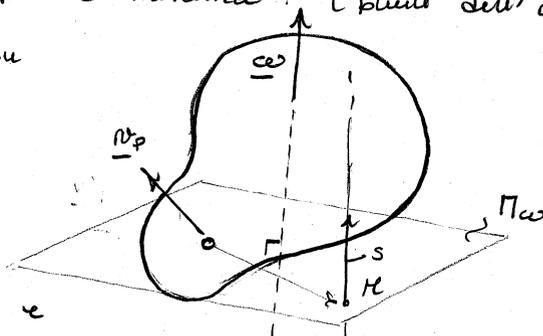
allora $-{}^3 R_0 {}^0 R_3 {}^3 \hat{\underline{O_3 P_3}} {}^3 R_0 = -{}^3 \hat{\underline{O_3 P_3}} {}^3 R_0$ o.k. $= {}^0 R_3 {}^3 \hat{\underline{O_3 P_3}} {}^0 R_3^T$

Quale è la forma più semplice per un twist? Ovevvero quale è quello rispetto al quale assume forma "minima"? (punto dell'asse di Mozzi)

atto di moto con

polo P,

$$\underline{G}_P = \begin{bmatrix} \underline{N}_P \\ \underline{\omega} \end{bmatrix}$$



Cerco M (punto) partendo da P, quindi $\underline{P_M}$ sarà il vettore che punta M da P.

$$\underline{N}_M: \underline{N}_M \parallel \underline{\omega} \text{ e}$$

$$\underline{N}_M = h \underline{\omega} ?$$

$$\underline{N}_M = h \underline{\omega} = \underline{N}_P + \underline{\omega} \times \underline{P_M}$$

$$\underline{\omega} \times \underline{N}_M = \underline{\omega} \times (h \underline{\omega}) = \underline{0} = \underline{\omega} \times \underline{N}_P + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{P_M})$$

$$\underline{\omega} \times \underline{N}_P + (\underline{\omega} \cdot \underline{P_M}) \underline{\omega} - \|\underline{\omega}\|^2 \underline{P_M} = \underline{0}$$

(M) Lo ceto a partire da P in giacitura perpendicolare a $\underline{\omega}$ cosicché $\underline{\omega} \cdot \underline{PM} = 0$
 Dunque su Π_{ω} (giacitura ortogonale a $\underline{\omega}$)

$$\underline{\omega} \times \underline{v}_P - \|\underline{\omega}\|^2 \underline{PM} = 0 \iff \underline{PM} = \frac{\underline{\omega} \times \underline{v}_P}{\|\underline{\omega}\|^2} = \frac{\|\underline{\omega}\| \underline{\omega}^u \times \underline{v}_P}{\|\underline{\omega}\| \|\underline{\omega}\|} = \frac{\underline{\omega}^u \times \underline{v}_P}{\|\underline{\omega}\|}$$

Poi i punti della retta di passante per M e // a $\underline{\omega}^u$ hanno tutte $\underline{v}_x = \underline{v}_M$ infatti

$$\underline{v}_x = \underline{v}_M + \underline{\omega} \times (s \underline{\omega}^u) = \underline{v}_M + \|\underline{\omega}\| \underline{\omega}^u \times (\underline{\omega}^u s) = \underline{v}_M$$

Quanto vale $\underline{v}_M = h \underline{\omega}$? ossia quanto vale h?

$$\underline{\omega} \cdot \underline{v}_M = \underline{\omega} \cdot h \underline{\omega} = \|\underline{\omega}\|^2 h \iff h = \frac{\underline{\omega} \cdot \underline{v}_M}{\|\underline{\omega}\|^2} = \frac{\|\underline{\omega}\| \underline{\omega}^u \cdot \underline{v}_M}{\|\underline{\omega}\| \|\underline{\omega}\|}$$

N.B. che dato che $\underline{v}_P = \underline{v}_M + \underline{\omega} \times \underline{MP}$ con P generico

$$\underline{\omega} \cdot \underline{v}_P = \underline{\omega} \cdot (\underline{v}_M) + \underbrace{\underline{\omega} \cdot (\underline{\omega} \times \underline{MP})}_{\text{sempre } = 0}$$

allora qualsiasi punto ha la stessa proiezione lungo l'asse di Mozzi di M.

Allora atto di moto generico in forma minima e' rispetto a polo E' asse di Mozzi Rispetto ad un tale polo

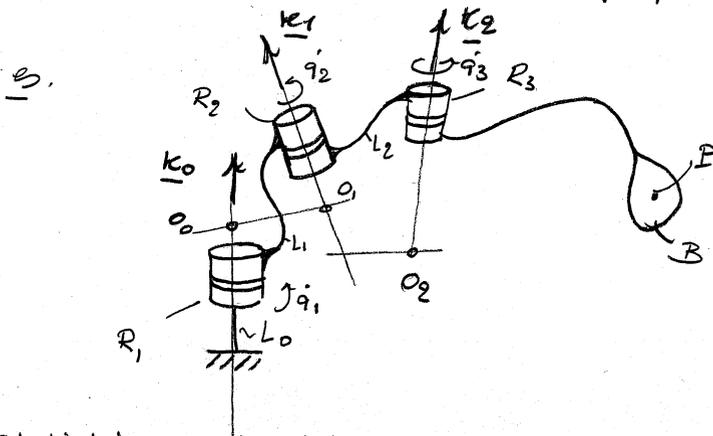
$$\underline{J}_M = \begin{bmatrix} \underline{v}_M \\ \underline{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \underline{\omega} \\ \underline{\omega} \end{bmatrix}$$

Quale e' il twist in forma minima per una coppia rotoidale?

E per una coppia prismatica?

Si possono sommare twist? Si, se sono scritte rispetto allo stesso polo

(ovviam. poi nello stesso sistema di ref. quando si calcoli con le componenti)



applichiamo principio di sovrapp. effetti ovvero composizione moto relativi

Nel moto di corpo B (body) secondo la coppia rotoidale: quanto vale twist?

Lo scuro rispetto a polo O0

$$\underline{J}_{O0}^{R1} = \begin{bmatrix} \underline{v}_{O0} \\ \dot{q}_1 \underline{k}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \dot{q}_1 \underline{k}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{k}_0 \end{bmatrix} \dot{q}_1$$

Nel moto di B secondo 2^a coppia rotoidale: quanto vale twist?

Lo scivo rispetto a polo O_1

$$\underline{V}_{O_1}^{R_2} = \begin{bmatrix} N_{O_1} \\ \underline{q}_2 \underline{k}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{k}_1 \underline{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{k}_1 \end{bmatrix} \dot{q}_2$$

Altro a R_3

$$\underline{V}_{O_2}^{R_3} = \begin{bmatrix} N_{O_2} \\ \underline{q}_3 \underline{k}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{k}_2 \underline{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{k}_2 \end{bmatrix} \dot{q}_3$$

Li posso sommare? Cost no!, poiché sono atti di moto di corpo rispetto a poli differenti. Li devo prima rendere coerenti scrivendoli tutti e 3 rispetto ad uno stesso polo, es. P se poi mi interessa avere una $\underline{V}_P = \begin{bmatrix} \underline{v}_P \\ \underline{\omega} \end{bmatrix}$

Allora

$$\underline{V}_P^{R_1} = M_{P O_0} \underline{V}_{O_0}^{R_1} ; \quad \underline{V}_P^{R_2} = M_{P O_1} \underline{V}_{O_1}^{R_2} ; \quad \underline{V}_P^{R_3} = M_{P O_2} \underline{V}_{O_2}^{R_3}$$

$$M_{P O_X} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{I} & -(\underline{O}_X \times \underline{P}) \\ \hline \underline{0} & \underline{I} \end{array} \right]$$

e poi posso fare

$$\underline{V}_P = \underline{V}_P^{R_1} + \underline{V}_P^{R_2} + \underline{V}_P^{R_3} = M_{P O_0} \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{k}_0 \end{bmatrix} \dot{q}_1 + M_{P O_1} \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{k}_1 \end{bmatrix} \dot{q}_2 + M_{P O_2} \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{k}_2 \end{bmatrix} \dot{q}_3$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} M_{P O_0} \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{k}_0 \end{bmatrix} & M_{P O_1} \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{k}_1 \end{bmatrix} & M_{P O_2} \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{k}_2 \end{bmatrix} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \underline{I} & -(\underline{O}_0 \times \underline{P}) \\ \hline \underline{0} & \underline{I} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{k}_0 \end{bmatrix}$$

$$\parallel \begin{bmatrix} \underline{k}_0 \times \underline{O}_0 \times \underline{P} \\ \underline{k}_0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \underline{I} & -(\underline{O}_1 \times \underline{P}) \\ \hline \underline{0} & \underline{I} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{k}_1 \end{bmatrix}$$

$$\parallel \begin{bmatrix} \underline{k}_1 \times \underline{O}_1 \times \underline{P} \\ \underline{k}_1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \underline{I} & -(\underline{O}_2 \times \underline{P}) \\ \hline \underline{0} & \underline{I} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{k}_2 \end{bmatrix}$$

$$\parallel \begin{bmatrix} \underline{k}_2 \times \underline{O}_2 \times \underline{P} \\ \underline{k}_2 \end{bmatrix}$$

e quindi:

$$\underline{V}_P = \left[\begin{array}{c|c|c} \underline{k}_0 \times \underline{O}_0 \times \underline{P} & \underline{k}_1 \times \underline{O}_1 \times \underline{P} & \underline{k}_2 \times \underline{O}_2 \times \underline{P} \\ \hline \underline{k}_0 & \underline{k}_1 & \underline{k}_2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

↑
contrib. 1°
giunto R_1

↑
2° giunto
 R_2

↑
3° giunto
 R_3

Attenzione al fatto che questa relazione $\underline{\dot{J}}_P = \underline{J}_P(\underline{q}) \dot{\underline{q}}$ è espressa in forma invariante, nel senso che mai abbiamo scelto il polo (punto P in questo caso) di cui guardiamo la velocità lineare (come rappresentativa dell'atto di moto) ma non si è ancora stabilito in quale sistema di riferimento esprimere le componenti.

Perciò torniamo ancora le trasformazioni viste prima.

Quindi potremo usare ${}^0 \underline{J}_P = {}^0 \underline{J}_P(\underline{q}) \dot{\underline{q}}$, ad esempio, un ${}^2 \underline{J}_{O_2}$ che avrà associata una opportuna ${}^2 \underline{J}_{O_2}(\underline{q})$ con ${}^2 \underline{\dot{J}}_{O_2} = {}^2 \underline{J}_{O_2}(\underline{q}) \dot{\underline{q}}$

Allora stanno le relazioni fra i twist

$${}^0 \underline{J}_P = {}^{0,2} M_{P,O_2} {}^2 \underline{J}_{O_2} \quad \text{allora} \quad {}^0 \underline{J}_P(\underline{q}) \dot{\underline{q}} = {}^{0,2} M_{P,O_2} {}^2 \underline{J}_{O_2}(\underline{q}) \dot{\underline{q}}$$

Dato che tale relazione deve essere vera $\forall \dot{\underline{q}}$ allora si ha che i Jacobiani si trasformano nel seguente modo:

$${}^0 \underline{J}_P(\underline{q}) = {}^{0,2} M_{P,O_2} {}^2 \underline{J}_{O_2}(\underline{q}), \quad \text{ovvia esattamente come si trasformano i twist.}$$

Adesso entriamo nel dominio della statica

Un sistema di forze agenti su un corpo rigido è equivalente alla risultante \underline{F} applicata in un punto O_1 ed al momento risultante \underline{M}_{O_1} rispetto a tale polo.

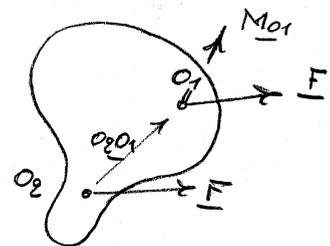
Questo sistema di forze è altresì rappresentabile con un sistema equivalente con stessa risultante applicata nel punto O_2 e momento risultante \underline{M}_{O_2} diverso in generale da \underline{M}_{O_1}

Allora in questo nuovo sistema risultanti è ancora \underline{F} ma \underline{M}_{O_2} è tale che

$$\begin{cases} \underline{F}_{O_2} = \underline{F}_{O_1} = \underline{F} \\ \underline{M}_{O_2} = \underline{M}_{O_1} + \underline{O_2 O_1} \times \underline{F} = \underline{M}_{O_1} + \hat{\underline{O_2 O_1}} \underline{F} \end{cases}$$

ovvia anche

$$\underline{M}_{O_2} = \underline{M}_{O_1} + \underline{F} \times \underline{O_1 O_2}$$



Allora si nota che questa legge di variazione al variare del polo è identica a quella della velocità lineare di un punto sullo stesso corpo rigido

Allora, introducendo il wrench, che impila risultante e momento risultante rispetto ad un polo si scrive

$$\underline{w}_{O_1} = \begin{bmatrix} \underline{F} \\ \underline{M}_{O_1} \end{bmatrix}, \quad \text{wrenches equivalenti (o meglio equipollenti) si trovano}$$

mediante la legge:

$$\underline{w}_{02} = \begin{bmatrix} \underline{F} \\ \underline{M}_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} \\ O_{2 \times 1} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{F} \\ \underline{M}_{01} \end{bmatrix} = W_{0201} \underline{w}_{01}$$

the other way around is

$$\underline{w}_{01} = \begin{bmatrix} \underline{F} \\ \underline{M}_{01} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} \\ O_{1 \times 2} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{F} \\ \underline{M}_{02} \end{bmatrix} = W_{0102} \underline{w}_{02}$$

nota bene che $W_{0201} = (W_{0102})^{-1}$. Facile da verificare anche sfruttando la struttura a blocchi della W e che \hat{c} è antisimmetrica.

Per le velocità invece si ha che:

$$\underline{f}_{02} = \begin{bmatrix} \underline{N}_{02} \\ \underline{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & O_{2 \times 1} \\ O_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{N}_{01} \\ \underline{\omega} \end{bmatrix} = M_{0201} \underline{f}_{01}$$

$$\underline{f}_{01} = \begin{bmatrix} \underline{N}_{01} \\ \underline{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & O_{1 \times 2} \\ O_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{N}_{02} \\ \underline{\omega} \end{bmatrix} = M_{0102} \underline{f}_{02}$$

Nota. fra i twist non è definito un prodotto scalare (non avrebbe senso fisico poiché sommare i prodotti scalari di \underline{n} lineari a prodotti scalari di $\underline{\omega}$ angolari). Stessa cosa fra i wrench, in cui sommare p.s. di forze e p.s. di coppie. Tuttavia, se effettuiamo p.o. fra i twist ed i wrench descritti rispetto al medesimo polo o to calcolando la potenza che il sistema di forze di risultante \underline{w}_{01} (ad es.) sviluppa nell'atto di moto descritto dal twist \underline{f}_{01}

ovvia $P = \underline{w}_{01}^T \underline{f}_{01}$
↑
scalare

Adesso, dato che \underline{w}_{02} è equivalente a \underline{w}_{01} e \underline{f}_{02} descrive lo stesso atto di moto di \underline{f}_{01} allora deve essere

$$P = \underline{f}_{01}^T \underline{w}_{01} = \underline{f}_{02}^T \underline{w}_{02}$$

Se conoscerò la legge di variazione di twist "costituenti" nell'esprimere lo stesso atto di moto, deve essere che

$$\underline{f}_{01}^T \underline{w}_{01} = \underline{f}_{02}^T \underline{w}_{02} \quad \text{ma} \quad \underline{f}_{02} = M_{0201} \underline{f}_{01} \quad \underline{f}_{02}^T = \underline{f}_{01}^T M_{0201}^T$$

allora

$$\underline{f}_{01}^T M_{0201}^T \underline{w}_{02} \quad \text{ovvia}$$

$$\underline{f}_{01}^T (\underline{w}_{01} - M_{0201}^T \underline{w}_{02}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{w}_{02} = (M_{0201})^{-T} \underline{w}_{01}$$

Ed infatti si verifica facilmente che $W_{0201} = (M_{0201})^{-T}$; $W_{0102} = (M_{0102})^{-T}$.

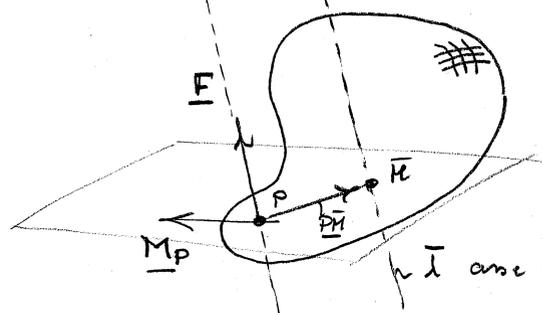
A questo punto ci si può chiedere qual'è l'estensione minima di un wrench
 onia se \exists un polo rispetto a cui assume la forma più semplice.

(quali saranno i punti dell'asse centrale)

Dim. formalmente analoga a prima stanza. Desatta equivalente delle leggi di transf
 fra cinematica e statica ($\omega \rightarrow \underline{F}$, $\underline{\omega} \rightarrow \underline{M}$)

sistemi di forze con wrench rispetto a polo P.

$$\underline{M}_P = \begin{bmatrix} \underline{F} \\ \underline{M}_P \end{bmatrix}$$



l asse centrale $\parallel \underline{F}$ passante per \bar{M}

$\exists \bar{M}$: $\underline{M}_{\bar{M}} \parallel \underline{F}$ e $\underline{M}_{\bar{M}} = \bar{h} \underline{F}$?

$$\underline{M}_{\bar{M}} = \bar{h} \underline{F} = \underline{M}_P + \underline{F} \times \underline{P}\bar{M}$$

$$\underline{F} \times \underline{M}_{\bar{M}} = \underline{F} \times (\bar{h} \underline{F}) = \underline{0} = \underline{F} \times \underline{M}_P + \underline{F} \times (\underline{F} \times \underline{P}\bar{M})$$

onia

$$\underline{0} = \underline{F} \times \underline{M}_P + (\underline{F} \cdot \underline{P}\bar{M}) \underline{F} - (\underline{P}\bar{M}) \|\underline{F}\|^2$$

cerco \bar{M} (punto) partendo da P su piano ortogonale a \underline{F} passante per P

Allora $\underline{F} \cdot \underline{P}\bar{M} = 0$ e perciò

$$\underline{F} \times \underline{M}_P - \|\underline{F}\|^2 \underline{P}\bar{M} = \underline{0} \iff \underline{P}\bar{M} = \frac{\underline{F} \times \underline{M}_P}{\|\underline{F}\|^2} = \frac{\|\underline{F}\| \underline{F}^u \times \underline{M}_P}{\|\underline{F}\|^2} = \frac{\underline{F}^u \times \underline{M}_P}{\|\underline{F}\|}$$

Poi i punti della retta l passante per \bar{M} e \parallel a \underline{F} hanno tutte

$\underline{M}_l = \underline{M}_{\bar{M}}$ infatti

$$\underline{M}_l = \underline{M}_{\bar{M}} + \underline{F} \times (S \underline{F}^u) = \underline{M}_{\bar{M}} + \|\underline{F}\| \underline{F}^u \times (\underline{F}^u s) = \underline{M}_{\bar{M}}$$

Quanto vale $\underline{M}_{\bar{M}} = \bar{h} \underline{F}$? onia quanto vale \bar{h} ?

$$\underline{F} \cdot \underline{M}_{\bar{M}} = \underline{F} \cdot (\underline{M}_P + \underline{F} \times \underline{P}\bar{M}) = \underline{F} \cdot \underline{M}_P + \underline{F} \cdot (\underline{F} \times \underline{P}\bar{M}) = \underline{F} \cdot \underline{M}_P$$

$$\bar{h} \|\underline{F}\|^2 \iff \bar{h} = \frac{\underline{F} \cdot \underline{M}_P}{\|\underline{F}\|^2} = \frac{\|\underline{F}\| \underline{F}^u \cdot \underline{M}_P}{\|\underline{F}\|^2} = \frac{\underline{F}^u \cdot \underline{M}_P}{\|\underline{F}\|}$$

Dunque qualsiasi punto ha associato un momento la cui proiezione lungo \underline{F}^u , il versore della risultante, ha sempre lo stesso valore.

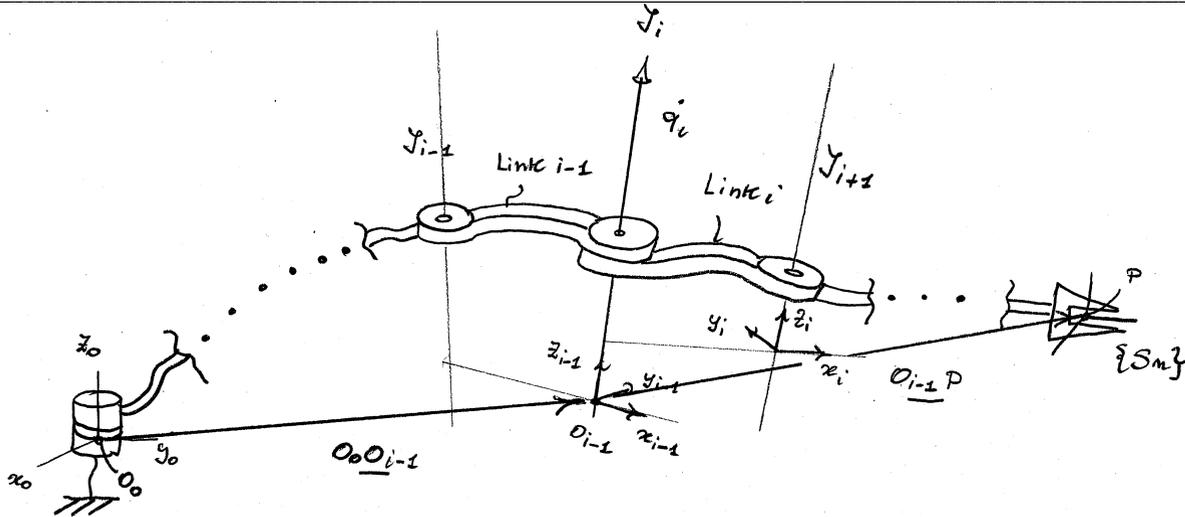
Il rapporto tra il valore di tale proiezione e $\|\underline{F}\|$ è il fattore di scala, o base, \bar{h} .

E se non capite, seguite questo motto:

ASK an impertinent question, and you are on the way to a pertinent answer

Questa l'abbiamo già vista a p. 8. con un esempio.

In modo sistematico si ha che



Allora la rappresentazione (per adesso invariante, ossia non legata alle componenti in un particolare sistema di riferimento) del twist del giunto J_i , scritto rispetto al polo O_{i-1} (da Denavit-Hartenberg), risulta

$$\underline{J}_{O_{i-1}} = \begin{bmatrix} n_{O_{i-1}} \\ \omega_{i-1,i} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \kappa_{i-1} \\ -\frac{\kappa_{i-1}}{\omega} \end{bmatrix} \dot{q}_i, & \text{se } J_i \text{ è prismatico} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{0}{\kappa_{i-1}} \end{bmatrix} \dot{q}_i, & \text{se } J_i \text{ è rotoidale} \end{cases}$$

Nota bene che se alla fine si vuol avere una rappresentazione del Jacobiano rispetto a P ossia un

$$\underline{J}_P = \underline{J}_P(\underline{q}) \dot{\underline{q}} \quad (\text{twist globale dell'ultimo link rispetto a polo P in funzione di } \underline{q} \text{ e } \dot{\underline{q}})$$

allora occorre riportare tutti i contributi dei singoli giunti a P mediante la ben nota legge di trasformazione

$$\begin{aligned} \underline{J}_P &= \begin{bmatrix} n_P \\ \omega_{i-1,P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & | & -(\hat{O}_{i-1}P) \\ \mathbf{0} & | & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{J}_{O_{i-1}} \\ \omega_{i-1,i} \end{bmatrix} = M_{PO_{i-1}} \underline{J}_{O_{i-1}} = \\ &= \begin{cases} \begin{bmatrix} \kappa_{i-1} \\ -\frac{\kappa_{i-1}}{\omega} \end{bmatrix} \dot{q}_i, & \text{se } J_i \text{ è prismatico} \\ \begin{bmatrix} -(\hat{O}_{i-1}P) \kappa_{i-1} \\ -\frac{\kappa_{i-1}}{\omega} \end{bmatrix} \dot{q}_i, & \text{se } J_i \text{ è rotoidale} \end{cases} \end{aligned}$$

Il contributo del giunto i -esimo al Jacobiano geometrico risulta quindi

$$\underline{J}_P(\underline{q}) = [\underline{J}_1 \dots \underline{J}_i \dots \underline{J}_n] \quad \underline{J}_i = \begin{cases} \begin{bmatrix} \kappa_{i-1} \\ -\frac{\kappa_{i-1}}{\omega} \end{bmatrix}, & \text{se } J_i \text{ è prismatico} \\ \begin{bmatrix} \kappa_{i-1} \times (\hat{O}_{i-1}P) \\ -\frac{\kappa_{i-1}}{\omega} \end{bmatrix}, & \text{se } J_i \text{ è rotoidale} \end{cases}$$

Si ricorda che da D.-H. la matrice omogenea della cinematica diretta risulta:

$${}^0A_m(q) = {}^0A_1(q_1) \dots {}^{i-2}A_{i-1}(q_{i-1}) {}^{i-1}A_i(q_i) \dots {}^{m-1}A_m(q_m)$$

i vettori ${}^0k_{i-1}$, 0O_0P ed ${}^0O_0O_{i-1}$ (con ${}^0O_{i-1}P = {}^0O_0P - {}^0O_0O_{i-1}$), o meglio la loro versione in componenti in $\{S_0\}$, possono essere estratti da matrici che sono già state calcolate nella procedura di calcolo della ${}^0A_m(q)$, in fatto

$${}^0A_{i-1}(q_1, \dots, q_{i-1}) = \left[\begin{array}{c|c} {}^0R_{i-1} & ({}^0O_0O_{i-1}) \\ \hline \underline{0}^T & 1 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

-) vettore ${}^0k_{i-1} = {}^0R_{i-1}(:, 3)$ (terza colonna della matrice di rotazione della catena cinematica $\{S_0\} \dots \{S_{i-1}\}$)
-) $({}^0O_0P) = {}^0A_m(1:3, 4)$ (v. posizione dell'origine della terna $\{S_m\}$ rispetto a $\{S_0\}$)
-) $({}^0O_0O_{i-1}) = {}^0A_{i-1}(1:3, 4)$ (v. posizione dell'origine della terna $\{S_{i-1}\}$ rispetto a $\{S_0\}$)

per differenza il vettore richiesto nel Jacobiano si calcola come

$${}^0(O_{i-1}P) = ({}^0O_0P) - ({}^0O_0O_{i-1})$$

Dunque il calcolo del Jacobiano è effettuabile in modo completamente sistematico ed automatizzabile

Quello che si ottiene da queste espressioni è la versione in componenti in terna $\{S_0\}$ ossia

$${}^0J_P(q) = [{}^0J_1 \dots {}^0J_i \dots {}^0J_m] \quad \text{con } {}^0J_i = \begin{cases} \begin{bmatrix} {}^0k_{i-1} \\ -\frac{0}{0} \end{bmatrix}, & Y_i \text{ prismatico} \\ \begin{bmatrix} {}^0k_{i-1} \times ({}^0O_{i-1}P) \\ -\frac{0}{{}^0k_{i-1}} \end{bmatrix}, & Y_i \text{ rotoidale} \end{cases}$$

de la porzione "a valle" della catena cinematica seriale, ossia il corpo rigido mobile, viene

soggetto ad un wrench $\underline{w}_{O_{i-1}}$ (ovvero con momento rispetto al polo O_{i-1}) quindi

$$\underline{w}_{O_{i-1}} = \begin{bmatrix} \underline{F} \\ \underline{M}_{O_{i-1}} \end{bmatrix}, \text{ per effetto della presenza di vincoli fra corpo rigido fisso e quello}$$

mobile, solo la componente di forza \underline{F} allineata con \underline{k}_{i-1} se il giunto è prismatico,

solo la componente del momento $\underline{M}_{O_{i-1}}$ allineata con \underline{k}_{i-1} se il giunto è rotoidale

passiva, ossia verrà trasmesso, ossia non si scaricherà sulla struttura, ma verrà

Dunque si potrà scrivere: ricevuto dall'attuatore posto su \mathcal{Y}_i ,

$$\underline{c}_i = \begin{cases} [\underline{k}_{i-1}^T \mid \underline{0}^T] \underline{w}_{O_{i-1}}, & \text{se } \mathcal{Y}_i \text{ è prismatico} \\ [\underline{0}^T \mid \underline{k}_{i-1}^T] \underline{w}_{O_{i-1}}, & \text{se } \mathcal{Y}_i \text{ è rotoidale} \end{cases}$$

Adesso è importante osservare che se il wrench $\underline{w}_{O_{i-1}}$ è in realtà generato da un wrench equivalente applicato in P , allora deve essere

$$\underline{w}_{O_{i-1}} = \underline{w}_{O_{i-1}P} \underline{w}_P = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & \underline{0}_{3 \times 3} \\ \underline{0}_{i-1P} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{F} \\ \underline{M}_P \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\underline{c}_i = \begin{cases} [\underline{k}_{i-1}^T \mid \underline{0}^T] \begin{bmatrix} I & \underline{0} \\ \underline{0}_{i-1P} & I \end{bmatrix} \underline{w}_P = [\underline{k}_{i-1}^T \mid \underline{0}^T] \underline{w}_P & \text{se } \mathcal{Y}_i \text{ è prismatico} \\ [\underline{0}^T \mid \underline{k}_{i-1}^T] \begin{bmatrix} I & \underline{0} \\ \underline{0}_{i-1P} & I \end{bmatrix} \underline{w}_P = [\underline{k}_{i-1}^T (\underline{0}_{i-1P}) \mid \underline{k}_{i-1}^T] \underline{w}_P, & \text{se } \mathcal{Y}_i \text{ è rotoidale} \end{cases}$$

si può definire questa matrice (nelle 2 forme per prismatico e rotoidale) come A_i

$$\text{con } A_i = \begin{cases} [\underline{k}_{i-1}^T \mid \underline{0}^T], & \text{se } \mathcal{Y}_i \text{ è prismatico} \\ [\underline{k}_{i-1}^T (\underline{0}_{i-1P}) \mid \underline{k}_{i-1}^T], & \text{se } \mathcal{Y}_i \text{ è rotoidale} \end{cases}$$

L'equivalenza statica fra il \underline{w}_P ed il effetto sull'attua torce del giunto

vale giunto per giunto, onde

$$\begin{bmatrix} \underline{c}_1 \\ \underline{c}_2 \\ \vdots \\ \underline{c}_i \\ \vdots \\ \underline{c}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \underline{w}_P \quad \text{ovvero} \quad \underline{c} = A \underline{w}_P$$

Stante la forma della A_i , si vede subito che $A_i^T = J_i$ ($A_i = J_i^T$) e che

$A = J^T$, Infatti

•) se J_i è prismatico

$$A_i^T = \begin{bmatrix} k_{i-1} \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

•) se J_i è rotoidale

$$A_i^T = \begin{bmatrix} (O_{i-1}P)^T k_{i-1} \\ \dots \\ k_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(O_{i-1}P) k_{i-1} \\ \dots \\ k_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{i-1} \times (O_{i-1}P) \\ \dots \\ k_{i-1} \end{bmatrix}$$

Allora il Jacobiano gioca un ruolo fondamentale nella cinematica e nella statica

$$\underline{\dot{g}} = J(q) \dot{q} \quad (\text{cinematica})$$

↑
queste veloc. ai giunti
generano questo
auto di moto (twist)
dell'end-effector

$$\underline{\tau} = J^T(q) \underline{w} \quad (\text{statica})$$

↑
questo wrench
genera queste
forze/coppie agli
attuatori, ovvero
richiede queste $\underline{\tau}$
per essere generato.

Nota bene che questo è un bilancio NON
un equilibrio, ossia se voglio generare
un tale wrench con il mio e-e sul mondo
esterno devo applicare le coppie ai giunti
 $\underline{\tau} = J^T(q) \underline{w}$.

Questa proprietà del Jacobiano è definita dualità cineto-statica

Può essere dimostrata anche facendo notare che il lavoro elementare
espletato dall'end-effector che applica un wrench \underline{w}_p su mondo esterno
su uno spostamento elementare $\underline{g}_p dt$, se il sistema è conservativo,
deve essere uguale al lavoro elementare delle forze/coppie $\underline{\tau}$ sugli spostam/
rotazioni elementari dei giunti $\dot{q} dt$, ossia

•) $dW_w = \underline{w}_p^T \underline{g}_p dt = \underline{w}_p^T J_p \dot{q} dt$

•) $dW_\tau = \underline{\tau}^T \dot{q} dt$

eguagliando $dW_w = dW_\tau$

$$\underline{w}_p^T J_p \dot{q} dt = \underline{\tau}^T \dot{q} dt \iff (\underline{w}_p^T J_p - \underline{\tau}^T) \dot{q} dt = 0 \quad \forall \dot{q} dt \neq 0$$

allora $\underline{w}_p^T J_p = \underline{\tau}^T \iff \underline{\tau} = J_p^T \underline{w}_p$

Osservazione: differenza fra Jacobiano geometrico ed analitico*

* analitico non ancora visto

Vediamolo semplicemente * differenza:

- geometrico lega \dot{q} con $\underline{\dot{p}} = \begin{bmatrix} \dot{p}_p \\ \underline{\omega} \end{bmatrix}$, ossia $\begin{bmatrix} \dot{p}_p \\ \underline{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y}_p \\ \dot{y}_\omega \end{bmatrix} \dot{q}$

- analitico lega \dot{q} con $\underline{\dot{z}} = \begin{bmatrix} \dot{z}_p \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$, ossia $\begin{bmatrix} \dot{p}_p \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y}_p \\ \dot{y}_\phi \end{bmatrix} \dot{q}$ ϕ angoli di una qualche param. di $SO(3)$

In sostanza differiscono per il fatto che nel 2° caso si ha, invece della $\underline{\omega}$, le derivate temporali degli angoli ϕ che sono quelli di una qualche parametrizzazione scelta per rappresentare l'orientazione dell'end-effettore.

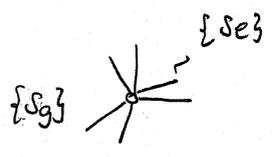
La relazione fra le parti di orientazione di \dot{y} geom e \dot{y} analitico (le porzioni relative alla velocità lineari sono identiche) si trova in base a questa semplice dimostrazione:

$R R^T = I$ ipotizzo dip. rispetto al tempo e derivo $\frac{d}{dt}$, ottenendo

$$R(t) \dot{R}^T(t) = I \rightarrow \dot{R} R^T + R \dot{R}^T = 0$$

$$\dot{R} R^T = -(\dot{R} R^T)^T \text{ allora } \dot{R} R^T \stackrel{\Delta}{=} (\hat{\underline{\omega}}) \stackrel{\Delta}{=} S(\underline{\omega}) \text{ è antisimmetrica}$$

che $\dot{R} R^T$ è la $\hat{\cdot}$ (hat form) della velocità angolare ed evidente se considero



$$[p]_g = R g e [k]_e \text{ ossia } p_g = R g e p_e, p_e = R g e^T p_g$$

$$\dot{p}_g = \dot{R} g e p_e = \dot{R} g e R g e^T p_g$$

ma per corpo che ruota attorno a punto fisso $\dot{p}_g = \underline{\omega}_g e \times p_g = \hat{\underline{\omega}}_g p_g$

$$\text{Allora } \hat{\underline{\omega}}_g e = \dot{R} g e R g e^T$$

Torniamo alla relazione fra i 2 Jacobiani

$R = R(\phi)$ per una scelta della param $\underline{\phi}$ di $SO(3)$, es. Eul ZYZ, $\underline{\phi} = [\psi, \theta, \varphi]^T$

Allora dato che $\hat{\underline{\omega}} = \dot{R} R^T$, $\underline{\omega} = (\hat{\underline{\omega}})^V = (\dot{R} R^T)^V$

$$\text{ma } \dot{R} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial R}{\partial \phi_i} \dot{\phi}_i$$

$$\hat{\underline{\omega}} = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial R}{\partial \phi_i} \dot{\phi}_i \right) R^T = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial R}{\partial \phi_i} R^T \right) \dot{\phi}_i \stackrel{\Delta}{=} \sum_{i=1}^3 \tilde{T}_{0,A_i} \dot{\phi}_i$$

dove appunto $\tilde{T}_{0,A_i} \stackrel{\Delta}{=} \frac{\partial R(\phi)}{\partial \phi_i} R^T(\phi)$; $\tilde{T}_{0,A_i} = (\tilde{T}_{0,A_i})^V = \left(\frac{\partial R}{\partial \phi_i} R^T \right)^V$

$$\underline{\omega} = (\hat{\underline{\omega}})^V = \sum_{i=1}^3 \tilde{T}_{0,A_i} \dot{\phi}_i = [\tilde{T}_{0,A_1} | \tilde{T}_{0,A_2} | \tilde{T}_{0,A_3}] \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \end{bmatrix} \stackrel{\Delta}{=} T_{0,A}(\phi) \dot{\phi}$$

Stante la relazione $\underline{\omega} = T_{0,A}(\underline{\phi}) \dot{\underline{\phi}}$ allora globalmente si può scrivere

$$\underline{p} = \begin{bmatrix} \underline{p}_p \\ \underline{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{3 \times 3} & \mathbb{O}_{3 \times 3} \\ \mathbb{O}_{3 \times 3} & T_{0,A}(\underline{\phi}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{p}_p \\ \dot{\underline{\phi}} \end{bmatrix} = T_A(\underline{\phi}) \begin{bmatrix} \underline{p}_p \\ \dot{\underline{\phi}} \end{bmatrix} = T_A(\underline{\phi}) \underline{z} \quad \text{con } \underline{z} = [\underline{p}^T \ \dot{\underline{\phi}}^T]^T$$

Esempio di calcolo del $T_{0,A}(\underline{\phi})$ nel caso in cui $\underline{\phi}$ ha param. locali di $SO(3)$ Eul ZYZ

$R_{ZYZ}(\psi, \theta, \varphi)$

allora

$$T_{0,A_i} = (T_{0,A_i}(\underline{\phi}))^\vee = \left(\frac{\partial R(\underline{\phi})}{\partial \phi_i} R^T(\underline{\phi}) \right)^\vee$$

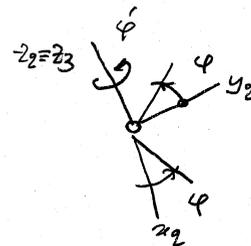
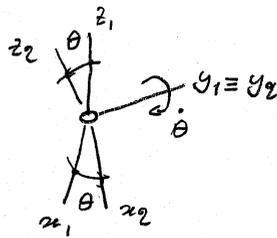
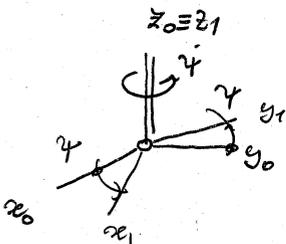
$$\underline{\omega} = (\underline{\dot{\omega}})^\vee = \sum_{i=1}^3 T_{0,A_i} \dot{\phi}_i = [T_{0,A_1} \mid T_{0,A_2} \mid T_{0,A_3}] \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

$$T_{0,A_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad T_{0,A_2} = \begin{bmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \\ 0 \end{bmatrix}; \quad T_{0,A_3} = \begin{bmatrix} \cos \psi \sin \theta \\ \sin \psi \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

Dunque

$$\underline{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \psi & \cos \psi \sin \theta \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \sin \theta \\ 1 & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

Cinematicamente



$$\underline{\omega} = \underline{k}_0 \dot{\psi} + \underline{j}_1 \dot{\theta} + \underline{k}_2 \dot{\varphi}$$

adesso ne scrivo una versione in componenti in $\{S_0\}$, ottenendo

$${}^0[\underline{\omega}] = {}^0[\underline{k}_0] \dot{\psi} + {}^0[\underline{j}_1] \dot{\theta} + {}^0[\underline{k}_2] \dot{\varphi}$$

$${}^0[\underline{k}_0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad {}^0[\underline{j}_1] = {}^0R_1^{-1} [\underline{j}_1] = R_Z(\psi) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$${}^0[\underline{k}_2] = {}^0R_1^{-1} R_2^{-1} [\underline{k}_2] = R_Z(\psi) R_Y(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

allora

$${}^0[\underline{\omega}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\psi} + \begin{bmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta} + \begin{bmatrix} \cos \psi \sin \theta \\ \sin \psi \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} \dot{\varphi} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \psi & \cos \psi \sin \theta \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \sin \theta \\ 1 & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

$$\underline{f} = J(q) \underline{\dot{q}}$$

$$\underline{e} = J^T(q) \underline{w}$$

Il Jacobiano è una matrice $J(q) \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$J(q) = \begin{matrix} \underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ giunti}} \\ \left[\begin{array}{ccc} J_{11} & \dots & J_{1n} \\ J_{21} & \dots & J_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ J_{m1} & \dots & J_{mn} \end{array} \right] \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} J_{11} \\ J_{21} \\ \vdots \\ J_{m1} \end{matrix}} \right\} m \text{ dim del task space}$$

- o) $n > m$, multipl. ridondante
- o) $n < m$, = difettivo
- o) $n = m$, = quadrato

Valori di q per cui rank $J(q) = r < \min(m, n)$ si dicono singolarità,
se $r = \min(m, n) \forall q$ allora si ha singolarità banale

4 sottospazi fondamentali di J

- o) $R(J)$: dove vivono tutti i twist dell'e-e al variare delle velocità ai giunti $\underline{\dot{q}}$; è in \mathbb{R}^m , ha dim r
- o) $N(J)$: dove vivono (sottospazio) delle $\underline{\dot{q}}$ che lasciano fermo (velocità nulla) l'e-e; è in \mathbb{R}^n , ha dim $n-r$ (qui vivono le $\underline{\dot{q}}$ ridondanti)
- o) $R(J^T)$: sottospazio forze/coppie ai giunti generabili applicando un wrench \underline{w} in \mathbb{R}^m , ha dim r
- o) $N(J^T)$: sottospazio dei w. esterni che sono bilanciati da coppie/forze nulle ai giunti (ovvia wrench strutturali) che si applicano sulle strutture; è in \mathbb{R}^n , ha dim $n-r$

Immette si ha (dato che in \mathbb{R}^m è definito prodotto scalare $\underline{e}^T \underline{\dot{q}}$ ed anche in \mathbb{R}^n è definito

$$R(J)^\perp = N(J^T)$$

$$N(J)^\perp = R(J^T)$$

\perp = complemento ortogonale di...

p.s. $\underline{w}^T \underline{f}$ allora ha senso parlare di "ortogonalità" / "reciprocità"

che significa che ad esempio i wrench strutturali ($N(J^T)$) sono complementari alle velocità possibili all'e-e agendo sulle $\underline{\dot{q}}$ ($R(J)$)

e che le velocità ai giunti corrispondenti a unati ridondanti sono complementari alle coppie ai giunti eccitabili da wrench su e-e.

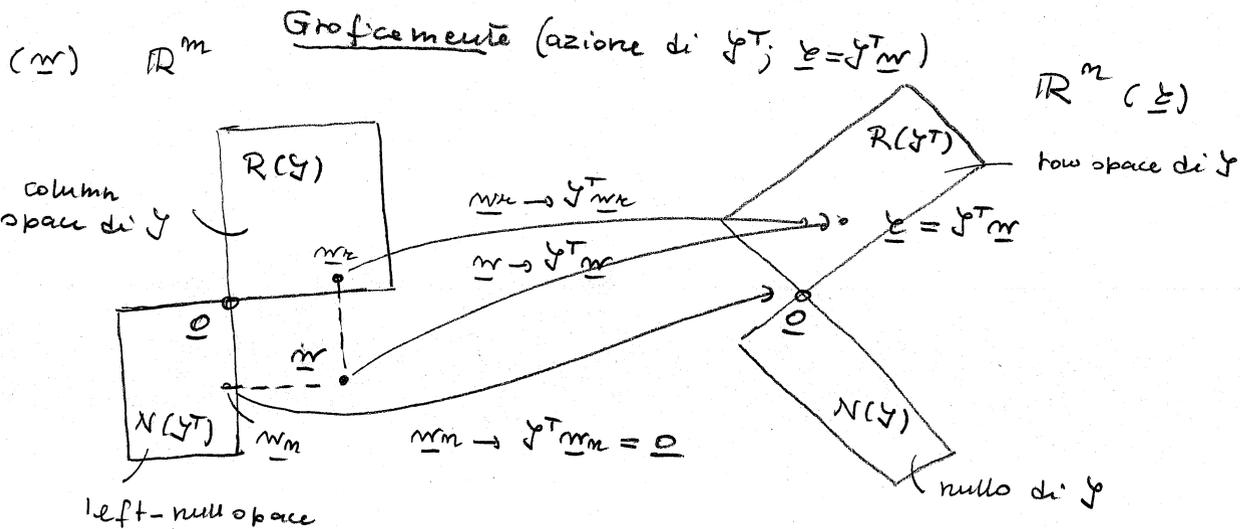
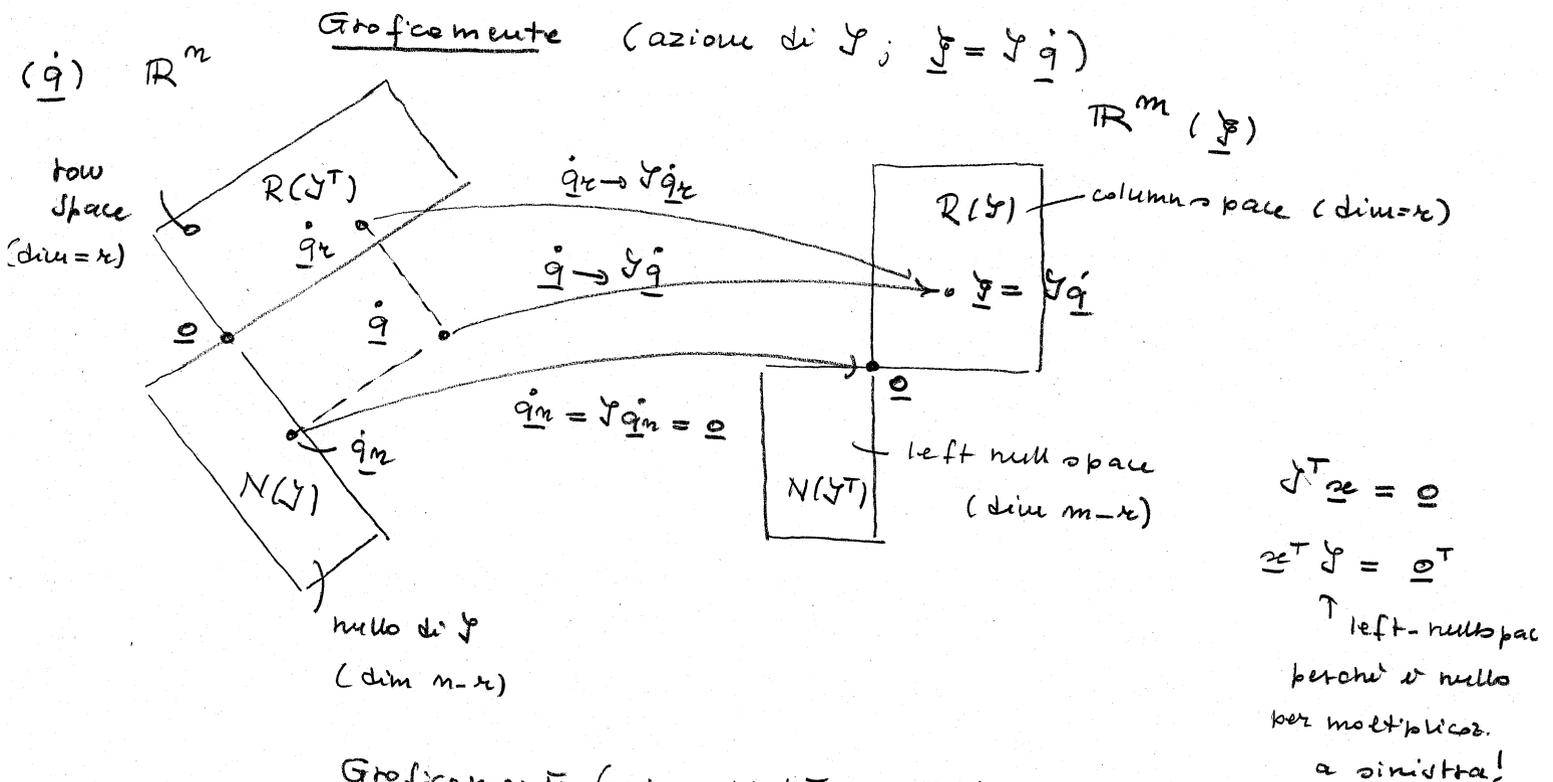
$\text{Imoltre } \begin{matrix} \dim(R(Y)) + \dim(N(Y^T)) = m \\ \text{"}r\text{"} \qquad \qquad \text{"}m-r\text{"} \end{matrix}$

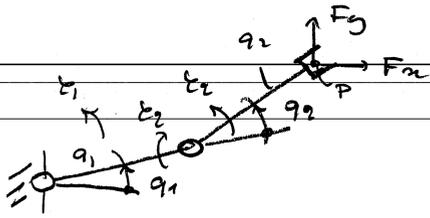
 $\text{e } \dim(R(Y)) = \dim(R(Y^T)) = r$
 $\text{rank}(Y) = \text{rank}(Y^T) = r$

$\begin{matrix} \dim(N(Y)) + \dim(R(Y^T)) = m \\ \text{"}m-r\text{"} \qquad \qquad \text{"}r\text{"} \end{matrix}$

o) la differenza fra la dim dello spazio operatore (m) e dello spazio delle veloc. dell'e-e possibili in una certa configurazione (r) è pari alla dim. del sottospazio dei wrench strutturalmente amorbite

o) diff. giunti (m) e la dim delle coppie ai giunti attivabili da un w. su e-e, è pari alla dim. del sottospazio delle velocità ridondanti





$$Y_P = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

derivata da Y_P^T come riduzione statica.

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ -a_2 s_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{ax} \\ F_y \end{bmatrix}$$

rank $Y_P(q_1, q_2)$? calcolo $\det(Y_P(q_1, q_2)) = a_1 a_2 \sin q_2$

$a_1, a_2 > 0$ (lunghezze), $\sin q_2 = 0$ per $q_2 = 0, q_2 = \pi$

per $q_2 = 0$

$$Y_P(q_1) = \begin{bmatrix} -(a_1 + a_2) s_1 & -a_2 s_1 \\ (a_1 + a_2) c_1 & a_2 c_1 \end{bmatrix}$$

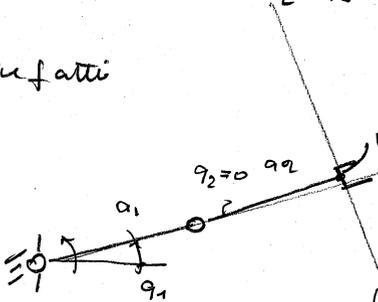
$$\begin{aligned} -(a_1 + a_2) s_1 \alpha_1 + a_2 s_1 \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_1 &= 1, \quad \alpha_2 = -\frac{(a_1 + a_2)}{a_2} \end{aligned}$$

$$N(Y) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{a_1 + a_2}{a_2} \end{bmatrix} \right\}$$

in questa condizione $m=2, r=1$ allora $m-r=1 \exists N(Y^T) \neq 0$
dove vive il wrench strutturale

$$N(Y^T) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} c_1 \\ s_1 \end{bmatrix} \right\}$$

infatti



wrench strutturale

$$q_1 = 1; \quad q_2 = 0 \text{ arco}$$

$$w_P^I = \begin{bmatrix} -(a_1 + a_2) s_1 \\ (a_1 + a_2) c_1 \end{bmatrix}$$

o c'è solo

$$q_1 = 0; \quad q_2 = -\frac{(a_1 + a_2)}{a_2}$$

$$w_P^{II} = \begin{bmatrix} -a_2 s_1 \\ a_2 c_1 \end{bmatrix} \left[-\frac{(a_1 + a_2)}{a_2} \right] = \begin{bmatrix} (a_1 + a_2) s_1 \\ -(a_1 + a_2) c_1 \end{bmatrix}$$

e dunque verifico che

$$w_P = w_P^I + w_P^{II} = 0$$

Ed il wrench strutturale è complementare alle velocità lineari possibili

Per un manipolatore "quadrato" $m=n$ di lungo braccio $m=n=k$ si ha
(considerando Jacob. analitico)

$$\dot{z} = J_A(q) \dot{q} \rightarrow \dot{q} = J_A^{-1}(q) \dot{z}$$

allora se ho da inseguire una certa traiettoria $z_d(t)$ nello spazio operativo allora

$$\dot{z}_d = J_A(q) \dot{q} \rightarrow \dot{q}_d = J_A^{-1} \dot{z}_d \quad \text{legge di inversione}$$

ve definito $e = z_d - z$ allora

$$\dot{e} = \dot{z}_d - \dot{z} = \dot{z}_d - J_A J_A^{-1} \dot{z}_d = \underline{0} \quad \text{integratore, invers. non perfetta, errore in integrazione porta ad un div. dell'errore}$$

ve invece faccio

$$\dot{q}_d = J_A^{-1}(z_d + k e)$$

allora

$$\dot{e} = \dot{z}_d - \dot{z} = \dot{z}_d - J_A \dot{q}_d = \dot{z}_d - J_A J_A^{-1}(z_d + k e) = -k e$$

con $k = \text{diag}(k_1, \dots, k_m)$ $k_i > 0$ allora

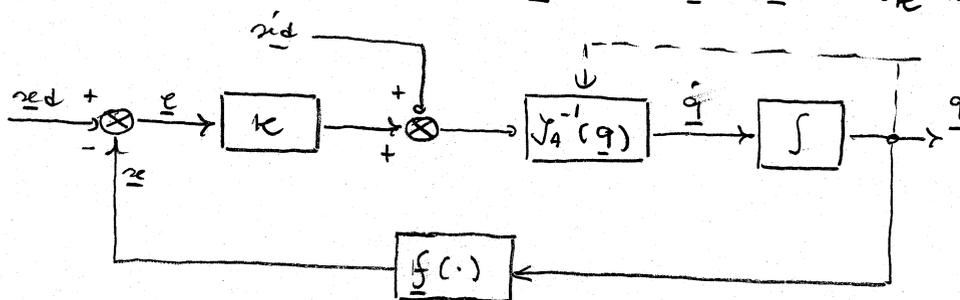
$$e_i(t) = e^{-k_i t} e_i(0)$$

Dunque la legge \dot{q}_d si può usare per conoscere le f.u. del tempo, ossia

$$q(t) = \int_0^t \dot{q}(j) dt + q(0)$$

ovvero numericamente, es. con Forward-Euler,

$$q_{k+1} = q_k + \Delta t \dot{q}_k \quad \text{dove} \quad \dot{q}_k = J(q_k)^{-1} \dot{z}_k = J_k^{-1} \dot{z}_k$$



in TD

$$\dot{e} = -k e \rightarrow \underline{e} \approx \frac{e_{k+1} - e_k}{\Delta t} \rightarrow e_{k+1} = (I - k \Delta t) e_k$$

$$k_i = 1 - k_i \Delta t \quad \text{TD da AS} \quad |k| = |1 - k_i \Delta t| < 1 \rightarrow k < \frac{2}{\Delta t}$$

dunque d'n. + veloce dell'errore legato al tempo di discretizzazione.

Altro schema di inversione cinematica risulta

$$\dot{q}_d = J_A^T(K \underline{e})$$

per dim. convergenza si usa metodo diretto di Lyapunov

$$V(\underline{e}) = \frac{1}{2} \underline{e}^T K \underline{e} \quad , \quad K = K^T, \quad K > 0 \text{ (P.D.)}$$

$$V(\underline{e}) > 0 \quad \forall \underline{e} \neq 0, \quad V(0) = 0$$

$$\text{derivo: } \dot{V} = \underline{e}^T K \dot{\underline{e}} = \underline{e}^T K \{ \dot{\underline{x}}_d - J_A \dot{\underline{q}} \}$$

se scelgo una: $\dot{\underline{q}} = \dot{\underline{q}}_d = J_A^T K \underline{e}$ ottengo:

$$\dot{V} = \underline{e}^T K \dot{\underline{x}}_d - \underline{e}^T K J_A J_A^T K \underline{e}$$

caso 1 se $\dot{\underline{x}}_d = 0$, omnia riferim. di posizione $\underline{x}_d = \text{cost}$ allora

$$\dot{V} = - \underline{e}^T K J_A J_A^T K \underline{e} < 0$$

allora con J_A rango pieno $K J_A J_A^T K > 0$ e per L. traettorie conv. a $\underline{e} = 0$

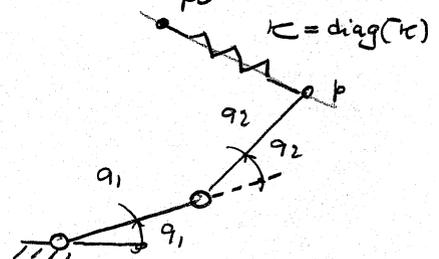
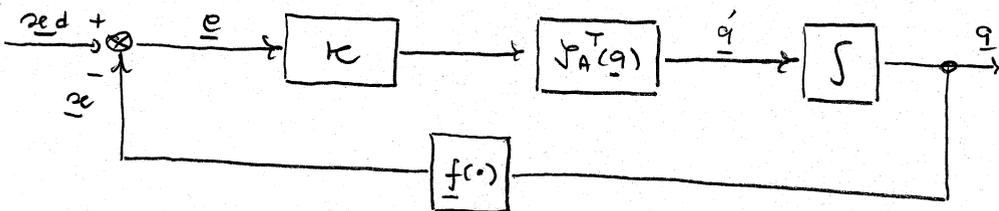
Nel caso però che J_A no rango pieno, omnia $N(J_A^T) \neq 0$ allora se $K \underline{e} \in N(J_A^T)$

$\dot{V} = 0$ con $\underline{e} \neq 0$. In questo caso algoritmo va in stallo e non si raggiunge \underline{x}_d .

caso 2 se $\dot{\underline{x}}_d \neq 0$ in generale termine $\underline{e}^T K \dot{\underline{x}}_d$ non dà sa che segno ha e quindi non si ha garanzia che $\dot{V} < 0$.

interpretazione "fisica" $\dot{\underline{q}} = \dot{\underline{e}} = J^T K (p_d - p)$

schema con J^T



$$\underline{n} = \mathcal{J}(\underline{q}) \dot{\underline{q}}, \quad \mathcal{J} \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad m < n$$

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{11} & \mathcal{J}_{12} & \dots & \mathcal{J}_{1m} \\ \mathcal{J}_{m1} & \mathcal{J}_{m2} & \dots & \mathcal{J}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_m \end{bmatrix}$$

ho infinite soluzioni (se $m=n$, ∞^{n-m}) allora posso cercare soluzioni $\dot{\underline{q}}$ ottima

$$\dot{\underline{q}}^* = \arg \min_{\dot{\underline{q}}} g(\dot{\underline{q}})$$

$$\text{s.t. } \underline{n} = \mathcal{J} \dot{\underline{q}}$$

con, ad esempio, $g(\dot{\underline{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^T W \dot{\underline{q}} \quad W = W^T > 0$.

Risolvero con metodo dei multipl. di Lagrange

$$L(\dot{\underline{q}}, \underline{\lambda}) = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^T W \dot{\underline{q}} + \underline{\lambda}^T (\underline{n} - \mathcal{J} \dot{\underline{q}})$$

Nuovo pb

$$(\dot{\underline{q}}, \underline{\lambda})^* = \arg \min_{\dot{\underline{q}}, \underline{\lambda}} L(\dot{\underline{q}}, \underline{\lambda})$$

tanto globalm. e' una soluz. ed il suo trasposto e' uguale a se' stesso.

on'a. c.n.

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \underline{\lambda}} \right)^T = \underline{0} \in \mathbb{R}^m \quad [(\underline{n} - \mathcal{J} \dot{\underline{q}})^T]^T = \underline{n} - \mathcal{J} \dot{\underline{q}} = \underline{0} \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{q}}} \right)^T = \underline{0} \in \mathbb{R}^m \quad \dot{\underline{q}}^T W - \underline{\lambda}^T \mathcal{J} = \underline{0}^T \rightarrow W \dot{\underline{q}} = \mathcal{J}^T \underline{\lambda} \rightarrow \dot{\underline{q}} = W^{-1} \mathcal{J}^T \underline{\lambda} \quad (2)$$

allora (2) in (1)

$$\underline{n} = \mathcal{J} W^{-1} \mathcal{J}^T \underline{\lambda} \quad \text{hp che } \mathcal{J} W^{-1} \mathcal{J}^T \text{ invertibile allora}$$

$$\underline{\lambda} = (\mathcal{J} W^{-1} \mathcal{J}^T)^{-1} \underline{n} \quad \text{in (2)}$$

$$\dot{\underline{q}} = W^{-1} \mathcal{J}^T (\mathcal{J} W^{-1} \mathcal{J}^T)^{-1} \underline{n} \quad \text{soluzione in fatto}$$

$$\mathcal{J} \dot{\underline{q}} = \mathcal{J} W^{-1} \mathcal{J}^T (\mathcal{J} W^{-1} \mathcal{J}^T)^{-1} \underline{n} = \underline{n}$$

$$W^{-1} \mathcal{J}^T (\mathcal{J} W^{-1} \mathcal{J}^T)^{-1} = \mathcal{J}_W^R \quad \text{in fatto } \mathcal{J} \mathcal{J}_W^R = \mathbf{I}_m$$

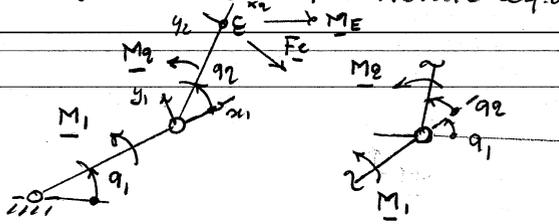
con $W = \mathbf{I}$

$$\mathcal{J}_W^R = \mathcal{J}^T (\mathcal{J} \mathcal{J}^T)^{-1}$$

$$\dot{\underline{q}} = \mathcal{J}_W^R \underline{n} = \mathcal{J}^+ \underline{n} \quad \text{soluz. che minimizza localmente la norma 2 delle} \\ \text{velocita' ai giunti}$$

||| Piccolo esercizio sul calcolo delle \underline{e} in $\underline{e} = \underline{J}^T \underline{w}$ quando ho coppie "non interne" 22

Da PLV, adesso scritto per trovare eq. di equilibrio (non bilancio)



\underline{M}_1 coppia esterna (da telaio, corpo 0 su 1)
 \underline{M}_2 = interna (da corpo 1 su 2)

PLV x equilibrio:

$$\delta L_e + \delta L_m = 0$$

↑
 var. virt. da \underline{w}_E
 ↓
 var. virt. da attuatori sui giunti

con

$$\delta L_e = \delta \underline{e}_E^T \underline{w}_E = \delta \underline{x}_E^T \underline{F}_E + \delta \underline{e}_2^T \underline{M}_E$$

$$\delta L_m = \delta \underline{e}_1^T \underline{M}_1 + \delta \underline{e}_2^T \underline{M}_2$$

Vediamo cosa sono le varie quantità:

$$\delta \underline{e}_1 = \text{rot. virtuale (vettore)} = \delta q_1 \underline{k}_0 \quad (\text{del 1° giunto})$$

$$\delta \underline{e}_2 = \delta q_1 \underline{k}_0 + \delta q_2 \underline{k}_1 \quad (\text{del 2° giunto})$$

$$\delta \underline{x}_E = \begin{bmatrix} \delta \underline{x}_E \\ \delta \underline{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{v}_E \delta t \\ \underline{w}_2 \delta t \end{bmatrix} = \underline{J}_E(\underline{q}) \delta \underline{q} = \begin{bmatrix} \underline{J}_E(\underline{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \end{bmatrix}$$

Nota

$$\delta L_e = \delta \underline{q}^T \underline{J}_E^T(\underline{q}) \underline{w}_E$$

$$\begin{aligned} \delta L_m &= \delta q_1 \underline{k}_0^T \underline{M}_1 + (\delta q_1 \underline{k}_0^T + \delta q_2 \underline{k}_1^T) \underline{M}_2 = \\ &= \delta q_1 (\underline{k}_0^T \underline{M}_1 + \underline{k}_0^T \underline{M}_2) + \delta q_2 \underline{k}_1^T \underline{M}_2 = \\ &= [\delta q_1 \quad \delta q_2] \begin{bmatrix} \underline{k}_0^T (\underline{M}_1 + \underline{M}_2) \\ \underline{k}_1^T \underline{M}_2 \end{bmatrix} = \delta \underline{q}^T \underline{e}^* \end{aligned}$$

Dunque per PLV

$$\delta L_e + \delta L_m = \delta \underline{q}^T (\underline{J}_E^T(\underline{q}) \underline{w}_E + \underline{e}^*) = 0$$

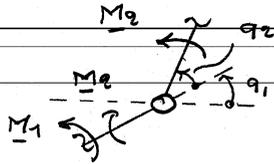
$$\forall \delta \underline{q} \quad \text{allora} \quad \underline{e}^* = - \underline{J}_E^T(\underline{q}) \underline{w}_E \quad \text{- Equilibrio -}$$

↑
 coppia ai giunti (nella direzione degli assi degli attuatori) che attuatori fanno per avere equilibrio
 ↑
 momento che mondo esterno applica a end-effector in E (\underline{w}_E)

$$\text{Infatti} \quad \underline{e}^* + \underline{J}_E^T(\underline{q}) \underline{w}_E = 0$$

Se, per principio di azione e reazione (P.A.R.), $\underline{w}_E = - \underline{w}_E$ e cioè che robot applica su mondo esterno, allora si recupera la forma del bilancio:

$$\underline{e}^* = - \underline{J}_E^T(\underline{q}) \underline{w}_E = \underline{J}_E^T(\underline{q}) \underline{w}_E \quad \text{- bilancio -}$$



$$\delta L_e \text{ come prima} = \delta \underline{q}^T \underline{J}_E^T(\underline{q}) \underline{w}_E$$

$$\begin{aligned} \delta L_m &= \delta \underline{e}_1^T (\underline{M}_1 - \underline{M}_2) + \delta \underline{e}_2^T \underline{M}_2 = \delta q_1 \underline{k}_0^T (\underline{M}_1 - \underline{M}_2) + \\ &+ (\delta q_1 \underline{k}_0^T + \delta q_2 \underline{k}_1^T) \underline{M}_2 = \delta q_1 \underline{k}_0^T \underline{M}_1 + \delta q_2 \underline{k}_1^T \underline{M}_2 = \\ &= \begin{bmatrix} \delta q_1 & \delta q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{k}_0^T \underline{M}_1 \\ \underline{k}_1^T \underline{M}_2 \end{bmatrix} = \delta \underline{q}^T \underline{e} \end{aligned}$$

allora per PLV:

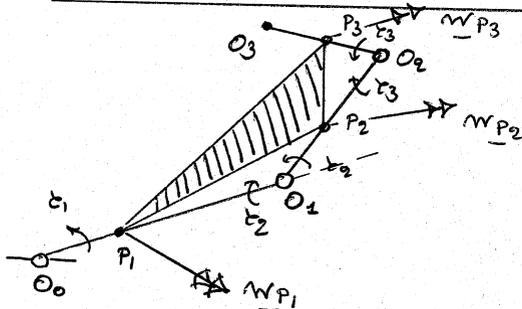
$$\delta L_e + \delta L_m = \delta \underline{q}^T (\underline{J}_E^T(\underline{q}) \underline{w}_E + \underline{e}) = 0$$

$$\forall \delta \underline{q} \text{ allora } \underline{e} = -\underline{J}_E^T(\underline{q}) \underline{w}_E$$

$$\text{con } \underline{\tilde{w}}_E = -\underline{w}_E \quad \underline{e} = \underline{J}_E^T(\underline{q}) \underline{\tilde{w}}_E$$

\underline{e} "classica" nel senso che la \underline{e}_i è la coppia applicata sul link i (da link $i-1$) nella direzione dell'asse di vettore \underline{k}_{i-1} (stanno impiegando la convenzione di Denavit-Hartenberg)

Esempio con interazioni "whole-limb"



o) wrench \underline{w}_{P_i} applicati nei punti P_i

$$\text{o) } \underline{w}_{P_i} = \begin{bmatrix} \underline{F}_{P_i} \\ \underline{M}_{P_i} \end{bmatrix}$$

ris applicate in P_i ↑ mom ws. rispetto a P_i

le wrench \underline{w}_{P_i} viene scritto rispetto al polo O_i (origine del frame $\{S_i\}$ solidale al link i , a cui appunto è applicato wrench \underline{w}_{P_i})

$$\underline{w}_{O_i} = \underline{W}_{O_i P_i} \underline{w}_{P_i} \quad \text{con, al solito, } \underline{W}_{O_i P_i} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{3 \times 3} & \underline{O}_{3 \times 3} \\ \underline{0}_{i P_i} & \underline{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

Poi definisco il generico Jacobiano

relativo al frame $\{S_i\}$ (polo O_i) con $i=1,2,3$

$$\underline{J}_{O_i}(\underline{q}) = \begin{bmatrix} \underline{J}_{O_i}^{POS}(\underline{q}) \\ \underline{J}_{O_i}^{OR}(\underline{q}) \end{bmatrix}$$

$$\text{dove } \underline{J}_{O_i}^{POS} = \begin{bmatrix} \underline{J}_1^{POS} & \underline{J}_2^{POS} & \dots & \underline{J}_i^{POS} & \underline{0} & \dots & \underline{0} \end{bmatrix}$$

$$\underline{J}_{O_i}^{OR} = \begin{bmatrix} \underline{J}_1^{OR} & \underline{J}_2^{OR} & \dots & \underline{J}_i^{OR} & \underline{0} & \dots & \underline{0} \end{bmatrix}$$

$$J_j^{POS} = \begin{cases} \underline{k}_{j-1}, & \text{se prismatico} \\ \underline{k}_{j-1} \times (\underline{O}_i - \underline{O}_{j-1}), & \text{se rotoidale} \end{cases}$$

$$J_j^{OR} = \begin{cases} \underline{0}, & \text{se prismatico} \\ \underline{k}_{j-1}, & \text{se rotoidale} \end{cases}$$

con $0 \leq j \leq i$

In questo modo, per sovrapposizione degli effetti, si ha:

$$\underline{\delta} = \sum_{i=1}^3 J_{O_i}^T(\underline{q}) W_{O_i P_i}(\underline{q}) \underline{w}_{P_i}$$

In forma espansa si avrà una struttura del tipo:

$$\underline{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{J}_1^{POS} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{J}_1^{OR} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix}^T W_{O_1 P_1} \underline{w}_{P_1} + \begin{bmatrix} \underline{J}_1^{POS} & \underline{J}_2^{POS} & \underline{0} \\ \underline{J}_1^{OR} & \underline{J}_2^{OR} & \underline{0} \end{bmatrix}^T W_{O_2 P_2} \underline{w}_{P_2} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \underline{J}_1^{POS} & \underline{J}_2^{POS} & \underline{J}_3^{POS} \\ \underline{J}_1^{OR} & \underline{J}_2^{OR} & \underline{J}_3^{OR} \end{bmatrix}^T W_{O_3 P_3} \underline{w}_{P_3} =$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{J}_1^{POS T} & \underline{J}_1^{OR T} \\ \underline{0}^T & \underline{0}^T \\ \underline{0}^T & \underline{0}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} \\ \underline{O}_{\underline{1}P_1} & \underline{I} \end{bmatrix} \underline{w}_{P_1} + \dots$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{J}_1^{POS T} + \underline{J}_1^{OR T} & \underline{O}_{\underline{1}P_1} & \underline{J}_1^{OR T} \\ \underline{0}^T & & \underline{0}^T \\ \underline{0}^T & & \underline{0}^T \end{bmatrix}}_{\text{risulta essere } J_{P_1}^T(\underline{q})} \underline{w}_{P_1} +$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{J}_1^{POS T} + \underline{J}_1^{OR T} & \underline{O}_{\underline{2}P_2} & \underline{J}_1^{OR T} \\ \underline{J}_2^{POS T} + \underline{J}_2^{OR T} & \underline{O}_{\underline{2}P_2} & \underline{J}_2^{OR T} \\ \underline{0}^T & & \underline{0}^T \end{bmatrix}}_{\text{risulta essere } J_{P_2}^T(\underline{q})} \underline{w}_{P_2} +$$

risultate
effetti
 $\underline{J}_{P_3}^T(\underline{q})$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{J}_1^{POS T} + \underline{J}_1^{OR T} & \underline{O}_{\underline{3}P_3} & \underline{J}_1^{OR T} \\ \underline{J}_2^{POS T} + \underline{J}_2^{OR T} & \underline{O}_{\underline{3}P_3} & \underline{J}_2^{OR T} \\ \underline{J}_3^{POS T} + \underline{J}_3^{OR T} & \underline{O}_{\underline{3}P_3} & \underline{J}_3^{OR T} \end{bmatrix}}_{\text{risultate effetti}} \underline{w}_{P_3}$$

Dato il problema di det $\underline{\dot{q}} \mid \underline{v} = \underline{Y} \underline{\dot{q}}$ con $\underline{Y} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m < n$

allora soluz di minima norma risulta:

$$\underline{\dot{q}} = \underline{Y}^+ \underline{v} \quad (\text{soluz che minimizza localmente la } \|\cdot\|_2 \text{ della velocità ai giunti})$$

A queste soluz (particolari della completa) possiamo sommare soluz generale delle eq. omogenea associate ossia soluz di

$$\underline{Y} \underline{\dot{q}} = \underline{0} \quad \text{se} \quad \underline{\dot{q}} \mid \underline{Y} \underline{\dot{q}} = \underline{0} \quad \text{viene scritta come} \quad \underline{P} \underline{\dot{q}}_0 \quad \text{con} \quad \mathcal{R}(\underline{P}) \equiv \mathcal{N}(\underline{Y})$$

$$\underline{Y} (\underbrace{\underline{Y}^+ \underline{v}}_{\text{sol. ne partic. della completa}} + \underbrace{\underline{P} \underline{\dot{q}}_0}_{\text{generale della omog. associate}}) = \underbrace{\underline{Y} \underline{Y}^+}_{\mathbb{I}_{m \times m}} \underline{v} + \underbrace{\underline{Y} \underline{P}}_{\underline{0}} \underline{\dot{q}}_0 = \underline{v}$$

Dunque forma generale della soluzione della cin. inversa per mov. ridondanti

$$\underline{\dot{q}} = \underline{Y}^+ \underline{v} + \underline{P} \underline{\dot{q}}_0 \quad \underline{P} = \text{proiettore nel nullo di } \underline{Y}$$

Questa forma poteva essere trovata definendo questo problema di ottimizzazione:

$$\underline{\dot{q}}^* = \arg \min_{\underline{\dot{q}}} g(\underline{\dot{q}}) \quad \text{con} \quad g(\underline{\dot{q}}) = \frac{1}{2} (\underline{\dot{q}} - \underline{\dot{q}}_0)^T \underline{W} (\underline{\dot{q}} - \underline{\dot{q}}_0)$$

s.t. $\underline{v} = \underline{Y}(\underline{\dot{q}}) \underline{\dot{q}}$

allora sempre con i moltiplicatori di Lagrange:

$$\mathcal{L}(\underline{\dot{q}}, \underline{\lambda}) = \frac{1}{2} (\underline{\dot{q}} - \underline{\dot{q}}_0)^T \underline{W} (\underline{\dot{q}} - \underline{\dot{q}}_0) + \underline{\lambda}^T (\underline{v} - \underline{Y} \underline{\dot{q}})$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\lambda}} \right)^T = \underline{0} \in \mathbb{R}^m \iff \underline{v} - \underline{Y} \underline{\dot{q}} = \underline{0} \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\dot{q}}} \right)^T = \underline{0} \in \mathbb{R}^n \iff (\underline{\dot{q}} - \underline{\dot{q}}_0)^T \underline{W} - \underline{\lambda}^T \underline{Y} = \underline{0}^T \quad \text{ovvia} \quad \underline{W} (\underline{\dot{q}} - \underline{\dot{q}}_0) - \underline{Y}^T \underline{\lambda} = \underline{0} \quad (2)$$

Alte (2) in (1)

$$\underline{\dot{q}} = \underline{\dot{q}}_0 + \underline{W}^{-1} \underline{Y}^T \underline{\lambda}$$

$$\underline{v} = \underline{Y} \underline{\dot{q}}_0 + \underline{Y} \underline{W}^{-1} \underline{Y}^T \underline{\lambda}$$

Null'bp che \underline{Y} sia rango pieno righe (m) allora

$$\underline{\lambda} = (\underline{Y} \underline{W}^{-1} \underline{Y}^T)^{-1} (\underline{v} - \underline{Y} \underline{\dot{q}}_0) \quad \text{in (2)}$$

$$\underline{\dot{q}} = \underline{\dot{q}}_0 + \underbrace{\underline{W}^{-1} \underline{Y}^T (\underline{Y} \underline{W}^{-1} \underline{Y}^T)^{-1}}_{\underline{Y}_w^R} (\underline{v} - \underline{Y} \underline{\dot{q}}_0)$$

allora

\underline{P} — proiettore nel nullo di \underline{Y}

$$\underline{\dot{q}} = \underline{\dot{q}}_0 + \underline{Y}_w^R \underline{v} - \underline{Y}_w^R \underline{Y} \underline{\dot{q}}_0 = \underline{Y}_w^R \underline{v} + (\underline{I} - \underline{Y}_w^R \underline{Y}) \underline{\dot{q}}_0$$

n.b. $\underline{Y}_w^R \underline{Y}$ è proiettore nel $\mathcal{R}(\underline{Y}^T)$

allora $(\underline{I} - \underline{Y}_w^R \underline{Y})$ è $\underline{I} \underline{\dot{q}}_0$ (vettore di \mathbb{R}^n) — la sua proiezione nel $\mathcal{R}(\underline{Y}^T)$; rimane ciò che sta nel complementare ortogonale ossia ciò che sta in $\mathcal{N}(\underline{Y})$ dunque $(\underline{I} - \underline{Y}_w^R \underline{Y})$ è proiettore nel $\mathcal{N}(\underline{Y})$.

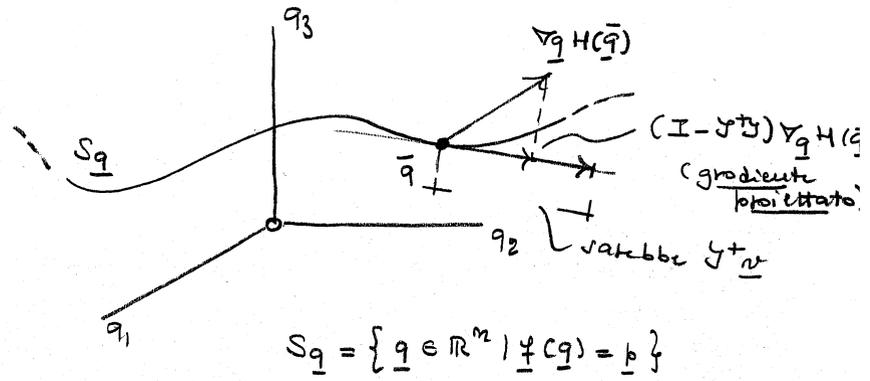
$$\dot{\underline{q}} = \underbrace{Y^+ \underline{v}}_{\text{soluzione di minima norma}} + \underbrace{(I - Y^+ Y) \dot{\underline{q}}_0}_{\text{soluzione dell'omof. associate (auto movimento)}}$$

Come scegliere $\dot{\underline{q}}_0$?

• fatto in modo da massimizzare localmente una fine obiettivo

es. $H(\underline{q}) \in \mathbb{R}$, fine obiettivo derivabile

allora $\dot{\underline{q}}_0 = k_0 \nabla_{\underline{q}} H(\underline{q})$



se poi $\underline{p}(t) = \bar{\underline{p}}$ (fisso) e $\underline{v} = \underline{0}$

allora $\dot{\underline{q}} = (I - Y^+ Y) \nabla_{\underline{q}} H(\underline{q})$

quindi end-effector sta fermo ma braccio si riconfigura in modo da max localmente la $H(\underline{q})$.

Possibili scelte di $H(\underline{q})$

$H(\underline{q}) = \text{sgn} [\det(Y(\underline{q}) Y^T(\underline{q}))] \rightarrow$ stare lontano dalle singularità

$H(\underline{q}) = - \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m \frac{q_i - \bar{q}_i}{q_{iM} - q_{iM}}$ \rightarrow si cerca di portare ogni giunto verso il centro della corsa

$H(\underline{q}) = \min_{\substack{\underline{p} \in \text{robot} \\ \underline{0} \in \text{ostacolo}}} \| \underline{f}(\underline{q}) - \underline{0} \| \rightarrow$ si cerca di evitare la collisione del manip. con un ostacolo.

Questi sono criteri per scegliere $\dot{\underline{q}}_0$ data la ridondanza

Altra tecnica si basa su "spazio di lavoro aumentato"

a. task iniziale $\underline{f}(\underline{q}) = \underline{p}$, $\underline{f} \in \mathbb{R}^m$, $\underline{q} \in \mathbb{R}^n$

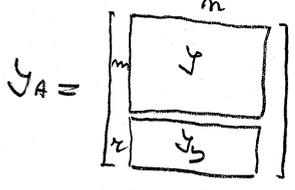
intermini differenziali $\underline{v} = Y(\underline{q}) \dot{\underline{q}}$, $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$

b. introduce task aggiuntivo

$\underline{f}_2(\underline{q}) = \underline{y}$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^r$, $r \leq n - m$

c. dunque il task aumentato risulta

$$\underline{p}_A \triangleq \begin{bmatrix} \underline{p} \\ \underline{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}(\underline{q}) \\ \underline{f}_2(\underline{q}) \end{bmatrix} \rightarrow \dot{\underline{p}}_A = \begin{bmatrix} \dot{\underline{p}} \\ \dot{\underline{p}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y(\underline{q}) \\ Y_2(\underline{q}) \end{bmatrix} \dot{\underline{q}} = Y_A(\underline{q}) \dot{\underline{q}}$$



$Y_A \in \mathbb{R}^{(m+r) \times n}$

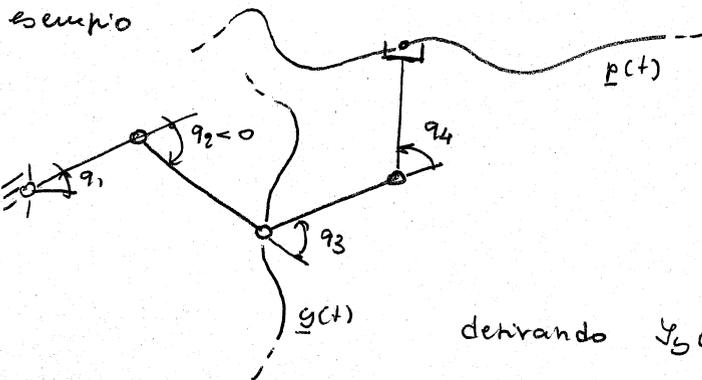
sol. in nella forma $\dot{\underline{q}} = Y_A^+ \dot{\underline{p}}_A$

$$\dot{q} = J_A^{-1} \dot{p}_A$$

o) vantaggi: buon controllo della soluzione inversa, lo scheme è ripetibile per moti ciclici

o) svantaggi: si possono introdurre singolarità algoritmiche quando nonostante $\text{rank}(J) = m$, $\text{rank}(J_y) = r$ si ha $\text{rank}(J_A) < m + r$

Per evitare ciò occorre che lo spazio delle righe di J e di J_y , (ovvia delle colonne di J^T e di J_y^T) siano disgiunti, ossia $R(J^T) \cap R(J_y^T) = \emptyset$. Queste condizioni è non facile da ottenere globalmente



$m = 2, n = 4$
 ► aggiungo condizioni che ultima link deve stare in verticale

$$f_y(q) = \sum_{i=1}^4 q_i = \pi/2$$

$$\text{derivando } J_y(q) \dot{q} = [1 \ 1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = 0$$

altra scelta potrebbe essere che O_2 segue traiettoria rosa

$$\dot{p} = J(q_1, \dots, q_4) \dot{q}$$

$$\dot{q} = J_y(q_1, q_2) \dot{q}$$

con

$$\dot{p}_A = J_A(q) \dot{q} = \begin{bmatrix} J_{12} & J_{34} \\ J_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix}$$

$$\text{con } J_{12} = J(1, 1:2); \quad J_{34} = J(1, 3:4)$$

J_y completo

q_3 e q_4 non hanno effetto su posizione di O_2 .

Strategia a priorità di compito

compito originale $\dot{r} = J \dot{q}$ ha priorità maggiore del compito aggiuntivo $\dot{q} = J_y \dot{q}$

o) calcolo queste strutture delle soluzioni che assieme soddisfaccino compito prim.

$$\dot{q} = J^+ \dot{r} + (I - J^+ J) \dot{q}_0$$

o) \dot{q}_0 lo calcolo da compito aggiuntivo $[I - J^+ J] = P_J$

$$\dot{q} = J_y \dot{q} = J_y [J^+ \dot{r} + (I - J^+ J) \dot{q}_0] = J_y J^+ \dot{r} + J_y P_J \dot{q}_0$$

guardiamo queste eq. come $\dot{q} - J_y J^+ \dot{r} = J_y P_J \dot{q}_0$

chiamiamo

$$\tilde{\underline{u}}_y = \underline{\dot{q}} - \underline{Y}_y \underline{Y}^T \underline{u} \quad ; \quad \tilde{\underline{Y}}_y = \underline{Y}_y \underline{P}_y \quad \text{allora} \quad \tilde{\underline{u}}_y = \tilde{\underline{Y}}_y \underline{\dot{q}}_0$$

allora questo risulta (come sol. in completa)

$$\underline{\dot{q}}_0 = \underbrace{\tilde{\underline{Y}}_y^+ \tilde{\underline{u}}_y}_{\text{sol. a norme minima che verifica ambo i compiti}} + \underbrace{(\underline{I} - \tilde{\underline{Y}}_y^+ \tilde{\underline{Y}}_y) \underline{\dot{q}}_1}_{\text{sol. delle omop. associate } \tilde{\underline{Y}}_y \underline{\dot{q}}_0 = \underline{0} \text{ (autonom, che non alterano entrambi i compiti)}}$$

$\underline{\dot{q}}_1$ a disposizione x uterion compiti a fronte + bassa

sol. a norme minima che verifica ambo i compiti

sol. delle omop. associate $\tilde{\underline{Y}}_y \underline{\dot{q}}_0 = \underline{0}$ (autonom, che non alterano entrambi i compiti)

In definitiva:

$$\underline{\dot{q}} = \underline{Y}^+ \underline{u} + (\underline{I} - \underline{Y}^+ \underline{Y}) \tilde{\underline{Y}}_y^+ (\underline{\dot{q}} - \underline{Y}_y \underline{Y}^+ \underline{u}) + (\underline{I} - \underline{Y}^+ \underline{Y}) (\underline{I} - \tilde{\underline{Y}}_y^+ \tilde{\underline{Y}}_y) \underline{\dot{q}}_1$$

per dato che $\tilde{\underline{Y}}_y = \underline{Y}_y \underline{P}_y$ il termine

$$\underbrace{(\underline{I} - \underline{Y}^+ \underline{Y})}_{C} \underbrace{[\underline{Y}_y \underline{P}_y]^+}_{BC} = [\underline{Y}_y \underline{P}_y]^+$$

$$C [BC]^+ = [BC]^+ \text{ se } C \text{ idempotente}$$

dunque alla fine

$$\underline{\dot{q}} = \underline{Y}^+ \underline{u} + \tilde{\underline{Y}}_y^+ (\underline{\dot{q}} - \underline{Y}_y \underline{Y}^+ \underline{u}) + (\underline{I} - \underline{Y}^+ \underline{Y}) (\underline{I} - \tilde{\underline{Y}}_y^+ \tilde{\underline{Y}}_y) \underline{\dot{q}}_1$$

$\underline{\dot{q}}_1$ a disposiz x uterion compiti a + bassa pronta.

III Analisi di manipolabilita' cinematica III

$\underline{u} = \underline{Y}(\underline{q}) \underline{\dot{q}}$ caso con $\underline{Y} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m = n = r$ ma non vicini ad una singolarita' ossia σ_m (val. singolar + piccolo) $\sigma_m \approx 0$.

allora posso effettuare una

decomposizione ai valori singolari (SVD, Singular Value Decomposition) cosicche'

$$\underline{Y} = \underline{U} \underline{\Sigma} \underline{V}^T \quad \underline{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad \underline{U} \underline{U}^T = \underline{I}_m; \quad \underline{U} = [\underline{u}_1 \dots \underline{u}_m]; \quad \underline{u}_i \text{ autovett. di } \underline{Y} \underline{Y}^T$$

$$\underline{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \underline{V} \underline{V}^T = \underline{I}_n; \quad \underline{V} = [\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n]; \quad \underline{v}_i \text{ autovett. di } \underline{Y}^T \underline{Y}$$

in generale $r = \text{rank}(\underline{Y}) \leq \min\{m, n\}$

$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ r autor. di $\underline{Y} \underline{Y}^T$ $r =$ di $\underline{Y}^T \underline{Y}$

$$\underline{U} = [\underbrace{\underline{u}_1 \dots \underline{u}_r}_{\text{base per il } R(\underline{Y}) \text{ (r colonne)}} \quad \underbrace{\underline{u}_{r+1} \dots \underline{u}_m}_{\text{base per il } N(\underline{Y}^T) \text{ (m-r colonne)}}]$$

$$\underline{V} = [\underbrace{\underline{v}_1 \dots \underline{v}_r}_{\text{base per il } R(\underline{Y}^T) \text{ (r colonne)}} \quad \underbrace{\underline{v}_{r+1} \dots \underline{v}_n}_{\text{base per il } N(\underline{Y}) \text{ (m-r colonne)}}]$$

$$\underline{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m \times n}; \quad \underline{\Sigma} = \left[\begin{array}{c|c} \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) & \underline{0}_{r \times (n-r)} \\ \hline \underline{0}_{(m-r) \times r} & \underline{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{array} \right]$$

M.P. pseudo inverse of $\underline{\Sigma}$ $\underline{\Sigma}^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}; \quad \underline{\Sigma}^+ = \left[\begin{array}{c|c} \text{diag}(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}) & \underline{0}_{r \times (m-r)} \\ \hline \underline{0}_{(n-r) \times r} & \underline{0}_{(n-r) \times (m-r)} \end{array} \right]$

Ricorda che $Y = U \Sigma V^T = [u_1 \dots u_r \ u_{r+1} \dots u_m] \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \sigma_2 & & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & \sigma_r & & \\ & & & & & 0_{r \times (n-r)} \\ \hline & & & & 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (n-r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_{r+1}^T \\ \vdots \\ v_m^T \end{bmatrix}$

$$Y = u_1 \sigma_1 v_1^T + u_2 \sigma_2 v_2^T + \dots + u_r \sigma_r v_r^T$$

Ricostruzione progressiva di una matrice come somme di termini via via sempre meno importanti

$$Y^+ = \frac{1}{\sigma_1} v_1 u_1^T + \frac{1}{\sigma_2} v_2 u_2^T + \dots + \frac{1}{\sigma_r} v_r u_r^T$$

$$\Sigma \Sigma^+ = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r \times (m-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{m-r} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma^+ \Sigma = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r \times (n-r)} \\ 0_{(n-r) \times r} & 0_{n-r} \end{bmatrix}$$

Analisi di scomponibilita' con SVD

$$\underline{x} = Y \underline{q} = U \Sigma V^T \underline{q} \rightarrow U^T \underline{x} = \Sigma V^T \underline{q}$$

definito (cambiamento di base)

$$U^T \underline{x} \triangleq \underline{\bar{x}} \quad (\text{in } \mathbb{R}^m)$$

$$V^T \underline{q} \triangleq \underline{\bar{q}} \quad (\text{in } \mathbb{R}^n)$$

allora nelle nuove coordinate

$$\underline{\bar{x}} = \Sigma \underline{\bar{q}} \rightarrow \underline{\bar{q}} = \Sigma^+ \underline{\bar{x}} \quad \text{che, componente per componente, risulta:}$$

$$\bar{q}_i = \frac{1}{\sigma_i} \bar{x}_i$$

Se si vuol muovere end-effector nella direzione dell'elemento 1-esimo della base canonica

$$\underline{\bar{x}} = \underline{e}_1 = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$$

allora deve applicarsi una $\underline{\bar{q}}$ data da:

$$\underline{\bar{q}} = \Sigma^+ \underline{e}_1 = \left[\frac{1}{\sigma_1} \ 0 \ \dots \ 0 \right]^T$$

dato che $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_m > 0$ allora σ_1 in generale 'non e' piccolo' perche': $\underline{\bar{q}}$ non e' grande in modulo

Se invece si vuol muovere nella direzione

$$\underline{\bar{x}} = \underline{e}_m = [0 \ \dots \ 0 \ 1]^T \text{ allora}$$

$$\underline{\bar{q}} = \Sigma^+ \underline{e}_m = \left[0 \ \dots \ 0 \ \frac{1}{\sigma_m} \right]^T$$

e dato che, se siamo prossimi ad una singolarita', $\sigma_m \approx 0$, allora $\underline{\bar{q}}$ e' grande in modulo quindi occorrono elevate vibre ai giunti per muovere e.e. nella direzione $\underline{\bar{x}} = \underline{e}_m$. Ma a quali direzioni nello spazio operativo corrispondono queste $\underline{\bar{x}}$ e $\underline{\bar{q}}$?

Basta ricordarsi che:

$$\underline{\bar{n}} = \underline{e}_m = U^T \underline{n} \rightarrow \underline{n} = U \underline{\bar{n}} = U \underline{e}_m = \underline{u}_m \text{ (colonna } m\text{-esima di } U)$$

$$\underline{\dot{q}} = \frac{1}{\sigma_m} \underline{e}_m = V^T \underline{\dot{q}} \rightarrow \underline{\dot{q}} = V \underline{\dot{q}} = \frac{1}{\sigma_m} V \underline{e}_m = \frac{1}{\sigma_m} \underline{v}_m \text{ (colonna } m\text{-esima di } V \text{ scalata per } \frac{1}{\sigma_m}).$$

Nel caso di direzione $\underline{\bar{n}} = \underline{e}_1$ (facile, economica da raggiungere)

$$\underline{\bar{n}} = \underline{e}_1 = U^T \underline{n} \rightarrow \underline{n} = U \underline{e}_1 = \underline{u}_1 \text{ (prima colonna di } U)$$

$$\underline{\dot{q}} = \frac{1}{\sigma_1} \underline{e}_1 = V^T \underline{\dot{q}} \rightarrow \underline{\dot{q}} = \frac{1}{\sigma_1} V \underline{e}_1 = \frac{1}{\sigma_1} \underline{v}_1 \text{ (colonna } 1^a \text{ di } V \text{ scalata per } \frac{1}{\sigma_1})$$

Mampolabilita' in velocita' come ellissoide

sfera unitaria in spazio $\underline{\dot{q}}$ $S_2 = \{\underline{\dot{q}} : \|\underline{\dot{q}}\| = 1\}$ cioè $\underline{\dot{q}}$ di norme fissate
cos'è $\mathcal{Y}(S_2)$?

$$\mathcal{Y} = U \Sigma V^T \quad ; \quad \mathcal{Y}^+ = V \Sigma^+ U^T \quad ; \quad (\mathcal{Y}^+)^T = U \Sigma^+ V^T$$

$$\underline{n} = \mathcal{Y} \underline{\dot{q}} \quad ; \quad \underline{\dot{q}} = \mathcal{Y}^+ \underline{n} \quad ; \quad \underline{\dot{q}}^T = \underline{n}^T (\mathcal{Y}^+)^T$$

imponiamo di stare su S_2 :

$$1 = \underline{\dot{q}}^T \underline{\dot{q}} = \underline{n}^T (\mathcal{Y}^+)^T \mathcal{Y}^+ \underline{n} = \underline{n}^T U \Sigma^+ \underbrace{V^T V}_{\mathbb{I}} \Sigma^+ U^T \underline{n} = \underline{n}^T U (\Sigma^+)^T \Sigma^+ U^T \underline{n}$$

con $U^T \underline{n} = \underline{\bar{n}}$ allora

$$1 = \underline{\bar{n}}^T \left\{ (\Sigma^+)^T \Sigma^+ \right\} \underline{\bar{n}} \quad \text{N.B. } (\Sigma^+)^T = \begin{bmatrix} \text{diag}(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}) & 0_{r \times (m-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{m-r} \end{bmatrix}$$

$$(\Sigma^+)^T \Sigma^+ = \begin{bmatrix} \text{diag}(\frac{1}{\sigma_1^2}, \dots, \frac{1}{\sigma_r^2}) & 0_{r \times (m-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{m-r} \end{bmatrix}$$

allora

L'immagine delle sfere risulta essere

$$1 = \frac{\bar{n}_1^2}{\sigma_1^2} + \dots + \frac{\bar{n}_r^2}{\sigma_r^2}$$

punto

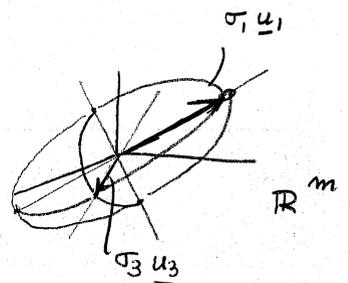
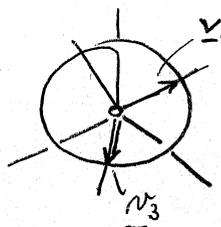
$$\underline{\bar{n}} = (\sigma_1, \dots, 0) = \sigma_1 \underline{e}_1$$

sta sull'ellissoide ed è

punto + lontano da origine

($\underline{\bar{n}}$ ha modulo max)

rispetto a coords onS. $U^T \underline{n} = \sigma_1 \underline{e}_1 \rightarrow \underline{n} = \sigma_1 \underline{u}_1$



$$\underline{e}_1 = V^T \underline{\dot{q}} \rightarrow \underline{\dot{q}} = \underline{v}_1$$

$$S_2 = \{ \underline{x} : \|\underline{x}\| = 1 \}$$

cos'è $\mathcal{Y}(S_2)$?

$$\underline{x} = \mathcal{Y}^T \underline{w}$$

$$\underline{x}^T \underline{x} = 1 = \underline{w}^T \mathcal{Y} \mathcal{Y}^T \underline{w} = 1 = \underline{w}^T U (\Sigma \Sigma^T) U^T \underline{w}$$

$$\mathcal{Y} \mathcal{Y}^T = U (\Sigma \Sigma^T) U^T \text{ da cui}$$

$$\text{con } \underline{x} = U^T \underline{w}$$

$$1 = \underline{w}^T (\Sigma \Sigma^T) \underline{w}$$

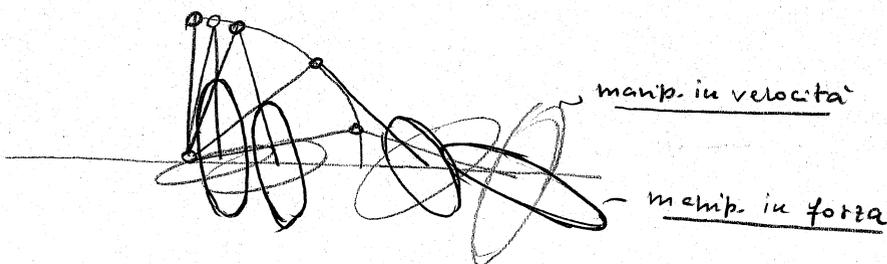
$$(\Sigma \Sigma^T) \in \mathbb{R}^{m \times m} = \begin{bmatrix} \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2) & 0_{r \times (m-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{m-r} \end{bmatrix}$$

esplicitamente

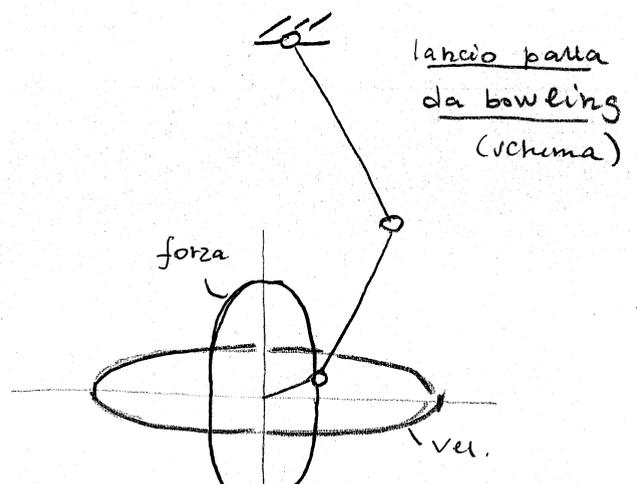
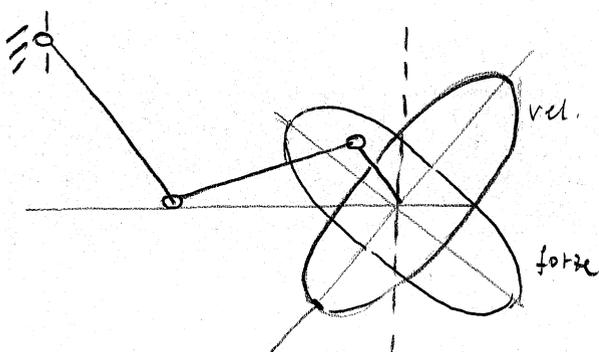
$$1 = \frac{w_1^2}{\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)^2} + \dots + \frac{w_r^2}{\left(\frac{1}{\sigma_r}\right)^2}$$

direzioni sono le stesse ma semiassi hanno lunghezza pari ai reciproci dei σ_i , quindi reciproci rispetto ai semiassi dell'ellissoide di mamp in velocità

Esempio



compito di schiatta con braccio umano (vchuma)



lancio palla da bowling (vchuma)

Equazioni di equilibrio in quasi-coordinate

In vere coordinate:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k \quad (k=1, \dots, n) \quad ; \quad L = T - U \quad ; \quad \text{vettorialm.} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{q}}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{q}} \right) = \underline{Q}$$

Generalizzazione alle quasi-coordinate

$$\rightarrow \text{ovvia } \dot{\underline{q}} = C^{-1} \underline{\omega}$$

Se $\underline{\omega}$ sono le quasi coordinate si può scrivere $\underline{\omega} = C(\underline{q}) \dot{\underline{q}}$ con \underline{q} vere coordinate

Allora si scrive $T(\dot{\underline{q}}) = \hat{T}(C \dot{\underline{q}})$ (in questo caso non c'è dipendenza esplicita dalla \underline{q})

Nulla derivazione di \hat{T} in funzione di $\dot{\underline{q}}$ si scrive:

$$\begin{aligned} \text{se } T = T(\dot{\underline{q}}(C \dot{\underline{\omega}})) \quad \text{allora} \\ \text{e } \hat{T} = \hat{T}(C \dot{\underline{\omega}}) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \quad \frac{\partial \hat{T}}{\partial \dot{\underline{q}}} = \frac{\partial \hat{T}}{\partial \underline{\omega}} \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial \dot{\underline{q}}} = \frac{\partial \hat{T}}{\partial \underline{\omega}} C$$

↑
vettore riga

$$\text{ed allora } \left[\frac{\partial \hat{T}}{\partial \dot{\underline{q}}} \right]^T = C^T \left[\frac{\partial \hat{T}}{\partial \underline{\omega}} \right]^T$$

La derivata temporale risulta perciò:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \hat{T}}{\partial \dot{\underline{q}}} \right]^T = C^T \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \hat{T}}{\partial \underline{\omega}} \right]^T + \dot{C}^T \left[\frac{\partial \hat{T}}{\partial \underline{\omega}} \right]^T$$

$$\text{se } C = C(\underline{q}) \quad \text{allora} \quad \dot{C}_{ij} = \frac{\partial C_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad \text{ovvia} \quad \dot{C}^T = \frac{\partial C^T}{\partial \underline{q}} \dot{\underline{q}}$$

$$\text{consideriamo che } \frac{\partial \hat{T}}{\partial \underline{\omega}} = \underline{\sigma}^T$$

Allora le equazioni di Lagrange per quasi coordinate risultano:

$$C^T \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \hat{T}}{\partial \underline{\omega}} \right]^T + \frac{\partial C^T}{\partial \underline{q}} \dot{\underline{q}} \left[\frac{\partial \hat{T}}{\partial \underline{\omega}} \right]^T = \underline{Q}$$

Pre-moltiplichiamo per C^{-T} si ha

$$C^{-T} C^T \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \hat{T}}{\partial \underline{\omega}} \right]^T + C^{-T} \frac{\partial C^T}{\partial \underline{q}} \dot{\underline{q}} \left[\frac{\partial \hat{T}}{\partial \underline{\omega}} \right]^T = C^{-T} \underline{Q}$$

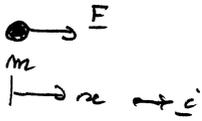
$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \hat{T}}{\partial \underline{\omega}} \right]^T + H(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) \left[\frac{\partial \hat{T}}{\partial \underline{\omega}} \right]^T = \underline{N}$$

$$\text{dove si è definito } H(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = C^{-T} \frac{\partial C^T}{\partial \underline{q}} \dot{\underline{q}} \quad ; \quad \underline{N} = C^{-T} \underline{Q}$$

Dinamica dei manipolatori seriali (in breve)

Dinamica diretta ed inversa: diretta, applicate le coppie / forze ai giunti del robot si è interessati a conoscere come si muove il robot; inversa, data una certa traiettoria che il robot deve seguire, si è interessati a conoscere le coppie da applicare.

Es. semplice



1^a cardinale $\underline{F} = m \underline{a} = m \ddot{x} \underline{e}_i$

diretta: nota \underline{F} debbo determinare $x(t)$ integrando eq.ue del moto

inversa: data $\ddot{x} \underline{e}_i$ devo calcolare la forza $\underline{F}(t)$ necessaria.

Dinamica diretta: utile in simulazione

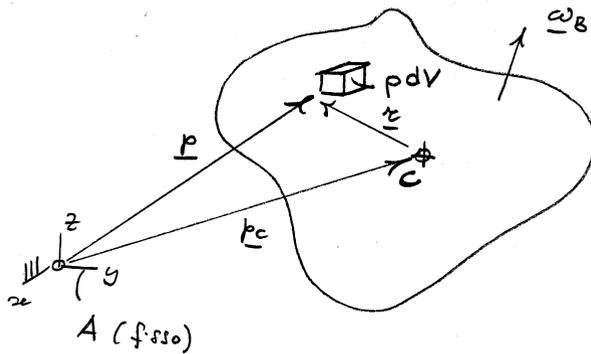
= inversa: utile per il controllo model-based perché mi dice che forze debbo applicare perché sistema si muova nel modo prestabilito.

Giudiziamo con la dinamica di un corpo rigido

Concetti di base

Centro di massa

$$\underline{p}_c = \frac{1}{m} \int_V \underline{p} \rho dV$$



Velocità di un punto generico

$$\underline{v} = \frac{d\underline{p}}{dt} = \underline{v}_c + \underline{\omega}_B \times \underline{x} \quad (\text{dalla formula fondamentale della cinematica})$$

Energia cinetica di un corpo rigido

$$dT = \frac{1}{2} \underline{v}^T \underline{v} \rho dV \quad (\text{elementari della masetta } \rho dV)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_V \underline{v}^T \underline{v} \rho dV \quad (\text{dell'intero corpo rigido})$$

$$\underline{v}^T = \underline{v}_c^T - \underline{\omega}_B^T \underline{x}^T$$

Appoggiamoci alla velocità del centro di massa \underline{v}_c | $\underline{v} = \underline{v}_c + \underline{\omega}_B \times \underline{x} = \underline{v}_c - \underline{x} \underline{\omega}_B$

$$T = \frac{1}{2} \int_V \{ \underline{v}_c^T - \underline{\omega}_B^T \underline{x}^T \} \{ \underline{v}_c - \underline{x} \underline{\omega}_B \} \rho dV =$$

$$= \frac{1}{2} \underline{v}_c^T \underline{v}_c m - 2 \cdot \frac{1}{2} \int_V \underline{v}_c^T \underline{\omega}_B \underline{x} \rho dV + \frac{1}{2} \int_V \underline{\omega}_B^T \underline{x}^T \underline{x} \underline{\omega}_B \rho dV =$$

$$= \frac{1}{2} m \underline{v}_c^T \underline{v}_c - 2 \cdot \frac{1}{2} \underline{v}_c^T \underline{\omega}_B \int_V \underline{x} \rho dV + \frac{1}{2} \underline{\omega}_B^T \int_V \underline{x}^T \underline{x} \rho dV \underline{\omega}_B$$

ma $m \underline{p}_c = \int_V \underline{p} \rho dV$ $\int_V (\underline{p} - \underline{p}_c) \rho dV = \int_V \underline{p} \rho dV - \underline{p}_c \int_V \rho dV = \underline{0}$

Si definisce $\mathcal{I}_B = \int_V \underline{\underline{x}}^T \underline{\underline{x}} p dV$ tensore d'inertzia baricentrico del corpo rigido 2

se $\underline{\underline{x}}$ ha componenti $\underline{\underline{x}} = [x \ y \ z]^T$ allora

$$\underline{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{x}}^T = \begin{bmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{x}}^T \underline{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y^2+z^2) & -xy & -xz \\ -xy & (x^2+z^2) & -yz \\ -xz & -yz & (x^2+y^2) \end{bmatrix}$$

Dunque

$$\mathcal{I}_B = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\text{con } I_{xx} = \int_V (y^2+z^2) p dV$$

$$I_{yy} = \int_V (x^2+z^2) p dV$$

$$I_{zz} = \int_V (x^2+y^2) p dV$$

$$I_{xy} = - \int_V xy p dV$$

$$I_{xz} = - \int_V xz p dV$$

$$I_{yz} = - \int_V yz p dV$$

Risultate quindi

$$T = \frac{1}{2} m \underline{\underline{v}}_c^T \underline{\underline{v}}_c + \frac{1}{2} \underline{\underline{\omega}}_B^T \mathcal{I}_B \underline{\underline{\omega}}_B$$

con \mathcal{I}_B tensore d'inertzia baricentrico del corpo rigido che ne misura l'inertzia rotazionale, così come m ne misura l'inertzia traslazionale

Quantità di moto (Linear momentum)

$$d\underline{\underline{e}}^o = \frac{d\underline{\underline{p}}}{dt} p dV = \underline{\underline{v}} p dV \quad (\text{prodotto di una massa elementare per la sua velocità})$$

$$\underline{\underline{e}}^o = \int_V d\underline{\underline{e}}^o = \int_V \underline{\underline{v}} p dV \quad (\text{esteso a tutto il corpo})$$

$$\text{ma essendo } \underline{\underline{v}} = \underline{\underline{v}}_c + \underline{\underline{\omega}}_B \times \underline{\underline{x}}$$

$$\underline{\underline{e}}^o = \int_V \underline{\underline{v}} p dV = \int_V (\underline{\underline{v}}_c + \underline{\underline{\omega}}_B \times \underline{\underline{x}}) p dV = \int_V \underline{\underline{v}}_c p dV + \underline{\underline{\omega}}_B \int_V \underline{\underline{x}} p dV = m \underline{\underline{v}}_c$$

$$\text{Quindi la quantità di moto } \underline{\underline{e}}^o = m \underline{\underline{v}}_c$$

Momento angolare o momento della quantità di moto (Angular momentum)

$$d\underline{\underline{h}}^o = \underline{\underline{r}} \times \frac{d\underline{\underline{p}}}{dt} p dV = \underline{\underline{r}} \times \underline{\underline{v}} p dV \quad (\text{elementare, mom. della quantità di moto rispetto al polo } O)$$

$$\underline{\underline{h}}^o = \int_V \underline{\underline{r}} \times \underline{\underline{v}} p dV$$

$$\text{adesso scrivendo } \underline{\underline{p}} = \underline{\underline{p}}_c + \underline{\underline{x}}$$

$$\underline{\underline{v}} = \underline{\underline{v}}_c + \underline{\underline{\omega}}_B \times \underline{\underline{x}}$$

Allora ottengo

$$\underline{h}^0 = \int_V (\underline{p}_c + \underline{z}) \times (\underline{v}_c + \underline{\omega}_B \times \underline{z}) \rho dV = m(\underline{p}_c \times \underline{v}_c) + \int_V \hat{\underline{p}}_c \hat{\underline{\omega}}_B \underline{z} \rho dV +$$

$$+ \int_V -\hat{\underline{v}}_c \underline{z} \rho dV + \int_V \underline{z} \times (\underline{\omega}_B \times \underline{z}) \rho dV =$$

⇒ adesso lo porto in una forma in cui è evidente la struttura ⇒

$$= m(\underline{p}_c \times \underline{v}_c) + \hat{\underline{p}}_c \hat{\underline{\omega}}_B \int_V \underline{z} \rho dV - \hat{\underline{v}}_c \int_V \underline{z} \rho dV + \int_V \underline{z} \times (\underline{\omega}_B \times \underline{z}) \rho dV$$

termini

$$\underline{z} \times (\underline{\omega}_B \times \underline{z}) = -\underline{z} \times (\underline{z} \times \underline{\omega}_B) = -\hat{\underline{z}} \hat{\underline{z}} \underline{\omega}_B = \hat{\underline{z}}^T \hat{\underline{z}} \underline{\omega}_B \quad \hat{\underline{z}}^T = \hat{\underline{z}}^T$$

(1) antisim.

dunque

$$\int_V \underline{z} \times (\underline{\omega}_B \times \underline{z}) \rho dV = \left\{ \int_V \hat{\underline{z}}^T \hat{\underline{z}} \rho dV \right\} \underline{\omega}_B \triangleq \mathcal{J}_B \underline{\omega}_B$$

Perciò alla fine

$$\underline{h}^0 = m(\underline{p}_c \times \underline{v}_c) + \overbrace{\mathcal{J}_B}^{\underline{h}^c} \underline{\omega}_B$$

questo \underline{h}^c è il momento della q.ta' di moto del corpo rigido rispetto al baricentro C nel suo moto attorno al baricentro C

infatti $\underline{h}^0 = \underline{p}_c \times (m \underline{v}_c) + \underline{h}^c$

Per essere più espliciti è bene indicare con \mathcal{J}_B^c il tensore di inerzia del corpo rispetto al centro di massa C covicchiò

$$\underline{h}^c = \mathcal{J}_B^c \underline{\omega}_B$$

Adesso sempre considerando \mathcal{J}_B^c , cioè rispetto al polo centro di massa C, scriviamo \mathcal{J}_B senza C e consideriamo come variano le componenti di queste matrici al variare del sistema di riferimento in cui si lavora.

es. ${}^A \mathcal{J}_B$ sono le componenti in frame inerziale {A} e scriveremo

$${}^A \underline{h} = {}^A \mathcal{J}_B {}^A \underline{\omega}_B$$

o ${}^C \mathcal{J}_B$ sono le compo. in frame solida al rigido {C} e scriveremo

$${}^C \underline{h} = {}^C \mathcal{J}_B {}^C \underline{\omega}_B$$

ma

$${}^A \underline{h} = {}^A R_c {}^C \underline{h} \iff {}^A \mathcal{J}_B {}^A \underline{\omega}_B = {}^A R_c {}^C \mathcal{J}_B {}^C \underline{\omega}_B$$

ma ${}^C \underline{\omega}_B = {}^C R_A {}^A \underline{\omega}_B = {}^A R_c^T {}^A \underline{\omega}_B$ da cui:

$${}^A \mathcal{J}_B {}^A \underline{\omega}_B = {}^A R_c {}^C \mathcal{J}_B {}^A R_c^T {}^A \underline{\omega}_B$$

ovvero $\boxed{{}^A \mathcal{J}_B = {}^A R_c {}^C \mathcal{J}_B {}^A R_c^T}$

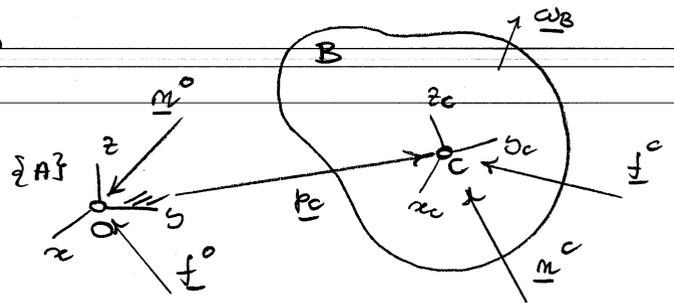
Le equi cardinali per il moto di un c.t. in 3D

rispetto ad un polo arbitrario (purché fisso

ovvia $\underline{v}_0 = \underline{0}$) sono

$$\underline{f}^o = \frac{d \underline{e}^o}{dt} \quad (1^a \text{ cardinale, Newton})$$

$$\underline{m}^o = \frac{d \underline{h}^o}{dt} \quad (2^a \text{ cardinale, Eulero})$$



Tali formule valgono eccezionalmente anche per un polo mobile purché questo sia il centro di massa c , ovvia

$$\underline{f}^c = \frac{d \underline{e}^c}{dt} = \frac{d (m \underline{v}_c)}{dt} = m \underline{a}_c \quad (\text{se massa } m \text{ è costante}) \quad (1^a \text{ card})$$

$$\underline{m}^c = \frac{d \underline{h}^c}{dt} \quad (2^a \text{ cardinale})$$

Per la prima cardinale niente di nuovo e tipicam conviene scrivere in componenti nel frame inerziale $\{A\}$.

Per la seconda cardinale, considerando che sto sempre lavorando rispetto al polo c (centro di massa), posso usare le componenti in differenti frame es. $\{C\}$ o $\{A\}$

Allora le eq. di Eulero diventano:

$$\underline{m}^c = \frac{d}{dt} ({}^c I_B {}^c \omega_B)$$

$$\text{quomodo dentro } \frac{d}{dt} ({}^c I_B {}^c \omega_B) = \frac{d}{dt} ({}^c \cdot) + \frac{d}{dt} ({}^c \cdot) \\ = {}^c I_B {}^c \dot{\omega}_B + {}^c \omega_B \times ({}^c I_B {}^c \omega_B)$$

questo perché in realtà devo derivare il vettore nelle sue componenti assolute (derivata nel frame inerziale) e solo dopo proiettare le componenti in frame $\{C\}$.

$$\text{ovvia come } {}^A \underline{h} = {}^A R_c {}^c \underline{h}$$

$${}^A \dot{\underline{h}} = {}^A \dot{R}_c {}^c \underline{h} + {}^A R_c \dot{{}^c \underline{h}} = {}^A \dot{\omega}_B {}^A R_c {}^c \underline{h} + {}^A R_c \dot{{}^c \underline{h}}$$

$$\text{a demo } {}^c ({}^A \dot{\underline{h}}) = {}^A R_c^T ({}^A \dot{\underline{h}}) = \underbrace{{}^A R_c^T ({}^A \dot{\omega}_B)}_I {}^c \underline{h} + \underbrace{{}^A R_c^T ({}^A R_c)}_I \underbrace{{}^A \dot{\omega}_B}_{{}^c \hat{\omega}_B} {}^c \underline{h}$$

ovvia

$${}^c ({}^A \dot{\underline{h}}) = \underbrace{{}^c \dot{\underline{h}}}_{\text{derivata relativa}} + \underbrace{{}^c \omega_B \times {}^c \underline{h}}_{\text{derivata di trascinamento}}$$

Risultato sopra segue da

$${}^c \underline{h} = {}^c I_B {}^c \omega_B$$

Allora eq. di Eulero risultano da

$${}^c M = {}^c I_B \dot{c} \omega_B + c \omega_B \times ({}^c I_B c \omega_B)$$

nel caso in cui il frame $\{C\}$ abbia assi allineati con gli assi principali di inerzia del corpo rigido allora

$${}^c I_B = \text{diag}(I_{xx}, I_{yy}, I_{zz})$$

e le equazioni di Eulero sono esplicitamente:

$$m_x = I_{xx} \dot{c} \omega_x - \omega_y \omega_z (I_{yy} - I_{zz})$$

$$m_y = I_{yy} \dot{c} \omega_y - \omega_z \omega_x (I_{zz} - I_{xx})$$

$$m_z = I_{zz} \dot{c} \omega_z - \omega_x \omega_y (I_{xx} - I_{yy})$$

Una volta che conosceremo (e sapremo trattare) le eq. di Newton-Eulero per un corpo rigido, applicheremo al calcolo ricorsivo delle equazioni dinamiche di una catena cinematica seriale. Ricordiamoci che scriveremo la dinamica inversa del manipolatore, ossia sappiamo come si deve muovere (quindi conosciamo il suo stato di moto [posizioni, velocità ed accelerazioni]) e dobbiamo calcolare quali coppie ai giunti applicate $\{\tau_i\}$.

Volendo impiegare una formulazione ricorsiva seguiranno 2 tipi di calcolo: (i) calcolo in avanti (forward computation) della cinematica, dalla base all'end-effector e (ii) una volta noto lo stato di moto completo e conoscendo le azioni gravitazionali effettueremo un calcolo all'indietro (backward computation) dall'end-effector alla base e il calcolo delle coppie ai giunti e anche le componenti che si scaricano sulla struttura (reazioni vincolari)

introduciamo queste quantità:

o) \underline{p}_i vettore posizione $O_0 O_i$ da origine di $\{S_0\}$ ad origine di $\{S_i\}$

o) \underline{p}_{ci} = $O_0 C_i$ = a centro di massa link i -esimo

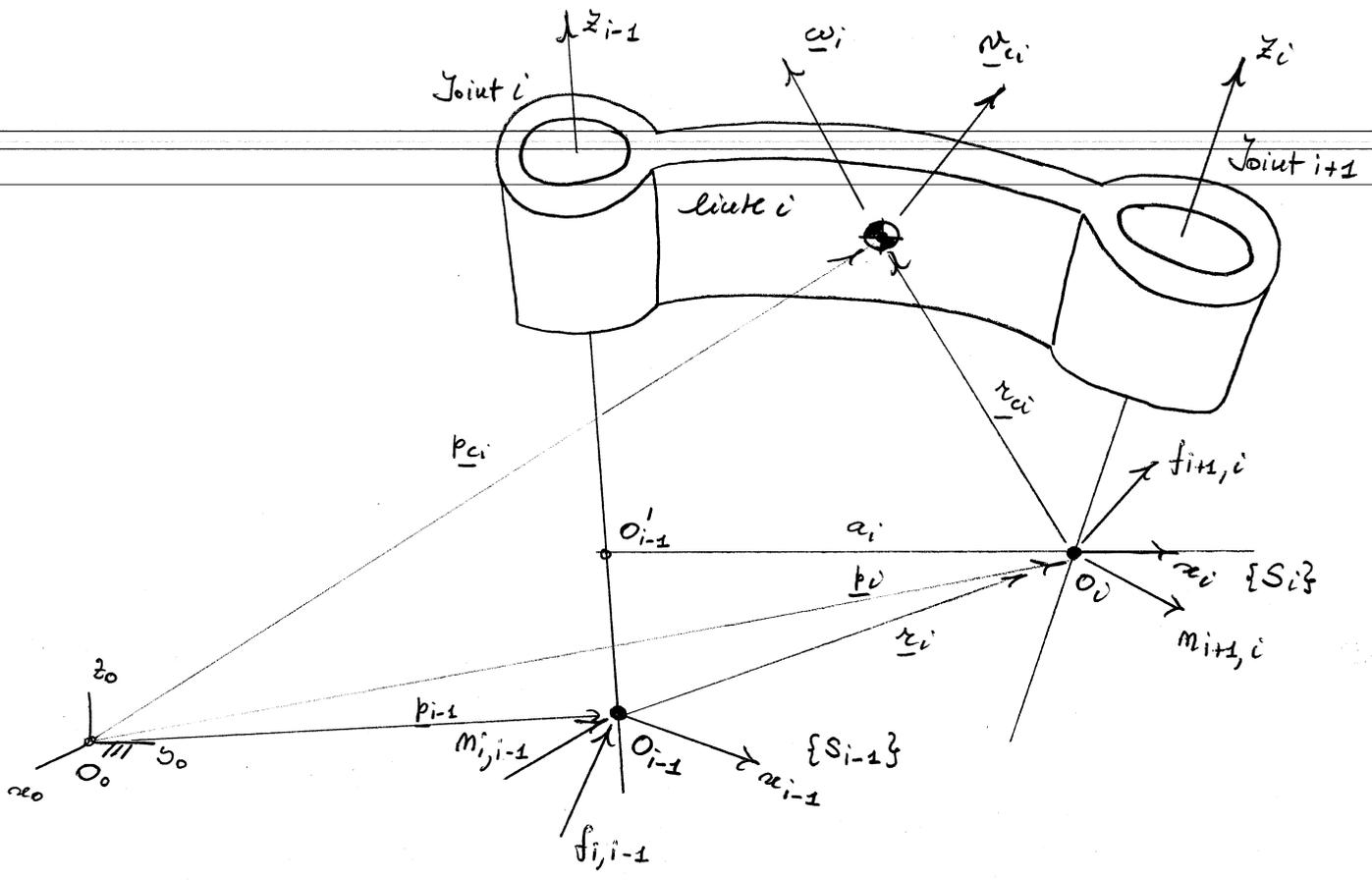
o) \underline{r}_i = $O_{i-1} O_i$ da origine di $\{S_{i-1}\}$ ad origine di $\{S_i\}$

o) \underline{r}_{ci} = $O_i C_i$ da origine di $\{S_i\}$ a centro di massa link i -esimo

o) $\underline{v}_i = \frac{d \underline{p}_i}{dt}$ o) $\underline{v}_{ci} = \frac{d \underline{p}_{ci}}{dt}$

o) $\underline{\dot{v}}_i$ = accelerazione lineare origine O_i o) $\underline{\dot{v}}_{ci}$ = accelerazione lineare centro di massa C_i

o) \underline{z}_i vettore nella direzione asse del giunto $i+1$ o) $\underline{\omega}_i$ veloc. ang. assoluta link i o) $\underline{\dot{\omega}}_i$ accel. ang. assoluta link i



Calcolo in avanti

Calcoliamo veloc. angolate, acc. angolate, veloc. lineari e acc. lineari in modo ricorsivo partendo dal fatto che $\underline{v}_0 = \underline{0}$; $\dot{\underline{v}}_0 = \underline{0}$; $\underline{\omega}_0 = \underline{0}$; $\dot{\underline{\omega}}_0 = \underline{0}$. (telaino è fermo)

(a) Propagazione della velocità angolare $\underline{\omega}_i$ del link i-esimo in fine di link i-1

$$\underline{\omega}_i = \begin{cases} \underline{\omega}_{i-1} + z_{i-1} \dot{\theta}_i, & R \\ \underline{\omega}_{i-1}, & P \end{cases}$$

espandendolo in componenti nel frame i-esimo

$${}^i \underline{\omega}_i = \begin{cases} {}^i R_{i-1} ({}^{i-1} \underline{\omega}_{i-1} + {}^{i-1} z_{i-1} \dot{\theta}_i), & R \\ {}^i R_{i-1} {}^{i-1} \underline{\omega}_{i-1}, & P \end{cases}$$

$$\text{con } {}^i R_{i-1} = \begin{bmatrix} c\theta_i & s\theta_i & 0 \\ -c\theta_i s\theta_i & c\theta_i c\theta_i & s\theta_i \\ s\theta_i s\theta_i & -s\theta_i c\theta_i & c\theta_i \end{bmatrix}$$

$${}^{i-1} z_{i-1} = [0 \ 0 \ 1]^T$$

(b) Propagazione della accelerazione angolare

acc. angolate di trova facendo

$$\frac{d}{dt} (\underline{\omega}_i) = \dot{\underline{\omega}}_{i-1} + \dot{z}_{i-1} \dot{\theta}_i + \underline{\omega}_{i-1} \times (z_{i-1} \dot{\theta}_i) \quad (\text{es. per } R)$$

allora

$$\dot{\underline{\omega}}_i = \begin{cases} \dot{\underline{\omega}}_{i-1} + \dot{z}_{i-1} \dot{\theta}_i + \underline{\omega}_{i-1} \times z_{i-1} \dot{\theta}_i, & R \\ \dot{\underline{\omega}}_{i-1}, & P \end{cases}$$

allora in componenti nel frame i-esimo

$${}^i \dot{\underline{\omega}}_i = \begin{cases} {}^i R_{i-1} [{}^{i-1} \dot{\underline{\omega}}_{i-1} + {}^{i-1} \dot{z}_{i-1} \dot{\theta}_i + \underline{\omega}_{i-1} \times {}^{i-1} z_{i-1} \dot{\theta}_i], & R \\ {}^i R_{i-1} {}^{i-1} \dot{\underline{\omega}}_{i-1}, & P \end{cases}$$

(c) Propagazione della velocità lineare (dalle velocità di O_{i-1} (\underline{v}_{i-1}) alla velocità lineare di O_i (\underline{v}_i)) [teo. composizione dei moti relativi]

$$\underline{v}_i = \begin{cases} \underline{v}_{i-1} + \underline{\omega}_i \times \underline{r}_i, & R \text{ (sto applicando f. fond. cinematica)} \\ \underline{v}_{i-1} + \underline{\omega}_i \times \underline{r}_i + \underline{z}_{i-1} \dot{d}_i, & P \text{ (sto applicando f. composizione moti relativi)} \end{cases}$$

in forma di componenti

$${}^i \underline{v}_i = \begin{cases} {}^i R_{i-1} {}^{i-1} \underline{v}_{i-1} + {}^i \underline{\omega}_i \times {}^i \underline{r}_i, & R \quad {}^i \underline{r}_i \text{ costante per } R \\ {}^i R_{i-1} [{}^{i-1} \underline{v}_{i-1} + {}^{i-1} \underline{z}_{i-1} \dot{d}_i] + {}^i \underline{\omega}_i \times {}^i \underline{r}_i, & P \quad {}^i \underline{r}_i \text{ variabile per } P \text{ (cosa quest'elongazione)} \end{cases}$$

(d) Propagazione della accelerazione lineare

es. \underline{a}_i dalle $\frac{d}{dt}(\underline{v}_i)$ es. caso P

$$\underline{a}_i = \underbrace{\dot{\underline{v}}_{i-1}}_{OK} + \underbrace{\underline{\omega}_i \times \underline{v}_i}_{OK} + \underline{\omega}_i \times (\underline{\omega}_i \times \underline{r}_i) + \underline{z}_{i-1} \ddot{d}_i + 2 \underline{\omega}_i \times (\underline{z}_{i-1} \dot{d}_i)$$

(1) (2) (3)

da $\underline{\omega}_i \times \frac{d \underline{r}_i}{dt} = \frac{d \underline{v}_i}{dt} - \underline{v}_i = \underline{v}_i - \underline{v}_{i-1} = \underline{\omega}_i \times \underline{r}_i + \underline{z}_{i-1} \dot{d}_i$

allora

$$\underline{\omega}_i \times (\underline{\omega}_i \times \underline{r}_i) \text{ è (1)}$$

$$\underline{\omega}_i \times (\underline{z}_{i-1} \dot{d}_i) \text{ è } 1/2 \text{ di (3)}$$

poi da $\underline{z}_{i-1} \ddot{d}_i$ si ha (2)

e da $\underline{\omega}_i \times (\underline{z}_{i-1} \dot{d}_i)$ è 1/2 di (3)

→ fanno Coriolis

allora

$$\underline{a}_i = \dot{\underline{v}}_i = \begin{cases} \dot{\underline{v}}_{i-1} + \underline{\omega}_i \times \underline{v}_i + \underline{\omega}_i \times (\underline{\omega}_i \times \underline{r}_i), & R \\ \dot{\underline{v}}_{i-1} + \underline{z}_{i-1} \ddot{d}_i + \underline{\omega}_i \times \underline{v}_i + \underline{\omega}_i \times (\underline{\omega}_i \times \underline{r}_i) + 2 \underline{\omega}_i \times (\underline{z}_{i-1} \dot{d}_i), & P \end{cases}$$

in forma di componenti si ha quindi:

$${}^i \underline{a}_i = \begin{cases} {}^i R_{i-1} {}^{i-1} \underline{a}_{i-1} + {}^i \underline{\omega}_i \times {}^i \underline{v}_i + {}^i \underline{\omega}_i \times ({}^i \underline{\omega}_i \times {}^i \underline{r}_i), & R \\ {}^i R_{i-1} [{}^{i-1} \underline{a}_{i-1} + {}^{i-1} \underline{z}_{i-1} \ddot{d}_i] + {}^i \underline{\omega}_i \times {}^i \underline{v}_i + {}^i \underline{\omega}_i \times ({}^i \underline{\omega}_i \times {}^i \underline{r}_i) + 2 {}^i \underline{\omega}_i \times [{}^i R_{i-1} {}^{i-1} \underline{z}_{i-1} \dot{d}_i], & P \end{cases}$$

(e) accelerazione lineare del centro di massa del links i-esimo

$${}^i \underline{a}_{C_i} = {}^i \underline{a}_i + {}^i \underline{\omega}_i \times {}^i \underline{r}_{C_i} + {}^i \underline{\omega}_i \times ({}^i \underline{\omega}_i \times {}^i \underline{r}_{C_i})$$

(teo. di Rivale da O_i a C_i su stesso corpo rigido links i-esimo)

(f) Accelerazione gravitazionale

$${}^i \underline{g} = {}^i R_{i-1} {}^{i-1} \underline{g}$$

Adesso, dal momento che si è proceduto al calcolo di tutte le accelerazioni fino all'end effector (ente n-esimo) procedo mediante approccio a ritroso al calcolo delle azioni sviluppate ai giunti

Per prima cosa si fanno le seguenti posizioni

$$f_i^* \triangleq -m_i \ddot{x}_i$$

$$m_i^* \triangleq -I_i \ddot{\omega}_i - \dot{\omega}_i \times (I_i \dot{\omega}_i)$$

queste f_i^* e m_i^* sono le forze e le coppie di inerzia (termini d'inerziali cambiati di segno) così che poi possono essere portate "dalla parte delle forze e coppie applicate" a fare equilibrio dinamico (visione alla d'Alembert)

Adesso quindi, scrivendo l'equilibrio dinamico del ente i-esimo,

o) $f_i^* + f_{i,i-1} - f_{i+1,i} + m_i g = 0$ (1° cardinale)

\uparrow f. inerzia di i \uparrow che su i fa i-1 \uparrow che su i+1 fa i \uparrow forza peso su i

o) $m_i^* + m_{i,i-1} - m_{i+1,i} - (r_i + r_{ci}) \times f_{i,i-1} + r_{ci} \times f_{i+1,i} = 0$

\uparrow coppia inerzia di i \uparrow che su i fa i-1 (polo O_{i-1}) \uparrow che su i+1 fa i (polo O_i) \uparrow che su i fa i-1.

$\underbrace{[r_i O_i + O_i O_{i-1}]}$
 È applicata in O_{i-1} quindi devo fare momento rispetto a C_i

sarebbe $-r_{ci} \times (-f_{i+1,i})$
 che su i+1 fa i. Per Princ. Azioni e reazioni $f_{i,i+1} = -f_{i+1,i}$

non conta polo

(sto scrivendo 2° card. rispetto al centro di massa C_i)

Queste 2 equazioni possono essere riscritte in forma ricorsiva nel seguente modo

$$f_{i,i-1} = f_{i+1,i} - m_i g - f_i^*$$

$$m_{i,i-1} = m_{i+1,i} + (r_i + r_{ci}) \times f_{i,i-1} - r_{ci} \times f_{i+1,i} - m_i^*$$

quando si è calcolato forze e momenti di reazione sul ente i-esimo, si riportano nel frame i-1 mediante

$${}^{i-1}f_{i,i-1} = R_i {}^i f_{i,i-1} \quad {}^{i-1}m_{i,i-1} = R_i {}^i m_{i,i-1}$$

Queste si applicano da $i = n$ all'indietro. Le $f_{n+1,n}^m$ e $m_{n+1,n}^m$ o sono
date o si sa che forse l'end-effector fa su mondo esterno (linea $n+1$)

o sono nulle che significa non interazione con mondo esterno

Le coppie/forze ai giunti sono le componenti nelle direzioni "attive" o sia

$$\xi_i = \begin{cases} m_{i,i-1}^{i-1} \quad z_{i-1}^{i-1} & , R \\ f_{i,i-1}^{i-1} \quad z_{i-1}^{i-1} & , P \end{cases}$$

Dunque il calcolo della cinematica procede dalle basi all'end-effector in modo
ricorsivo "in avanti". Il calcolo delle forze/coppie vincolari procede dall'end-eff.
verso il telaio in modo ricorsivo "all'indietro".

In questo modo si valutano complessivamente tutte le reazioni vincolari
(quindi anche carichi su cuscinetti, momenti torcenti, flessioni etc...)
utili nella fase di design e verifica.

Seconda Cardinale

o) $\underline{M}_O = \sum_i \underline{O}P_i \times m_i \underline{a}_i$ (eq. a rotazioni attorno a polo O generico)

$\underline{K}_O = \sum_i \underline{O}P_i \times m_i \underline{v}_i$) $\dot{\underline{K}}_O = \sum_i (\underline{v}_i - \underline{v}_O) \times m_i \underline{v}_i + \sum_i \underline{O}P_i \times m_i \underline{a}_i$

$\sum_i \underline{O}P_i \times m_i \underline{a}_i = \dot{\underline{K}}_O + \underline{v}_O \times \sum m_i \underline{v}_i = \dot{\underline{K}}_O + \underline{v}_O \times \underline{Q}$

se O è fisso $\Rightarrow \underline{M}_O = \dot{\underline{K}}_O$

o) $\underline{M}_G = \sum_i \underline{G}P_i \times m_i \underline{a}_i$ (eq. a rotazioni attorno a centro di massa G)

$\underline{K}_G = \sum_i \underline{G}P_i \times m_i \underline{v}_i$ $\dot{\underline{K}}_G = \sum_i (\underline{v}_i - \underline{v}_G) \times m_i \underline{v}_i + \sum_i \underline{G}P_i \times m_i \underline{a}_i$
 $= -\underline{v}_G \times \underbrace{\sum_i m_i \underline{v}_i}_{m \underline{v}_G} + \sum_i \underline{G}P_i \times m_i \underline{a}_i$
 $= \sum_i \underline{G}P_i \times m_i \underline{a}_i$

Direzioni principali d'inerzia

$\underline{I}_B^c \underline{\omega} = I \underline{\omega} \rightarrow (\underline{I}_B^c - I \underline{I}) \underline{\omega} = \underline{0}$ \underline{I}_B^c symm. e P.D.

autovalori $I_1, I_2, I_3 > 0$

autovettori $\underline{\omega}_i$ sono fra loro ortogonali (e normalizzati cosicchè $\underline{\omega}_i \cdot \underline{\omega}_j = \delta_{ij}$)

$\underline{I}_B^c \underline{\omega}_i = I_i \underline{\omega}_i$ tutti insieme $\underline{I}_B^c \underline{\Omega} = \underline{\Omega} \Lambda$

con $\underline{\Omega} = [\underline{\omega}_1 \ \underline{\omega}_2 \ \underline{\omega}_3]$; $\Lambda = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$

allora

$\underline{I}_B^c [\underline{\omega}_1 \ \underline{\omega}_2 \ \underline{\omega}_3] = [\underline{\omega}_1 \ \underline{\omega}_2 \ \underline{\omega}_3] \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$

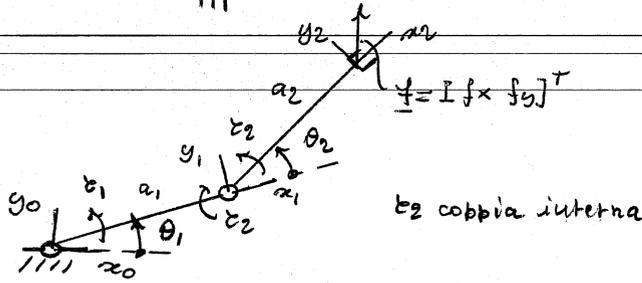
da cui

$\Lambda = \underline{\Omega}^T \underline{I}_B^c \underline{\Omega}$ perciò esistono direzioni (3) ortogonali rispetto alle quali tensore d'inerzia è diagonale

momento angolare

${}^c \underline{h} = {}^c \underline{I}_B {}^c \underline{\omega}_B$ in forma principale d'inerzia

di Newton-Eulero ad un manipolatore RR planare



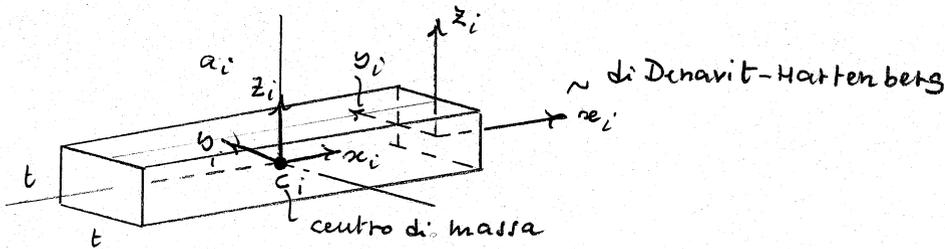
Calcolo delle matrici di trasformazione di Denavit-Hattenberg

$${}^0A_1(\theta_1) = \begin{Bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & a_1 c\theta_1 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & a_1 s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}; \quad {}^1A_2(\theta_2) = \begin{Bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & a_2 c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & a_2 s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix};$$

Nell'ipotesi che i link siano omogenei i vettori ${}^i x_i$ ed ${}^i x_{ci}$ sono dati da

$${}^i x_i = \begin{bmatrix} a_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^i x_{ci} = \begin{bmatrix} -a_i/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \text{per } i=1,2.$$

Consideriamo che i 2 link siano due travi a sezione quadrata.



Quando a_i è scelto ${}^i I_{ci}$ si è inteso scrivere il tensore di inerzia di un solido (il link) rispetto al suo centro di massa c_i in componenti rispetto ad un frame con assi allineati come il frame $\{S_i\}$ ma con origine in c_i

quindi

$${}^i I_{ci} = \int \int \int \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix} \rho dx_i dy_i dz_i = \rho \begin{Bmatrix} \frac{a_i t^4}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} a_i^2 (a_i^2 + t^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} a_i t^2 (a_i^2 + t^2) \end{Bmatrix}$$

Esendo poi $a_i t^2 \rho = m_i$ si ha

$${}^i I_{ci} = \begin{Bmatrix} \frac{m_i t^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} m_i (a_i^2 + t^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} m_i (a_i^2 + t^2) \end{Bmatrix}$$

Se la trave è slanciata ($t \ll a_i$) allora è ragionevole approssimare ($t^2 \approx 0$)

$${}^i I_{ci} \approx \frac{1}{12} m_i a_i^2 \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad \text{per } i=1,2$$

Assumiamo poi che l'accelerazione gravitazionale sia ${}^0\mathbf{g} = [0 \ -g \ 0]$

11

Applichiamo quindi il metodo ricorsivo di Newton-Euler (Recursive Newton-Euler o RNE)

(a) Forward Computation ($i=1,2$)

$${}^0\omega_0 = \mathbf{0}; \quad {}^0v_0 = \mathbf{0}; \quad {}^0\ddot{c}_0 = \mathbf{0}; \quad {}^0\dot{n}_0 = \mathbf{0};$$

link 1

$${}^1\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}; \quad {}^1\dot{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}; \quad {}^1\dot{n}_1 = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1^2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} a_1; \quad {}^1\dot{n}_{c1} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1^2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{a_1}{2};$$

accelerazione gravitazionale in frame $\{S_1\}$ ${}^1\mathbf{g} = {}^1R_0 \mathbf{g} = [-g \sin\theta_1 \ -g \cos\theta_1 \ 0]^T$

link 2

$${}^2\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}; \quad {}^2\dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}; \quad {}^2\dot{n}_2 = \begin{bmatrix} a_1 (\ddot{\theta}_1 \sin\theta_2 - \dot{\theta}_1^2 \cos\theta_2) - a_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ a_1 (\ddot{\theta}_1 \cos\theta_2 + \dot{\theta}_1^2 \sin\theta_2) + a_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix};$$

$${}^2\dot{n}_{c2} = \begin{bmatrix} a_1 (\ddot{\theta}_1 \sin\theta_2 - \dot{\theta}_1^2 \cos\theta_2) - \frac{1}{2} a_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ a_1 (\ddot{\theta}_1 \cos\theta_2 + \dot{\theta}_1^2 \sin\theta_2) + \frac{1}{2} a_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix};$$

accelerazione gravitazionale in frame $\{S_2\}$ ${}^2\mathbf{g} = {}^2R_1 \mathbf{g} = [-g \sin\theta_{12} \ -g \cos\theta_{12} \ 0]$

(b) Backward Computation ($i=2,1$)

Per ipotesi end-effector non interagisce con l'ambiente, dunque ${}^2\mathbf{f}_{3,2} = \mathbf{0}$ e ${}^2\mathbf{m}_{3,2} = \mathbf{0}$ (che su "3" fa "2", espresso in frame $\{S_2\}$)

dal calcolo precedente:

$${}^2\mathbf{f}_2^* = -m_2 {}^2\dot{n}_{c2} \quad ({}^2\dot{n}_{c2} \text{ appena calcolato})$$

$${}^2\mathbf{m}_2^* = -\frac{m_2 a_2^2}{12} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix};$$

$${}^2\mathbf{f}_{2,1} = m_2 \begin{bmatrix} a_1 (\ddot{\theta}_1 \sin\theta_2 - \dot{\theta}_1^2 \cos\theta_2) - \frac{1}{2} a_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + g \sin\theta_{12} \\ a_1 (\ddot{\theta}_1 \cos\theta_2 + \dot{\theta}_1^2 \sin\theta_2) + \frac{1}{2} a_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + g \cos\theta_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^2\mathbf{m}_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} m_2 a_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \frac{1}{2} m_2 a_1 a_2 (\ddot{\theta}_1 \cos\theta_2 + \dot{\theta}_1^2 \sin\theta_2) + \frac{1}{2} m_2 g a_2 \cos\theta_{12} \end{bmatrix}$$

Adesso per il link 1:

$${}^1 f_1^* = -\frac{m_1 a_1}{2} \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1^2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^1 n_1^* = -\frac{m_1 a_1^2}{12} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix};$$

$${}^1 f_{1,0} = \begin{bmatrix} m_2 [-a_1 \ddot{\theta}_1^2 - \frac{1}{2} a_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 c\theta_2 - \frac{1}{2} a_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) s\theta_2 + g s\theta_1] + m_1 (-\frac{1}{2} a_1 \ddot{\theta}_1^2 + g s\theta_1) \\ m_2 [a_1 \ddot{\theta}_1 - \frac{1}{2} a_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 s\theta_2 + \frac{1}{2} a_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) c\theta_2 + g c\theta_1] + m_1 (\frac{1}{2} a_1 \ddot{\theta}_1^2 + g c\theta_1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1 n_{1,0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (\frac{1}{3} m_1 a_1^2 + \frac{1}{3} m_2 a_2^2 + m_2 a_1^2 + m_2 a_1 a_2 c\theta_2) \ddot{\theta}_1 + (\frac{1}{3} m_2 a_2^2 + \frac{1}{2} m_2 a_1 a_2 c\theta_2) \ddot{\theta}_2 + \\ - m_2 a_1 a_2 s\theta_2 (\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2) + \frac{1}{2} m_1 g a_1 c\theta_1 + m_2 g a_1 c\theta_1 + \frac{1}{2} m_2 g a_2 c\theta_{12} \end{bmatrix}$$

Dunque il calcolo delle coppie ai giunti produce le 2 seguenti equazioni:

$$\tau_1 = {}^1 n_{1,0} (3);$$

$$\tau_2 = {}^2 n_{2,1} (3);$$

Adesso vediamo invece la formulazione Lagrangiana

Fine Lagrangiana $L = T - U$

- o) $T =$ energia cinetica
- o) $U =$ energia potenziale

eq. di Lagrange: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad i=1,2,\dots,n$

questa struttura vale se le q_i sono indipendenti l'una dall'altra.

Vedremo come trattate il caso in cui esistano dei vincoli che legano es. q_1 e q_2 componenti di q . Per adesso pensiamo che ciascuna q_i sia una variabile di giunto di un manipolatore seriale.

Vediamo la forma standard delle eq. di Lagrange a partire dalla forma standard di T ed U per un manipolatore seriale

Calcolo della T in forma standard

L'energia cinetica del link i -esimo T_i si calcola come:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \underline{v}_{ci}^T \underline{v}_{ci} + \frac{1}{2} \underline{\omega}_i^T \underline{I}_i \underline{\omega}_i$$

Nota che se si considera di lavorare in componenti $\{S_0\}$ allora

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \dot{v}_i^T \dot{v}_i + \frac{1}{2} \omega_i^T I_i \omega_i$$

alternativamente, in particolare per il termine $T_i^{(rot)}$, si può lavorare in componenti $\{S_i\}$ scrivendo

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \dot{v}_i^T \dot{v}_i + \frac{1}{2} \dot{\omega}_i^T I_i \dot{\omega}_i$$

è evidente che avendo ${}^0\omega_i = R_i \dot{\omega}_i$, ${}^0\omega_i^T = \dot{\omega}_i^T R_i^T$ allora

$$\frac{1}{2} {}^0\omega_i^T I_i {}^0\omega_i = \frac{1}{2} \dot{\omega}_i^T (R_i^T I_i R_i) \dot{\omega}_i = \frac{1}{2} \dot{\omega}_i^T (I_i) \dot{\omega}_i$$

da cui

$$I_i = R_i^T I_i R_i \quad \text{ovvia} \quad {}^0I_i = R_i I_i R_i^T$$

Dunque posso lavorare in componenti $\{S_i\}$ usando il fatto che 0I_i , che in generale dipende dal tempo ed il cui calcolo diretto non è immediato, è ottenibile grazie alla ${}^0I_i = R_i I_i R_i^T$.

Adesso consideriamo di lavorare in componenti $\{S_i\}$ ma omettiamo il prefisso "0" per alleggerire la notazione.

Se per ogni liute scriviamo il twist che usa come polo il centro di massa c_i allora possiamo scrivere

$$Y_{\omega_i} = Y_i \dot{q} \quad \text{con} \quad Y_i = \begin{bmatrix} Y_{v_i} \\ Y_{\omega_i} \end{bmatrix}$$

definiamo

$Y_{v_i}^j$ e $Y_{\omega_i}^j$ la j -esima colonna di Y_{v_i} e Y_{ω_i} rispettivamente

allora (per $j \leq i$) si può scrivere

$$Y_{v_i}^j = \begin{cases} \hat{z}_{j-1}^{j-1} p_{ci}, & R \\ \hat{z}_{j-1}, & P \end{cases} \quad Y_{\omega_i}^j = \begin{cases} \hat{z}_{j-1}, & R \\ 0, & P \end{cases}$$

con \hat{z}_{j-1}^{j-1} che è il vettore spiccato dall'origine di $\{S_{j-1}\}$ fino al centro di massa del liute i -esimo c_i (naturalmente in componenti $\{S_i\}$ come di default tutto il resto!)

Poi considerando che $Y_i \in \mathbb{R}^{6 \times m} \quad \forall i$ allora dobbiamo completarle per $j > i$ le colonne di Y_i con degli zeri e per ciò

$$Y_{v_i} = [Y_{v_i}^1 \quad Y_{v_i}^2 \quad \dots \quad Y_{v_i}^i \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

$$Y_{\omega_i} = [Y_{\omega_i}^1 \quad Y_{\omega_i}^2 \quad \dots \quad Y_{\omega_i}^i \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

Data questa struttura

14.

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \dot{q}^T Y_{ci}^T Y_{ci} \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T J_{wi}^T I_i J_{wi} \dot{q}$$

si può fattorizzare il tutto rispetto a $\dot{q}^T () \dot{q}$ nel seguente modo

$$T_i = \frac{1}{2} \dot{q}^T [m_i Y_{ci}^T Y_{ci} + J_{wi}^T I_i J_{wi}] \dot{q} =: \frac{1}{2} \dot{q}^T B_i(q) \dot{q}$$

e calcolare la T totale in modo additivo

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\sum_{i=1}^n B_i(q) \right) \dot{q} =: \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q}$$

con $B(q)$ che è simmetrica e positiva definita poiché la forma quadratica ad essa associata è sempre strettamente positiva a meno che il sistema sia immobile ($\dot{q} = 0$).

Calcolo della U in forma standard

Dato che l'energia potenziale è pari al lavoro fatto dall'esterno sul sistema per sollevare ciascun link ad una quota generica, allora per ciascun link

$$U_i = -m_i \underline{g}^T \underline{p}_{ci}$$

avendo preso come quote di riferimento (dove $U_i = 0$) quella relativa all'origine del frame $\{S_0\}$.

Allora l'energia potenziale totale per tutto il manipolatore risulta:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i = - \sum_{i=1}^n m_i \underline{g}^T \underline{p}_{ci}$$

Calcolo delle forze generalizzate Q_i

La quantità Q_i è detta forza generalizzata o anche "componente Lagrangiana delle forze attive relativa al grado di libertà i -esimo ossia alla coord q_i ,"

e si calcola nel seguente modo:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N_F} \underline{F}_j \cdot \frac{\partial \underline{p}_j}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^{N_M} \underline{M}_k \cdot \frac{\partial (\delta \underline{\theta}_k)}{\partial (\delta q_i)}$$

dove \underline{F}_j è la forza attiva generica applicata al sistema (interna o esterna ($j=1, \dots, N_F$)) con N_F che conta il numero di forze attive presenti nel sistema (concentrate)

dove \underline{M}_k è la coppia pura attiva applicata al sistema (interna o esterna) ($k=1, \dots, N_M$) con N_M che conta il numero di coppie attive presenti nel sistema

dove \underline{p}_j è il vettore posizione del punto di applicazione della forza \underline{F}_j 15

dove $\delta\theta_k$ è la rotazione infinitesima del corpo rigido cui è applicata la coppia concentrata \underline{M}_k . Nota bene che una rotazione generica 3D di un corpo rigido può essere rappresentata con un vettore solo se è infinitesima da cui $\delta\theta_k$.

La precedente formula è scrivibile anche in una forma equivalente in cui compaiono le derivate $\partial(\cdot)/\partial\dot{q}_i$, ossia

$$Q_i = \sum_{j=1}^{NF} \underline{F}_j \cdot \frac{\partial(\underline{v}_j)}{\partial\dot{q}_i} + \sum_{k=1}^{NM} \underline{M}_k \cdot \frac{\partial(\underline{\omega}_k)}{\partial\dot{q}_i}$$

dove $\underline{v}_j = \frac{d\underline{p}_j}{dt}$, velocità del punto di applicazione di \underline{F}_j

dove $\underline{\omega}_k$, velocità angolare del corpo rigido cui è applicata la coppia concentrata \underline{M}_k

Questo perché semplicemente

$$\underline{p}_j = \underline{p}_j(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

da cui (x chain rule)

$$\dot{\underline{p}}_j = \underline{v}_j = \frac{d\underline{p}_j}{dt} = \frac{\partial \underline{p}_j}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \underline{p}_j}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \underline{p}_j}{\partial q_n} \dot{q}_n$$

e quindi

$$\frac{\partial(\underline{v}_j)}{\partial\dot{q}_i} = \frac{\partial \underline{p}_j}{\partial q_i} = \underline{J}_{v_j}^i$$

$$\text{Per la } \underline{\omega}_k = \underline{Y}_k(q) \underline{\dot{q}} = \underbrace{\underline{Y}_k^1}_{1^{\text{a}} \text{ colonna}} \dot{q}_1 + \underbrace{\underline{Y}_k^2}_{2^{\text{a}} \text{ colonna}} \dot{q}_2 + \underbrace{\underline{Y}_k^3}_{3^{\text{a}} \text{ colonna}} \dot{q}_3$$

$$\delta\theta_k = \underline{\omega}_k \delta t = \underline{Y}_k(q) \underline{\dot{q}} \delta t = \underline{Y}_k(q) \delta \underline{q} = \underline{Y}_k^1 \delta q_1 + \underline{Y}_k^2 \delta q_2 + \underline{Y}_k^3 \delta q_3$$

Allora

$$\frac{\partial(\delta\theta_k)}{\partial(\delta q_i)} = \underline{Y}_k^i = \text{per la def. di Jacobiano} = \frac{\partial(\underline{\omega}_k)}{\partial\dot{q}_i}$$

Allora, in forma più standard, si può scrivere

$$Q_i = \sum_{j=1}^{NF} \underline{F}_j^T \underline{J}_{v_j}^i + \sum_{k=1}^{NM} \underline{M}_k^T \underline{Y}_{\omega_k}^i$$

con $\underline{J}_{v_j}^i$ è la colonna i -esima del Jacobiano di posizione relativo al punto di applicazione della \underline{F}_j

$\underline{Y}_{\omega_k}^i$ è la colonna i -esima del Jacobiano di orientazione relativo al corpo rigido cui è applicata la coppia concentrata \underline{M}_k

Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^T B(\underline{q}) \dot{\underline{q}} + \sum_{i=1}^m m_i \underline{g}_i^T \underline{p}_{ci}$$

Sviluppando in componenti $[B]_{ij} = b_{ij}$

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^m m_i \underline{g}_i^T \underline{p}_{ci}$$

Calcoliamo le varie derivate:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^m b_{ij} \dot{q}_j$$

e la sua derivata rispetto al tempo risulta:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_{j=1}^m b_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^m \left(\frac{db_{ij}}{dt} \right) \dot{q}_j = \sum_{j=1}^m b_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k \dot{q}_j$$

Mentre la derivata rispetto a q_i risulta

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_i} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m b_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j=1}^m m_j \underline{g}_j^T \left(\frac{\partial \underline{p}_{cj}}{\partial q_i} \right)$$

queste, come visto prima, \dot{y}_{ij} , ossia la i -esima colonna del Jacobiano di posizione di C_j .

Quindi alla fine si ha:

$$\sum_{j=1}^m b_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \left[\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right] \dot{q}_j \dot{q}_k - \sum_{j=1}^m m_j \underline{g}_j^T \dot{y}_{ij} = Q_i \quad (i=1, \dots, m)$$

Quindi se consideriamo di scrivere in modo compatto questa generica i -esima equazione abbiamo

$$\sum_{j=1}^m b_{ij} \ddot{q}_j + V_i + G_i = Q_i \quad (i=1, \dots, m)$$

$$\text{con } V_i = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \left[\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right] \dot{q}_j \dot{q}_k$$

$$G_i = - \sum_{j=1}^m m_j \underline{g}_j^T \dot{y}_{ij}$$

Tutto ciò andrebbe già benissimo. Tuttavia, in vista di ottenere alcune proprietà particolari (vedi dopo) delle equazioni di Newton (utili in alcune din. di controllo adattivo vedi Robotica II) si scrive, sfruttando la simmetria della doppia sommatoria negli indici j e k

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \left\{ \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right\} \dot{q}_j \dot{q}_k &= \sum_j \sum_k \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right] \right\} \dot{q}_j \dot{q}_k = \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \Gamma_{jk}^i \dot{q}_k \dot{q}_j = \sum_{j=1}^m \left\{ \sum_{k=1}^m \Gamma_{jk}^i \dot{q}_k \right\} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^m C_{ij} \dot{q}_j \end{aligned}$$

dove $C_{ij} = \left\{ \sum_{k=1}^m \Gamma_{jk}^i \dot{q}_k \right\}$ sono elementi di matrice $C(\underline{q}, \dot{\underline{q}})$

Alle fine le equi. di momento sono scrivibili così

$$\sum_{j=1}^n \{ b_{ij} \dot{q}_j + c_{ij} \dot{q}_j - m_j \underline{g}^T \underline{Y}_{ij} \} = Q_i$$

con $c_{ij} = \left\{ \sum_{k=1}^n \Gamma_{jk}^i \dot{q}_k \right\}$ e Γ_{jk}^i sono i simboli di Christoffel del tipo
(note sono simmetrici rispetto a j e k)

in forma vettoriale (tutto insieme) viene

$$\underline{B}(\underline{q}) \underline{\dot{q}} + \underline{C}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) \underline{\dot{q}} + \underline{G}(\underline{q}) = \underline{Q}$$

con questo che è un vettore di \mathbb{R}^n .

$\underline{B}(\underline{q}) \underline{\dot{q}}$ $\underline{C}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) \underline{\dot{q}}$ $\underline{G}(\underline{q})$ \underline{Q}
 termini termini termini \swarrow
 lineari nelle Centrifughi statici componente Lagrangiana
 accelerazioni e di Coriolis delle forze attive
 di giunto

Nelle slide ppt presenti in rete trovate la derivazione delle equi. di momento anche direttamente in forma vettoriale (e non componenti x componenti come mostrato qui)

Un motivo per scrivere i termini centrifughi e di Coriolis usando simboli di Christoffel è che ciò garantisce auto-simmetria della matrice $N = \dot{B} - 2C$ che risulta utile in alcune leggi di controllo

$$N = \dot{B} - 2C$$

$$N_{ij} = m_{ij} = \dot{b}_{ij} - 2c_{ij} \quad \text{ma} \quad \dot{b}_{ij} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

(l'indice ripetuto "dummy" implica somma su tale indice $k=1, \dots, n$)

$$c_{ij} = \Gamma_{jk}^i \dot{q}_k = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right] \dot{q}_k$$

allora

$$m_{ij} = \dot{b}_{ij} - 2c_{ij} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k - \left[\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} \dot{q}_k - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \dot{q}_k \right] = \left[\frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} - \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} \right] \dot{q}_k$$

$$m_{ij}^T = m_{ji} = \left[\frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right] \dot{q}_k = -m_{ij}$$

dunque m_{ij} è matrice auto-simmetrica omia

$$N = \dot{B} - 2C = -(\dot{B} - 2C)^T = -N^T$$

questo implica che $\underline{\dot{q}}^T N \underline{\dot{q}} = 0 \quad \forall \underline{\dot{q}}$

il fatto che $\underline{\dot{q}}^T N \underline{\dot{q}} = 0$ invece non implica che N è auto-simmetr poiché

$$N(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) \text{ è f. quadratica coinvolge } \underline{\dot{q}} \text{ ossia}$$

$$\underline{\dot{q}}^T N(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) \underline{\dot{q}}$$

Dunque con la scelta di usare Christoffel si ha garanzia che $C(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$ è tale che $\dot{B} - 2C$ è auto-simmetrica.

- 1) La Figura 1 mostra lo schema cinematico funzionale del dito di Stanford/JPL e del relativo sistema di attuazione mediante tendini inestensibili e pulegge. Il dito è schematizzato come un robot seriale costituito dai link L_i , ($i = 0, \dots, 3$) (L_0 rappresenta il telaio) di lunghezze a_i incernierati in A , B e C . Si prenda il punto D come origine della terna End-Effector. L'attuazione del dito è realizzata mediante 4 tendini inestensibili che si impegnano sulle pulegge come rappresentato in Figura 1. Ciascun tendine con il relativo sistema di pulegge interessate viene definito *linea di trasmissione*. Ad esempio, la linea di trasmissione del tendine 1 è costituita dal tendine rosso, collegato a L_3 , dalla puleggia calettata su C di raggio r_3 , dalla puleggia su B di raggio r_8 e, infine, dalla puleggia su A di raggio r_4 . Con s_1 si indica lo spostamento del capo libero del tendine 1. Considerazioni analoghe possono essere fatte per le altre 3 linee di trasmissione. Le pulegge calettate su A hanno raggi (crescenti): r_4, r_5, r_6 ed r_7 , su B : r_8 ed r_2 , su C : r_3 .

Si noti che le pulegge sono: (i) calettate “folli” sui rispettivi assi, (ii) ruotano indipendentemente l'una dall'altra e dai link, (iii) è solo la presenza dei tendini inestensibili ad introdurre delle relazioni vincolari fra le loro rotazioni e quelle dei link (es. per la presenza del tendine 1 collegato a L_3 si avrà $\theta_{p_3} = \theta_3$).

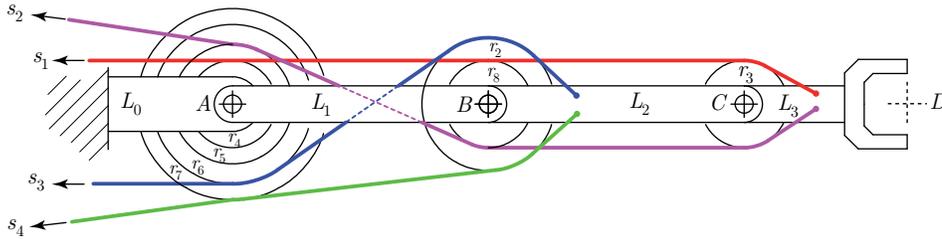


Figura 1: Schema funzionale del sistema di attuazione del dito di Stanford/JPL.

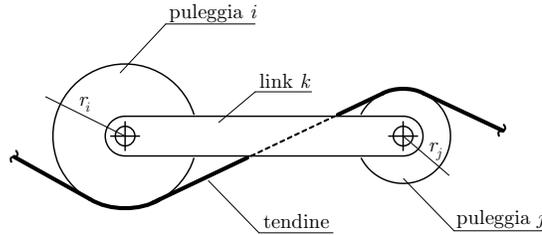
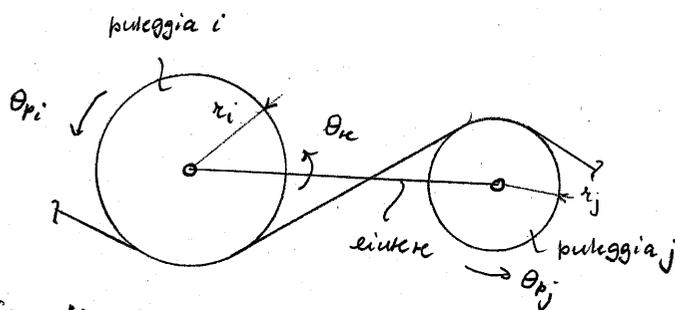


Figura 2: Schema per la scrittura dell'equazione del circuito elementare.

Fissato come positivo il verso antiorario, si indichino con θ_k la rotazione del link k , con θ_{p_j} la rotazione della puleggia j , con q_k la rotazione relativa del link k rispetto al link $k - 1$ ($q_k = \theta_k - \theta_{k-1}$). Con riferimento alla Figura 2, considerando ciascun tendine inestensibile e trascurando variazioni di tensione all'interno di una stessa linea (ad es. in presenza di inerzia delle pulegge e per fenomeni di attrito e isteresi), si scriva: (i) l'equazione che lega θ_{p_j} , θ_{p_i} e θ_k , tenendo conto del percorso (incrociato o parallelo) del tendine fra due pulegge consecutive; (ii) l'equazione che lega le rotazioni del link k , del link $k + 1$ e della puleggia interposta fra questi (formula di composizione di rotazioni relative); (iii) si combinino opportunamente queste equazioni per ottenere, per la singola linea di trasmissione, l'equazione che lega la rotazione assoluta della puleggia più prossima al telaio ai vari q_i ; (iv) si scriva la relazione che lega la rotazione assoluta della puleggia più prossima al telaio allo spostamento del capo libero del tendine s_i (si prenda $s_i > 0$ per tendine in trazione); (v) si scriva, per la singola linea di trasmissione, l'equazione che lega lo spostamento del capo libero del tendine ai vari q_i ; (vi) si scrivano le 4 equazioni di vincolo che legano gli spostamenti $\mathbf{s} = [s_1 \dots s_4]^T \in \mathbb{R}^4$ alle rotazioni $\mathbf{q} = [q_1 \dots q_3]^T \in \mathbb{R}^3$; (vii) si discuta la capacità di conoscere la configurazione \mathbf{q} del dito noti gli spostamenti dei capi dei tendini \mathbf{s} ; (viii) applicando il Principio dei Lavori Virtuali si determini la relazione fra le coppie (interne) ai giunti $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^3$ e le tensioni nei tendini $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^4$ ($\xi_i > 0$ se tendine è teso); (ix) si scriva la forma generale della relazione fra le coppie $\boldsymbol{\tau}$ e le tensioni nei tendini $\boldsymbol{\xi}$ e si discuta la possibilità di realizzare coppie arbitrarie agendo sul sistema di tendini (il tendine non trasmette azioni di compressione!); (x) si scriva la relazione che, all'equilibrio, lega un wrench esterno \mathbf{w}_D e le tensioni $\boldsymbol{\xi}$.

Svolgimento

(c) Equazioni che lega rotazioni assolute delle pulegge i e j alla rotazione assoluta del link k



Se link k fosse fisso (non ruotasse) si avrebbe:

$$r_i \theta_{pi} = \pm r_j \theta_{pj}$$

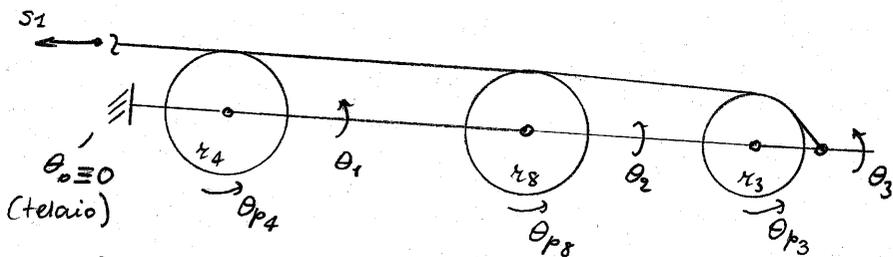
a causa del fatto che il tendine è inestensibile e trasmette la velocità periferica da una puleggia alle successive.

Se link k ruota, si ha un'aggiunta della equazione sopra ma solo rispetto ad un osservatore solidale al link k . Quindi definite:

$$\theta_{pi,k} = \theta_{pi} - \theta_k \quad \text{e} \quad \theta_{pj,k} = \theta_{pj} - \theta_k \quad \text{si ottiene}$$

$$\boxed{r_i \theta_{pi,k} = \pm r_j \theta_{pj,k}} \quad (1) \quad \text{n.b.} \begin{cases} +, & \text{se il percorso del tendine è "parallelo"} \\ -, & \text{se è "incrociato"} \end{cases} \quad (\text{come in fig sopra})$$

Consideriamo ad esempio la linea di trasmissione 1:



n.b. questi θ, θ_p sono assoluti come già detto sopra!

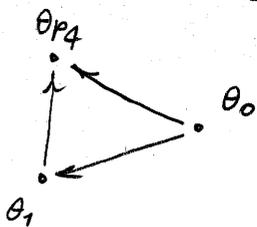
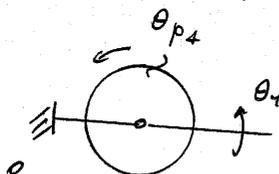
Possiamo applicare a questa linea di trasmissione l'equ. (1) per 2 volte (su una serie di tre pulegge ho 2 coppie consecutive) ottenendo

$$\theta_{p4,1} r_4 = \theta_{p8,1} r_8 \quad (\text{pul } r_4, \text{ link } 1, \text{ pul } r_8) \quad (2)$$

$$\theta_{p8,2} r_8 = \theta_{p3,2} r_3 \quad (\text{pul } r_8, \text{ link } 2, \text{ pul } r_3) \quad (3)$$

n.b. in entrambe ho il segno "+" poiché ho in entrambe le coppie percorso parallelo

(cc) In ottica di far comparire nelle equ. di cinematica certe fra s_i e var q_i [dove $q_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ (rotaz. di un link rispetto al precedente)] proprio i q_i , posso scrivere le formule che legano le rotazioni relative ottenendo:



f. composizione moti (rotazioni) relativi

$$\theta_{p4,1} = \theta_{p4,0} - \theta_{1,0}$$

Questa formula può essere applicata a tutti e 3 i "template" link-puleggia-link della linea di trasmissione ottenendo:

$$\left\{ \begin{aligned} \theta_{p4,1} &= \theta_{p4,0} - \theta_{1,0} = (\text{solo perché } \theta_0 \equiv 0) = \theta_{p4} - \theta_1 = \theta_{p4} - q_1 \quad (4) \\ \theta_{p8,2} &= \theta_{p8,1} - \theta_{2,1} = \theta_{p8,1} - q_2 \quad (5) \\ \theta_{p3,3} &= \theta_{p3,2} - \theta_{3,2} = \theta_{p3,2} - q_3 \quad (6) \end{aligned} \right.$$

Si noti che, come enunciato nel testo, a causa della presenza del tendine inesistentibile, $\theta_{p3,3} = 0$ (così, come quando tratteremo le altre linee sarà ad esempio: $\theta_{p2,2} = 0$) (7)

Allora nelle equazioni scritte (sono $2 + 3 + 1 = 6$) abbiamo le quantità: (q_1, q_2, q_3) ($\theta_{p4,0}, \theta_{p4,1}, \theta_{p8,1}, \theta_{p8,2}, \theta_{p3,2}, \theta_{p3,3}$) che sono in tale S.

Dunque questo sistema consente, una volta fissate tre quantità (es. q_1, q_2 e q_3), di determinare tutte le altre. In particolare, in attesa di trovare un legame con lo spostam. del capo del tendine S_1 , interessa trovare $\theta_{p4,0} = \theta_{p4}$, dato che poi sarà $S_1 = + r_4 \theta_{p4}$.

Allora da (7) in (6) $\theta_{p3,2} = q_3$ e da (3) $\theta_{p8,2} = \frac{r_3}{r_8} q_3$ che poi inserita in (5) fornisce

$$\theta_{p8,2} = \frac{r_3}{r_8} q_3 = \theta_{p8,1} - q_2$$

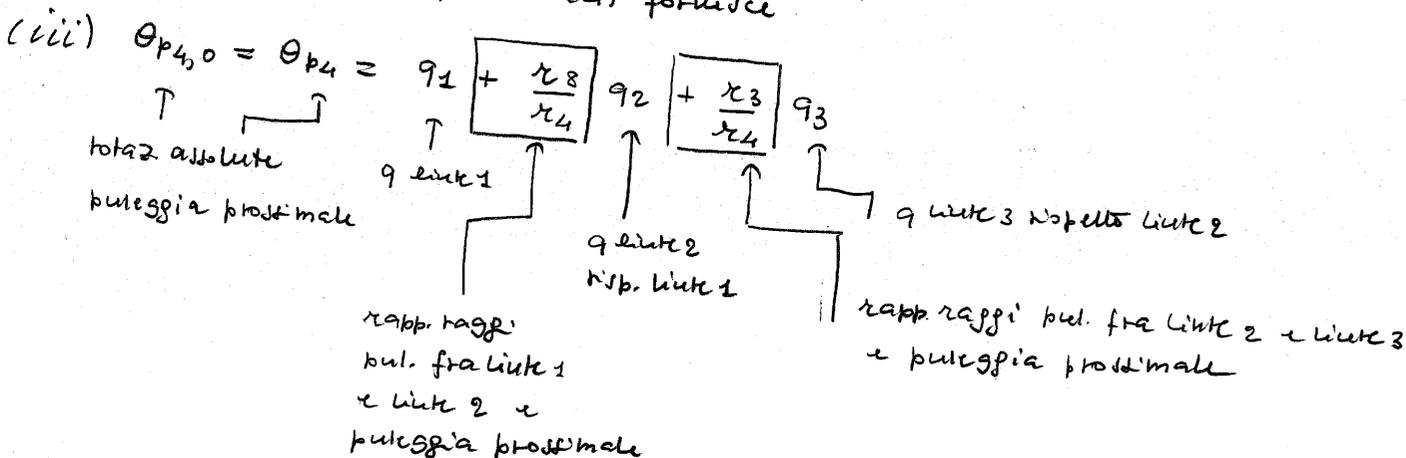
da cui

$$\theta_{p8,1} = q_2 + \frac{r_3}{r_8} q_3$$

che inserita in (2) fornisce

$$\theta_{p4,1} = \frac{r_8}{r_4} \left(q_2 + \frac{r_3}{r_8} q_3 \right) = \frac{r_8}{r_4} q_2 + \frac{r_3}{r_4} q_3$$

questo inserita infine in (4) fornisce



Nota bene che si ha $+\frac{\tau_8}{\tau_4}$ perché percorso tendine fra p_4 e p_8 è parallelo,
 $+\frac{\tau_3}{\tau_4}$ perché globalmente percorso fra p_4 e p_3 è anch'esso parallelo

(iv) Adesso per ottenere relazione fra $\theta_{p_4,0} = \theta_{p_4}$ e S_1 si guarda se $S_1 > 0$ è associato a $\pm \tau_4 \theta_{p_4}$.

In questo caso si ha $S_1 = \tau_4 \theta_{p_4}$.

(v) Dunque per la singola linea di trasmissione (la 1^a in questo caso) si ha:

$$S_1 = \tau_4 \theta_{p_4} = \tau_4 q_1 + \tau_8 q_2 + \tau_3 q_3$$

(vi) Nei casi delle linee 2, 3 e 4 per analogia si scrive

linea 2 $\theta_{p_5,0} = \theta_{p_5} = q_1 - \underbrace{\left(\frac{\tau_8}{\tau_5}\right)}_{\text{inclinato } p_5 - p_8} q_2 - \underbrace{\left(\frac{\tau_3}{\tau_5}\right)}_{\text{globalmente inclinato } p_5 - p_3} q_3$
 $S_2 = \tau_5 \theta_{p_5}$

linea 3 $\theta_{p_6,0} = \theta_{p_6} = q_1 - \left(\frac{\tau_2}{\tau_6}\right) q_2$
 $S_3 = -\tau_6 \theta_{p_6}$

linea 4 $\theta_{p_7,0} = \theta_{p_7} = q_1 + \left(\frac{\tau_2}{\tau_7}\right) q_2$
 $S_4 = -\tau_7 \theta_{p_7}$

quindi:

$$\begin{cases} S_1 = \tau_4 q_1 + \tau_8 q_2 + \tau_3 q_3 \\ S_2 = \tau_5 q_1 - \tau_8 q_2 - \tau_3 q_3 \\ S_3 = -\tau_6 q_1 + \tau_2 q_2 \\ S_4 = -\tau_7 q_1 - \tau_2 q_2 \end{cases}$$

(vi bis) In forma matriciale si ha quindi:

$$\underline{S} = [S_1 \ S_2 \ S_3 \ S_4]^T; \quad \underline{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T; \quad A = \begin{bmatrix} \tau_4 & \tau_8 & \tau_3 \\ \tau_5 & -\tau_8 & -\tau_3 \\ -\tau_6 & \tau_2 & 0 \\ -\tau_7 & -\tau_2 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\boxed{\underline{S} = A \underline{q}}$$

Se interessa conoscere le q note le S si può calcolare $\underline{q} = A^+ \underline{S}$ dove queste $A^+ = A^L$ (inversa sinistra dato che A è rettangolare alta)

(vii) Introducendo $\underline{t} = [t_1 \ t_2 \ t_3]^T$ (coppie interne ai giunti), $\underline{g} = [g_1 \ g_2 \ g_3 \ g_4]^T$ (tensioni nei tendini) si può scrivere:

Lavoro virtuale fatto dalle coppie:

$$\delta W_c = \underline{c}^T \delta \underline{q}$$

Lavoro virtuale fatto dalle tendine nei tendini:

$$\delta W_g = \underline{g}^T \delta \underline{s}$$

Condizioni di bilancio statico: $\delta W_c = \delta W_g$

$$\delta W_c = \underline{c}^T \delta \underline{q} = \delta W_g = \underline{g}^T \delta \underline{s} = \underline{g}^T (A \delta \underline{q}) = \underline{g}^T A \delta \underline{q}$$

da cui: ($\forall \delta \underline{q} \neq \underline{0}$)

$$\underline{c}^T = \underline{g}^T A \iff \boxed{\underline{c} = A^T \underline{g}} \quad \text{definendo } A^T = B \quad \boxed{\underline{c} = B \underline{g}}$$

(viii) A meno, per esercitate delle coppie ai giunti \underline{c} si possono applicare delle tendine nei tendini del tipo

$$\underline{g} = B^+ \underline{c} + H \underline{l} \quad \text{con } B^+ = B^R = B^T [B B^T]^{-1} \text{ l' inversa destra}$$

Se $A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$; $B = A^T \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$; $B^+ \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$

$H \in \mathbb{R}^{4 \times (4-3)} = H \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ base del nullo di B (con B rango pieno righe)

Nota bene che essendo H in questo caso un vettore colonna ($H \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$) si ha

$$\underline{g} = \underbrace{B^+ \underline{c}}_{\substack{\text{soluzione partic.} \\ \text{della complete}}} + \underbrace{H \underline{l}}_{\substack{\text{forma generale} \\ \text{della soluzione della} \\ \text{omogenea } (B \underline{g} = \underline{0})}}, \quad \underline{l} \in \mathbb{R}$$

Verifica che è soluzione

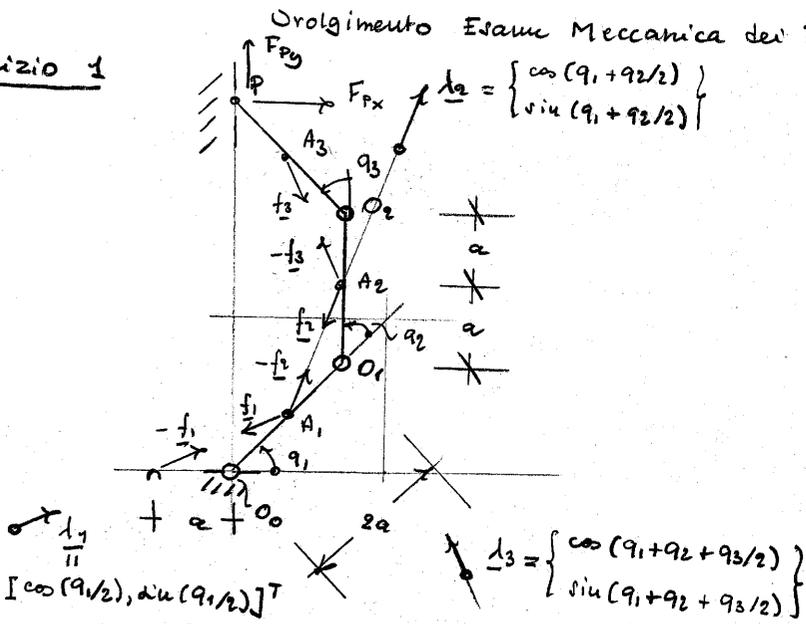
$$B \underline{g} = B \underbrace{\underline{g}}_{\substack{\uparrow \\ \text{da sopra}}} = B (B^+ \underline{c} + H \underline{l}) = \underbrace{B B^+}_{I_{3 \times 3}} \underline{c} + \underbrace{B H}_{\substack{\equiv \\ 0}} \underline{l} = \underline{c} \quad \text{ok, c.v.d.}$$

Osservazioni sulla possibilità di esercitate \underline{c} arbitrario con $\underline{g} \geq \underline{0}$ (omnia tendine tutti positive) Se la base del nullo H è un vettore colonna che si scrive con elem. tutti positivi, allora nonostante il termine $B^+ \underline{c}$ possa contenere qualche elem. negativo, è sempre possibile per un opportuno \underline{l} fare in modo che $g_i > 0 \forall i$.

(ix) Dato che $\underline{c} = \underline{J}_D^T \underline{w}_D$ allora $B \underline{g} = \underline{J}_D^T \underline{w}_D$ dunque (da prima)

$$\boxed{\underline{g} = B^+ (\underline{J}_D^T \underline{w}_D) + H \underline{l}} \quad \parallel \text{ queste sono le tendine } \underline{g} \text{ da generare per ottenere il vettore } \underline{w}_D \text{ all' end-effector}$$

Esercizio 1



Gli attuatori lineari esercitano delle azioni schematizzabili come le forze f_i disegnate in figura.

Nel compito la $f_1 \neq 0$, dato che l'attuatore alla base non è presente.

Svolgiamo l'esercizio nel caso generale e poi calcoliamo cosa succede se $f_1 = 0$.
Lunghezza link $2a$. In conf. $q_1 = q_2 = q_3 = \pi/4$.

Scrivo l'equilibrio del sistema dicendo che le azioni applicate dagli attuatori debbono fare equilibrio alle azioni che il mondo esterno applica in P.

Calcolo la componente Lagrangiana delle forze attive relativa ai vari q_i .

Mi ritrovo $J_{N_{A1}}, J_{N_{A2}}, J_{N_{A3}}$ e J_{N_P} e poi le vettori in componenti delle f_i

$$\underline{f}_1 = -f_1 \begin{Bmatrix} \cos(q_1/2) \\ \sin(q_1/2) \end{Bmatrix}; \quad \underline{f}_2 = -f_2 \begin{Bmatrix} \cos(q_1 + q_2/2) \\ \sin(q_1 + q_2/2) \end{Bmatrix}; \quad \underline{f}_3 = -f_3 \begin{Bmatrix} \cos(q_1 + q_2 + q_3/2) \\ \sin(q_1 + q_2 + q_3/2) \end{Bmatrix}$$

$$J_{N_{A1}} = \frac{\partial p_{A1}}{\partial q_1} = a \begin{Bmatrix} -\sin q_1 \\ \cos q_1 \end{Bmatrix};$$

$$J_{N_{A2}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_{A2}}{\partial q_1} & \frac{\partial p_{A2}}{\partial q_2} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2a \sin q_1 - a \sin(q_1 + q_2) & -a \sin(q_1 + q_2) \\ 2a \cos q_1 + a \cos(q_1 + q_2) & a \cos(q_1 + q_2) \end{Bmatrix}$$

$$J_{N_{A3}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_{A3}}{\partial q_1} & \frac{\partial p_{A3}}{\partial q_2} & \frac{\partial p_{A3}}{\partial q_3} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2a \sin q_1 - 2a \sin(q_1 + q_2) - a \sin(q_1 + q_2 + q_3) & \dots & \dots \\ 2a \cos q_1 + 2a \cos(q_1 + q_2) + a \cos(q_1 + q_2 + q_3) & \dots & \dots \end{Bmatrix}$$

J_{N_P} = come $J_{N_{A3}}$ a parte che l'ultimo termine ha "2a" invece che "a".

Allora

$$0 = Q_1 = (\underline{f}_1 - \underline{f}_2)^T J_{N_{A1}} + (\underline{f}_2 - \underline{f}_3)^T J_{N_{A2}}^{(1)} + (\underline{f}_3)^T J_{N_{A3}}^{(1)} + \underline{F}^T J_{N_P}^{(1)}$$

$$0 = Q_2 = (\underline{f}_2 - \underline{f}_3)^T J_{N_{A2}}^{(2)} + \underline{f}_3^T J_{N_{A3}}^{(2)} + \underline{F}^T J_{N_P}^{(2)}$$

$$0 = Q_3 = \underline{f}_3^T J_{N_{A3}}^{(3)} + \underline{F}^T J_{N_P}^{(3)}$$

per equilibrio

Allora se lo ricordiamo ottenso:

$$\left\{ \begin{aligned} Y_{N_{A1}}^T \underline{f}_1 + (Y_{N_{A2}}^{T(1)} - Y_{N_{A1}}^T) \underline{f}_2 + (Y_{N_{A3}}^{T(1)} - Y_{N_{A2}}^{T(1)}) \underline{f}_3 + Y_{N_P}^{T(1)} \underline{F} &= 0 \\ Y_{N_{A2}}^{T(2)} \underline{f}_2 + (Y_{N_{A3}}^{T(2)} - Y_{N_{A2}}^{T(2)}) \underline{f}_3 + Y_{N_P}^{T(2)} \underline{F} &= 0 \\ Y_{N_{A3}}^{T(3)} \underline{f}_3 + Y_{N_P}^{T(3)} \underline{F} &= 0 \end{aligned} \right.$$

questo è il sistema che garantisce l'equilibrio del sistema in forma matriciale e ha:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} Y_{N_{A1}}^T & (Y_{N_{A2}}^{T(1)} - Y_{N_{A1}}^T) & (Y_{N_{A3}}^{T(1)} - Y_{N_{A2}}^{T(1)}) \\ \underline{0}^T & Y_{N_{A2}}^{T(2)} & (Y_{N_{A3}}^{T(2)} - Y_{N_{A2}}^{T(2)}) \\ \underline{0}^T & \underline{0}^T & Y_{N_{A3}}^{T(3)} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \underline{f}_1 \\ \underline{f}_2 \\ \underline{f}_3 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} Y_{N_P}^{T(1)} \\ Y_{N_P}^{T(2)} \\ Y_{N_P}^{T(3)} \end{array} \right\} \underline{F} = \underline{0}$$

È evidente che se $\underline{f}_1 \equiv \underline{0}$ il vincolo applicato alla parete risulta nullo. Quindi se, come nel caso del campo, non è presente un'attirazione che collega il telaio al 1° dente non si può applicare alcuna forza alla parete in P.

Ancora, se espando le definizioni di \underline{f}_1 , \underline{f}_2 ed \underline{f}_3 come a p. 1 si ha:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} Y_{N_{A1}}^T \cdot (-\underline{l}_1) & (Y_{N_{A2}}^{T(1)} - Y_{N_{A1}}^T) \cdot (-\underline{l}_2) & (Y_{N_{A3}}^{T(1)} - Y_{N_{A2}}^{T(1)}) \cdot (-\underline{l}_3) \\ 0 & Y_{N_{A2}}^{T(2)} \cdot (-\underline{l}_2) & (Y_{N_{A3}}^{T(2)} - Y_{N_{A2}}^{T(2)}) \cdot (-\underline{l}_3) \\ 0 & 0 & Y_{N_{A3}}^{T(3)} \cdot (-\underline{l}_3) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \underline{f}_1 \\ \underline{f}_2 \\ \underline{f}_3 \end{array} \right\} +$$

$$Y_{N_P}^T \underline{F} = \underline{0}$$

Si ha: $Y_{N_{A2}}^{T(2)} \cdot (-\underline{l}_2) = a \sin\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)$; $(Y_{N_{A3}}^{T(2)} - Y_{N_{A2}}^{T(2)}) \cdot (-\underline{l}_3) = 0$;

$Y_{N_{A3}}^{T(3)} \cdot (-\underline{l}_3) = a \sin\left(\frac{\alpha_3}{2}\right)$;

Dunque alla fine si ha:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a \sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & a \sin\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & a \sin\left(\frac{\alpha_3}{2}\right) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \underline{f}_1 \\ \underline{f}_2 \\ \underline{f}_3 \end{array} \right\} + Y_{N_P}^T \underline{F} = \underline{0}$$

Questo risultato era evidente dato che, se l'angolo formato dalle f_i con il rispettivo asse i -esimo è $90^\circ/2$, la coppia interna al giunto i -esimo è

$$c_i = \underbrace{f_i}_a \underbrace{\sin(90^\circ/2)}_{\text{braccio rispetto a polo } O_{i-1}}$$

dunque, alla usuale $\underline{c} + \underline{Y}_p^T \underline{F} = \underline{0}$ una sostituisce la

$$\text{diag}(a \sin(90^\circ/2), a \sin(90^\circ/2), a \sin(90^\circ/2)) \underline{f} + \underline{Y}_p^T \underline{F} = \underline{0}$$

Nella configurazione indicata si ha (con $f_1 \equiv 0$ perché giunto non è attuato)

$$\begin{pmatrix} a \sin(\frac{\pi}{8}) & 0 & 0 \\ 0 & a \sin(\frac{\pi}{8}) & 0 \\ 0 & 0 & a \sin(\frac{\pi}{8}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \equiv 0 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2(1+\sqrt{2})a & 0 \\ -(2+\sqrt{2})a & -\sqrt{2}a \\ -\sqrt{2}a & -\sqrt{2}a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \underline{0}$$

Se $f_1 \equiv 0$ allora il unico wrench che può essere realizzato alla parete è del

tipo $\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_y \end{pmatrix}$. Il wrench deve avere retta d'applicazione passante per

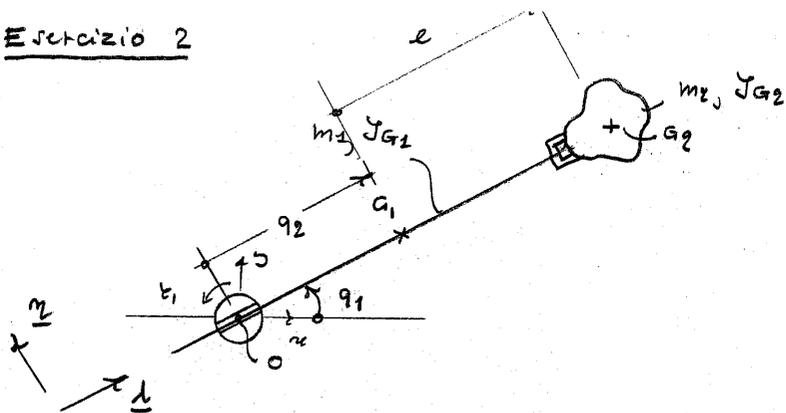
O_0 , così che può essere realizzato senza che il primo giunto debba essere attuato.

Quindi con $F_x \equiv 0$ si ha poi

$$\begin{pmatrix} a \sin(\frac{\pi}{8}) & 0 \\ 0 & a \sin(\frac{\pi}{8}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{2}a \\ -\sqrt{2}a \end{pmatrix} F_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui, dato un certo F_y , si trovano f_2 ed f_3 che si fanno equilibrio

Esercizio 2



E_1 = coppia applicata su coppia rotoidale

E_2 = forze interna fra coppia rotoidale e linke nella direzione \underline{l}

Velocità del centro di massa del link 1

$$\underline{v}_{G_1} = \underline{v}_{G_1}^{(tr)} + \underline{v}_{G_1}^{(rel)} = \dot{q}_1 q_2 \underline{z} + \dot{q}_2 \underline{l} \quad ; \quad \|\underline{v}_{G_1}\|^2 = (\dot{q}_1^2 q_2^2 + \dot{q}_2^2)$$

Velocità del centro di massa del link 2

$$\underline{v}_{G_2} = \underline{v}_{G_2}^{(tr)} + \underline{v}_{G_2}^{(rel)} = \dot{q}_1 (q_2 + l) \underline{z} + \dot{q}_2 \underline{l} \quad ; \quad \|\underline{v}_{G_2}\|^2 = (\dot{q}_1^2 (q_2 + l)^2 + \dot{q}_2^2)$$

Velocità angolare di link 1 e 2

$$\underline{\omega}_1 = \underline{\omega}_2 = \dot{q}_i \underline{k}$$

Energia cinetica totale T

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{q}_1^2 q_2^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2} J_{G_1} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{q}_1^2 (q_2 + l)^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2} J_{G_2} \dot{q}_1^2$$

Energia potenziale totale U

$$U = m_1 g q_2 \sin q_1 + m_2 g (q_2 + l) \sin q_1$$

Forma standard della T

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 [m_1 q_2^2 + J_{G_1} + J_{G_2} + m_2 (q_2 + l)^2] + \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 (m_1 + m_2) =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{G_1} + J_{G_2} + m_1 q_2^2 + m_2 (q_2 + l)^2 & 0 \\ 0 & (m_1 + m_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} =: \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^T \underline{B}(\underline{q}) \dot{\underline{q}}$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right\}$$

$i=1; j=1, k=1$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial b_{11}}{\partial q_1} + \frac{\partial b_{11}}{\partial q_1} - \frac{\partial b_{11}}{\partial q_1} \right\} = 0$$

$i=1; j=1, k=2$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial b_{11}}{\partial q_2} + \frac{\partial b_{12}}{\partial q_1} - \frac{\partial b_{12}}{\partial q_1} \right\} = \frac{1}{2} \{ 2 m_1 q_2 + 2 m_2 (q_2 + l) \}$$

$i=1; j=2, k=1$

$$\Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial b_{12}}{\partial q_1} + \frac{\partial b_{11}}{\partial q_2} - \frac{\partial b_{21}}{\partial q_1} \right\} = m_1 q_2 + m_2 (q_2 + l)$$

$i=1; j=2, k=2$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial b_{12}}{\partial q_2} + \frac{\partial b_{12}}{\partial q_2} - \frac{\partial b_{22}}{\partial q_1} \right\} = 0$$

$$i=2, j=1, k=1 \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial b_{21}}{\partial q_1} + \frac{\partial b_{21}}{\partial q_2} - \frac{\partial b_{11}}{\partial q_2} \right\} = -m_1 q_2 - m_2 (q_2 + l)$$

$$i=2, j=1, k=2 \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial b_{21}}{\partial q_2} + \frac{\partial b_{22}}{\partial q_1} - \frac{\partial b_{12}}{\partial q_2} \right\} = 0$$

$$i=2, j=2, k=1 \quad \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial b_{22}}{\partial q_1} + \frac{\partial b_{21}}{\partial q_2} - \frac{\partial b_{11}}{\partial q_2} \right\} = 0$$

$$i=2, j=2, k=2 \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial b_{22}}{\partial q_2} + \frac{\partial b_{22}}{\partial q_2} - \frac{\partial b_{22}}{\partial q_2} \right\} = 0$$

Dunque

$$C_{ij} = \Gamma_{jk}^i \dot{q}_k \rightsquigarrow C_{11} = \cancel{\Gamma_{11}^2} \dot{q}_1 + \Gamma_{12}^1 \dot{q}_2 = \overbrace{(m_1 q_2 + m_2 (q_2 + l))}^{h(q_2)} \dot{q}_2$$

$$C_{12} = \Gamma_{21}^1 \dot{q}_1 + \cancel{\Gamma_{22}^1} \dot{q}_2 = (m_1 q_2 + m_2 (q_2 + l)) \dot{q}_1$$

$$C_{21} = \Gamma_{11}^2 \dot{q}_1 + \cancel{\Gamma_{12}^2} \dot{q}_2 = -(m_1 q_2 + m_2 (q_2 + l)) \dot{q}_1$$

$$C_{22} = \cancel{\Gamma_{21}^2} \dot{q}_1 + \cancel{\Gamma_{22}^2} \dot{q}_2 = 0$$

$$\text{Inoltre } \left(\frac{\partial U}{\partial \underline{q}} \right)^T = \left[\frac{\partial U}{\partial q_1} \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} \right]^T$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = m_1 g q_2 \cos q_1 + m_2 g (q_2 + l) \cos q_1 = [m_1 g q_2 + m_2 g (q_2 + l)] \cos q_1 = Q_1(q)$$

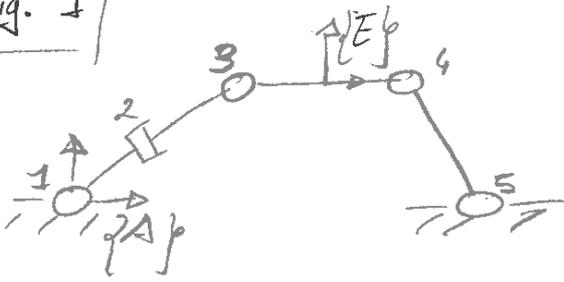
$$\frac{\partial U}{\partial q_2} = m_1 g \sin q_1 + m_2 g \sin q_1 = (m_1 + m_2) g \sin q_1 = Q_2(q)$$

Così che le equazioni della dinamica risultano:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 + m_1 q_2^2 + m_2 (q_2 + l)^2 & 0 \\ 0 & m_1 + m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h(q_2) \dot{q}_2 & h(q_2) \dot{q}_1 \\ -h(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1(q) \\ Q_2(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix}$$

Alternativamente si potrebbero scrivere le equ. coordinata...

Fig. 1



Caratteristica tipica di robot paralleli è di consentire la descrizione della configurazione dell'end-effector con

un numero di giunti minore del totale dei giunti presenti.

Per stabilire il numero di giunti opportuno si usa la Formula di Grübler

caso 2D $\Rightarrow m \geq 3b - 2(p+r)$

caso 3D $\Rightarrow m \geq 6b - 5(p+r) - 3s$

dove m = numero dei giunti di cui è necessario conoscere la configurazione

b = (bodies) numero di link

p = numero di giunti prismatici

r = numero di giunti rotoidali

s = numero di giunti sferici

Tipicamente, nella Formula di Grübler, vale l'uguaglianza. Il ~~simbolo~~ ^{simbolo} di maggiore ha valore in configurazioni singolari del sistema.

Con riferimento al sistema in Fig. 1, applicando la Formula di Grübler otteniamo

$$m \geq 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = \boxed{2}$$

questo ci dice che (ad eccezione di eventuali singularità) sono sufficienti due giunti attuati per determinare univocamente la configurazione della piattaforma end-effector.

Consideriamo di avere attuazione ai giunti 2 e 5.

Sia q un vettore contenente ^{tutte} le variabili di giunto del sistema $\Rightarrow q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix}$

e q_A un vettore contenente le variabili relative ai soli giunti attuati $\Rightarrow q_A = \begin{bmatrix} q_2 \\ q_5 \end{bmatrix}$ (nel nostro caso)

Si può ottenere q_A applicando una opportuna "matrice di selezione" S_A al vettore q , ovvero

S_A tale che $q_A = S_A \cdot q \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} q_2 \\ q_5 \end{bmatrix} = S_A \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix}$$

come deve essere fatta S_A ?

Risposta:
 $S_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Verificare -

Domanda: definendo $q_{\bar{A}}$ come il vettore contenente i giunti non attuati $\Rightarrow q_{\bar{A}} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$ come è fatta la matrice $S_{\bar{A}}$ tale che

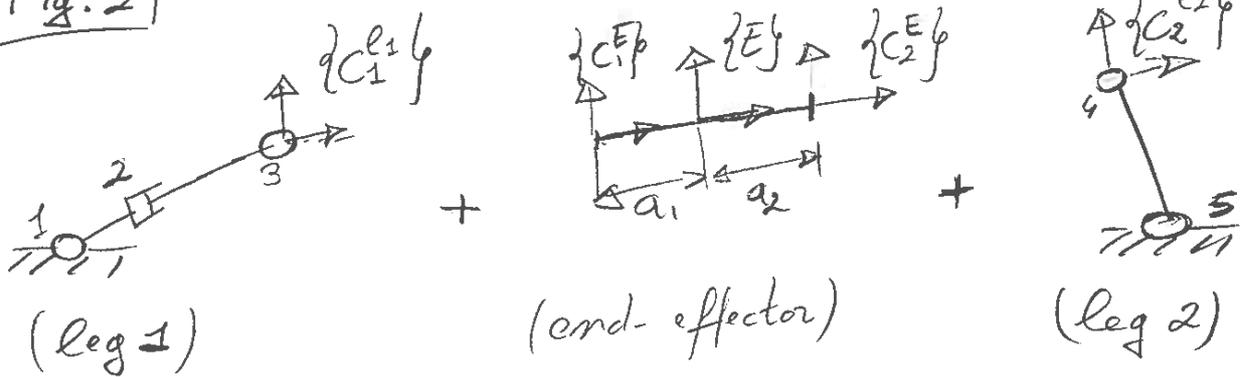
$$q_{\bar{A}} = S_{\bar{A}} \cdot q \quad ?$$

Riprendiamo l'esempio di Fig. 1

Per studiare più facilmente il sistema
cerco di ricondurlo a casi noti... i seriali!

Per ogni giunto collegato alla piattaforma (end-effector)
effettuiamo un taglio a valle del giunto stesso.
otteniamo quindi

Fig. 2



Per ogni taglio effettuato introduco due frame
 $\{C\}$ (cut), uno sulla piattaforma, uno ~~o~~ all'estremità
della gamba. Così, per il primo taglio avrò i frames
 $\{C_1^E\}$ solidali alla piattaforma (end-effector \Rightarrow apice "E"); e
 $\{C_1^{e1}\}$ in corrispondenza dell'estremità della gamba 1
(leg 1 \Rightarrow apice "e1").

Il sistema completo di Fig. 1 è stato
scomposto in tre sistemi più semplici da
studiar (Fig. 2).

consideriamo inizialmente la piattaforma.

Tra laterna end-effector o le terne $\{C_i^E\}$ valgono
matrici di trasformazione del tipo

$${}^E C_i^E = \begin{bmatrix} R_{EC_i} & | & d_{EC_i} \\ \hline 0 & | & 1 \end{bmatrix}$$

dove $R_{EC_i}^E$ = matrice di rotazione che descrive la configurazione di $\{C_i^E\}$ rispetto ad $\{E\}$ e $d_{EC_i}^E$ = vettore che ~~è~~ individua l'origine del frame $\{C_i^E\}$ rispetto ad $\{E\}$.

Nel nostro caso, scegliendo i frame tra loro paralleli, otteniamo

$$T_{EC_1}^E = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{I} & \begin{pmatrix} -a_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] ; \quad T_{EC_2}^E = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{I} & \begin{pmatrix} a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right]$$

Considerando allora una generica configurazione del frame $\{E\}$ rispetto ad $\{A\}$, ~~è~~ descritta dalla matrice

$$T_{AE} = \left[\begin{array}{cc|c} c_\theta & -s_\theta & X_E \\ s_\theta & c_\theta & Y_E \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Possiamo scrivere

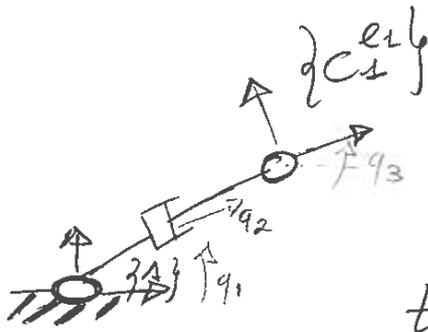
$$T_{AC_1}^E = T_{AE} \cdot T_{EC_1}^E = \left[\begin{array}{cc|c} c_\theta & -s_\theta & (X_E - a_1 c_\theta) \\ s_\theta & c_\theta & (Y_E - a_1 s_\theta) \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$T_{AC_2}^E = T_{AE} \cdot T_{EC_2}^E = \left[\begin{array}{cc|c} c_\theta & -s_\theta & (X_E + a_2 c_\theta) \\ s_\theta & c_\theta & (Y_E + a_2 s_\theta) \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$



Gamba 1

5



Per calcolare la configurazione di $\{C_1\}$ rispetto ad $\{A\}$ possiamo considerare le successive trasformazioni imposte dai giunti:

$$T_{AC_1} = R_z(q_1) \cdot T_x(q_2) \cdot R_x(q_3)$$

dove $R_z(q_1)$, $R_x(q_3)$ sono matrici omogenee che individuano ~~una~~ una sola rotazione attorno a z di un angolo q_1 e q_3 rispettivamente, e $T_x(q_2)$ è una matrice omogenea che individua la sola traslazione lungo l'asse x di una quantità pari a q_2 .

Quindi

$$T_{AC_1} = \begin{bmatrix} c_{q_1} & -s_{q_1} & 0 \\ s_{q_1} & c_{q_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & q_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{q_3} & -s_{q_3} & 0 \\ s_{q_3} & c_{q_3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (c_{q_1} c_{q_3} - s_{q_1} s_{q_3}) & (-c_{q_1} s_{q_3} - s_{q_1} c_{q_3}) & q_2 c_{q_1} \\ (s_{q_1} c_{q_3} + c_{q_1} s_{q_3}) & (-s_{q_1} s_{q_3} + c_{q_1} c_{q_3}) & q_2 s_{q_1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dalla quale, ricordando che

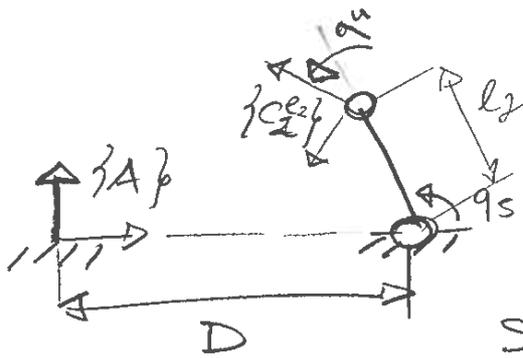
$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{cases}$$

abbiamo che

[6]

$$T_{AC_1^e} = \left[\begin{array}{cc|c} c_{q_1} & -s_{q_1} & q_2 c_{q_1} \\ s_{q_1} & c_{q_1} & q_2 s_{q_1} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Gamba 2



Similmente a prima
possiamo scrivere

$$T_{AC_2^e} = T_x(D) R_z(q_1) T_x(l_2) R_z(q_2)$$

Svolgendo i calcoli risulta

$$T_{AC_2^e} = \left[\begin{array}{cc|c} c_{q_1} c_{q_2} & -s_{q_1} c_{q_2} & (D + l_2 c_{q_2}) \\ s_{q_1} c_{q_2} & c_{q_1} c_{q_2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

L'equivalenza cinematica del sistema
in Fig. 2, rispetto all'originario in Fig. 1, è
garantita imponendo i vincoli

$$\left. \begin{array}{l} T_{AC_1^e} = T_{AC_1^e} \\ T_{AC_2^e} = R_z(\pi) T_{AC_2^e} \end{array} \right| \begin{array}{l} [1] \\ [2] \end{array}$$

Esplicitando, dalla [1] otteniamo

[7]

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = 0 \\ q_2 c_{q_1} = x_E - a_1 c_0 \\ q_2 s_{q_2} = y_E - a_1 s_0, \end{cases} \quad [7.1]$$

dalla [2] otteniamo invece

$$\begin{cases} q_4 + q_5 = \theta + \pi \\ D + h_2 c_{q_5} = x_E + a_2 s_0 \\ h_2 s_{q_5} = y_E + a_2 s_0 \end{cases} \quad [7.2]$$

I due sistemi di equazioni [7.1] e [7.2] sono disaccoppiati - Questa proprietà è vera in general finché ciascuna gamba del sistema è un seriale semplice -

~~Il~~ Il disaccoppiamento delle equazioni è utile per affrontare il problema cinematico inverso...

Infatti, per la gamba ②, se considero noti x_E, y_E, θ posso porre dalla ~~[7.1]~~ [7.1]

$$\begin{cases} q_4 + q_5 = \theta \\ q_2 c_{q_1} = x_E - a_1 c_0 = h_2 \text{ (noto)} \\ q_2 s_{q_1} = y_E - a_1 s_0 = h_2 \text{ (noto)} \end{cases} \quad [7.3]$$

// Posso risolvere il sistema 7.3:

[8]

elevando al quadrato la 2^a e 3^a eq., poi ~~le~~ sommandole,
~~ottenendo~~ quindi abbiamo

$$q_2^2 = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$$

$$\Rightarrow q_2 = \sqrt{(x_E - a_1 \cos \theta)^2 + (y_E - a_1 \sin \theta)^2}$$

Adesso che q_2 è noto, possiamo sostituirlo nella 2^a eq. ottenendo

$$\cos q_1 = \frac{h_1}{q_2} \Rightarrow q_1 = \arccos\left(\frac{h_1}{q_2}\right)$$

oppure anche dalla 2^a e 3^a

$$\tan(q_1) = \frac{h_2}{h_1} \Rightarrow q_1 = \operatorname{atg}\left(\frac{h_2}{h_1}\right);$$

infine dalla 1^a otteniamo

$$q_3 = \theta - q_1$$

Per la seconda gamba, dal sistema 7.2 posso scrivere

$$q_4 + q_5 = \theta + \pi$$

$$l_2 \cos q_5 = x_E + a_2 \sin \theta - D = h_3 \quad (\text{noto})$$

$$l_2 \sin q_5 = y_E + a_2 \cos \theta = h_4 \quad (\text{noto})$$

dalla 2^a e 3^a otteniamo

$$\tan q_5 = \frac{h_4}{h_3} \Rightarrow q_5 = \operatorname{atg}\left(\frac{h_4}{h_3}\right)$$

e poi dalla prima

$$q_4 = \theta + \pi - \operatorname{atg}\left(\frac{h_4}{h_3}\right), \text{ che conclude il problema cinematico inverso.}$$

- Problema Cinematico diretto -

19

Sono note q_2 e q_5 , determinare la configurazione dell'intero sistema.

Riprendo l'intero sistema di equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 + q_3 = \theta \quad [1] \\ q_2 c_{q_1} = X_E - a_1 c_0 \quad [2] \\ q_2 s_{q_1} = Y_E - a_1 s_0 \quad [3] \\ q_4 + q_5 = \theta + \pi \quad [4] \\ D + c_{q_5} l_2 = X_E + a_2 s_0 \quad [5] \\ l_2 s_{q_5} = Y_E + a_2 s_0 \quad [6] \end{array} \right.$$

Dalle equazioni [2] e [5] posso ricavare X_E ,
dalle equazioni [3] e [6] posso ricavare Y_E

$$\left\{ \begin{array}{l} X_E = q_2 c_{q_1} + a_1 c_0 = D + c_{q_5} l_2 - a_2 c_0 \quad [7] \\ Y_E = q_2 s_{q_1} + a_1 s_0 = l_2 s_{q_5} - a_2 s_0 \quad [8] \end{array} \right.$$

dalle quali quadrando o sommando, posto $a = a_1 + a_2$, otteniamo

$$q_2^2 + a^2 + 2q_2 a (c_{q_1} c_0 + s_{q_1} s_0) = D^2 + l_2^2 + 2c_{q_5} l_2 D$$

osservando che $(c_{q_1} c_0 + s_{q_1} s_0) = c(\theta - q_1) = c_{q_3}$

$$\Rightarrow q_3 = \arccos \left(\frac{D^2 + l_2^2 + 2c_{q_5} l_2 D - q_2^2 - a^2}{2q_2 a} \right)$$

Dalla [7] e [8] possiamo anche trovare

[10]

$$\begin{cases} q_2 C_{q_1} + a_1 (q_1 + q_3) = D + l_2 C_{q_5} = L_x \text{ (noto)} \\ q_2 S_{q_1} + a_1 S_{(q_1 + q_3)} = l_2 S_{q_5} = L_y \text{ (noto)} \end{cases}$$

e quindi otteniamo, svolgendo i conti

$$\Rightarrow \begin{cases} S_{q_1} = \frac{(q_2 + a_1 C_{q_3}) L_y - a_1 S_{q_3} L_x}{L_x^2 + L_y^2} \\ C_{q_1} = \frac{(q_2 + a_1 C_{q_3}) L_x + a_1 S_{q_3} L_y}{L_x^2 + L_y^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow q_1 = a_{1q} \left(\frac{S_{q_1}}{C_{q_1}} \right)$$

Infine ...

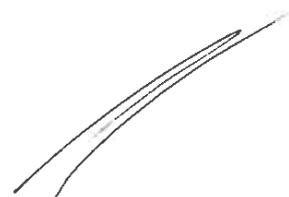
$$\theta = q_1 + q_3$$

$$q_4 = \theta + \pi - q_5,$$

e di conseguenza si possono calcolare

$$\begin{cases} X_E = q_2 C_{q_1} + a_1 C_\theta \\ Y_E = q_2 S_{q_1} + a_1 S_\theta \end{cases}$$

che concludono il problema cinematico diretto.



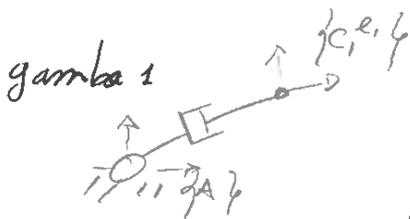
Cinematica differenziale per manipolatori paralleli

11

Riprendiamo l'esempio in Fig. 1.

Facciamo ancora dei tagli per separare le gambe dalla piattaforma end-effector. A differenza di prima però, operiamo i tagli sui giunti di collegamento. In pratica, questo equivale a rimuovere i giunti che collegano le gambe alla piattaforma.

Per le gambe otteniamo le 2 catene seriali

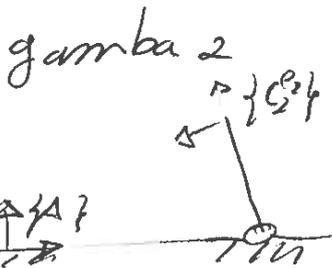


per la quale vale

$$\mathcal{G}_1 = J_1 \cdot \dot{q}_1^*$$

dove \mathcal{G}_1 è il twist del frame $\{C_1\}$ rispetto ad $\{A\}$, con componenti espresse in $\{A\}$

e \dot{q}_1^* un vettore che colleziona le velocità dei giunti che agiscono su $\{C_1\}$



dove vale

$$\mathcal{G}_2 = J_2 \cdot \dot{q}_2^*$$

con definizioni analoghe alle precedenti.

Impilando le precedenti otteniamo

$$\begin{bmatrix} \mathcal{G}_1 \\ \mathcal{G}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1^* \\ \dot{q}_2^* \end{bmatrix} = J \dot{q}^* \Rightarrow \underline{\underline{\mathcal{G}_{ce} = J \dot{q}^*}}$$

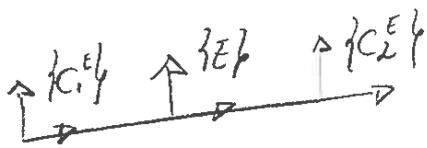
Per dualità d'equilibrio statico,
 per l'equilibrio delle gambe vale

[12]

$$\tau^* = J^T W \Rightarrow \begin{bmatrix} \tau_1^* \\ \tau_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1^T & 0 \\ 0 & J_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}$$

dove τ_1^* e τ_2^* sono le coppie ai giunti
 e W_1 e W_2 i wrench che le gambe esercitano
 sul mondo esterno (o, senza altri contatti,
 sulla piattaforma).

Per il moto della piattaforma possiamo
 scrivere ...



dalla formula fondamentale
 dei moti rigidi

$$v_{C_1} = v_E + W \times (C_1 - E)$$

$$v_{C_2} = v_E + W \times (C_2 - E)$$

e quindi

$$\Rightarrow \mathcal{G}_{C_1} = \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -(C_1 - E) \\ 0 & I \end{bmatrix} \mathcal{G}_E = M_{C_1 E} \mathcal{G}_E$$

$$\mathcal{G}_{C_2} = \begin{bmatrix} v_{C_2} \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -(C_2 - E) \\ 0 & I \end{bmatrix} \mathcal{G}_E = M_{C_2 E} \mathcal{G}_E$$

Ovvero anche

$$\begin{bmatrix} \mathcal{G}_{C_1} \\ \mathcal{G}_{C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{C_1 E} \\ M_{C_2 E} \end{bmatrix} \mathcal{G}_E \Rightarrow \mathcal{G}_{C^E} = M \mathcal{G}_E$$

Per dualità cineto-statica troviamo le relazioni per l'equilibrio della piattaforma

$$W_E = M^T v_E$$

Nella letteratura riguardante le mani robotiche la matrice M^T è espressa spesso come G ed è chiamata "matrice di Grasp".

Che relazione cinematica c'è tra i twist \mathcal{G}_{CE} e \mathcal{G}_{CE} ?

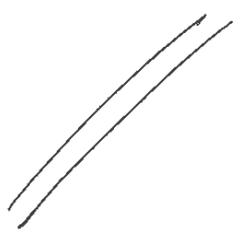
Dipende dai giunti che abbiamo rimosso. In questo caso sono giunti rotoidali. Questo implica che i sistemi di riferimento $\{C_i\}$ e $\{C_i^E\}$ hanno stessa velocità delle origini dei frame, ma in generale possono aver velocità angolari diverse.

Introducendo una matrice di selezione, per il giunto i -esimo, del tipo

$$H_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ed $H = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix}$, il simbolo sopra descritto può essere espresso come

$$H J \dot{q}^* = H M \mathcal{G}_E \Rightarrow \begin{bmatrix} H J & -H M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}^* \\ \mathcal{G}_E \end{bmatrix} = 0$$

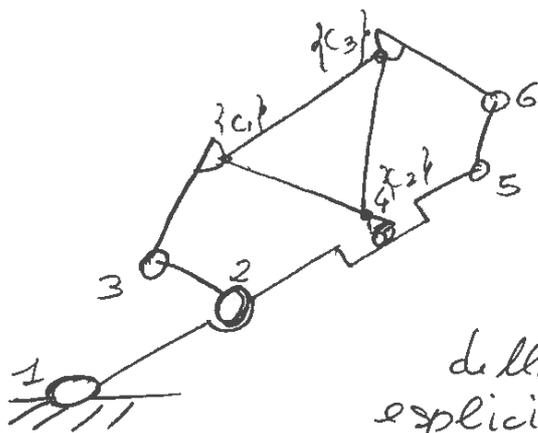


¶ Ancora sulla cinematica differenziale
dei manipolatori paralleli

(19)

02. 08/05/13

Consideriamo il manipolatore proposto al
compito del 31/01/12



Per ciascun contatto
possiamo esprimere il
turst del relativo frame
in funzione dei giunti
della mano. Ovvero più
esplicitamente abbiamo

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}_{C_1} = J_1(q_1^*) \cdot \dot{q}_1^* \\ \mathcal{G}_{C_2} = J_2(q_2^*) \cdot \dot{q}_2^* \\ \mathcal{G}_{C_3} = J_3(q_3^*) \cdot \dot{q}_3^* \end{array} \right.$$

dove il vettore q^* raggruppa tutte e sole le
variabili che intervengono nel moto di \mathcal{C}_i .

Se \mathcal{G}_c = vettore che colleziona tutti i turst dei
contatti, e q tutte le variabili di giunto della
mano, come è fatta la matrice $J_H(q)$ tale che

$$\mathcal{G}_c = J_H(q) \cdot \dot{q} ?$$

$J_H(q)$ = Jacobiano della
mano

Più esplicitamente ...

15

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_{gc1} \\ \bar{v}_{gc2} \\ \bar{v}_{gc3} \end{bmatrix} = J_h(q) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix} \quad (15.1)$$

Riprendiamo più nel dettaglio i Jacobiani delle singole dita della mano.

Il primo punto di contatto è mosso dai giunti 1, 2, 3, quindi

$$\bar{v}_{gc1} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}. \quad (15.2)$$

Il secondo contatto è mosso solo dai giunti 1 e 4 (ATTENZIONE: non dal 2!), quindi

$$\bar{v}_{gc2} = \begin{bmatrix} J_{21} & J_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix}. \quad (15.3)$$

Infine il terzo contatto è mosso dai giunti 1, 5 e 6, cioè

$$\bar{v}_{gc3} = \begin{bmatrix} J_{31} & J_{35} & J_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix}. \quad (15.4)$$

Sostituendo le 15.2, .3, .4 nella
• 15.1 il Jacobiano del manipolatore può essere scritto come

$$J_h = \begin{bmatrix} \overline{J}_{11} & \overline{J}_{12} & \overline{J}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{J}_{21} & 0 & 0 & \overline{J}_{24} & 0 & 0 \\ \overline{J}_{31} & 0 & 0 & 0 & \overline{J}_{35} & \overline{J}_{36} \end{bmatrix}$$

* Tipologie di giunti e relativa matrice H_i .

Come abbiamo visto in precedenza, per ripristinare il giunto tagliato alla piattaforma occorre introdurre una matrice H_i che ne imita gli effetti in termini di vincolo sulle velocità (twist) dei frame $\{C_i^E\}$ e $\{C_i^F\}$.

Per comodità definiamo la matrice F_i come una base per le velocità relative dei frame connessi.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{V}_{C_i^E} - \mathcal{V}_{C_i^F} \end{bmatrix} \in \underbrace{\mathcal{R}(F_i)}_{\text{range di } F_i}$$

Se H_i è tale che $\mathcal{N}(H_i) = \mathcal{R}(F_i)$ allora vale anche che

$$\begin{bmatrix} \mathcal{V}_{C_i^E} - \mathcal{V}_{C_i^F} \end{bmatrix} \in \mathcal{N}(H_i)$$

ovvero anche che

$$H_i \begin{bmatrix} \mathcal{V}_{C_i^E} - \mathcal{V}_{C_i^F} \end{bmatrix} = 0$$

Per trovare più chiaramente la relazione
che c'è tra H_i e F_i ricordiamo che
se vale $N(H_i) = R(F_i)$ (17.1)

allora

$$H_i F_i = 0 \quad (17.2)$$

Inoltre, ricordando le proprietà

$$R(A^T) = N(A)^\perp \quad (17.3)$$

$$R(A)^\perp = N(A^T) \quad (17.4)$$

$$N(A)^\perp = R(A^T) \quad (17.5)$$

dalla (17.1) otteniamo

$$[N(H_i)]^\perp = [R(F_i)]^\perp \quad (17.6)$$

dove per la (17.5) $\Rightarrow [N(H_i)]^\perp = R(H_i^T)$ (17.7)

e per la (17.4) $\Rightarrow [R(F_i)]^\perp = N(F_i^T)$ (17.8)

Sostituendo la (17.7) o (17.8) nella 17.6
otteniamo

$$R(H_i^T) = N(F_i^T) \quad (17.9)$$

$$\Rightarrow H_i = [N(F_i^T)]^T \quad (17.10)$$

Consideriamo alcuni esempi (frequenti nella
pratica) di giunti e calcoliamone la matrice F_i
(più facili e intuitive da trovare). In virtù della
17.10 la matrice H_i si possono facilmente
trovare di conseguenza.

Giunto sferico

18

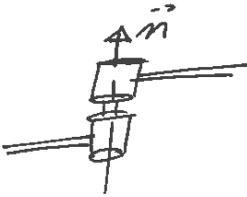


tutte le velocità angolari relative sono concesse, quindi

$$\Rightarrow F_i = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ I_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow H_i = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & \\ & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

Giunto rotoidale

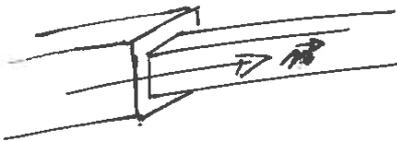


concesso la rotazione relativa attorno ad \vec{n}

$$\Rightarrow F_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow H_i = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & & & \\ & 0_{3 \times 3} & & \\ & & -m_y & m_x & 0 \\ & & -m_z & 0 & m_x \end{bmatrix}$$

Giunto Prismatico



consente una velocità relativa lungo l'asse \vec{n}

$$\Rightarrow F_i = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow H_i = \begin{bmatrix} -m_y & m_x & 0 & & & \\ -m_z & 0 & m_x & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{3 \times 2} \\ I_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

* Analisi della cinematica differenziale 19

Ricordiamo che vale

$$[HJ \quad | \quad -HM] \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{y}_E \end{bmatrix} = 0 \quad (19.1)$$

se definiamo $\dot{q}_A = S_A \dot{q}$
 $\dot{q}_{\bar{A}} = S_{\bar{A}} \dot{q} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{q}_A \\ \dot{q}_{\bar{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_A \\ S_{\bar{A}} \end{bmatrix} \dot{q} = S \dot{q}$

allora anche $\dot{q} = S^{-1} \begin{bmatrix} \dot{q}_A \\ \dot{q}_{\bar{A}} \end{bmatrix}$ (19.2)

Considerando la 19.2, possiamo risolvere la 19.1 come

$$[HS_A \quad | \quad HS_{\bar{A}} \quad | \quad -HM] \begin{bmatrix} \dot{q}_A \\ \dot{q}_{\bar{A}} \\ \dot{y}_E \end{bmatrix} = 0 \quad (19.3)$$

Sia Γ una base del nullo di $[HS_A \quad | \quad HS_{\bar{A}} \quad | \quad -HM]$, allora tutte le soluzioni della 19.3 sono esprimibili come

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_A \\ \dot{q}_{\bar{A}} \\ \dot{y}_E \end{bmatrix} = \Gamma \gamma = \begin{bmatrix} \bar{T}_A \\ \bar{T}_{\bar{A}} \\ \bar{T}_E \end{bmatrix} \gamma \quad \begin{array}{l} \text{con } \gamma \text{ vettore} \\ \text{di coefficienti opportuni} \end{array} \quad (19.4)$$

Se \bar{T}_A è quadrata e rango pieno possiamo calcolare il vettore γ come

$$\gamma = \bar{T}_A^{-1} \cdot \dot{q}_A \quad (19.5)$$

Sostituendo la 19.5 nella 19.4
 otteniamo

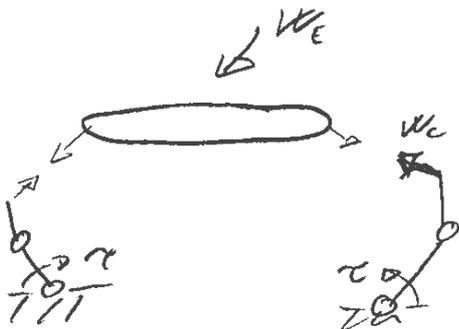
$$\begin{bmatrix} \dot{q}_A \\ \dot{q}_A \\ \varphi_E \end{bmatrix} = T T_A^{-1} \dot{q}_A \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_A = T_A T_A^{-1} \dot{q}_A \\ \varphi_E = T_E T_A^{-1} \dot{q}_A \end{cases}$$

Più in generale, possiamo operare una decomposizione del nullo nella forma

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_A \\ \dot{q}_A \\ \varphi_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{AR} & 0 \\ T_{AL} & 0 \\ 0 & T_{EL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_R \\ \delta_L \\ \delta_C \end{bmatrix}$$

dove la prima colonna corrisponde ai "moti ridondanti" delle gambe, la seconda ai "moti indeterminati" della ~~piattaforma~~ ^{Piattaforma} (labilità), la terza ai "moti coordinati" delle gambe e della piattaforma

* Analisi delle forze scambiate



W_C = wrench che le gambe trasmettono alla piattaforma
 W_E = wrench che il mondo esercita sulla piattaforma
 τ = coppie ai giunti

Ricordiamo che valgono le relazioni

(21)

$$\tau = J^T w_c \quad (21.1)$$

$$w_c = -G w_c = -M^T w_c \quad (21.2)$$

Se w_c sono le azioni che le gambe trasmettono alla piattaforma, queste stanno nel range di H^T . Possiamo allora definire un vettore \tilde{w} tale che $w_c = H^T \tilde{w}$.

sostituendo nelle 21.1 e 21.2, otteniamo

$$\begin{cases} \tau = J^T H^T \tilde{w} \\ w_c = -G H^T \tilde{w} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \tau \\ w_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J^T H^T \\ -G H^T \end{bmatrix} \tilde{w} \quad (21.3)$$

Notiamo che, posto $A = [HJ^T \quad -GH^T]$, ovvero tale che $A \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{q}_c \end{bmatrix} = 0$, allora dalla 21.3

si ha che

$$\begin{bmatrix} \tau \\ w_c \end{bmatrix} = A^T \tilde{w}. \quad (21.4)$$

Se $N(A^T) = \emptyset$, allora dato un vettore $\begin{bmatrix} \tau \\ w_c \end{bmatrix}$ se \exists un \tilde{w} tale da soddisfare la (21.4) questo \tilde{w} è unico.

Se invece $N(A^T) \neq \emptyset$ allora il

problema \tilde{w} "staticamente indeterminato".

Per studiare il problema riprendiamo le 21.1 e 21.2 e consideriamo la divisione in giunti attuati o non attuati, ottenendo

$$\begin{cases} \tau_A = J_A^T H^T \tilde{w} & [22.1] \\ \tau_A = J_A^T H^T \tilde{w} = 0 & \text{(per definizione!)} [22.2] \\ w_E = -GH^T \tilde{w} & [22.3] \end{cases}$$

[22]

Caso 1) se $w_E \notin \mathcal{R}(GH^T) \Rightarrow$ non esiste nessun \tilde{w} tale da equilibrare il sistema (labilità)

Caso 2) $w_E \in \mathcal{R}(GH^T) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ una soluzione nella forma

$$\tilde{w} = -[GH^T]^+ w_E + P y \quad [22.4]$$

dove $P: \mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(GH^T)$

il termine

$-[GH^T]^+ w_E$ è detto "soluzione particolare", dà il contributo necessario ad equilibrare il wrench esterno w_E .

Il termine $P y$ è la "soluzione del problema omogeneo" e corrisponde ad un insieme di forze effettuate sulla piattaforma che si auto-equilibrano.

Sono importanti nei problemi di grasp per ottimizzare le forze effettuate sull'oggetto afferrato.

Sostituendo la 22.4 nella 22.1 otteniamo
 le coppie ai giunti attuate necessarie a
 mantenere il sistema in equilibrio

$$\tau_A = -J_A^T H^T [GH^T]^+ w_E + J_A^T H^T P y$$

Purché la 22.2 rimanga nulla, ovvero purché
 sia soddisfatta la condizione

$$\tau_A = 0 \Rightarrow -J_A^T H^T [GH^T]^+ w_E + J_A^T H^T P y = 0$$

Note sulla Dinamica Vincolata

Manolo Garabini e Marco Gabiccini *

June 19, 2013

*Centro di Ricerca "Enrico Piaggio", Universit di Pisa, Largo Lucio Lazzarino, 1, 56100 Pisa, Italy.

Di che si tratta?

In queste note sono riportati cenni su alcuni aspetti della dinamica di sistemi meccanici composti da corpi rigidi soggetti a vincoli. La loro presentazione, funzionale al corso di Meccanica dei Robot, sacrifica in certa misura il formalismo matematico richiesto da tale materia a favore di una pi sintetica e fluida esposizione. In [4] e in [5] il lettore interessato puó trovare una formale e rigorosa trattazione dei fondamenti teorici. Riferimenti adatti ad approfondire temi specifici sono forniti nel seguito.

Le presenti note toccano i seguenti argomenti:

- vincoli cinematici: definizione e classificazione secondo i principali criteri adottati in letteratura
- derivazione del sistema di equazioni differenziali- algebriche che descrivono la dinamica di un sistema meccanico costituito da corpi rigidi soggetto a vincoli ideali esprimibili in forma Pfaffiana
- metodi di soluzione utili a determinare l'atto di moto ed in alcuni di essi le reazioni vincolari di un sistema meccanico vincolato
- derivazione del sistema di equazioni differenziali che descrivono la dinamica di un sistema meccanico soggetto a vincoli elastici ed eventualmente smorzanti e metodo di stabilizzazione alla Baumgarte

1 Vincoli Ideali

Dato $q \in \mathbb{R}^n$ il vettore delle coordinate generalizzate di un sistema meccanico e $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ il vettore delle velocità generalizzate, chiameremo vincoli ideali, o più semplicemente vincoli, delle relazioni nella forma

$$C_i(q, \dot{q}, t) = 0, \quad i = 1, \dots, m \leq n \quad (1)$$

I vincoli possono essere classificati secondo i seguenti criteri:

- Dipendenza esplicita dell'equazione di vincolo dal tempo
 - **vincolo reonomo**, ad esempio $C_r(q, \dot{q}, t) = 0$, caratterizzato da un'equazione che dipende esplicitamente dal tempo
 - **vincolo scleronomo**, ad esempio $C_s(q, \dot{q}) = 0$, caratterizzato da un'equazione che **non** dipende esplicitamente dal tempo
- Possibilità di esprimere l'equazione di vincolo in una forma non dipendente dalle velocità generalizzate
 - **vincolo olonomo**, ad esempio $C_{r,o}(q, t) = 0$. Si fa notare che il vincolo olonomo della forma $C_{r,o}(q, t) = 0$ può anche essere espresso in una forma sostanzialmente equivalente:

$$\frac{dC_{r,o}(q, t)}{dt} = \frac{\partial C_{r,o}(q, t)}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial C_{r,o}(q, t)}{\partial t} = G_{r,o}(q, \dot{q}, t) = 0, \quad (2)$$

che dipende anche dalle velocità di configurazione. La differenza tra la (2) e la (1) è che per $G_{r,o}(q, \dot{q}, t)$, esiste un integrale $C_{r,o}(q, t)$, ovvero una funzione dipendente esclusivamente dalle coordinate generalizzate e non dalle velocità che può essere utilizzata per esprimere il vincolo, mentre nel caso generale questo non è assicurato.

- **vincolo anolonomo**, ad esempio $C(q, \dot{q}, t) = 0$, è espresso da un'equazione che dipende dalle velocità generalizzate e **non può** essere riportata alla forma olonoma

I vincoli olonomi (o geometrici) rendono alcune delle coordinate generalizzate dipendenti dalle altre (e quindi eliminabili nelle ipotesi del teorema del Dini). Ciò non vale per i vincoli anolonomi. In questi casi occorre pertanto procedere con un set di coordinate q sovrabbondanti e considerare le equazioni di vincolo.

Le tipologie di equazioni di vincolo che si prenderanno in esame sono di tipo scleronomo e appartenenti ad una delle seguenti forme:

- $C(q) = 0$ olonomo
- $G(q, \dot{q}) = 0$ anolonomo
- $A(q)\dot{q} = 0$ forse anolonomo (**forma Pfaffiana**)

In particolare, l'ultima forma, lineare nelle velocità generalizzate ed omogenea, risulta piuttosto generale: può essere utilizzata per modellare il vincolo di puro rotolamento tra corpi rigidi, la conservazione del momento angolare di corpi rigidi in moto spaziale, ecc.

2 Equazioni di Lagrange per sistemi soggetti a vincoli ideali

Dal principio dei lavori virtuali (PLV), sotto opportune ipotesi, discende la seguente relazione:

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} - Q_{nc,a}^T \right] \delta q = 0, \quad (3)$$

dove $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$ è il Lagrangiano del sistema, $T(q, \dot{q})$ rappresenta l'energia cinetica, $U(q)$ l'energia potenziale gravitazionale e $Q_{nc,a}$ il vettore delle forze generalizzate attive non conservative.

Supponiamo siano dati m vincoli in forma Pfaffiana, in questo caso lo spostamento virtuale δq non può essere scelto in modo arbitrario (non può essere semplificato nella (3)), ma deve verificare l'equazione

$$A(q) \delta q = 0. \quad (4)$$

Si può procedere incorporando il vincolo (4) nella dinamica (3) utilizzando la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange attraverso i seguenti passaggi:

- si moltiplica la (4) per un vettore $\lambda \in R^m$ ottenendo

$$\lambda^T A(q) \delta q = 0 \quad (5)$$

- si somma la (5) alla (3) ottenendo il sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} - Q_{nc,a}^T + \lambda^T A(q) \right] \delta q = 0 \\ A(q) \dot{q} = 0 \end{array} \right. \quad (6)$$

Si fa notare che:

- l'equazione (3) non stata alterata in quanto il termine sommato per ottenere la (6) nullo
- Il vantaggio di aver utilizzato il metodo dei moltiplicatori di Lagrange è costituito dal fatto che **è possibile scegliere λ in modo che $\lambda^T A(q)$ sia ortogonale a δq , rendendo di fatto arbitraria la scelta di δq .**

- Semplificando quindi δq nella (6) si ottengono le equazioni di Lagrange per sistemi con vincoli

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} - Q_{nc,a}^T + \lambda^T A(q) = 0 \\ A(q)\dot{q} = 0 \end{cases}, \quad (7)$$

che può anche essere scritta in termini di vettori colonna

$$\begin{cases} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right]^T + A(q)^T \lambda = Q_{nc,a} \\ A(q)\dot{q} = 0 \end{cases}, \quad (8)$$

che rappresenta un sistema di $n + m$ equazioni differenziali-algebriche in $n + m$ incognite: $q \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}^m$.

3 Metodi di Soluzione

In questa sezione sono esposti quattro approcci, tra gli innumerevoli presentati in letteratura (per una disamina dei metodi classici e contemporanei si veda [7] e [1]), che permettono di determinare l'atto di moto (andamento temporale delle coordinate generalizzate) di un sistema meccanico soggetto a vincoli a causa di forze esterne. Per sistemi nonlineari di una certa complessità, molto spesso non è possibile integrare analiticamente le equazioni differenziali, in questi casi la soluzione può essere ottenuta attraverso l'utilizzo di un metodo numerico di integrazione.

Il concetto principale che sottosta a tutti i approcci presentati nel seguito è il fatto che essi mirano a trasformare il sistema di equazioni differenziali-algebriche costituito dalle equazioni di Lagrange in un sistema di equazioni differenziali che può essere più facilmente risolto.

In alcuni dei metodi presentati nel seguito ci si avvale della equivalenza

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right]^T = B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) \quad (9)$$

in cui $B(q)$ rappresenta la matrice dinamica, $C(q, \dot{q})$ la matrice dei termini di Coriolis e $G(q)$ il vettore delle forze/coppie gravitazionali.

Importante ipotesi che si assume da questo punto in avanti il fatto che la matrice $A(q) \in \mathbb{R}^{(m \times n)}$ dei vincoli abbia pieno rango righe, ovvero

$$\text{rank}(A(q)) = m \quad (10)$$

3.1 Augmented Formulation

Le equazioni portanti di questo approccio sono dovute a Hemami e Weimer e sono state presentate in [6] nel 1981.

Questo metodo, consente di descrivere la dinamica di un sistema soggetto a vincoli in forma Pfaffiana attraverso un sistema di equazioni del tipo

$$H(q)x = p(q, \dot{q}) \quad (11)$$

dove $x = [\ddot{q}, \lambda]^T \in \mathbb{R}^{(n+m)}$, $H(q) \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ e $p(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{(n+m)}$.

Il metodo si articola nei seguenti passi:

- derivando il vincolo in forma Pfaffiana rispetto al tempo si ha

$$\frac{d(A(q)\dot{q})}{dt} = A(q)\ddot{q} + \dot{A}(q, \dot{q})\dot{q} = 0. \quad (12)$$

- Sostituendo la (12) al posto della seconda nella (8) e ricordando la (9) si ottiene

$$\begin{cases} B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + A(q)^T \lambda = Q_{nc,a} \\ A(q)\ddot{q} + \dot{A}(q, \dot{q})\dot{q} = 0 \end{cases}, \quad (13)$$

- introducendo il vettore delle incognite aumentato $x = [\ddot{q}, \lambda]^T \in \mathbb{R}^{(n+m)}$ la (13) può essere riscritta nella forma della (11) dove:

–

$$H(q) = \begin{bmatrix} B(q) & A^T(q) \\ A(q) & 0 \end{bmatrix}$$

–

$$p(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} Q_e \\ Q_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q) + Q_{nc,a} \\ -\dot{A}(q, \dot{q})\dot{q} \end{bmatrix} \quad (14)$$

- invertendo la matrice $H(q)$ (operazione lecita in quanto $B(q)$ invertibile e ci si avvale dell'ipotesi (10)) si ottiene

$$x = H(q)^{(-1)} p(q, \dot{q}). \quad (15)$$

Si fa notare che, data la particolare struttura di $H(q)$ possibile ricavare la formula esplicita della sua inversa, che risulta

$$H(q)^{(-1)} = \begin{bmatrix} B(q)^{(-1)} - A_B^+(q) & A_B^+(q) \\ (A_B^+(q))^T & - (A(q)B(q)^{(-1)}A(q)^T)^T \end{bmatrix}, \quad (16)$$

dove $A_B^+(q) = B(q)^{(-1)}A(q)^T(A(q)B(q)^{(-1)}A(q)^T)^{(-1)}$ indica la pseudo-inversa destra di $A(q)$ pesata in $B(q)$.

- attraverso la (16) e la (14) possibile esplicitare la (15) nella seguente

$$\begin{cases} \ddot{q} = (I - A_B^+(q)A(q))B(q)^{(-1)}[\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)] - A_B^+(q)\dot{A}(q, \dot{q})\dot{q} \\ \lambda = (A_B^+(q))^T[\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)] + (A(q)B(q)^{(-1)}A(q)^T)^T \dot{A}(q, \dot{q})\dot{q} \end{cases}, \quad (17)$$

dove si effettuata la sostituzione $Q_{nc,a} = \tau$ tipica per sistemi robotici nei quali le forze attive non conservative sono tipicamente rappresentate da coppie/forze ai giunti.

Se si interessati solamente all'atto di moto del sistema dinamico sufficiente risolvere la prima equazione del sistema (17) composta da n equazioni differenziali di secondo ordine. Tra i vantaggi del metodo appena presentato vi il calcolo diretto del vettore λ (dalla seonda equazione del sistema (17) costituita da m equazioni algebriche) le cui componenti rappresentano le reazioni vincolari (forze/coppie che le entit realizzanti fisicamente i vincoli esercitano sul sistema per permettere un atto di moto coerente con i vincoli stessi) che comunque può essere determinato solo dopo aver risolto la prima equazione.

Una cosa molto importante da tenere in considerazione che il sistema di equazioni (11) equivalente alle equazioni di Lagrange per sistemi con vincoli **se e solo se**:

- in caso di vincoli olonomi, al tempo iniziale t_0 , le condizioni iniziali sulle coordinate generalizzate $q_0 = q(t_0)$ soddisfano la relazione $C(q_0, t_0) = 0$
- in caso di vincoli anolonomi, al tempo iniziale t_0 , le condizioni iniziali sulle coordinate generalizzate $q_0 = q(t_0)$ e sulle velocità $\dot{q}_0 = \dot{q}(t_0)$ soddisfano la relazione $C(q_0, \dot{q}_0, t_0) = 0$

3.2 Metodo Geometrico Unificato

Tale approccio é stato proposto da Guanfeng Liu and Zexiang Li in [8] nel 2002.

Questo metodo consente di descrivere la dinamica di un sistema meccanico soggetto a vincoli attraverso un sistema di $n + m$ equazioni differenziali di secondo ordine nelle incognite $\ddot{q} \in \mathbb{R}^n$. Delle $n + m$ equazioni solamente n sono indipendenti. Tale sistema di equazioni pu essere espresso nelle due formulazioni equivalenti riportate di seguito:

$$\begin{cases} P_\tau(q) (\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)) = P_\tau(q)\tau \\ A(q)\ddot{q} + \dot{A}(q, \dot{q})\dot{q} = 0 \end{cases}, \quad (18)$$

oppure

$$\begin{cases} P(q)\ddot{q} = P(q)B^{(-1)}(q) [\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)] \\ A(q)\ddot{q} + \dot{A}(q, \dot{q})\dot{q} = 0 \end{cases}, \quad (19)$$

dove le matrici $P_\tau(q) \in \mathbb{R}^{(n \times n)}$ e $P(q) \in \mathbb{R}^{(n \times n)}$ proiettano rispettivamente coppie e accelerazioni generalizzate in componenti che fanno lavoro sui moti del sistema possibili e accelerazioni compatibili con i vincoli.

Il metodo geometrico unificato si articola nei seguenti passi:

- considerando il vincolo in forma Pfaffiana derivato nel tempo nella forma della (12) e la relazione (9) in cui stata effettuata la sostituzione $Q_{nc,a} = \tau$ si ha:

$$\begin{cases} B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau - A(q)^T \lambda \\ A(q)\dot{\check{q}} + \dot{A}(q, \dot{q})\dot{q} = 0 \end{cases}, \quad (20)$$

- dalla prima equazione del sistema (20) si ricava \ddot{q} ottenendo

$$\ddot{q} = B^{-1}(q) [\tau - A(q)^T \lambda - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)] \quad (21)$$

- sostituendo la (21) nella seconda equazione del sistema (20) e risolvendo per λ si ottiene

$$\lambda = \left(A(q)B^{(-1)}(q)A^T(q) \right)^{(-1)} \left[\dot{A}(q, \dot{q})\dot{q} + A(q)B^{(-1)}(q) (\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)) \right] \quad (22)$$

- sostituendo la 22 nella 21 si ha

$$\ddot{q} = B^{(-1)}(q) \left[\tau - A(q)^T \left(A(q)B^{(-1)}(q)A^T(q) \right)^{(-1)} \left[\dot{A}(q, \dot{q})\dot{q} + A(q)B^{(-1)}(q) (\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)) \right] - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q) \right] \quad (23)$$

- ricordando che, dalla (12), si ha $\dot{A}(q, \dot{q}) = -A(q)\ddot{q}$ e premoltiplicando ambo i membri della 23 per $B(q)$ si può scrivere

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) - \tau = A(q)^T \left(A(q)B^{(-1)}(q)A^T(q) \right)^{(-1)} \left[A(q)\ddot{q} + A(q)B^{(-1)}(q) (\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)) \right] \quad (24)$$

- raccogliendo il termine $A(q)B^{(-1)}(q)$ all'interno della parentesi quadra a secondo membro della 24 si ottiene

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) - \tau = A(q)^T \left(A(q)B^{(-1)}(q)A^T(q) \right)^{(-1)} A(q)B^{(-1)}(q) (\ddot{q} + \tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)), \quad (25)$$

che può essere riscritta nella forma

$$P_\tau(q) (\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)) = P_\tau(q)\tau, \quad (26)$$

dove

$$P_\tau(q) = I - A(q)^T \left(A(q)B^{(-1)}(q)A^T(q) \right)^{(-1)} A(q)B^{(-1)}(q). \quad (27)$$

Si fanno notare i seguenti fatti:

- siccome $P_\tau(q) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ma $\text{rank}(P_\tau(q)) = n - m$, non é possibile premoltiplicare per $P_\tau^{(-1)}(q)$, cioè avrebbe senso solo nel caso in cui $A(q) = 0$, ovvero il sistema fosse non vincolato (caso in cui si avrebbe $P_\tau(q) = I$);

- la matrice $P_\tau(q)$ proietta le forze generalizzate τ nelle componenti $P_\tau(q)\tau$ che fanno lavoro sui moti del sistema compatibili con i vincoli. Le altre componenti, $(I - P_\tau(q))\tau$, sono assorbite dai vincoli;
- gli insiemi di forze generalizzate $P_\tau(q)\tau$ e $(I - P_\tau(q))\tau$ sono ortogonali l'un l'altro rispetto alla matrice d'inerzia, in altre parole vale la

$$(P_\tau(q)\tau)^T B^{(-1)}(q) (I - P_\tau(q))\tau = 0. \quad (28)$$

- alternativamente a quanto fatto al passo precedente possibile definire una matrice di proiezione

$$P(q) = B^{(-1)}(q)P_\tau(q)B(q) = I - B^{(-1)}(q)A(q)^T \left(A(q)B^{(-1)}(q)A(q)^T \right)^{(-1)} A(q), \quad (29)$$

che permette di riarrangiare la (26) nella seguente

$$P(q)\ddot{q} = P(q)B^{(-1)}(q) [\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)]. \quad (30)$$

Si fanno notare i seguenti fatti:

- siccome $P(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ma $\text{rank}(P(q)) = n - m$, non é possibile premoltiplicare per $P^{(-1)}(q)$, ciò avrebbe senso solo nel caso in cui $A(q) = 0$, ovvero il sistema fosse non vincolato (caso in cui si avrebbe $P(q) = I$);
- la matrice $P(q)$ proietta le accelerazioni generalizzate nelle componenti $P(q)\ddot{q}$ compatibili con i vincoli. Le altre componenti, $(I - P(q))\ddot{q}$, non sono ammissibili;

$$(P_\tau(q)\ddot{q})^T B(q) (I - P_\tau(q))\ddot{q} = 0. \quad (31)$$

- dato che $\text{rank}(P_\tau(q)) = \text{rank}(P(q)) = n - m$ sia la (30) che la (26) devono essere risolte congiuntamente alla (12) per ottenere un sistema di n equazioni differenziali del secondo ordine indipendenti nelle incognite $\ddot{q} \in \mathbb{R}^n$ come esposto nelle (18) e (19).

3.3 Embedding Technique

Per l'esposizione di questo metodo si richiama l'equazione (3) (dinamica nella forma in cui é stata derivata dal PLV), la si traspone e vi si sostituisce la (9), in modo da ottenere la

$$\delta q^T [B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) - \tau] = 0. \quad (32)$$

Questo metodo, attraverso una opportuna partizione del vettore degli spostamenti virtuali (e di conseguenza velocità e accelerazioni) in coordinate generalizzate in componenti dipendenti $\delta q_D \in \mathbb{R}^m$ e indipendenti $\delta q_I \in \mathbb{R}^{n-m}$, permette di riformulare le equazioni della dinamica vincolata in un sistema di n equazioni

$$\begin{cases} \ddot{q}_I = (B_I(q)^T B(q) B_I(q))^{(-1)} B_I(q)^T [\tau - (B(q)\dot{B}_I(q) - C(q, \dot{q})B_I(q))\dot{q} - G(q)] \\ \dot{q}_D = -A_D^{(-1)}(q)A_I(q)\dot{q}_I \end{cases}, \quad (33)$$

di cui le prime $n - m$ sono relative alle variabili indipendenti e sono del secondo ordine, mentre le ulteriori m esprimono le variabili dipendenti e sono del primo ordine.

Il metodo Embedding si articola nei seguenti passi:

- si riscrive il vincolo in forma Pfaffiana partizionando la matrice $A(q)$ e il vettore \dot{q} in modo da mettere in evidenza le velocità dipendenti e quelle indipendenti ottenendo la seguente relazione

$$A(q)\dot{q} = \begin{bmatrix} A_D(q) & A_I(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_D \\ \dot{q}_I \end{bmatrix} = A_D(q)\dot{q}_D + A_I(q)\dot{q}_I \quad (34)$$

dove $\dot{q}_D \in \mathbb{R}^m$, $\dot{q}_I \in \mathbb{R}^{(n-m)}$, $A_D(q) \in \mathbb{R}^{(m \times m)}$ e $A_I(q) \in \mathbb{R}^{(m \times (n-m))}$.

- invertendo $A_D(q)$ (operazione lecita nell'ipotesi (10)) dalla (34) si può ottenere

$$\dot{q}_D = -A_D^{(-1)}(q)A_I(q)\dot{q}_I \quad (35)$$

relazione che esprime le velocità dipendenti in funzione di quelle indipendenti. In particolare si fa notare che la (35) valida anche in termini di spostamenti virtuali, ovvero

$$\delta q_D = -A_D^{(-1)}(q)A_I(q)\delta q_I \quad (36)$$

- avvalendosi della (36) è possibile esprimere il vettore degli spostamenti virtuali δq in funzione delle sole componenti indipendenti:

$$\delta q = \begin{bmatrix} \delta q_D \\ \delta q_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_D^{(-1)}(q)A_I(q) \\ I \end{bmatrix} \delta q_I = B_I(q)\delta q_I \quad (37)$$

oppure trasponendo

$$\delta q^T = \delta q_I^T B_I(q)^T \quad (38)$$

- dalla (37), per vincoli scleronomi segue inoltre che

$$\dot{q} = B_I(q)\dot{q}_I \quad (39)$$

e che

$$\ddot{q} = B_I(q)\ddot{q}_I + \dot{B}_I(q)\dot{q}_I = B_I(q)\ddot{q}_I + \left[\frac{\partial B_I(q)}{\partial q} \dot{q} \right] \dot{q}_I \quad (40)$$

- a questo punto sostituendo le (38), (39) e (40) nella (32) si ottiene

$$\delta q_I^T B_I(q)^T \left[B(q) \left(B_I(q)\ddot{q}_I + \dot{B}_I(q)\dot{q}_I \right) + C(q, \dot{q})B_I(q)\dot{q}_I + G(q) - \tau \right] = 0. \quad (41)$$

Siccome nell'equazione compaiono le componenti indipendenti del vettore degli spostamenti virtuali, queste possono essere scelte in modo arbitrario (quindi semplificate) e dopo alcuni semplici passaggi la (41) dá luogo alla prima equazione del sistema (33).

Si fa notare che é stata ottenuta un'equazione con $n - m$ componenti, che, in generale, dipende da tutte le n variabili di configurazione. Quindi necessario un set di altre m equazioni che, salvo casi particolari in cui la (41) dipenda esclusivamente dalle variabili indipendenti, devono essere risolte simultaneamente alla prime $n - m$. In definitiva in un caso generale si ottiene un sistema di n equazioni differenziali di cui $n - m$ del secondo ordine e m del primo ordine. Le ultime esprimono le velocità dipendenti in funzione di quelle indipendenti e sono rappresentate dalla seconda relazione del sistema (33).

Uno svantaggio di questo metodo é il fatto che non si hanno indicazioni a priori su quali variabili siano piú utili come variabili indipendenti e la loro scelta é lasciata all'esperienza dell'analista.

3.4 Quasi Velocità

L'idea su cui tale approccio si fonda é apparsa in [9] e [10], due scritti di Gian Antonio Maggi, di cui un ritratto é rappresentato in Fig. 1, presentati a fine 1800 e "riscoperti" dalla letteratura anglosassone circa un secolo dopo.



Figure 1: Ritratto di Gian Antonio Maggi

Per l'esposizione di questo metodo si richiama la prima equazione del sistema (8) e vi si sostituisce la (9), in modo da ottenere

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + A^T(q)\lambda = \tau. \quad (42)$$

Il metodo delle quasi velocità, attraverso una opportuna parametrizzazione del $\ker(A(q))$ mostra che é possibile riformulare le equazioni della dinamica vincolata come un sistema di $2n - m$ equazioni differenziali del primo ordine del tipo

$$\begin{cases} \dot{v} = (S^T(q)B(q)S(q))^{(-1)} S^T(q) [\tau - (B(q)\dot{S}(q, \dot{q}) + C(q, \dot{q})S(q))v - G(q)] \\ \dot{q} = S(q)v \end{cases} \quad (43)$$

dove $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-m}$ é detto vettore delle quasi-velocità e $S(q) \in \mathbb{R}^{(n \times (n-m))}$ rappresenta una base del $\ker(A(q))$.

Il metodo delle quasi-velocità si articola nei seguenti passi:

- Si trova una base $S(q) \in \mathbb{R}^{(n \times (n-m))}$ per il $\ker(A(q))$, tale cioè, che verifichi la relazione

$$A(q)S(q) = 0. \quad (44)$$

Tale base permette di esprimere le velocità \dot{q} in funzione di quasi-velocità $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{(n-m)}$ attraverso la relazione

$$\dot{q} = S(q)\mathbf{v} \quad (45)$$

- Si deriva la (45) rispetto al tempo

$$\ddot{q} = S(q)\dot{\mathbf{v}} + \dot{S}(q, \dot{q})\mathbf{v} \quad (46)$$

- Sostituendo la (45) e la (46) nella (42) si ottiene

$$B(q)S(q)\dot{\mathbf{v}} + (B(q)\dot{S}(q, \dot{q}) + C(q, \dot{q})S(q))\mathbf{v} + G(q) + A^T(q)\lambda = \tau \quad (47)$$

- premoltiplicando ambo i membri della (47) per $S^T(q)$ (il che significa proiettare la dinamica nel $\ker(A(q))$) e ricordando che, per la (44), $S^T(q)A^T(q) = 0$ si ha

$$S^T(q)B(q)S(q)\dot{\mathbf{v}} = S^T(q) [\tau - (B(q)\dot{S}(q, \dot{q}) + C(q, \dot{q})S(q))\mathbf{v} - G(q)]. \quad (48)$$

Dalla (48) e dalla (45) si ottiene il sistema (43).

Questo metodo permette di trasformare le equazioni di Lagrange in un sistema di $2n - m$ equazioni differenziali del primo ordine. Inoltre, non ricorrendo alla derivazione del vincolo, rispetto ai metodi presentati nelle sezioni 3.2 3.1 risulta meno soggetto ad errori nell'applicazione di metodi numerici (uno studio degli effetti della differenziazione dei vincoli sulla soluzione numerica di tali problemi é riportato in [3]).

Tuttavia i vantaggi di questo metodo hanno il prezzo di definire una base del nullo per la matrice di vinolo, la cui scelta non é univoca e influisce sulla complessità del sistema di equazioni risultante.

Si fa notare che sostituire le espressioni di velocità e accelerazioni in termini di quasi velocità e quasi accelerazioni nelle equazioni di Lagrange non vincolate é sbagliato perché, sebbene le velocità divengono "automaticamente" compatibili con i vincoli, manca il termine che tiene conto delle reazioni vincolari che consentono tale compatibilità.

4 Sistemi con vincoli elastici, elastici e smorzanti e stabilizzazione alla Baumgarte

4.1 Vincoli Elastici

Supponiamo che il sistema sia soggetto a vincoli olonomi scleronomi, caratterizzati dall'equazione $C(q) = 0$. Si supponga inoltre che i vincoli non siano rigidi, ma sia ammesso uno scostamento ε dalla condizione di rispetto di tale vincolo. Sotto questa seconda ipotesi l'equazione di vincolo e la sua derivata temporale diventano

$$\begin{aligned}\varepsilon(q) &= C(q) \\ \dot{\varepsilon}(q, \dot{q}) &= \frac{\partial C(q)}{\partial q} \dot{q} = A(q) \dot{q}\end{aligned}\quad (49)$$

La dinamica di un sistema soggetto a vincoli elastici può essere modellata associando alla deformazione del vincolo una funzione potenziale del tipo

$$U_e(\varepsilon(q)) = \frac{1}{2} \varepsilon^T(q) K \varepsilon(q) \quad (50)$$

dove $K \in \mathbb{R}^{m \times m}$ è una matrice simmetrica definita positiva. La funzione $U_e(\varepsilon(q))$ rappresenta l'energia elastica immagazzinata nel vincolo stesso.

Si può includere l'effetto di tale formulazione direttamente nel calcolo del Lagrangiano. Si considera che l'energia potenziale sia ottenuta dalla somma di due termini: uno relativo all'energia potenziale gravitazionale e uno relativo all'energia potenziale elastica:

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U_g(q) - U_e(\varepsilon(q)) \quad (51)$$

da cui si ottiene

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right]^T = B(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) + A^T(q) K \varepsilon(q) = \tau \quad (52)$$

poiché

$$\frac{\partial U_e(\varepsilon(q))}{\partial q} = \frac{\partial U_e(\varepsilon(q))}{\partial \varepsilon(q)} \frac{\partial \varepsilon(q)}{\partial q} = \varepsilon^T(q) K \frac{\partial \varepsilon(q)}{\partial q} = \varepsilon^T(q) K A(q), \quad (53)$$

in particolare l'ultimo passaggio è ottenuto ricordando la seconda delle (49). Trasponendo la (53) e ricordando che $K = K^T$ in quanto K è simmetrica per ipotesi si ha

$$\left(\frac{\partial U_e(\varepsilon(q))}{\partial q} \right)^T = A^T(q) K \varepsilon(q). \quad (54)$$

4.2 Vincoli Elastici e Smorzanti

Oltre ad accumulare energia potenziale all'aumentare della deformazione il vincolo esercita anche un'azione di smorzamento proporzionale alla velocità di deformazione.

Una metodologia per tenere conto di questo effetto è quella di associare alla velocità di deformazione una funzione di dissipazione (funzione di Rayleigh) del tipo:

$$D(\dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}^T(q) F \dot{\varepsilon}(q), \quad (55)$$

con $F \in R^{m \times m}$ simmetrica e definita positiva. Le forze dissipative, Q_d , che si vanno a sommare alle forze generalizzate non conservative attive possono essere calcolate derivando la (55) rispetto alle velocità delle variabili di configurazione

$$Q_d = - \left(\frac{\partial D(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \right)^T = - \left(\frac{\partial \dot{\varepsilon}}{\partial \dot{q}} \right)^T \left(\frac{\partial D(\dot{q})}{\partial \dot{\varepsilon}} \right)^T = -A^T(q) F \dot{\varepsilon}. \quad (56)$$

Per ottenere l'ultima espressione della (56) è sufficiente ricordare che, in accordo alla nomenclatura utilizzata in questo documento si ha:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= C(q) \\ \dot{\varepsilon} &= A(q) \dot{q} \\ \ddot{\varepsilon} &= A(q) \ddot{q} + \dot{A}(q, \dot{q}) \dot{q} \end{aligned} \quad (57)$$

La dinamica di di sistema con vincoli elastici e smorzanti risulta quindi

$$B(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) + A^T(q) K \varepsilon = \tau + Q_d \quad (58)$$

oppure, spostando Q_d a primo membro e sostituendo (56)

$$B(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) + A^T(q) (K \varepsilon + F \dot{\varepsilon}) = \tau \quad (59)$$

In questa espressione il ruolo solitamente rivestito dai moltiplicatori di Lagrange λ (componenti delle reazioni vincolari nelle direzioni date dalle colonne di $A(q)$) è sostituito dalle componenti elastiche e smorzanti in virtù delle leggi costitutive utilizzate (funzione potenziale associata alla deformazione e funzione dissipativa associata alla velocità di deformazione).

4.3 Stabilizzazione alla Baumgarte

L'approccio descritto in questa sezione, proposto da Baumgarte in [2], si basa sull'idea (derivata dalla teoria del Controllo) di utilizzare il modello della dinamica per sistemi con vincoli elastici e smorzanti per "stabilizzare" la dinamica di sistemi con vincoli rigidi.

Si considera il sistema di equazioni dato dalla dinamica (59) e dalla terza delle (57)

$$\begin{cases} B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + A^T(q)(K\varepsilon + F\dot{\varepsilon}) = \tau \\ \ddot{\varepsilon} = A(q)\ddot{q} + \dot{A}(q, \dot{q})\dot{q} \end{cases} \quad (60)$$

La soluzione della dinamica con vincoli rigidi ottenuta con il metodo Augmented Formulation associata al formalismo adottato in questa sezione fornisce l'equazione

$$\ddot{\varepsilon} = 0, \quad (61)$$

che é instabile. Si pensi all'esempio ad un grado di libertà: l'equazione modella il sistema costituito da una massa su cui non agisce nessuna forza, se la massa ha una velocità iniziale non nulla la sua posizione crescerá linearmente con il tempo senza mai assestarsi. Inoltre in caso di condizioni iniziali nulle é possibile che errori numerici possano portare ad instabilitá.

Per stabilizzare la dinamica della deformazione dei vincoli si aggiunge nella soluzione per \ddot{q} (analoga alla prima equazione del sistema (17) trovata nell'esposizione del metodo Augmented Formulation) un termine del tipo $A_B^+ \mu$ con $\mu \in R^m$, ossia

$$\ddot{q} = (I - A_B^+ A) B^{-1} [\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)] - A_B^+ \dot{A}(q, \dot{q}) + A_B^+ \mu, \quad (62)$$

che sostituita nella seconda del sistema (60) fornisce

$$\ddot{\varepsilon} = \mu. \quad (63)$$

Imponendo $\mu = -K_p \varepsilon - K_v \dot{\varepsilon}$ con $K_p, K_v \in R^{m \times m}$ positive definite si ottiene una dinamica del tipo

$$\ddot{\varepsilon} + K_p \varepsilon + K_v \dot{\varepsilon} = 0. \quad (64)$$

che descrive il comportamento di un sistema lineare asintoticamente stabile che ha come equilibrio l'origine. Concludendo la formulazione della dinamica di un sistema soggetto a vincoli rigidi con stabilizzazineo alla Baumgarte é rappresentata dal seguente sistema

$$\begin{cases} \ddot{q} = (I - A_B^+ A) B^{-1} [\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)] - A_B^+ \dot{A}(q, \dot{q}) - A_B^+ (K_p \varepsilon + K_v \dot{\varepsilon}) \\ \ddot{\varepsilon} + K_p \varepsilon + K_v \dot{\varepsilon} = 0 \end{cases} \quad (65)$$

Il metodo presentato in questa sezione aggira il problema della dinamica instabile della deformazione dei vincoli introducendo un termine stabilizzante fittizio che fa si che la deformazione converga a zero. Si fanno notare due fatti:

- se la convergenza della dinamica (64) é troppo lenta (K_p, K_v piccole) si possono avere errori non trascurabili nei transitori
- se invece la (64) viene fatta tendere a zero troppo velocemente (K_p, K_v grandi) può venirsi a creare un sistema "stiff" con problemi numerici ad esso connessi.

References

- [1] O. A. Bauchau and A. Laulusa. Review of contemporary approaches for constraint enforcement in multibody systems. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2007.
- [2] J.W. Baumgarte. Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamic systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1972.
- [3] S.L. Campbell and B. Leimkuhler. Differentiation of constraints in differential-algebraic equations. *Mechanics of Structures and Machines*, 1991.
- [4] Franco Cardin. *Sistemi Dinamici Meccanici Introduzione alla Meccanica Razionale*. Padova, 2013.
- [5] Giovanni Gallavotti. *The Elements of Mechanics*. Ipparco Editore, Roma, giovanni gallavotti second edition, springer-verlag first edition edition, 2007.
- [6] H. Hemami and F.C. Weimer. Modeling of nonholonomic dynamic systems with applications. *Journal of Applied Mechanics*, 1981.
- [7] A. Laulusa and O. A. Bauchau. Review of classical approaches for constraint enforcement in multibody systems. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2007.
- [8] Guanfeng Liu and Zexiang Li. A unified geometric approach to modeling and control of constrained mechanical systems. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, 2002.
- [9] G. A. Maggi. *Principii della Teoria Matematica del Movimento dei Corpi: Corso di Meccanica Razionale*. Ulrico Hoepli, Milano, 1896.
- [10] G. A. Maggi. Di alcune forme delle equazioni della dinamica applicabili ai sistemi anolonomi. *Rendiconti della Regia Accademia dei Lincei*, 1901.