



UNIVERSITÀ DI PISA
Facoltà di Ingegneria
Laurea Spec. in Ing. dell'Automazione

Cinematica, dinamica e controllo di un manipolatore 3-RPR parallelo

Tavole di Robotica
Corso di Robotica - Prof. A. Bicchi
a.a. 2007/2008

Franchi Michele : michele.franchi@email.it
Moliterni Pasquale : pasquale.moliterni@virgilio.it
Vetrugno Alessandra : alessandravetrugno700@hotmail.com

16 ottobre 2008

Indice

Introduzione	iii
Specifiche Tavole	v
1 Tavola I	1
1.1 Cinematica diretta	2
1.2 Cinematica differenziale diretta	8
2 Tavola II	16
2.1 Cinematica inversa	16
2.2 Analisi delle singularità	19
2.3 Algoritmi di inversione della cinematica	21
2.4 Test 1	22
2.5 Test 2	23
2.6 Test 3	26
3 Tavola III	28
3.1 Dinamica	28
3.1.1 Dinamica Gamba 1	32
3.1.2 Dinamica Gamba 2	36
3.1.3 Dinamica Gamba 3	37
3.2 Dinamica End-Effector	39
3.3 Dinamica Vincolata	40
3.4 Dinamica Quasi-Velocità	41
4 Tavola IV	43
4.1 Controllo	43
4.1.1 Controllo a coppia calcolata nello spazio dei giunti	44
4.1.2 Controllo a coppia calcolata nello spazio operativo	45

5	Identificabilità : osservabilità del sistema aumentato	55
5.1	Cinematica diretta	56
5.2	Dinamica	57
5.3	Osservabilità	58
5.3.1	Codistribuzione di osservabilità del sistema <i>lineare nei parametri</i>	59
5.3.2	Codistribuzione di osservabilità del sistema <i>non lineare nei parametri</i>	63
5.4	Ricostruzione algebrica	65
5.5	Linearizzazione Ingresso-Stato	66
5.6	Conclusioni	69
A	Codice Matlab	70
A.1	Cinematica_diretta.m	70
A.2	kernel_A.m	75
B	Codice Matlab	77
B.1	Cinematica_inversa.m	77
	Bibliografia	80

Introduzione

Un manipolatore parallelo è una struttura in cui l'end-effector è connesso alla base attraverso due o più catene cinematiche indipendenti. I manipolatori paralleli, ormai, trovano utilizzo in molti sistemi robotici di natura industriale e di servizio. Alcuni esempi possono essere le piattaforme di Gough-Stewart o Delta, mani per robot, veicoli su gambe etc.. Le principali caratteristiche di questi manipolatori sono che non tutti i giunti sono attuati, nè tutti sono sensorizzati e le configurazioni di questi giunti non sono indipendenti le une dalle altre.

Il manipolatore in catena chiusa (RPR) scelto per questo studio è quello in Figura 1. Inizialmente analizzeremo la cinematica diretta per passare poi ad analizzare la cinematica differenziale ed in seguito la cinematica inversa utilizzata per implementare gli algoritmi di inversione della cinematica. Successivamente verrà studiata la dinamica del manipolatore al fine di sintetizzare un opportuno algoritmo di controllo ad inseguimento di traiettoria.

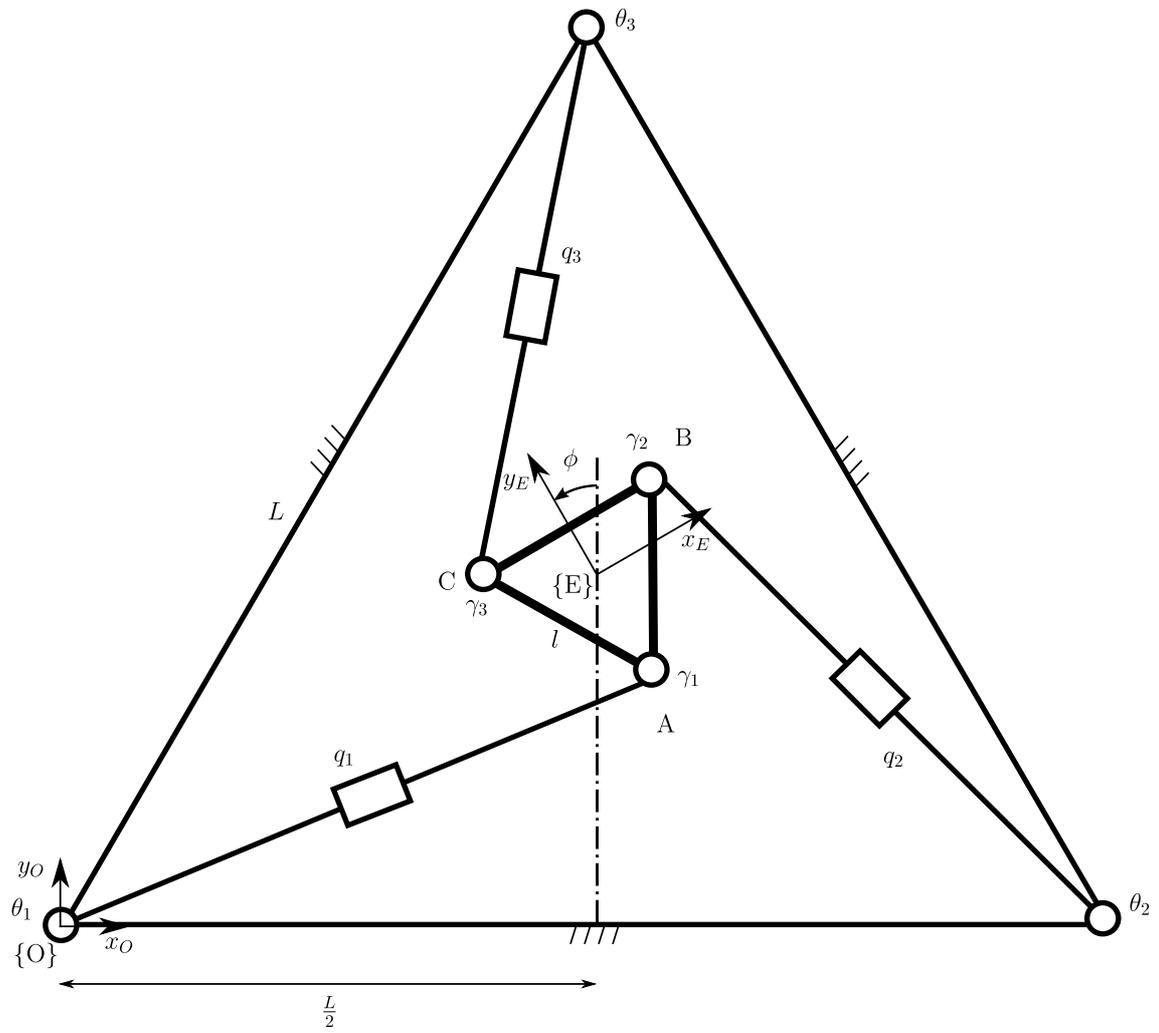


Figura 1: Manipolatore planare parallero RPR

Specifiche Tavole

1. Cinematica

Svolgere una tra le due seguenti tracce :

1. Studio della cinematica inversa di un manipolatore/meccanismo ridondante.
2. Studio della cinematica diretta di un manipolatore/meccanismo planare in catena chiusa.

2. Metodi di risoluzione della cinematica

Implementazione di un metodo iterativo per la cinematica di uno dei due manipolatori di cui alla tavola 1.

3. Dinamica

1. Studio del modello dinamico del manipolatore scelto per la traccia 2 della tavola 1.
2. Studio del modello monotraccia dinamico di un veicolo.

4. Controllo

Controllo ad inseguimento di traiettoria per uno dei due modelli di cui alla tavola 3.

5. Approfondimenti

Temi suggeriti :

- Studio, classificazione e controllo di manipolatori seriali e paralleli in singolarità;
- Implementazione di algoritmi di pianificazione delle traiettorie;
- Guida automatica basata su retroazione visiva (Visual servoing);
- SLAM (Simultaneous Localization and Mapping);
- Partecipazione a Competizione Eurobot, Robocup o similari;
- Controllo Decentralizzato di Sistemi Multi Agente (con estensioni ad applicazioni tipo SmartDust e wireless sensor networks).

Capitolo 1

Tavola I

Il numero di configurazioni indipendenti m per un manipolatore è dato dalle seguenti formule (di *Grübler*) :

$$\begin{cases} m = 3b - 2(p + r) & \text{caso planare} \\ m = 6b - 5(p + r) - 3s & \text{caso 3D} \end{cases} \quad (1.1)$$

dove con b indichiamo il numero di corpi rigidi del sistema, r il numero di giunti rotoidali, p il numero di giunti prismatici e con s il numero di giunti sferici. Nel nostro caso abbiamo $b = 7$, $p = 3$ e $r = 6$ e sostituendo nella (1.1) per il caso planare si ottiene $m = 3 \cdot 7 - 2 \cdot (6 + 3) = 3$. Considerando n_a come il numero di giunti attuati e n_s il numero di giunti sensorizzati, nel caso in esame si ha che $n_a = n_s = m = 3$ e quindi nessuna ridondanza di attuatori e di sensori. Infine indichiamo con $x \in SE(3)$ le configurazioni dell'end-effector e con $q \in \mathbb{R}^n$ le configurazioni dei giunti.

$$q \in \mathbb{R}^n, \quad q = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ q_1 \\ \frac{\gamma_1}{\theta_2} \\ \theta_2 \\ q_2 \\ \frac{\gamma_2}{\theta_3} \\ \theta_3 \\ q_3 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^9 \quad (1.2)$$

Tra le varie configurazioni dei giunti conviene distinguere tra giunti attuati a e non attuati \bar{a} , sensorizzati s e non sensorizzati \bar{s} ottenendo :

$$q_{as} \in \mathbb{R}^3, \quad q_{as} = S_{as}q = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \theta_1 \\ q_1 \\ \frac{\gamma_1}{\theta_2} \\ q_2 \\ \frac{\gamma_2}{\theta_3} \\ q_3 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$q_{\bar{a}s} \in \mathbb{R}^6, \quad q_{\bar{a}s} = S_{\bar{a}s}q = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \theta_1 \\ q_1 \\ \frac{\gamma_1}{\theta_2} \\ q_2 \\ \frac{\gamma_2}{\theta_3} \\ q_3 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \frac{\gamma_1}{\theta_2} \\ \frac{\gamma_2}{\theta_3} \\ \gamma_3 \end{bmatrix}$$

1.1 Cinematica diretta

Il problema cinematico diretto nei manipolatori paralleli ha la stessa formulazione per quello dei manipolatori seriali :

$$x = f(q) \tag{1.3}$$

Assegnate le coordinate dei giunti q si vogliono trovare le coordinate x dell'end-effector. Per risolvere il problema diretto nei manipolatori paralleli si risolvono N , con N numero delle gambe, problemi diretti seriali impostando successivamente le equazioni vincolari da rispettare. Prendiamo l'end-effector come elemento tale per cui se rimosso possiamo effettuare lo studio di N problemi diretti seriali ed effettuiamo il taglio a livello di giunto in modo da ridurre il numero di equazioni vincolari.

Una volta effettuati i tagli otteniamo i vari sistemi di riferimento come in Figura 1.1 dove per il triangolo esterno sono rappresentati i vari sistemi di riferimento ottenuti utilizzando la convenzione di Denavit-Hartenberg. A questo punto dobbiamo esprimere i sistemi di riferimento $\{AE\}$, $\{BE\}$ e $\{CE\}$ rispetto al sistema di

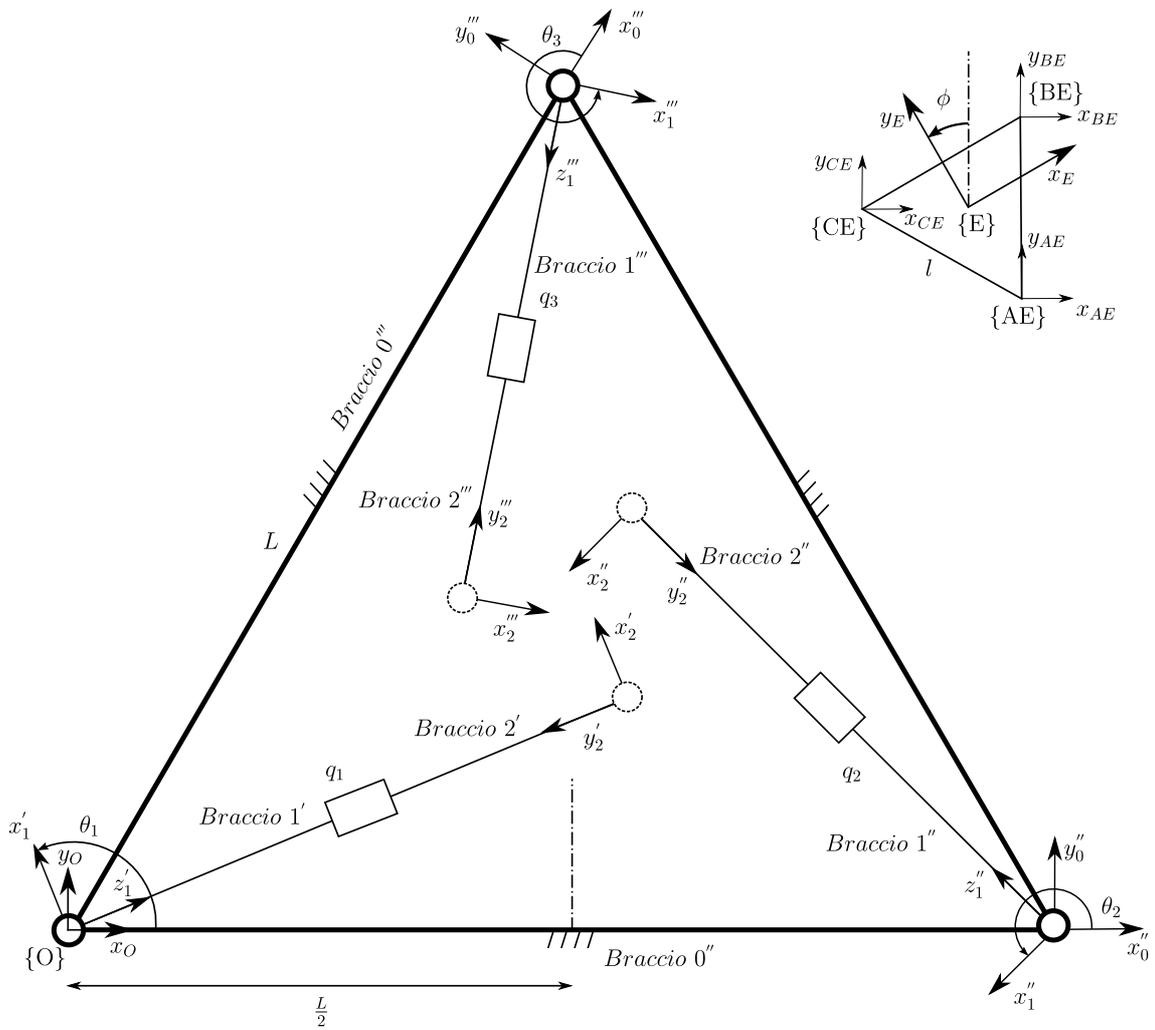


Figura 1.1: Tagli e sistemi di riferimento

riferimento dell'end-effector $\{E\}$ tramite opportune trasformazioni omogenee (ricordando che gli angoli all'interno del triangolo sono tutti uguali e pari a 60 gradi e che la distanza tra i vertici del triangolo ed il suo baricentro è $l/\sqrt{3}$). Otteniamo quindi le matrici T_{AE}^E , T_{BE}^E e T_{CE}^E come segue :

$$T_{AE}^E = \begin{bmatrix} R_z(-\phi) & o_{AE}^E \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} C_\phi & S_\phi & 0 & 0 \\ -S_\phi & C_\phi & 0 & -\frac{l\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$T_{BE}^E = \begin{bmatrix} R_z(-\phi) & o_{BE}^E \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} C_\phi & S_\phi & 0 & \frac{l}{2} \\ -S_\phi & C_\phi & 0 & \frac{l\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$T_{CE}^E = \begin{bmatrix} R_z(-\phi) & o_{CE}^E \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} C_\phi & S_\phi & 0 & -\frac{l}{2} \\ -S_\phi & C_\phi & 0 & \frac{l\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Per poter esprimere i sistemi di riferimento $\{AE\}$, $\{BE\}$ e $\{CE\}$ in funzione della terna base dobbiamo calcolare la trasformazione omogenea T_E^O , dove $\{O\}$ rappresenta la terna di riferimento base.

$$T_E^O = \begin{bmatrix} R_z(\phi) & o_E^O \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} C_\phi & -S_\phi & 0 & x_E \\ S_\phi & C_\phi & 0 & y_E \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Otteniamo quindi le matrici T_{AE}^O , T_{BE}^O e T_{CE}^O :

$$T_{AE}^O = T_E^O T_{AE}^E = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{l\sqrt{3}}{3}S_\phi + x_E \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{l\sqrt{3}}{3}C_\phi + y_E \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$T_{BE}^O = T_E^O T_{BE}^E = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{l}{2}C_\phi - \frac{l\sqrt{3}}{6}S_\phi + x_E \\ 0 & 1 & 0 & \frac{l}{2}S_\phi + \frac{l\sqrt{3}}{6}C_\phi + y_E \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$T_{CE}^O = T_E^O T_{CE}^E = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{l}{2}C_\phi - \frac{l\sqrt{3}}{6}S_\phi + x_E \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{l}{2}S_\phi + \frac{l\sqrt{3}}{6}C_\phi + y_E \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Come già accennato, per il calcolo della cinematica diretta dei tre bracci a catena aperta si utilizza la convenzione di Denavit-Hartenberg. Dalla Figura 1.1 si possono vedere come sono stati presi i sistemi di riferimento per i vari giunti. L'ultimo giunto rotoidale non viene preso in considerazione a causa della scelta fatta per il taglio. Successivamente con l'imposizione dei vincoli per la risoluzione della cinematica diretta del manipolatore parallelo si includeranno implicitamente gli ultimi giunti rotoidali omissi. Per il primo braccio seriale si ottiene la Tabella 1.1 (notare che gli assi $\{x'_0, y'_0, z'_0\}$ per il primo giunto rotoidale coincidono con quelli della terna base $\{x_O, y_O, z_O\}$ prima riga della tabella non considerata perchè nulla) :

Braccio	a_i	d_i	α_i	θ_i
1'	0	0	$\pi/2$	θ_1
2'	0	q_1	$-\pi/2$	0

Tabella 1.1: D-H per il braccio seriale (braccio q_1)

Le matrici di trasformazione omogenee che si ottengono tra i vari bracci sono :

$$A_{1'}^O = \left[\begin{array}{ccc|c} C_{\theta_1} & 0 & S_{\theta_1} & 0 \\ S_{\theta_1} & 0 & -C_{\theta_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$A_{2'}^{1'} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & q_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$A_{2'}^O = A_{1'}^O A_{2'}^{1'} = \left[\begin{array}{ccc|c} C_{\theta_1} & -S_{\theta_1} & 0 & S_{\theta_1}q_1 \\ S_{\theta_1} & C_{\theta_1} & 0 & -C_{\theta_1}q_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Braccio	a_i	d_i	α_i	θ_i
0''	L	0	0	0
1''	0	0	$\pi/2$	θ_2
2''	0	q_2	$-\pi/2$	0

Tabella 1.2: D-H per il braccio seriale (braccio q_2)

Nel caso del secondo braccio seriale (per comodità chiamiamolo q_2) si introduce un giunto fittizio che permette di calcolare la trasformazione in terna base {O} (vedi Tabella 1.2).

Le trasformazioni omogenee corrispondenti sono :

$$A_{0''}^O = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & L \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$A_{1''}^{0''} = \left[\begin{array}{ccc|c} C_{\theta_2} & 0 & S_{\theta_2} & 0 \\ S_{\theta_2} & 0 & -C_{\theta_2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$A_{2''}^{1''} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & q_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} A_{2''}^O &= A_{0''}^O A_{1''}^{0''} A_{2''}^{1''} = \\ &= \left[\begin{array}{ccc|c} C_{\theta_2} & -S_{\theta_2} & 0 & L + S_{\theta_2} q_2 \\ S_{\theta_2} & C_{\theta_2} & 0 & -C_{\theta_2} q_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Per completezza scriviamo anche la matrice :

$$A_{1''}^O = A_{0''}^O A_{1''}^{0''} = \left[\begin{array}{ccc|c} C_{\theta_2} & 0 & S_{\theta_2} & L \\ S_{\theta_2} & 0 & -C_{\theta_2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Braccio	a_i	d_i	α_i	θ_i
$0'''$	L	0	0	$\pi/3$
$1'''$	0	0	$\pi/2$	θ_3
$2'''$	0	q_3	$-\pi/2$	0

Tabella 1.3: D-H per il braccio seriale (braccio q_3)

Stessa procedura va effettuata per l'ultimo braccio seriale (q_3) sempre riferendosi alla Figura 1.1. Dalla Tabella 1.3) si ottengono :

Da cui :

$$A_{0'''}^O = \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{L}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{L\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$A_{1'''}^{0'''} = \left[\begin{array}{ccc|c} C_{\theta_3} & 0 & S_{\theta_3} & 0 \\ S_{\theta_3} & 0 & -C_{\theta_3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$A_{2'''}^{1'''} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & q_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} A_{2'''}^O &= A_{0'''}^O A_{1'''}^{0'''} A_{2'''}^{1'''} = \\ &= \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2}(C_{\theta_3} - \sqrt{3}S_{\theta_3}) & -\frac{1}{2}(S_{\theta_3} + \sqrt{3}C_{\theta_3}) & 0 & \frac{L}{2} + \frac{q_3}{2}(S_{\theta_3} + \sqrt{3}C_{\theta_3}) \\ \frac{1}{2}(S_{\theta_3} + \sqrt{3}C_{\theta_3}) & \frac{1}{2}(C_{\theta_3} - \sqrt{3}S_{\theta_3}) & 0 & \frac{L\sqrt{3}}{2} + \frac{q_3}{2}(-C_{\theta_3} + \sqrt{3}S_{\theta_3}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Per completezza scriviamo anche la matrice :

$$\begin{aligned} A_{1'''}^{0'''} &= A_{0'''}^O A_{1'''}^{0'''} = \\ &= \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2}(C_{\theta_3} - \sqrt{3}S_{\theta_3}) & 0 & \frac{1}{2}(S_{\theta_3} + \sqrt{3}C_{\theta_3}) & \frac{L}{2} \\ \frac{1}{2}(S_{\theta_3} + \sqrt{3}C_{\theta_3}) & 0 & \frac{1}{2}(-C_{\theta_3} + \sqrt{3}S_{\theta_3}) & \frac{L\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Per ricavare la cinematica diretta non resta altro che impostare le equazioni dei vincoli. In questo caso, con il taglio a livello dei giunti, è necessario impostare le uguaglianze solo per la posizione dell'origine di T_{AE}^O con $A_{2'}^O$, T_{BE}^O con $A_{2''}^O$ ed infine T_{CE}^O con $A_{2'''}^O$. Si ottengono, quindi, le 6 equazioni di vincolo :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{l\sqrt{3}}{3}S_\phi + x_E = S_{\theta_1}q_1 \\ -\frac{l\sqrt{3}}{3}C_\phi + y_E = -C_{\theta_1}q_1 \\ \frac{l}{2}C_\phi - \frac{l\sqrt{3}}{6}S_\phi + x_E = L + S_{\theta_2}q_2 \\ \frac{l}{2}S_\phi + \frac{l\sqrt{3}}{6}C_\phi + y_E = -C_{\theta_2}q_2 \\ -\frac{l}{2}C_\phi - \frac{l\sqrt{3}}{6}S_\phi + x_E = \frac{L}{2} + \frac{q_3}{2}(S_{\theta_3} + \sqrt{3}C_{\theta_3}) \\ -\frac{l}{2}S_\phi + \frac{l\sqrt{3}}{6}C_\phi + y_E = \frac{L}{2}\sqrt{3} + \frac{q_3}{2}(-C_{\theta_3} + \sqrt{3}S_{\theta_3}) \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Dall'sistema di equazioni 1.4 è possibile ricavare l'espressione $x = f(q_{as})$ della cinematica diretta che lega le posizioni dell'end-effector a quelle dei giunti attuati e sensorizzati. A causa della presenza delle variabili di giunto non attuate $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ il calcolo risulta molto complesso. Per ridurre la complessità si possono effettuare alcune sostituzioni ponendo ad esempio $C_{\theta_i} = C_i, S_{\theta_i} = S_i$ ed aumentare il sistema aggiungendo l'equazione $C_i^2 + S_i^2 = 1$. In questo modo si ottiene un sistema aumentato nelle incognite e nelle equazioni ma polinomiale per la cui risoluzione esistono alcune tecniche numeriche, simboliche e miste. Un'altra possibilità è la sostituzione di $t_i = \tan(\theta_i/2)$ e l'utilizzo delle formule parametriche $\sin(\theta_i) = 2t_i/(1 + t_i^2)$ e $\cos(\theta_i) = (1 - t_i^2)/(1 + t_i^2)$ che, al contrario della sostituzione precedente, non aumenta il numero di equazioni nè di incognite.

1.2 Cinematica differenziale diretta

Il calcolo della cinematica differenziale diretta mette in relazione le velocità dell'end-effector con le velocità dei giunti. In forma compatta, i legami possono essere scritti come :

$$v = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{bmatrix} = J(q)\dot{q}$$

dove J è lo *Jacobiano geometrico* del manipolatore :

$$J = \begin{bmatrix} J_P \\ J_O \end{bmatrix}$$

In definitiva, per il singolo giunto i , risulta :

$$\begin{bmatrix} j_{P_i} \\ j_{O_i} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} & \text{per un giunto } \textit{prismatico} \\ \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (p - p_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix} & \text{per un giunto } \textit{rotoidale} \end{cases}$$

Nel nostro caso, i tagli si effettuano a livello di giunto rotoidale come in Figura 1.1 e si procede col calcolo del singolo Jacobiano per ogni braccio seriale. Tutti e tre i bracci sono formati da un giunto rotoidale ed uno prismatico (l'ultimo rotoidale non viene preso in considerazione a causa del taglio) e quindi la forma dello Jacobiano sarà :

$$\begin{aligned} J'(q) &= \begin{bmatrix} z_{0'} \times (p' - p_{0'}) & z_{1'} \\ z_{0'} & 0 \end{bmatrix} \text{ per il braccio } q_1 \\ J''(q) &= \begin{bmatrix} z_{0''} \times (p'' - p_{0''}) & z_{1''} \\ z_{0''} & 0 \end{bmatrix} \text{ per il braccio } q_2 \\ J'''(q) &= \begin{bmatrix} z_{0'''} \times (p''' - p_{0'''}) & z_{1'''} \\ z_{0'''} & 0 \end{bmatrix} \text{ per il braccio } q_3 \end{aligned}$$

dove i vettori posizione p' , p'' e p''' , espressi in terna base, sono relativi ai giunti di taglio e si ricavano insieme ai versori degli assi z ed agli altri vettori posizione direttamente dalle trasformazioni omogenee della cinematica diretta in Sezione 1.1:

- p' si ricava dalla quarta colonna della matrice $A_{2'}^O$
- $z_{1'}$ si ricava dalla terza colonna della matrice $A_{1'}^O$;
- p'' si ricava dalla quarta colonna della matrice $A_{2''}^O$
- $p_{0''}$ si ricava dalla quarta colonna della matrice $A_{0''}^O$
- $z_{0''}$ si ricava dalla terza colonna della matrice $A_{0''}^O$;
- $z_{1''}$ si ricava dalla terza colonna della matrice $A_{1''}^O$;
- p''' si ricava dalla quarta colonna della matrice $A_{2'''}^O$
- $p_{0'''}$ si ricava dalla quarta colonna della matrice $A_{0'''}^O$
- $z_{0'''}$ si ricava dalla terza colonna della matrice $A_{0'''}^O$;
- $z_{1'''}$ si ricava dalla terza colonna della matrice $A_{1'''}^O$;

I vari vettori risultano :

$$\begin{aligned} p' &= \begin{bmatrix} S_{\theta_1} q_1 \\ -C_{\theta_1} q_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad p_{0'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ z_{0'} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad z_{1'} = \begin{bmatrix} S_{\theta_1} \\ -C_{\theta_1} \\ 0 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$p'' = \begin{bmatrix} L + S_{\theta_2} q_2 \\ -C_{\theta_2} q_2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad p_0'' = \begin{bmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$z_0'' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad z_1'' = \begin{bmatrix} S_{\theta_2} \\ -C_{\theta_2} \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$p''' = \begin{bmatrix} \frac{L}{2} + \frac{q_3}{2}(S_{\theta_3} + \sqrt{3}C_{\theta_3}) \\ \frac{L\sqrt{3}}{2} + \frac{q_3}{2}(-C_{\theta_3} + \sqrt{3}S_{\theta_3}) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad p_0''' = \begin{bmatrix} \frac{L}{2} \\ \frac{L\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$z_0''' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad z_1''' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(S_{\theta_3} + \sqrt{3}C_{\theta_3}) \\ \frac{1}{2}(-C_{\theta_3} + \sqrt{3}S_{\theta_3}) \\ 0 \end{bmatrix};$$

Sostituendo i vettori in $J'(q)$, $J''(q)$, $J'''(q)$ si ottiene :

$$J'(q) = \begin{bmatrix} C_{\theta_1} q_1 & S_{\theta_1} \\ S_{\theta_1} q_1 & -C_{\theta_1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J''(q) = \begin{bmatrix} C_{\theta_2} q_2 & S_{\theta_2} \\ S_{\theta_2} q_2 & -C_{\theta_2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J'''(q) = \begin{bmatrix} -(1/2\sqrt{3}S_{\theta_3} - 1/2C_{\theta_3})q_3 & 1/2S_{\theta_3} + 1/2\sqrt{3}C_{\theta_3} \\ (1/2S_{\theta_3} + 1/2\sqrt{3}C_{\theta_3})q_3 & 1/2\sqrt{3}S_{\theta_3} - 1/2C_{\theta_3} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dal calcolo precedente possiamo facilmente ricavare le velocità generalizzate (twist) per le terne di taglio a livello di braccio :

$$\begin{aligned} t'(q) &= J'(q)\dot{q} \\ t''(q) &= J''(q)\dot{q} \\ t'''(q) &= J'''(q)\dot{q} \end{aligned}$$

Usando le relazioni tra i twist dello stesso corpo rigido (riferendoci all'end-effector) otteniamo che :

$$t'(x) = \begin{bmatrix} I & -\hat{p}_{AE}^E \\ 0 & I \end{bmatrix} t_E = B' t_E$$

$$t''(x) = \begin{bmatrix} I & -\hat{p}_{BE}^E \\ 0 & I \end{bmatrix} t_E = B'' t_E$$

$$t'''(x) = \begin{bmatrix} I & -\hat{p}_{CE}^E \\ 0 & I \end{bmatrix} t_E = B''' t_E$$

dove con il generico \hat{p}_{iE}^E con $i = A, B, C$ si intende la matrice antisimmetrica :

$$\hat{p}_{iE}^E = \begin{bmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ottenuta dal vettore} \quad p_{iE}^E = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

Nel nostro caso i vettori sono :

$$p_{AE}^E = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{l\sqrt{3}}{3} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad p_{BE}^E = \begin{bmatrix} \frac{l}{2} \\ \frac{l\sqrt{3}}{6} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad p_{CE}^E = \begin{bmatrix} -\frac{l}{2} \\ \frac{l\sqrt{3}}{6} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nel caso planare gli elementi della velocità generalizzata dell'end-effector t_E diversi da zero sono solamente $\dot{x}_E, \dot{y}_E, \dot{\phi}$. Di conseguenza si possono considerare le B', B'', B''' di dimensioni ridotte. Risulta, quindi :

$$B' = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{l\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right]; \quad B'' = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{l\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 1 & l/2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right]; \quad B''' = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{l\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 1 & -l/2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Anche per gli $J'(q), J''(q), J'''(q)$ possiamo eliminare le righe nulle ottenendo :

$$J'(q) = \begin{bmatrix} C_{\theta_1} q_1 & S_{\theta_1} \\ S_{\theta_1} q_1 & -C_{\theta_1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J''(q) = \begin{bmatrix} C_{\theta_2} q_2 & S_{\theta_2} \\ S_{\theta_2} q_2 & -C_{\theta_2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J'''(q) = \begin{bmatrix} -(1/2 \sqrt{3} S_{\theta_3} - 1/2 C_{\theta_3}) q_3 & 1/2 S_{\theta_3} + 1/2 \sqrt{3} C_{\theta_3} \\ (1/2 S_{\theta_3} + 1/2 \sqrt{3} C_{\theta_3}) q_3 & 1/2 \sqrt{3} S_{\theta_3} - 1/2 C_{\theta_3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Impilando opportunamente le relazioni otteniamo in definitiva :

$$t(q) \triangleq \begin{bmatrix} t'(q) \\ t''(q) \\ t'''(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J'(q) & 0 & 0 \\ 0 & J''(q) & 0 \\ 0 & 0 & J'''(q) \end{bmatrix} \dot{q} \triangleq J(q) \dot{q}$$

$$t(x) \triangleq \begin{bmatrix} t'(x) \\ t''(x) \\ t'''(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B' \\ B'' \\ B''' \end{bmatrix} t_E \triangleq B t_E$$

con :

$$J = \begin{bmatrix} C_{\theta_1} q_1 & S_{\theta_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{\theta_1} q_1 & -C_{\theta_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{\theta_2} q_2 & S_{\theta_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{\theta_2} q_2 & -C_{\theta_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2(\sqrt{3} S_{\theta_3} - C_{\theta_3}) q_3 & 1/2(S_{\theta_3} + \sqrt{3} C_{\theta_3}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2(S_{\theta_3} + \sqrt{3} C_{\theta_3}) q_3 & 1/2(\sqrt{3} S_{\theta_3} - C_{\theta_3}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{l\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -\frac{l\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 1 & l/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -\frac{l\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 1 & -l/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per quanto riguarda l'equilibrio dell'end-effector si ha che il wrench w_E applicato alla terna T_E è bilanciato dalle forze/coppie w_i applicate in $T_i(x)$ attraverso la relazione :

$$w_E = \sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} I & 0 \\ \hat{p}_{iE}^E & I \end{bmatrix} w_i \triangleq \sum_{i=1}^3 G_i w_i = [G_1|G_2|G_3]w \triangleq Gw$$

dove la matrice G è la matrice di Grasp. Per dualità vale la relazione $G^T = B$. I vincoli sui moti relativi delle terne $T_i(x)$ (terne nei punti di taglio sull'end-effector) e $T_i(q)$ (terne nei punti di taglio sui bracci) si riflettono in vincoli cinematici imponendo l'uguaglianza delle opportune componenti delle velocità generalizzate. Le direzioni di moto vincolate sono rappresentabili attraverso matrici di vincolo H_i tali che il $\mathcal{N}(H_i) = \mathcal{R}(F_i)$ dove F_i è la matrice la cui immagine coincide col sottospazio delle velocità generalizzate permesse dal vincolo i -esimo. Nel nostro caso le matrici F_i sono pari a $F_i = [0 \ 0 \ 1]^T$ vale a dire che non sono possibili moti di traslazione lungo x ed y ma solamente moti di rotazione intorno all'asse z . Scegliamo H_i in modo che le sue righe siano ortonormali: $H_i^T = \text{orth}(\text{null}(F_i^T))$ ed otteniamo :

$$F_1 = F_2 = F_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad H_1 = H_2 = H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

In definitiva, i vincoli in velocità sono scritti nella forma $t_i(q) - t_i(x) \in \mathcal{R}(F_i)$ o in maniera equivalente $t_i(q) - t_i(x) \in \mathcal{N}(H_i)$. Questo ci permette di scrivere che $H_i(J_i \dot{q} - G_i^T t_E) = 0$ e riscrivendo la relazione per tutti i vincoli otteniamo :

$$\begin{bmatrix} HJ & -HG^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ t_E \end{bmatrix} = 0$$

È possibile scomporre lo Jacobiano in due parti tramite le matrici S_{as} e $S_{\bar{as}}$ ridotte (non si considerano i γ_i a causa del taglio): la prima parte, J_{as} , relativa ai giunti attuati e sensorizzati (q_1, q_2, q_3) e la seconda, $J_{\bar{as}}$, ai giunti non attuati e non sensorizzati ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$).

$$\begin{bmatrix} J_{as} & J_{\bar{as}} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} S_{as} \\ S_{\bar{as}} \end{bmatrix}^{-1}$$

con :

$$S_{as} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad S_{\bar{as}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 J_{as} &= \begin{bmatrix} S_{\theta_1} & 0 & 0 \\ -C_{\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{\theta_2} & 0 \\ 0 & -C_{\theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2(S_{\theta_3} + \sqrt{3}C_{\theta_3}) \\ 0 & 0 & 1/2(\sqrt{3}S_{\theta_3} - C_{\theta_3}) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 J_{\bar{as}} &= \begin{bmatrix} C_{\theta_1}q_1 & 0 & 0 \\ S_{\theta_1}q_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_{\theta_2}q_2 & 0 \\ 0 & S_{\theta_2}q_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2(\sqrt{3}S_{\theta_3} - C_{\theta_3})q_3 \\ 0 & 0 & 1/2(S_{\theta_3} + \sqrt{3}C_{\theta_3})q_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

La matrice $A \in \mathbb{R}^{6 \times 9}$ dei vincoli vale :

$$A \begin{bmatrix} \dot{q}_{as} \\ \dot{q}_{\bar{as}} \\ t_E \end{bmatrix} = [HJ_{as} \quad HJ_{\bar{as}} \quad -HG^T] \begin{bmatrix} \dot{q}_{as} \\ \dot{q}_{\bar{as}} \\ t_E \end{bmatrix} = 0 \iff \begin{bmatrix} \dot{q}_{as} \\ \dot{q}_{\bar{as}} \\ t_E \end{bmatrix} = \mathcal{N}(A)\lambda$$

dove λ si definiscono *gradi di libert * e le matrici HJ_{as} , $HJ_{\bar{as}}$, $-HG^T \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$. Scegliendo opportunamente una base del $\mathcal{N}(A)$ in modo da evidenziare le velocit  attuate sui giunti attivi si ottiene :

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_{as} \\ \dot{q}_{\bar{as}} \\ t_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{as} \\ N_{\bar{as}} \\ N_E \end{bmatrix} \lambda \tag{1.5}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline N_{\bar{as}} \\ \hline N_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

Dall'Equazione 1.6 si nota che il valore dei λ_i è pari a : $\lambda_1 = \dot{q}_1$, $\lambda_2 = \dot{q}_2$, $\lambda_3 = \dot{q}_3$. Da quest'ultima osservazione la relazione $t_E = N_E \lambda$ è proprio la cinematica differenziale diretta dove N_E è lo Jacobiano geometrico del manipolatore in catena chiusa. Risulta quindi :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = N_E \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = N_E \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

Da un'analisi dettagliata anche sulle matrici $[HJ_{as}]$, $[HJ_{\bar{as}}]$, $[HG^T]$ si nota che $[HJ_{as}]$ ha un nullo di dimensioni pari a zero : significa che non si avranno moti dei giunti attuati che lasciano fermo l'end-effector (non esiste ridondanza dei giunti attuati). Per $[HJ_{\bar{as}}]$ si ottiene un nullo di dimensioni diverse da zero (esiste una ridondanza dei giunti non attuati) se almeno una delle variabili di giunto prismatico è nulla vale a dire una delle $q_i = 0$ (il fatto che possa assumere valore nullo dipende dalla scelta di considerare il braccio a monte dei giunti prismatici di lunghezza nulla, giunto rotoidale e prismatico sovrapposti). Se questo avviene, infatti, i due giunti rotoidali sono sovrapposti e se hanno moto in direzione opposta l'end-effector rimane fermo. Per l'ultima matrice $[HG^T]$, si ottiene un nullo di dimensione zero : non si avranno moti liberi dell'end-effector con i giunti, attuati e non, bloccati. Per i calcoli dettagliati esposti nel presente capitolo vedere l'Appendice A.

Capitolo 2

Tavola II

2.1 Cinematica inversa

La risoluzione del problema cinematico inverso consiste nel trovare, data la postura dell'end-effector, la configurazione dei giunti attuati e non attuati. Questa operazione, generalmente, non presenta grosse difficoltà. Per il manipolatore in esame sia $\{O\}_{xyz}$ la terna solidale alla base e $\{E\}_{xyz}$ la terna solidale all'end-effector, la trasformazione che lega $\{E\}_{xyz}$ ad $\{O\}_{xyz}$ sarà $T_E^O(x, y, \phi)$ dove x ed y individuano la posizione del centro dell'end-effector mentre ϕ rappresenta l'angolo di yaw che ne individua l'orientazione.

Definiamo inoltre:

- x_i : coordinate dell'end-effector nello spazio di lavoro;
- q_i : lunghezza dell' i -esima gamba;
- θ_B^i : angolo del giunto rotoidale sulla base dell' i -esima gamba;
- γ_E^i : angolo del giunto rotoidale sull'end-effector dell' i -esima gamba;

Si vuole quindi determinare il valore di q_i , θ_B^i , γ_E^i (con $i = 1 \dots 3$) data la postura dell'end-effector (ovvero il vettore $\underline{\mathbf{X}} = [x \ y \ \phi]^T$). Osservando la geometria del manipolatore possiamo ricavare facilmente la coordinata del punto di attacco della gamba i -esima all'end-effector espressa nella base $\{E\}$ (cioè V_i^E) e la coordinata del punto di attacco della gamba i -esima alla base espressa nella base $\{O\}$. Al fine di portare V_i in base $\{O\}$ basterà premoltiplicare V_i^E per $T_E^O(x, y, \phi)$. La lunghezza dell' i -esima gamba q_i quindi può essere calcolata come la norma del vettore $G_i^O = V_i^O - B_i^O$.

$$q_i = \|V_i^O - B_i^O\|$$
$$\theta_B^i = \arctan\left(\frac{G_{iY}^O}{G_{iX}^O}\right)$$

Posto inoltre $G_i^E = T_O^E G_i^O$ otteniamo:

$$\gamma_E^i = \arctan \left(\frac{G_{iY}^E}{G_{iX}^E} \right)$$

Effettuando questa procedura per ciascuna gamba otteniamo la cinematica diretta in forma chiusa esprimibile nella forma:

$$q_i = f_i(\underline{x})\theta_i^B = h_i(\underline{x})\gamma_i^E = m_i(\underline{x})$$

Definendo il vettore delle variabili non attuate

$$\underline{\xi} = [\theta_i^B \ \gamma_i^E]$$

ed il vettore delle variabili dei giunti attuati,

$$\underline{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3]$$

possiamo riscrivere il precedente sistema come

$$\begin{cases} \underline{q} = f(\underline{x}) \\ \underline{\xi} = g(\underline{x}) \end{cases}$$

e formalizzando in termini di vincoli otteniamo:

$$\begin{cases} \underline{q} - f(\underline{x}) = 0 \longrightarrow C_1(\underline{x}, \underline{q}) = 0 \\ \underline{\xi} - g(\underline{x}) = 0 \longrightarrow C_2(\underline{x}, \underline{q}) = 0 \end{cases} \longrightarrow C(\underline{x}, \underline{q}) = 0$$

Molto più complicato è il problema del passaggio dalla configurazione dello spazio dei giunti alla posizione dell'end-effector. La difficoltà sta nell'invertire il sistema di equazioni non lineari

$$\begin{cases} \underline{q} = f(\underline{x}) \\ \underline{\xi} = g(\underline{x}) \end{cases}$$

Tuttavia (solitamente) nella pratica si hanno a disposizione solamente le misure dei giunti attuati, quindi la funzione cercata risulta essere:

$$\underline{x} = f^{-1}(\underline{q})$$

Questa inversione comporta principalmente difficoltà nell'invertire in maniera simbolica un sistema di equazioni non lineari oltre alla possibile esistenza di soluzioni multiple. Di seguito vengono riportati i risultati ottenuti per il calcolo delle q_i ,

delle θ_i e delle γ_i in funzione di \underline{X} . Per seguire i passaggi utilizzati per ottenere queste equazioni si rimanda all'Appendice B.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} \sqrt{(x_E + 1/3 S_\phi l \sqrt{3})^2 + (y_E - 1/3 C_\phi l \sqrt{3})^2} \\ \sqrt{(x_E + 1/2 C_\phi l - 1/6 S_\phi l \sqrt{3} - L)^2 + (y_E + 1/2 S_\phi l + 1/6 C_\phi l \sqrt{3})^2} \\ \sqrt{(x_E - 1/2 C_\phi l - 1/6 S_\phi l \sqrt{3} - 1/2 L)^2 + (y_E - 1/2 S_\phi l + 1/6 C_\phi l \sqrt{3} - 1/2 L \sqrt{3})^2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \arctan\left(\frac{3 y_E - C_\phi l \sqrt{3}}{3 x_E + S_\phi l \sqrt{3}}\right) \\ \arctan\left(\frac{-6 y_E - 3 S_\phi l - C_\phi l \sqrt{3}}{-6 x_E - 3 C_\phi l + S_\phi l \sqrt{3} + 6 L}\right) \\ \arctan\left(\frac{-6 y_E + 3 S_\phi l - C_\phi l \sqrt{3} + 3 L \sqrt{3}}{-6 x_E + 3 C_\phi l + S_\phi l \sqrt{3} + 3 L}\right) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \arctan\left(\frac{3 x_E S_\phi - l \sqrt{3} C_{2\phi} + 3 y_E C_\phi + 3 y_E}{3 x_E C_\phi + l \sqrt{3} S_{2\phi} - 3 S_\phi y_E + 3 x_E}\right) \\ \arctan\left(\frac{-6 x_E S_\phi - 3 l S_{2\phi} - l \sqrt{3} C_{2\phi} + 6 S_\phi L - 6 y_E C_\phi - 6 y_E}{-6 x_E C_\phi - 3 l C_{2\phi} + l \sqrt{3} S_{2\phi} + 6 C_\phi L + 6 S_\phi y_E - 6 x_E}\right) \\ \arctan\left(\frac{6 x_E S_\phi - 3 l S_{2\phi} + l \sqrt{3} C_{2\phi} - 3 S_\phi L + 6 y_E C_\phi - 3 C_\phi L \sqrt{3} + 6 y_E}{6 x_E C_\phi - 3 l C_{2\phi} - l \sqrt{3} S_{2\phi} - 3 C_\phi L - 6 S_\phi y_E + 3 S_\phi L \sqrt{3} + 6 x_E}\right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il calcolo dello Jacobiano inverso, in questo caso, si ricava direttamente dalla cinematica inversa derivando la relazione $q = f(x)$. Si ottiene lo Jacobiano inverso analitico come l'insieme di tutte le derivate parziali prime di $f(x)$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_E} \dot{x}_E & \frac{\partial f_1(x)}{\partial y_E} \dot{y}_E & \frac{\partial f_1(x)}{\partial \phi} \dot{\phi} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_E} \dot{x}_E & \frac{\partial f_2(x)}{\partial y_E} \dot{y}_E & \frac{\partial f_2(x)}{\partial \phi} \dot{\phi} \\ \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_E} \dot{x}_E & \frac{\partial f_3(x)}{\partial y_E} \dot{y}_E & \frac{\partial f_3(x)}{\partial \phi} \dot{\phi} \end{bmatrix} = J_A \begin{bmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \\ J_A &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_E} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial y_E} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial \phi} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_E} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial y_E} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial \phi} \\ \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_E} & \frac{\partial f_3(x)}{\partial y_E} & \frac{\partial f_3(x)}{\partial \phi} \end{bmatrix} \quad (2.1) \end{aligned}$$

2.2 Analisi delle singolarità

Per l'analisi delle singolarità del manipolatore è necessario calcolare per quali valori lo Jacobiano N_E dell'Equazione 1.6 perde di rango. Il problema non è facilmente risolvibile per via simbolica data la complessità del determinante. Per questo motivo possono essere utilizzati i classici algoritmi numerici iterativi per il calcolo delle radici di una funzione. Ad esempio può essere utilizzato il metodo di Newton (o delle Tangenti), Newton-Raphson, Newton-Jacobi etc.. Questi algoritmi non garantiscono la convergenza ad una radice di una funzione assegnato un intervallo di ricerca ma possono ricadere in minimi locali. Quindi è opportuno variare di volta in volta l'intervallo di ricerca e assicurarsi che la soluzione ottenuta sia fisicamente plausibile. Con l'ausilio di Matlab, ad esempio, è possibile utilizzare la funzione $fsolve(\dots, \dots)$ che sfrutta questi metodi iterativi per ricercare radici di una funzione. Il metodo è molto dispendioso, in termini di tempo, visto che va modificato l'intervallo di ricerca più volte e per ogni soluzione va verificata la fisica realizzabilità. Per tutte le ragioni citate sopra è più semplice valutare le singolarità analizzandole dallo Jacobiano inverso funzione della posizione dell'end-effector x_E e non delle variabili di giunto (Equazione 2.1). Dato che $N_E(q) = J^{-1}(x)|_{x=\Lambda^{-1}(q)}$ con $q = \Lambda(x)$, le singolarità dello Jacobiano inverso coincidono con le singolarità dello Jacobiano diretto. Ottenuto il determinante dello Jacobiano inverso si passa ad analizzare quando esso si annulla rispetto alle variabili ϕ , x_E e y_E . Il valore del determinante risulta essere nullo per valori $\phi_1 = -\frac{\pi}{3}$ e $\phi_2 = \frac{2\pi}{3}$ indipendentemente dalla posizione dell'end-effector x_E e y_E . Fissando invece il valore di ϕ , e risolvendo rispetto ad y_E si trovano due valori $y_1(x_E)$ e $y_2(x_E)$ (si ottengono gli stessi valori se risolto rispetto a x_E quindi $x_1(y_E) = y_1(x_E)$ e $x_2(y_E) = y_2(x_E)$) in corrispondenza dei quali il determinante si annulla. Si ottiene quindi :

$$\begin{cases} y_1(x_E) = \frac{1}{6} L \sqrt{3} + \frac{1}{6} \sqrt{3 L^2 + 12 S_\phi l \sqrt{3} L + 36 x_E L + 12 l^2 - 12 C_\phi l L - 36 x_E^2} \\ y_2(x_E) = \frac{1}{6} L \sqrt{3} - \frac{1}{6} \sqrt{3 L^2 + 12 S_\phi l \sqrt{3} L + 36 x_E L + 12 l^2 - 12 C_\phi l L - 36 x_E^2} \end{cases}$$

Ad esempio, per $\phi = 0$ e $\phi = -\frac{\pi}{6}$, plottando $y_1(x_E)$ e $y_2(x_E)$ (solo per valori di $y_1(x_E), y_2(x_E) \in \mathbb{R}$) assegnando un insieme di valori ad x_E si ottiene il luogo geometrico in Figura 2.1. Dalla Figura 2.2 si nota come il luogo geometrico delle singolarità si modifica al variare di ϕ .

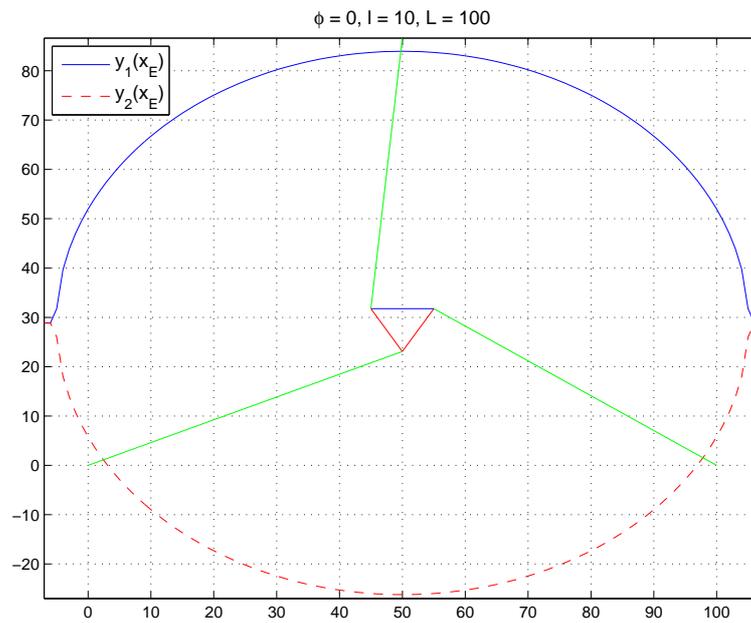


Figura 2.1: Luogo geometrico delle singolarità x_E e y_E con $\phi = 0$, $l = 10$, $L = 100$

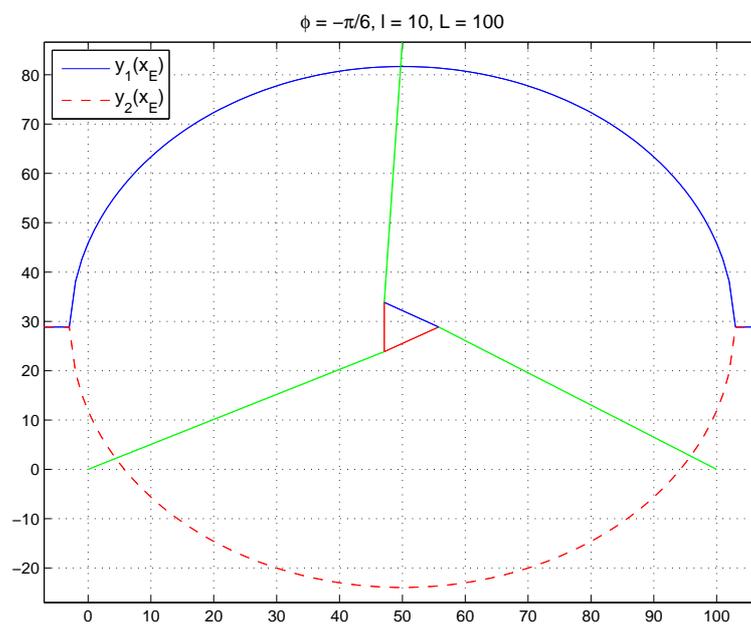


Figura 2.2: Luogo geometrico delle singolarità x_E e y_E con $\phi = -\frac{\pi}{6}$, $l = 10$, $L = 100$

2.3 Algoritmi di inversione della cinematica

La cinematica diretta, nel caso di un manipolatore parallelo, può essere ottenuta invertendo e poi integrando la cinematica differenziale inversa. Quindi dalla relazione della cinematica inversa $q = f(x)$ si ricava la cinematica differenziale inversa semplicemente facendone la derivata temporale, ricavando lo Jacobiano analitico J_A . La relazione che lega le velocità dell'end-effector a quelle dei giunti sarà $\dot{q} = J_A v$. La cinematica diretta differenziale deriva da quella inversa semplicemente effettuando l'inversione $v = J_A^{-1} \dot{q}$. Integrando quest'ultima relazione si ricava la cinematica diretta :

$$x(t) = \int_0^t v(\xi) + x(0)$$

L'integrazione può essere effettuata a tempo discreto ricorrendo a metodi numerici. Il metodo più semplice è basato sulla regola di integrazione di Eulero; fissato un intervallo di integrazione Δt e note posizioni e velocità dell'end-effector all'istante di tempo t_k , la posizione dell'end-effector all'istante $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ sono calcolate come :

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + v(t_k)\Delta t = x(t_k) + J_A^{-1} \dot{q}(t_k)\Delta t$$

Ne consegue che le x calcolate non coincidono con quelle che soddisfano la risoluzione nel tempo continuo. Pertanto la ricostruzione delle variabili dell'end-effector x è affidato ad un'operazione di integrazione numerica che comporta fenomeni di deriva della soluzione. Per evitare questi fenomeni di deriva causati dall'integrazione numerica, si ricorre ad algoritmi in catena chiusa; dato che il nostro manipolatore non è ridondante gli unici algoritmi che andremo ad analizzare sono :

- Inversa dello Jacobiano
- Inversa smorzata dello Jacobiano
- Trasposta dello Jacobiano

Al fine di confrontare tra di loro le performance degli algoritmi se ne analizza il comportamento in corrispondenza di quattro riferimenti diversi :

- **Test 1** : riferimento costante $x_{Ed} = 70$, $y_{Ed} = 40$, $\phi_d = -\frac{\pi}{6}$, $K = \text{diag}\{1, 1, 1\}$, $k = 1$;
- **Test 2** : riferimento variabile $x_{Ed} = 10\sin(t)$, $y_{Ed} = 10(1 - \cos(t))$, $\phi_d = 0.5\sin\left(\frac{\pi}{24}t\right)$, variando K , $k = 1$;

- **Test 3** : $(x_{Ed} = x_0, y_{Ed} = y_0)$ e $(x_{Ed} = x_0 + 20, y_{Ed} = y_0 + 20)$ con $\phi_d = -1.2 \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$, $K = \text{diag}\{20, 20, 20\}$, $k = 1$;

con K guadagno di anello, k fattore di smorzamento dello Jacobiano smorzato, $x_0 = L/2 = 50$ condizione iniziale su x_E , $y_0 = L/(2\sqrt{3}) \approx 28.8675$ condizione iniziale su y_E e $L = 50$.

2.4 Test 1

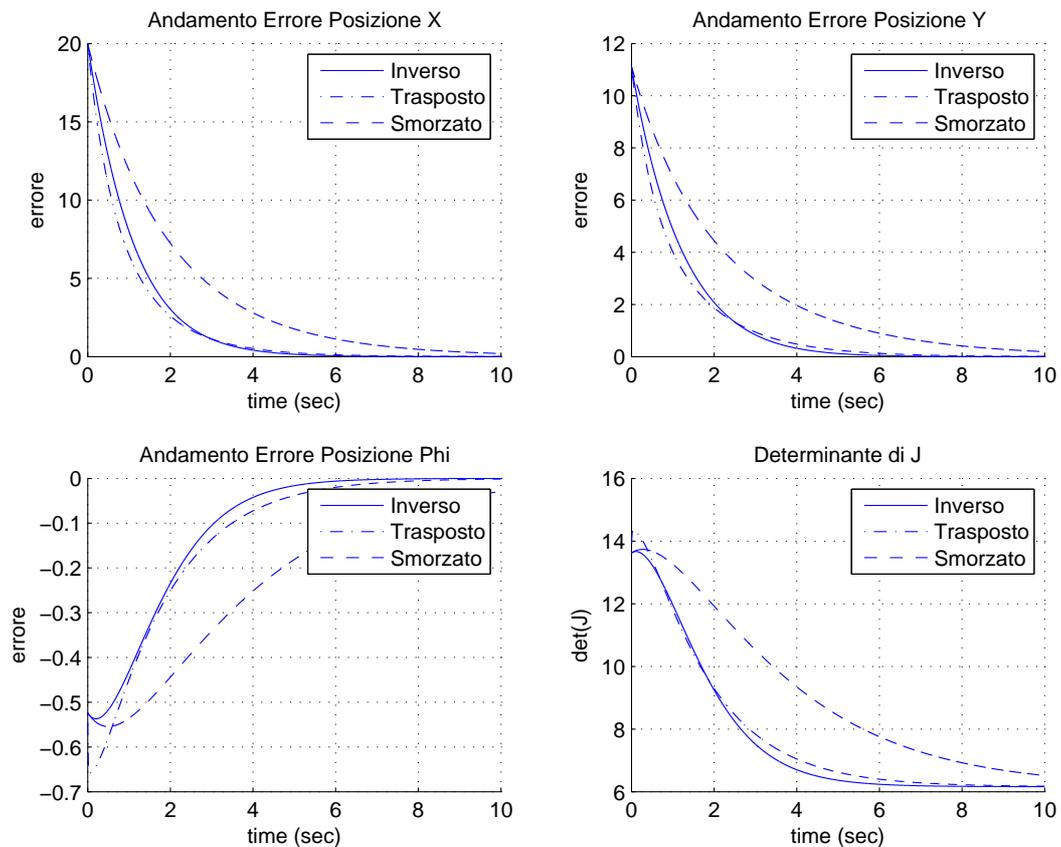


Figura 2.3: Errore posizione E.E. ed andamento del $\det(J)$

In Figura 2.3 si può notare una prima differenza tra i tre diversi algoritmi che sta nella velocità con cui l'errore tende asintoticamente a zero. In particolare si evidenzia che con l'algoritmo che sfrutta l'inversione dello Jacobiano si raggiungono prestazioni migliori rispetto agli altri due algoritmi. L'algoritmo più lento risulta essere quello dell'inversa smorzata. Inoltre, sempre dalla Figura 2.3, si nota come

$\det(J)$ non si annulli durante il percorso; questo significa che il manipolatore non viene a trovarsi in condizioni di singolarità.

2.5 Test 2

Da questo test risulta evidente come all'aumentare del K le performance dei tre algoritmi migliorino notevolmente. Notiamo, inoltre, come il metodo dell'inversa ottenga, già con $K = 1$, delle buone prestazioni (vedi Figura 2.4) a differenza delle altre due (vedi Figura 2.5 e Figura 2.6). Tuttavia il guadagno K non può essere aumentato a piacere poichè comporterebbe instabilità (in particolare della trasposta). Come per il primo test, il $\det(J)$ non si annulla durante il percorso (non si passa dalla singolarità).

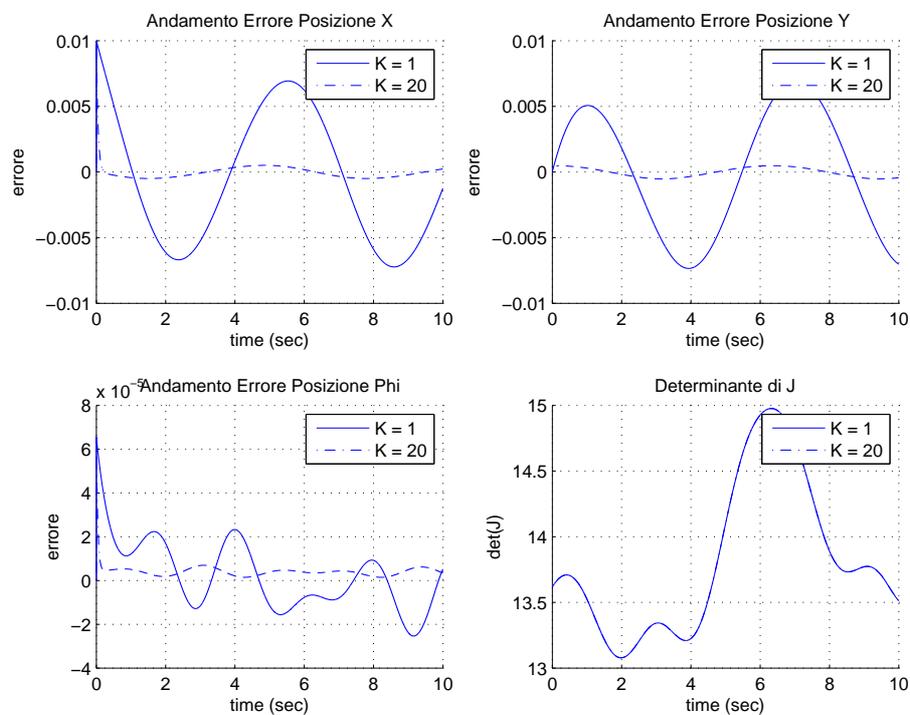


Figura 2.4: Errore posizione E.E. ed andamento del $\det(J)$ per $K = 1$ e $K = 20$ (J inverso)

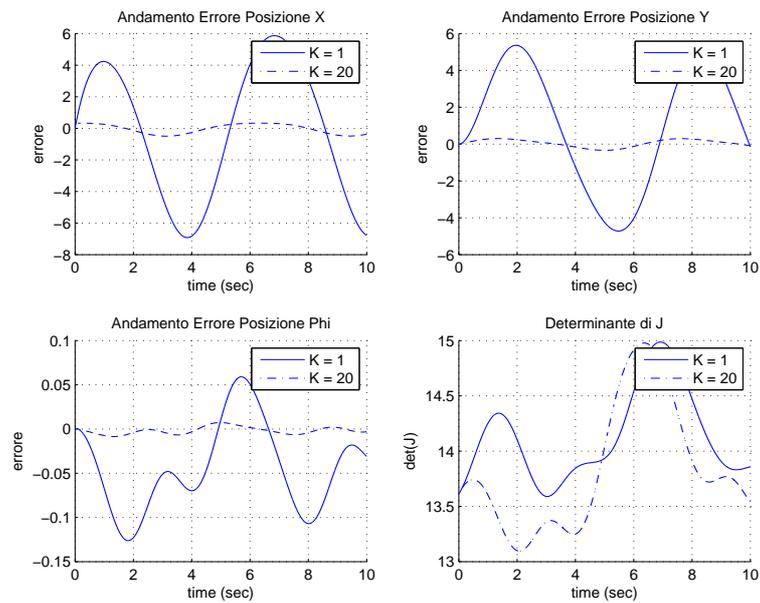


Figura 2.5: Errore posizione E.E. ed andamento del $\det(J)$ per $K = 1$ e $K = 20$ (J trasposto)

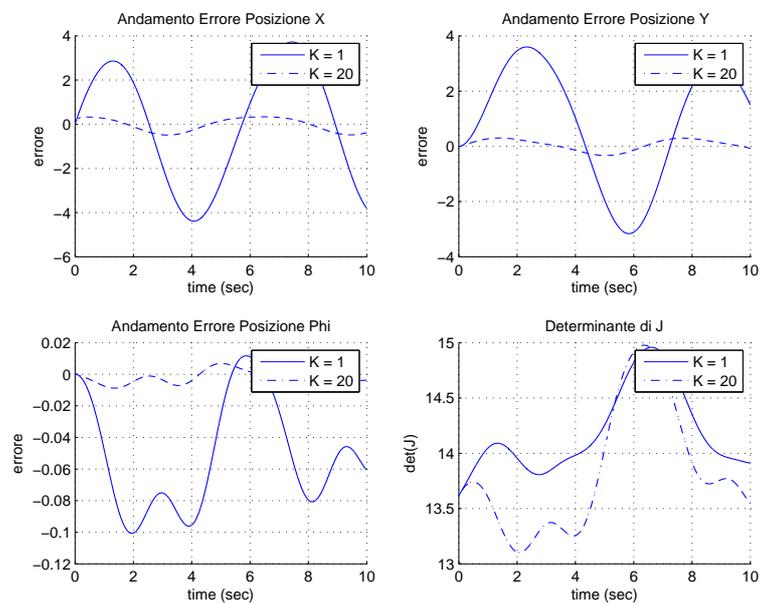
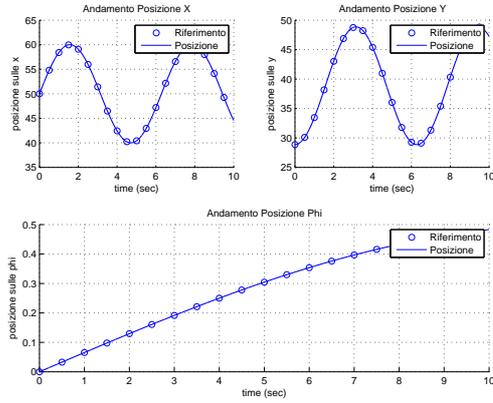
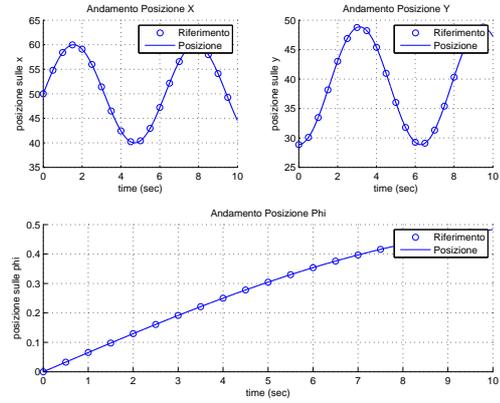


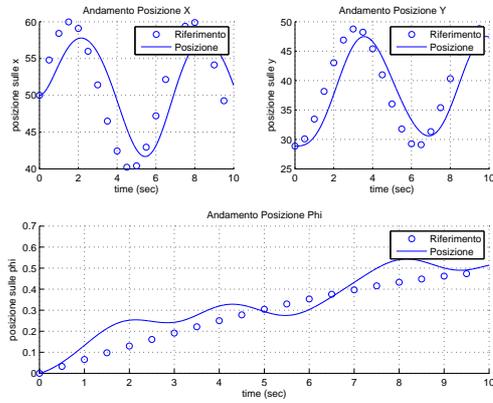
Figura 2.6: Errore posizione E.E. ed andamento del $\det(J)$ per $K = 1$ e $K = 20$ (J inv. smorzato)



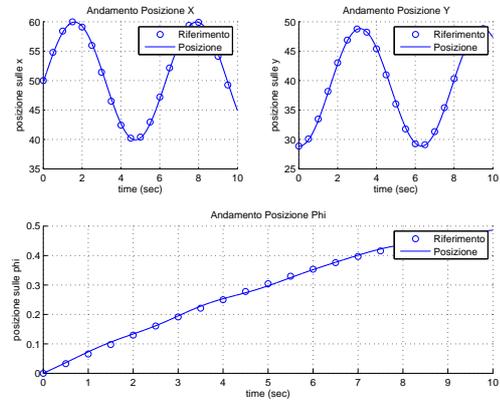
(a) J inverso, $K = 1$



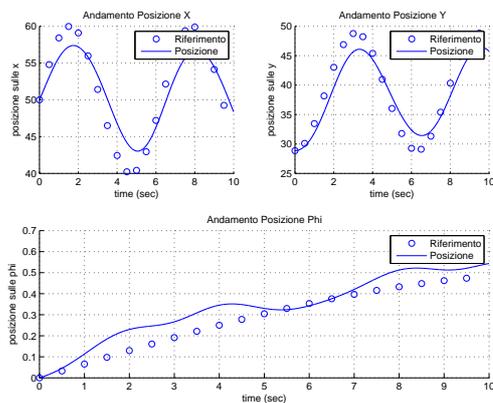
(b) J inverso, $K = 20$



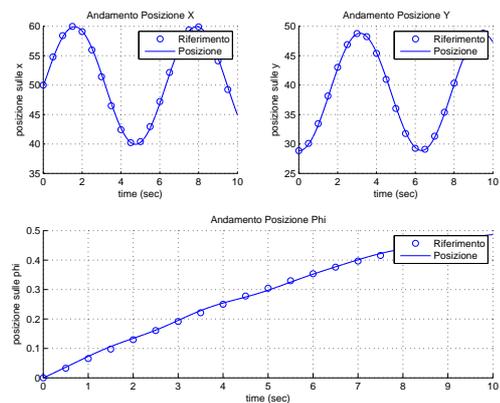
(c) J trasposto, $K = 1$



(d) J trasposto, $K = 20$



(e) J smorzato, $K = 1$

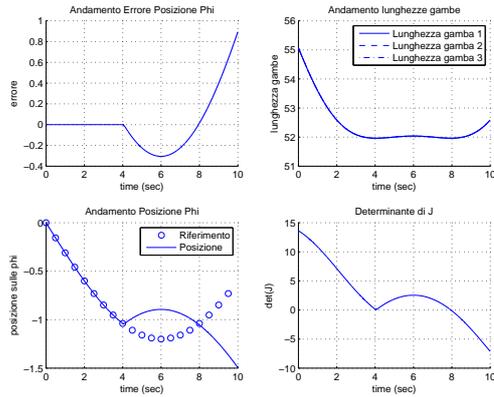


(f) J smorzato, $K = 20$

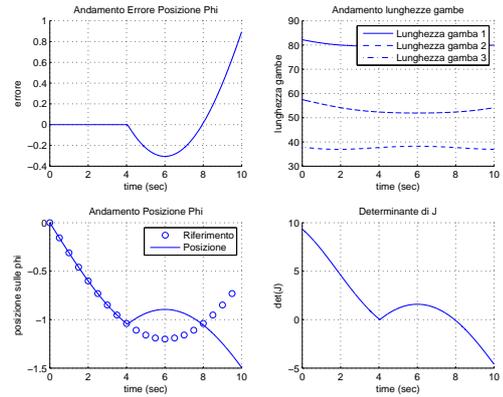
Figura 2.7: Posizione e riferimento E.E.

2.6 Test 3

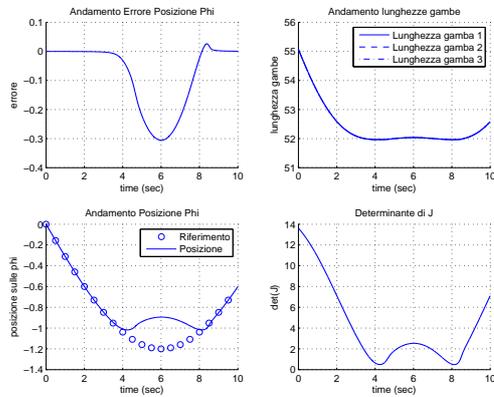
Con questo test si è voluto mettere in evidenza il comportamento in presenza di singolarità (si analizza quella a $\phi = -\frac{\pi}{3}$) dei tre algoritmi. Nel caso dello Jacobiano inverso, si può vedere dalle Figure 2.8(a) e 2.8(b), come la posizione dell'E.E. non influenzi il comportamento in singolarità. Questo è dovuto al problema dell'inversione di una matrice con determinante nullo. Diverso è il comportamento degli altri due algoritmi in quanto per $(x_{Ed} = x_0, y_{Ed} = y_0)$ migliora il comportamento in singolarità ma non riescono ad ovviare al problema delle soluzioni multiple (vedi Figure 2.8(c) e 2.8(e), orientazione ϕ). Infatti per $t \approx 4\text{sec.}$ (in cui vi è singolarità) si nota che la lunghezza delle gambe rimane invariata per un opportuno intorno della singolarità (vedi Figure 2.8(c) e 2.8(e), lunghezza gambe). Al contrario, spostando l'E.E. in posizione $x_{Ed} = x_0 + 20, y_{Ed} = y_0 + 20$, il problema delle soluzioni multiple non è presente quindi la singolarità viene attraversata senza problemi (vedi Figure 2.8(d) e 2.8(f), orientazione ϕ).



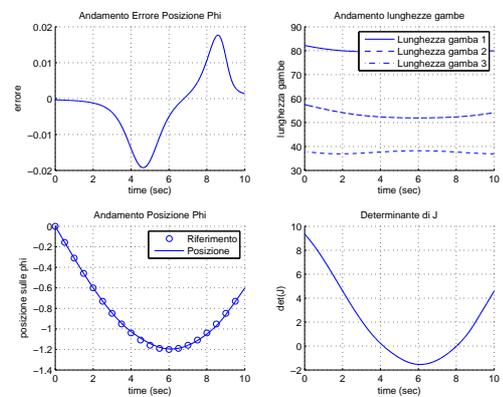
(a) J inverso ($x_{Ed} = x_0, y_{Ed} = y_0$), $K = 20$



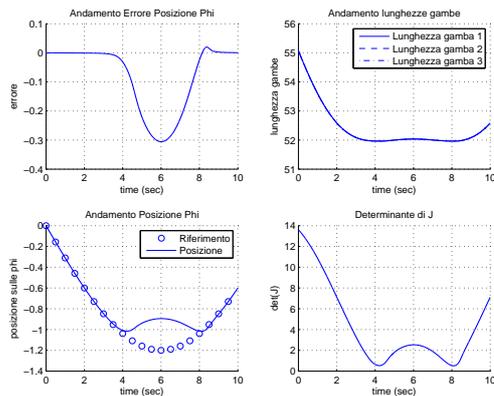
(b) J inverso ($x_{Ed} = x_0 + 20, y_{Ed} = y_0 + 20$), $K = 20$



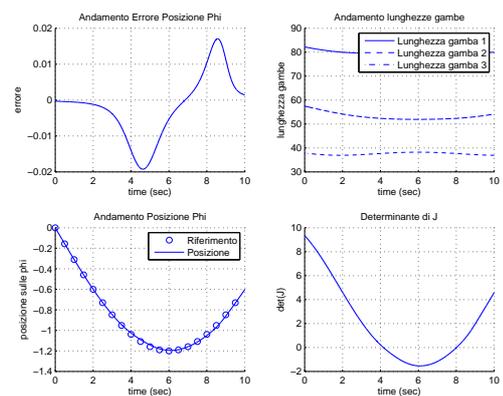
(c) J trasposto ($x_{Ed} = x_0, y_{Ed} = y_0$), $K = 20$



(d) J trasposto ($x_{Ed} = x_0 + 20, y_{Ed} = y_0 + 20$), $K = 20$



(e) J smorzato ($x_{Ed} = x_0, y_{Ed} = y_0$), $K = 20$



(f) J smorzato ($x_{Ed} = x_0 + 20, y_{Ed} = y_0 + 20$), $K = 20$

Figura 2.8: Comportamento in singolarità

Capitolo 3

Tavola III

3.1 Dinamica

La dinamica del manipolatore può essere ricavata utilizzando la formulazione di *Lagrange*. Come nel caso della cinematica diretta (vedi Sezione 1.1) sono stati effettuati i tre tagli a livello dei giunti rotoidali γ_1 , γ_2 e γ_3 (Figura 1) in modo da studiare la dinamica delle tre gambe e dell'end-effector separatamente. La dinamica di ogni singola gamba viene risolta utilizzando il modello dinamico dei manipolatori seriali partendo dalla lagrangiana del sistema meccanico definita come :

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U} \quad (3.1)$$

dove \mathcal{T} e \mathcal{U} sono rispettivamente l'energia cinetica e l'energia potenziale totale del sistema. Dalla 3.1, calcolando l'equazione di *Lagrange* (vedi riferimento [1]) si arriva al modello dinamico nello spazio dei giunti :

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + F_s \operatorname{sgn}(\dot{q}) + g(q) = \tau - J^T(q)h \quad (3.2)$$

$$q = [\theta_1 \quad q_1 \quad \theta_2 \quad q_2 \quad \theta_3 \quad q_3]^T$$

dove il termine τ rappresenta le *coppie di attuazione*, $F_v\dot{q}$ ed $F_s \operatorname{sgn}(\dot{q})$ sono rispettivamente le coppie di *attrito viscoso* e le coppie di *attrito statico coulombiano*, $J^T(q)h$ sono le coppie ai giunti indotte dalle forze di contatto, dove h è il vettore di forze e momento esercitati dall'organo terminale del manipolatore sull'ambiente, $g(q)$ è il termine gravitazionale, $B(q)$ è la matrice di inerzia, $C(q, \dot{q})$ viene chiamata matrice di *Coriolis* ed il termine $C(q, \dot{q})\dot{q}$ tiene conto dei termini di Coriolis e

della forza centrifuga nella 3.2. Le matrici dell'Equazione 3.2 si calcolano come di seguito :

$$B(q) = \sum_{i=1}^n \left(m_{l_i} J_P^{(l_i)T} J_P^{(l_i)} + J_O^{(l_i)T} R_i I_{l_i}^i R_i^T J_O^{(l_i)} + m_{m_i} J_P^{(m_i)T} J_P^{(m_i)} + J_O^{(m_i)T} R_{m_i} I_{m_i}^{m_i} R_{m_i}^T J_O^{(m_i)} \right)$$

$$J_P^{(l_i)} = \begin{bmatrix} \dot{j}_{P1}^{(l_i)} & \dots & \dot{j}_{Pi}^{(l_i)} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_O^{(l_i)} = \begin{bmatrix} \dot{j}_{O1}^{(l_i)} & \dots & \dot{j}_{Oi}^{(l_i)} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{j}_{P_j}^{(l_i)} \\ \dot{j}_{O_j}^{(l_i)} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} z_{j-1} \\ z_{j-1} \times (p_{l_i} - p_{j-1}) \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{per un giunto } \textit{prismatico} \\ \text{per un giunto } \textit{rotoidale} \\ \text{per un giunto } \textit{prismatico} \end{array} \\ \begin{bmatrix} z_{j-1} \end{bmatrix} & \text{per un giunto } \textit{rotoidale} \end{cases}$$

$$J_P^{(m_i)} = \begin{bmatrix} \dot{j}_{P1}^{(m_i)} & \dots & \dot{j}_{P,i-1}^{(m_i)} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_O^{(m_i)} = \begin{bmatrix} \dot{j}_{O1}^{(m_i)} & \dots & \dot{j}_{O,i-1}^{(m_i)} & \dot{j}_{Oi}^{(m_i)} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{j}_{P_j}^{(m_i)} \\ \dot{j}_{O_j}^{(m_i)} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} z_{j-1} \\ z_{j-1} \times (p_{m_i} - p_{j-1}) \\ \dot{j}_{O_j}^{(l_i)} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{per un giunto } \textit{prismatico} \\ \text{per un giunto } \textit{rotoidale} \\ j = 1, \dots, i-1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} k_{ri} z_{mi} \end{bmatrix} & j = i \end{cases}$$

La matrice $C(q, \dot{q})$ è una matrice $(n \times n)$ tale che i suoi elementi c_{ij} soddisfano la relazione :

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_{ijk} \dot{q}_k \dot{q}_j \quad (3.3)$$

Un'opportuna scelta della matrice $C(q, \dot{q})$, che soddisfa la 3.3, è quella di prendere ogni elemento come :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{ijk} \dot{q}_k \quad (3.4)$$

dove i coefficienti

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right), \quad c_{ijk} = c_{ikj}$$

prendono il nome di *simboli di Christoffel del primo tipo*. Per ulteriori approfondimenti si rimanda a [1].

Ipotesi semplificative

Nel caso in esame si trascurano i termini di *attrito viscoso* e *statico*. Il termine potenziale non agisce dato che il manipolatore viene considerato posto su un piano orizzontale. Il termine $J^T(q)h$ (forze esterne) non viene preso in considerazione in questo caso. Inoltre le masse e le inerzie dei motori vengono trascurate perchè si assume che i motori siano montati sul telaio di base. Questo porta ad una trattazione ridotta del problema utilizzando una formula del modello dinamico data da :

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = \tau \quad (3.5)$$

con

$$B(q) = \sum_{i=1}^n \left(m_i J_P^{(i)T} J_P^{(i)} + J_O^{(i)T} R_i I_i^i R_i^T J_O^{(i)} \right)$$

Nell'Equazione 3.5 viene considerata solo la dinamica delle gambe non tenendo conto del vincolo che le lega all'end-effector il quale verrà inserito successivamente. Di seguito si procede al calcolo della dinamica di ogni singola gamba dove per **Gamba i** si intende quella relativa al giunto prismatico q_i . Inoltre si indicano (vedi Figura 1.1) con :

- m_1' : massa braccio 1 della gamba 1 (*Braccio 1'*)
- m_2' : massa braccio 2 della gamba 1 (*Braccio 2'*)
- m_1'' : massa braccio 1 della gamba 2 (*Braccio 1''*)
- m_2'' : massa braccio 2 della gamba 2 (*Braccio 2''*)
- m_1''' : massa braccio 1 della gamba 3 (*Braccio 1'''*)
- m_2''' : massa braccio 2 della gamba 3 (*Braccio 2'''*)
- d_1' : lunghezza braccio 1 della gamba 1 (*Braccio 1'*)
- d_2' : lunghezza braccio 2 della gamba 1 (*Braccio 2'*)
- d_1'' : lunghezza braccio 1 della gamba 2 (*Braccio 1''*)

3.1.1 Dinamica Gamba 1

Per il calcolo della dinamica abbiamo bisogno di calcolare la matrice $B_1(q)$ con $q = [\theta_1 \ q_1]^T$:

$$B_1(q) = m_1 J_P^{(l_1)T} J_P^{(l_1)} + J_O^{(l_1)T} R_1 I_{l_1}^1 R_1^T J_O^{(l_1)} + m_2 J_P^{(l_2)T} J_P^{(l_2)} + J_O^{(l_2)T} R_2 I_{l_2}^2 R_2^T J_O^{(l_2)}$$

Per il primo braccio della gamba si ottiene :

$$J_P^{(l_1)} = \begin{bmatrix} j_{P1}^{(l_1)} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 \times (p_{l_1} - p_0) & 0 \end{bmatrix}$$

con $z_0 = [0 \ 0 \ 1]^T$ e $p_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$. Il vettore p_{l_1} è la posizione del baricentro del braccio 1 espresso in terna base che si ottiene dal vettore $p_{l_1}^1$ (posizione del baricentro del braccio 1 espresso nel sistema di riferimento solidale al braccio 1) tramite la trasformazione omogenea $p_{l_1} = A_1^O p_{l_1}^1$. Quindi risulta :

$$p_{l_1} = A_1^O p_{l_1}^1 = \left[\begin{array}{ccc|c} C_{\theta_1} & 0 & S_{\theta_1} & 0 \\ S_{\theta_1} & 0 & -C_{\theta_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ d_1/2 \\ 1 \end{array} \right]$$

Effettuando tutti i calcoli si ottiene :

$$J_P^{(l_1)} = \begin{bmatrix} 1/2 C_{\theta_1} d_1 & 0 \\ 1/2 S_{\theta_1} d_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Proseguendo :

$$J_O^{(l_1)} = \begin{bmatrix} j_{O1}^{(l_1)} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Per il braccio 2 :

$$J_P^{(l_2)} = \begin{bmatrix} j_{P1}^{(l_2)} & j_{P2}^{(l_2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 \times (p_{l_2} - p_0) & z_1 \end{bmatrix}$$

dove il valore di z_1 corrisponde al versore dell'asse z della terna 1, rispetto alla terna base. Questo valore viene ricavato dai primi tre elementi della terza colonna della matrice di trasformazione omogenea A_1^O , ottenendo $z_1 = [S_{\theta_1} \ -C_{\theta_1} \ 0]^T$. Lo stesso discorso fatto sopra per p_{l_1} vale per p_{l_2} :

$$p_{l_2} = A_2^O p_{l_2}^2 = \left[\begin{array}{ccc|c} C_{\theta_1} & -S_{\theta_1} & 0 & S_{\theta_1} q_1 \\ S_{\theta_1} & C_{\theta_1} & 0 & -C_{\theta_1} q_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ d_2/2 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right]$$

Si ottiene quindi,

$$J_P^{(l_2)} = \begin{bmatrix} -1/2C_{\theta_1}d_2 + C_{\theta_1}q_1 & S_{\theta_1} \\ -1/2S_{\theta_1}d_2 + S_{\theta_1}q_1 & -C_{\theta_1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_O^{(l_2)} = \begin{bmatrix} j_{O1}^{(l_2)} & j_{O2}^{(l_2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcolo del tensore di inerzia

Il tensore di inerzia di una barra di spessore infinitesimo, o meglio di lunghezza molto maggiore dello spessore, è dato dall'espressione :

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

dove i momenti di inerzia I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} sono noti e calcolati rispetto al sistema di riferimento $\{x, y, z\}$ di Figura 3.2, mentre i prodotti di inerzia sono tutti nulli data la simmetria della barra. In questo caso il termine I_{zz} è nullo; infatti se si immagina di ruotare la barra con una velocità angolare rispetto all'asse z l'effetto del momento di inerzia è nullo a causa dello spessore infinitesimo.

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (mh^2)/3 & 0 & 0 \\ 0 & (mh^2)/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I valori di I_{xx} e I_{yy} sono uguali poichè ruotando la barra con velocità angolare rispetto a x e poi rispetto ad y l'effetto del momento di inerzia è identico. Quello che vogliamo ottenere è l'espressione del tensore di inerzia rispetto agli assi baricentrici I_G usando la formula $I = I_G + mS(p_G)^T S(p_G)$ con $p_G = [0 \ 0 \ h/2]^T$ ottenendo :

$$I_G = I - mS(p_G)^T S(p_G)$$

$$I_G = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - m \begin{bmatrix} 0 & -p_{Gz} & p_{Gy} \\ p_{Gz} & 0 & -p_{Gx} \\ -p_{Gy} & p_{Gx} & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -p_{Gz} & p_{Gy} \\ p_{Gz} & 0 & -p_{Gx} \\ -p_{Gy} & p_{Gx} & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_G = \begin{bmatrix} (mh^2)/3 & 0 & 0 \\ 0 & (mh^2)/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - m \begin{bmatrix} 0 & -h/2 & 0 \\ h/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -h/2 & 0 \\ h/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_G = \begin{bmatrix} (mh^2)/12 & 0 & 0 \\ 0 & (mh^2)/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

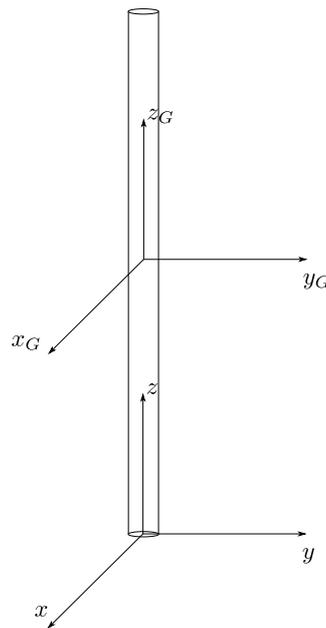


Figura 3.2: Barra di spessore infinitesimo, di lunghezza h e massa m

Considerando i singoli bracci del manipolatore come delle barre di spessore infinitesimo si ottiene l'espressione del tensore di inerzia relativo al baricentro di ogni singolo braccio (espresso nel sistema di riferimento solidale al braccio stesso) dal valore di I_G . Si ottiene quindi :

$$I_{l_1}^1 = \begin{bmatrix} (m_1 d_1^2)/12 & 0 & 0 \\ 0 & (m_1 d_1^2)/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_{l_2}^2 = \begin{bmatrix} (m_2 d_2^2)/12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (m_2 d_2^2)/12 \end{bmatrix}$$

Quello che manca per terminare il calcolo della matrice di inerzia $B_1(q)$ sono le matrici di rotazione R_1 ed R_2 . Queste permettono di esprimere il tensore di inerzia del baricentro di ogni singolo braccio, espresso nella terna di riferimento solidale al braccio stesso ($I_{l_1}^1$ e $I_{l_2}^2$), rispetto alla terna base. Definiamo con R_1 la matrice di rotazione che porta dalla terna 1 alla terna base e con R_2 la matrice di rotazione che porta dalla terna 2 alla terna base. Quest'ultime due matrici possono essere ricavate dalle trasformazioni omogenee A_1^O e A_2^O prendendo il minore principale di ordine tre relativo alla sola rotazione.

$$R_1 = \begin{bmatrix} C_{\theta_1} & 0 & S_{\theta_1} \\ S_{\theta_1} & 0 & -C_{\theta_1} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} C_{\theta_1} & -S_{\theta_1} & 0 \\ S_{\theta_1} & C_{\theta_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Effettuando tutti i calcoli e le moltiplicazioni tra matrici si arriva all'espressione finale della matrice di inerzia della gamba 1, $B_1(q)$:

$$B_1(q) = \begin{bmatrix} 1/3m_1d_1^2 + 1/3m_2d_2^2 - m_2d_2q_1 + m_2q_1^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

Per il calcolo della matrice $C(q, \dot{q})$ si procede come in Equazione 3.4 :

$$C_1(q) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = c_{111}\dot{\theta}_1 + c_{112}\dot{q}_1$$

$$c_{111} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_{11}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial b_{11}}{\partial \theta_1} - \frac{\partial b_{11}}{\partial \theta_1} \right) = 0$$

$$c_{112} = c_{121} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_{11}}{\partial q_1} + \frac{\partial b_{12}}{\partial \theta_1} - \frac{\partial b_{12}}{\partial \theta_1} \right) = -1/2m_2d_2 + m_2q_1$$

$$c_{12} = c_{121}\dot{\theta}_1 + c_{122}\dot{q}_1$$

$$c_{122} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_{12}}{\partial q_1} + \frac{\partial b_{12}}{\partial q_1} - \frac{\partial b_{22}}{\partial \theta_1} \right) = 0$$

$$c_{21} = c_{211}\dot{\theta}_1 + c_{212}\dot{q}_1$$

$$c_{211} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_{21}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial b_{21}}{\partial \theta_1} - \frac{\partial b_{11}}{\partial q_1} \right) = 1/2m_2d_2 - m_2q_1$$

$$c_{212} = c_{221} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_{21}}{\partial q_1} + \frac{\partial b_{22}}{\partial \theta_1} - \frac{\partial b_{12}}{\partial q_1} \right) = 0$$

$$c_{22} = c_{221}\dot{\theta}_1 + c_{222}\dot{q}_1$$

$$c_{222} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_{22}}{\partial q_1} + \frac{\partial b_{22}}{\partial q_1} - \frac{\partial b_{22}}{\partial q_1} \right) = 0$$

Si ottiene la matrice $C_1(q, \dot{q})$:

$$C_1(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -1/2m_2(d_2 - 2q_1)\dot{q}_1 & -1/2m_2(d_2 - 2q_1)\dot{\theta}_1 \\ 1/2m_2(d_2 - 2q_1)\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.1.2 Dinamica Gamba 2

Per il calcolo si procede analogamente alla gamba 1 ma con $q = [\theta_2 \quad q_2]^T$:

$$B_2(q) = m_1 J_P^{(l_1)T} J_P^{(l_1)} + J_O^{(l_1)T} R_1 I_{l_1}^1 R_1^T J_O^{(l_1)} + m_2 J_P^{(l_2)T} J_P^{(l_2)} + J_O^{(l_2)T} R_2 I_{l_2}^2 R_2^T J_O^{(l_2)}$$

$$J_P^{(l_1)} = \begin{bmatrix} j_{P1}^{(l_1)} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 \times (p_{l_1} - p_0) & 0 \end{bmatrix}$$

$$z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad p_0 = \begin{bmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$p_{l_1} = A_{1''}^O p_{l_1}^1 = \left[\begin{array}{ccc|c} C_{\theta_2} & 0 & S_{\theta_2} & L \\ S_{\theta_2} & 0 & -C_{\theta_2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$J_P^{(l_1)} = \begin{bmatrix} 1/2 C_{\theta_2} d_1 & 0 \\ 1/2 S_{\theta_2} d_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_O^{(l_1)} = \begin{bmatrix} j_{O1}^{(l_1)} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_P^{(l_2)} = \begin{bmatrix} j_{P1}^{(l_2)} & j_{P2}^{(l_2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 \times (p_{l_2} - p_0) & z_1 \end{bmatrix}$$

$$z_1 = \begin{bmatrix} S_{\theta_1} \\ -C_{\theta_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$p_{l_2} = A_{2''}^O p_{l_2}^2 = \left[\begin{array}{ccc|c} C_{\theta_2} & -S_{\theta_2} & 0 & L + S_{\theta_2} q_2 \\ S_{\theta_2} & C_{\theta_2} & 0 & -C_{\theta_2} q_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ d_2/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$J_P^{(l_2)} = \begin{bmatrix} -1/2 C_{\theta_2} d_2 + C_{\theta_2} q_2 & S_{\theta_2} \\ -1/2 S_{\theta_2} d_2 + S_{\theta_2} q_2 & -C_{\theta_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_O^{(l_2)} = \begin{bmatrix} j_{O1}^{(l_2)} & j_{O2}^{(l_2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_{l_1}^1 = \begin{bmatrix} (m_1 d_1^2)/12 & 0 & 0 \\ 0 & (m_1 d_1^2)/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_{l_2}^2 = \begin{bmatrix} (m_2 d_2^2)/12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (m_2 d_2^2)/12 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} C_{\theta_1} & 0 & S_{\theta_1} \\ S_{\theta_1} & 0 & -C_{\theta_1} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} C_{\theta_1} & -S_{\theta_1} & 0 \\ S_{\theta_1} & C_{\theta_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_2(q) = \begin{bmatrix} 1/3 m_1 d_1^2 + 1/3 m_2 d_2^2 - m_2 d_2 q_2 + m_2 q_2^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$C_2(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -1/2 m_2 (d_2 - 2q_2) \dot{q}_2 & -1/2 m_2 (d_2 - 2q_2) \dot{\theta}_2 \\ 1/2 m_2 (d_2 - 2q_2) \dot{\theta}_2 & 0 \end{bmatrix}$$

3.1.3 Dinamica Gamba 3

Per il calcolo si procede analogamente alla gamba 1 ma con $q = [\theta_3 \quad q_3]^T$:

$$B_3(q) = m_1 J_P^{(l_1)T} J_P^{(l_1)} + J_O^{(l_1)T} R_1 I_{l_1}^1 R_1^T J_O^{(l_1)} + m_2 J_P^{(l_2)T} J_P^{(l_2)} + J_O^{(l_2)T} R_2 I_{l_2}^2 R_2^T J_O^{(l_2)}$$

$$J_P^{(l_1)} = \begin{bmatrix} j_{P1}^{(l_1)} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 \times (p_{l_1} - p_0) & 0 \end{bmatrix}$$

$$z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad p_0 = \begin{bmatrix} L/2 \\ L/(2\sqrt{3}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$p_{l1} = A_1^O p_{l1}^1 = \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2}(C_{\theta_3} - \sqrt{3}S_{\theta_3}) & 0 & \frac{1}{2}(S_{\theta_3} + \sqrt{3}C_{\theta_3}) & \frac{L}{2} \\ \frac{1}{2}(S_{\theta_3} + \sqrt{3}C_{\theta_3}) & 0 & \frac{1}{2}(-C_{\theta_3} + \sqrt{3}S_{\theta_3}) & \frac{L\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$J_P^{(l_1)} = \begin{bmatrix} -1/4 d_1 \sqrt{3} S_{\theta_3} + 1/4 d_1 C_{\theta_3} - 1/3 L \sqrt{3} & 0 \\ 1/4 (S_{\theta_3} + \sqrt{3} C_{\theta_3}) d_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_O^{(l_1)} = \begin{bmatrix} j_{O1}^{(l_1)} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_P^{(l_2)} = \begin{bmatrix} j_{P1}^{(l_2)} & j_{P2}^{(l_2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 \times (p_{l_2} - p_0) & z_1 \end{bmatrix}$$

$$z_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(S_{\theta_3} + \sqrt{3}C_{\theta_3}) \\ \frac{1}{2}(-C_{\theta_3} + \sqrt{3}S_{\theta_3}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$p_{l_2} = A_2^O p_{l_2}^2 =$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2}(C_{\theta_3} - \sqrt{3}S_{\theta_3}) & -\frac{1}{2}(S_{\theta_3} + \sqrt{3}C_{\theta_3}) & 0 & \frac{L}{2} + \frac{q_3}{2}(S_{\theta_3} + \sqrt{3}C_{\theta_3}) & & \\ \frac{1}{2}(S_{\theta_3} + \sqrt{3}C_{\theta_3}) & \frac{1}{2}(C_{\theta_3} - \sqrt{3}S_{\theta_3}) & 0 & \frac{L\sqrt{3}}{2} + \frac{q_3}{2}(-C_{\theta_3} + \sqrt{3}S_{\theta_3}) & & \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \end{array} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ d_2/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$J_P^{(l_2)} =$$

$$\begin{bmatrix} -1/4d_2C_{\theta_3} + 1/4d_2\sqrt{3}S_{\theta_3} - 1/2q_3\sqrt{3}S_{\theta_3} + 1/2q_3C_{\theta_3} - 1/3L\sqrt{3} & 1/2S_{\theta_3} + 1/2\sqrt{3}C_{\theta_3} \\ -1/4(S_{\theta_3} + \sqrt{3}C_{\theta_3})(d_2 - 2q_3) & 1/2\sqrt{3}S_{\theta_3} - 1/2C_{\theta_3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_O^{(l_2)} = \begin{bmatrix} j_{O1}^{(l_2)} & j_{O2}^{(l_2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_{l_1}^1 = \begin{bmatrix} (m_1d_1^2)/12 & 0 & 0 \\ 0 & (m_1d_1^2)/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_{l_2}^2 = \begin{bmatrix} (m_2d_2^2)/12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (m_2d_2^2)/12 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(C_{\theta_3} - \sqrt{3}S_{\theta_3}) & 0 & \frac{1}{2}(S_{\theta_3} + \sqrt{3}C_{\theta_3}) \\ \frac{1}{2}(S_{\theta_3} + \sqrt{3}C_{\theta_3}) & 0 & \frac{1}{2}(-C_{\theta_3} + \sqrt{3}S_{\theta_3}) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(C_{\theta_3} - \sqrt{3}S_{\theta_3}) & -\frac{1}{2}(S_{\theta_3} + \sqrt{3}C_{\theta_3}) & 0 \\ \frac{1}{2}(S_{\theta_3} + \sqrt{3}C_{\theta_3}) & \frac{1}{2}(C_{\theta_3} - \sqrt{3}S_{\theta_3}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_3(q) = \begin{bmatrix} b_{11} & -1/6m_2L(\sqrt{3}S_{\theta_3} + 3C_{\theta_3}) \\ -1/6m_2L(\sqrt{3}S_{\theta_3} + 3C_{\theta_3}) & m_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} b_{11} = & 1/6m_2d_2C_{\theta_3}L\sqrt{3} + 1/3m_1L^2 + 1/3m_2d_2^2 \\ & + 1/3m_1d_1^2 + m_2q_3^2 - 1/3m_2q_3C_{\theta_3}L\sqrt{3} \\ & - 1/6m_1d_1C_{\theta_3}L\sqrt{3} - m_2d_2q_3 - 1/2m_2d_2S_{\theta_3}L \\ & + m_2q_3S_{\theta_3}L + 1/2m_1d_1S_{\theta_3}L + 1/3m_2L^2 \end{aligned}$$

$$C_3(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} c_{11} & -1/6m_2(3d_2 - 3LS_{\theta_3} - 6q_3 + C_{\theta_3}L\sqrt{3})\dot{\theta}_3 \\ (1/2d_2m_2 - q_3m_2)\dot{\theta}_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_{11} = & 1/12(\sqrt{3}S_{\theta_3} + 3C_{\theta_3})(2q_3m_2 - d_2m_2 + m_1d_1)\dot{\theta}_3 \\ & - 1/6m_2(3d_2 - 3LS_{\theta_3} - 6q_3 + C_{\theta_3}L\sqrt{3})\dot{q}_3 \end{aligned}$$

3.2 Dinamica End-Effector

La dinamica dell'end-effector si calcola a partire dalla formulazione di *Lagrange* (Equazione 3.1). Anche in questo caso il termine di energia potenziale \mathcal{U} è da considerarsi nullo. L'energia cinetica \mathcal{T} si ottiene direttamente dall'espressione dei corpi rigidi :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}m_E\dot{p}_C^T\dot{p}_C + \frac{1}{2}\omega_E^T I_C \omega_E$$

dove con m_E si indica la massa dell'end-effector, con p_C si intende la posizione del baricentro dell'end-effector rispetto alla terna base, con ω_E la velocità di rotazione dell'end-effector e con I_C il tensore d'inerzia relativo al baricentro espresso in una terna con origine nel baricentro a parallela a quella base.

$$p_C = \begin{bmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E = 0 \end{bmatrix}; \quad \dot{p}_C = \begin{bmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \omega_E = \begin{bmatrix} \omega_x = 0 \\ \omega_y = 0 \\ \omega_z = \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

$$I_C = (R_E^O) I_G (R_E^O)^T = \begin{bmatrix} C_\phi & S_\phi & 0 \\ -S_\phi & C_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\phi & S_\phi & 0 \\ -S_\phi & C_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

dove con R_E^O si intende solo la parte relativa alla rotazione della trasformazione omogenea T_E^O e con I_G il tensore d'inerzia relativo al baricentro espresso in una terna con origine nel baricentro stesso. Si ottiene quindi,

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &= \frac{1}{2}m_E \begin{bmatrix} \dot{x}_E & \dot{y}_E & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_E \\ y_E \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\phi} \end{bmatrix} I_C \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \\ \mathcal{T} &= \frac{1}{2}m_E (\dot{x}_E^2 + \dot{y}_E^2) + \frac{1}{2}I_{zz}\dot{\phi}^2\end{aligned}$$

si noti come I_{zz} è l'unico elemento del momento di inerzia che interessa effettuando le moltiplicazioni tra matrici e vettori di cui sopra. Le equazioni di *Lagrange* sono espresse da :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{x}_E} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_E} = \tau_{x_E}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{y}_E} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial y_E} = \tau_{y_E}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \phi} = \tau_{\phi}$$

$$m_E \ddot{x}_E = \tau_{x_E}; \quad m_E \ddot{y}_E = \tau_{y_E}; \quad I_{zz} \ddot{\phi} = \tau_{\phi};$$

ottenendo :

$$B_E \begin{bmatrix} \ddot{x}_E \\ \ddot{y}_E \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{x_E} \\ \tau_{y_E} \\ \tau_{\phi} \end{bmatrix}; \quad \text{con} \quad B_E = \begin{bmatrix} m_E & 0 & 0 \\ 0 & m_E & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

in questo caso dato che la matrice B_E è costante si ottiene una matrice C_E identicamente nulla.

3.3 Dinamica Vincolata

Una volta calcolate le dinamiche relative alle gambe ed all'end-effector occorre vincolarle al fine di trovare la dinamica complessiva del manipolatore. Questo può essere fatto definendo il seguente sistema :

$$\begin{aligned} B(q) &= \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{bmatrix}; \quad C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}; \quad q = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ q_1 \\ \theta_2 \\ q_2 \\ \theta_3 \\ q_3 \end{bmatrix} \\ \left\{ \begin{array}{l} B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + \tilde{J}_1^T \lambda = \tau_g \\ B_E \ddot{\tilde{x}} - \tilde{J}_2^T \lambda = \tau_{ee} \end{array} \right. \quad \text{con} \quad \tilde{x} = [x_E \quad y_E \quad \phi]^T \end{aligned} \quad (3.6)$$

con $\tilde{J}_1 = HJ$ e $\tilde{J}_2 = HG^T$ (J e G^T calcolate nel primo capitolo), soggetta al vincolo :

$$A(q) \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = [\tilde{J}_1 \quad -\tilde{J}_2] \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.7)$$

Per la risoluzione della dinamica è necessario derivare il vincolo 3.7 come :

$$A(q) \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{\tilde{x}} \end{bmatrix} + \dot{A}(q) \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = [\tilde{J}_1 \quad -\tilde{J}_2] \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{\tilde{x}} \end{bmatrix} + [\dot{\tilde{J}}_1 \quad -\dot{\tilde{J}}_2] \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = 0$$

Infine si ottiene la dinamica completa del robot :

$$\begin{bmatrix} B & 0 & \tilde{J}_1^T \\ 0 & B_E & -\tilde{J}_2^T \\ \tilde{J}_1 & -\tilde{J}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{\tilde{x}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C(q, \dot{q})\dot{q} + \tau_g \\ \tau_{ee} \\ -\dot{\tilde{J}}_1\dot{q} + \dot{\tilde{J}}_2\dot{\tilde{x}} \end{bmatrix}$$

da cui si ottiene l'evoluzione temporale di $q(t)$ e $\tilde{x}(t)$.

3.4 Dinamica Quasi-Velocità

Alternativamente, se non si desidera trovare λ si riscrive il vincolo $A(q)\dot{q} = 0$ in forma $\dot{q} = S(q)v$ dove $S(q)$ è una matrice-base di $\mathcal{N}(A(q))$. Derivando ancora il vincolo, si ha $\ddot{q} = S(q)\dot{v} + \dot{S}(q)v$. Sostituendo nella dinamica :

$$\tilde{B}S\dot{v} + \tilde{B}\dot{S}v + \tilde{C}Sv + A^T\lambda = \tilde{\tau}$$

con

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B_E \end{bmatrix}; \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} C(q, \dot{q}) & 0 \\ 0 & 0^{3 \times 3} \end{bmatrix}; \quad \tilde{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_g \\ \tau_{ee} \end{bmatrix}$$

ottenute dalla forma matriciale dell'Eq.3.6 e premoltiplicando per S^T , cioè proiettando sui vincoli,

$$S^T\tilde{B}S\dot{v} + S^T\tilde{B}\dot{S}v + S^T\tilde{C}Sv = S^T\tilde{\tau} \quad \text{dato che il termine } S^T A^T\lambda = 0$$

da cui

$$\begin{cases} \dot{v} = (S^T\tilde{B}S)^{-1} \left[S^T\tilde{\tau} - (S^T\tilde{B}\dot{S}v + S^T\tilde{C}Sv) \right] \\ \ddot{q} = S\dot{v} + \dot{S}v \end{cases}$$

Anche in questo caso si è scelto di prendere una matrice-base di $\mathcal{N}(A(q))$ facendo coincidere le quasi-velocità v con le velocità sui giunti attuati q_1 , q_2 e q_3 ottenendo :

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ 1 & 0 & 0 \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \\ 0 & 1 & 0 \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} \\ 0 & 0 & 1 \\ s_{71} & s_{72} & s_{73} \\ s_{81} & s_{82} & s_{83} \\ s_{91} & s_{92} & s_{93} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

quindi si ha $\dot{q}_1 = v_1$, $\dot{q}_2 = v_2$ e $\dot{q}_3 = v_3$.

Capitolo 4

Tavola IV

4.1 Controllo

Il problema del controllo di un manipolatore consiste nel determinare l'andamento delle forze generalizzate (forze o coppie) che gli attuatori devono applicare ai giunti in modo da garantire, con il soddisfacimento di specifiche assegnate sul transitorio e sul regime, l'esecuzione delle operazioni comandate. È da sottolineare che le caratteristiche di moto sono usualmente specificate nello spazio operativo, mentre le azioni di controllo vengono esplicitate in maniera diretta nello spazio dei giunti mediante le forze generalizzate sviluppate dagli attuatori. Questa caratteristica porta ad individuare due modalità di controllo : nello *spazio dei giunti* e nello *spazio operativo*.

Il controllo nello *spazio dei giunti* comporta due problemi : l'inversione della cinematica del manipolatore e la realizzazione di un sistema di controllo nello *spazio dei giunti* che garantisca un inseguimento dei riferimenti da parte delle grandezze controllate. Questa soluzione presenta inoltre l'inconveniente dovuto alla realizzazione dell'azione di controllo su grandezze caratteristiche dello *spazio dei giunti* e quindi al controllo in anello aperto, attraverso la struttura meccanica del manipolatore, delle grandezze di interesse dello *spazio operativo*. È chiaro quindi che eventuali tolleranze di costruzione, assenze di calibrizioni, giochi negli organi di riduzione, imprecisione nella conoscenza della posizione dell'end-effector etc. influenzano le variabili scelte per caratterizzare lo *spazio operativo* in termini di perdita di precisione.

Il controllo nello *spazio operativo* invece richiede una maggiore complessità algoritmica dovuta al fatto che l'inversione cinematica è implicitamente assunta interna all'anello di controllo. Inoltre spesso le grandezze dello *spazio operativo* non sono misurate direttamente ma dedotte, tramite trasformazioni di cinematica diretta, da misure effettuate su grandezze caratteristiche dello *spazio dei giunti*.

Di seguito andremo ad affrontare il problema del controllo sia nello *spazio dei giunti* sia nello *spazio operativo* utilizzando il metodo di *coppia calcolata*. Nel caso del manipolatore parallelo preso in esame utilizzeremo il metodo di *coppia calcolata* con le *quasi-velocità*. Questa particolare soluzione può essere adottata senza perdita di generalità grazie all'opportuna scelta della base del $\mathcal{N}(A(q))$ (vedi Sezione 3.4) che porta a far coincidere le *quasi-velocità* con le velocità dei giunti attuati.

4.1.1 Controllo a coppia calcolata nello spazio dei giunti

Prendiamo adesso in esame il problema di controllare le posizioni di giunto q_1 , q_2 , q_3 del manipolatore parallelo dalla dinamica :

$$S^T \tilde{B} S \dot{v} + S^T \tilde{B} \dot{S} v + S^T C S v = S^T \tilde{\tau} = \bar{\tau} \quad (4.1)$$

affinchè inseguano i riferimenti di posizione q_{d1} , q_{d2} , q_{d3} .

Ipotesi semplificative

Nel caso in esame il termine $S^T \tilde{\tau}$ può essere riscritto come :

$$\begin{bmatrix} s_{11} & 1 & s_{31} & 0 & s_{51} & 0 & s_{71} & s_{81} & s_{91} \\ s_{12} & 0 & s_{32} & 1 & s_{52} & 0 & s_{72} & s_{82} & s_{92} \\ s_{13} & 0 & s_{33} & 0 & s_{53} & 1 & s_{73} & s_{83} & s_{93} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{\theta_1} \\ \tau_{q_1} \\ \tau_{\theta_2} \\ \tau_{q_2} \\ \tau_{\theta_3} \\ \tau_{q_3} \\ \tau_{ee_x} \\ \tau_{ee_y} \\ \tau_{ee_\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{q_1} \\ \tau_{q_2} \\ \tau_{q_3} \end{bmatrix} = \bar{\tau}$$

dato che, trascurando gli attriti e le forze esterne agenti sull'end-effector, le coppie ai giunti non attuati (τ_{θ_1} , τ_{θ_2} e τ_{θ_3}) e le coppie/forze agenti sull'end-effector (τ_{ee_x} , τ_{ee_y} e τ_{ee_ϕ}) risultano nulle. Il problema del controllo può essere risolto scegliendo un vettore $\bar{\tau}$ nella forma :

$$\bar{\tau} = S^T \tilde{B} S [\dot{v}_d + K_v \tilde{v} + K_p \tilde{q}] + [S^T \tilde{B} \dot{S} + S^T C S] v \quad (4.2)$$

Sostituendo l'Equazione 4.2 nell'Equazione 4.1 si ottiene :

$$S^T \tilde{B} S (\dot{\tilde{v}} + K_v \tilde{v} + K_p \tilde{q}) = 0 \quad (4.3)$$

$$\dot{\tilde{v}} + K_v \tilde{v} + K_p \tilde{q} = 0 \quad (4.4)$$

$$\ddot{\tilde{q}}_{\{1,2,3\}} + K_v \dot{\tilde{q}}_{\{1,2,3\}} + K_p \tilde{q}_{\{1,2,3\}} = 0 \quad (4.5)$$

con $\tilde{v} = v_d - v$ e $\tilde{q}_{\{1,2,3\}} = q_{d\{1,2,3\}} - q_{\{1,2,3\}}$. Da sottolineare è che a tale risultato si può arrivare grazie all'invertibilità della matrice $S^T \tilde{B} S$. L'Equazione 4.5 rappresenta la dinamica dell'errore di posizionamento. Tale dinamica può essere asintoticamente stabile scegliendo in fase di progetto le matrici dei guadagni K_v , K_p affinché i polinomi $I s^2 + K_v s + K_p$ risultino di *Hurwitz*. Il controllo proposto mostra come la perfetta conoscenza del modello dinamico del manipolatore ne consenta la linearizzazione perfetta garantendo la precisa allocazione dei poli del sistema a ciclo chiuso.

Al fine di valutare le prestazioni del controllo nello *spazio dei giunti* se ne analizza il comportamento in corrispondenza di due riferimenti diversi :

- **Test 1** : riferimento costante $x_{Ed} = 70$, $y_{Ed} = 40$, $\phi_d = -\frac{\pi}{6}$ con $K_v = \text{diag}\{10, 10, 10\}$, $K_p = \text{diag}\{20, 20, 20\}$;
- **Test 2** : riferimento variabile ad inseguimento di traiettoria con $K_v = \text{diag}\{10, 10, 10\}$, $K_p = \text{diag}\{20, 20, 20\}$;

Test 1

In Figura 4.1 viene mostrato l'andamento del manipolatore al fine di raggiungere il punto prestabilito con l'orientazione desiderata. Nelle Figure 4.2 e 4.3 sono riportati rispettivamente l'andamento degli errori di posizione e velocità dei giunti (attuati e sensorizzati) e l'errore di posizionamento ed orientazione dell'end-effector. Infine in Figura 4.4 sono riportati i grafici della traiettoria eseguita dal manipolatore.

Test 2

In questo test si mostra come il manipolatore sia in grado di fare cose veramente incredibili. Tra le tante cose veramente incredibili che è in grado di fare ne risalta una veramente incredibile : l'inseguimento di una traiettoria incredibilmente da gran premio (vedi Figure 4.5, 4.6, 4.7, 4.8).

4.1.2 Controllo a coppia calcolata nello spazio operativo

Si vuole determinare la coppia di controllo $\bar{\tau}$ che garantisca l'inseguimento asintotico di una posizione cartesiana e angolare X_d da parte della posizione X dell'end-effector del manipolatore. Per fare ciò è necessario determinare preliminarmente l'equazione della dinamica del manipolatore nello spazio operativo. Partendo dall'Equazione 4.1 e sfruttando il legame tra le quasi-velocità v e le variabili q dei giunti attuati e sensorizzati ($\dot{q} = \dot{q}_{\{1,2,3\}} = v$, $\ddot{q} = \ddot{q}_{\{1,2,3\}} = \dot{v}$) otteniamo :

$$S^T \tilde{B} S \ddot{q} + \left[S^T \tilde{B} \dot{S} + S^T C S \right] \dot{q} = \bar{\tau} \quad (4.6)$$

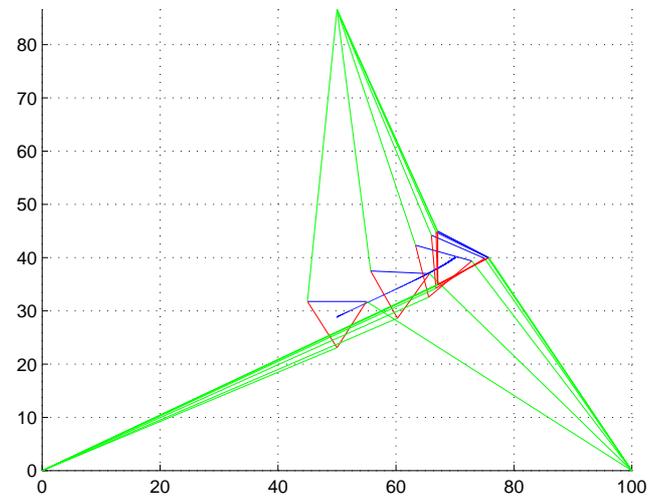


Figura 4.1: Traiettorie manipolatore (Test 1 spazio dei giunti)

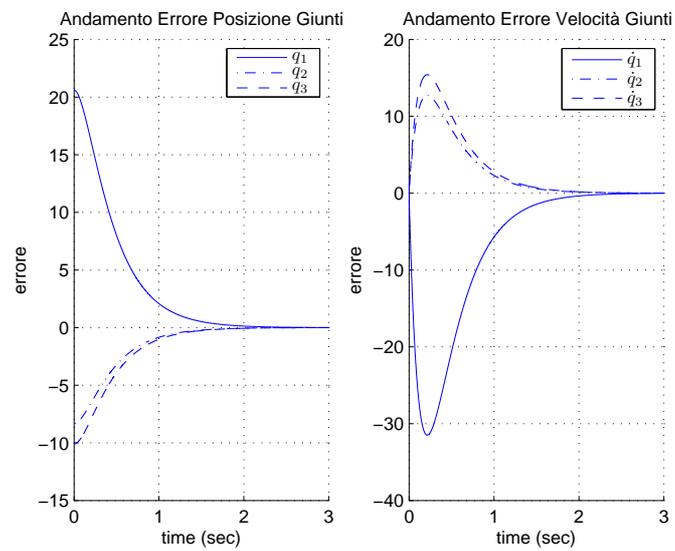


Figura 4.2: Andamento errore posizione e velocità dei giunti (Test 1 spazio dei giunti)

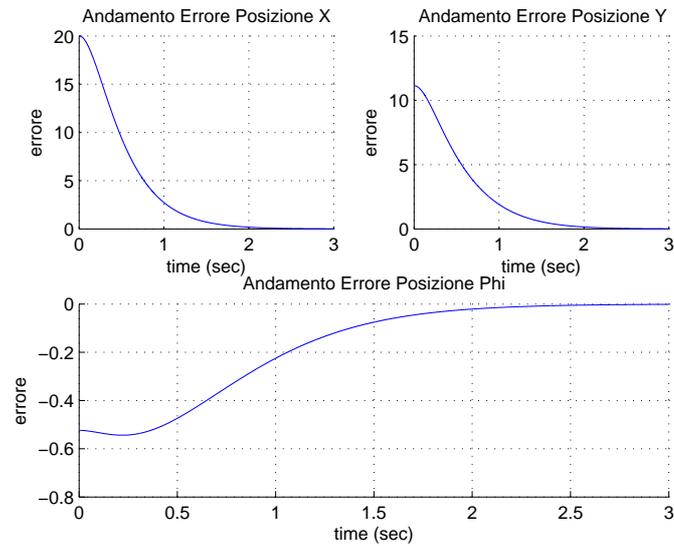


Figura 4.3: Andamento errore posizione e orientazione dell'end-effector (Test 1 spazio dei giunti)

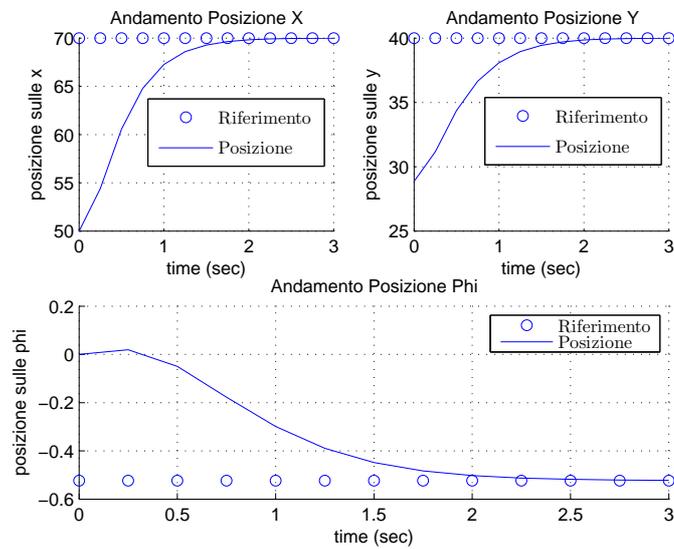


Figura 4.4: Andamento posizione e orientazione dell'end-effector (Test 1 spazio dei giunti)

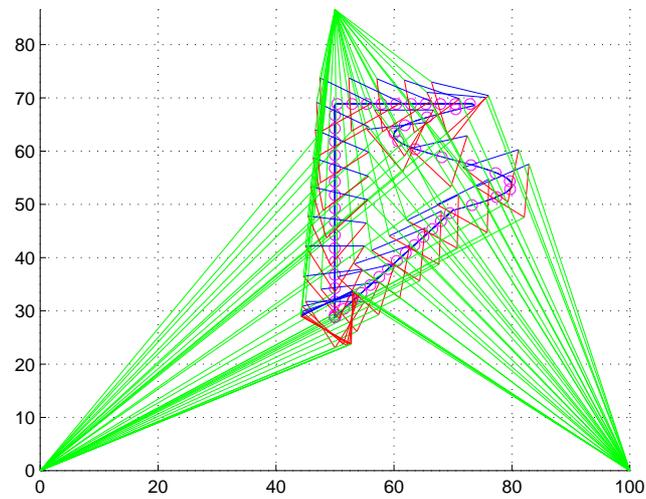


Figura 4.5: Traiettoria manipolatore (Test 2 spazio dei giunti)

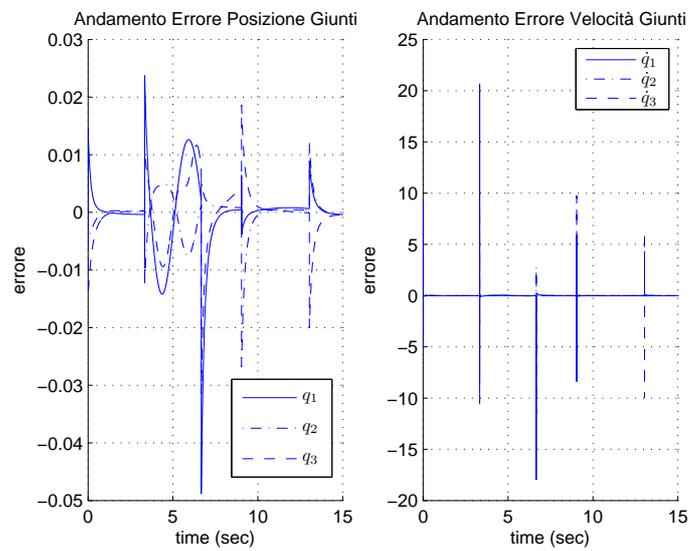


Figura 4.6: Andamento errore posizione e velocità dei giunti (Test 2 spazio dei giunti)

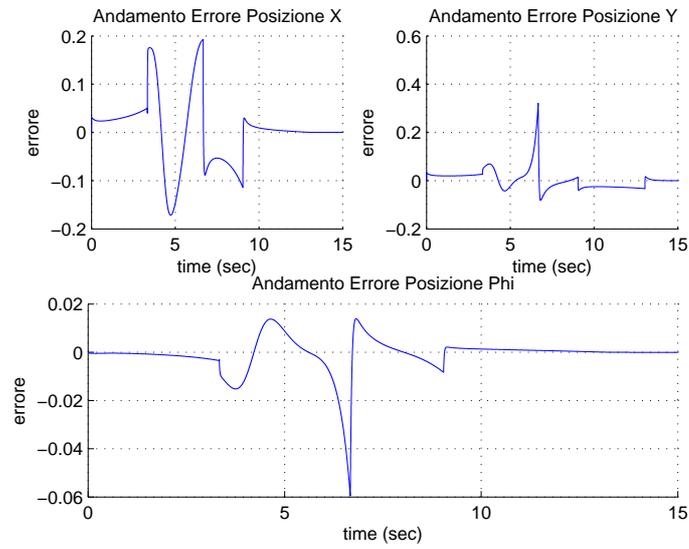


Figura 4.7: Andamento errore posizione e orientazione dell'end-effector (Test 2 spazio dei giunti)

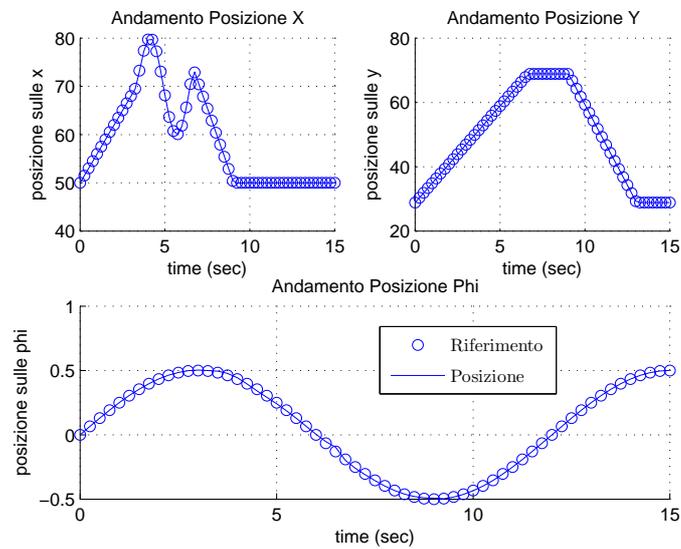


Figura 4.8: Andamento posizione e orientazione dell'end-effector (Test 2 spazio dei giunti)

Dall' Equazione 1.6 si ricava $\dot{x} = J(q)\dot{\bar{q}}$, invertendo e derivando si ottengono :

$$\dot{\bar{q}} = J^{-1}(q)\dot{x} \quad (4.7)$$

$$\ddot{\bar{q}} = J^{-1}(q) \left[\ddot{x} - \dot{J}(q)\dot{\bar{q}} \right] \quad (4.8)$$

Al fine di ottenere la dinamica nello spazio operativo, è opportuno utilizzare il legame tra le forze generalizzate F_{ee} che agiscono sull'end-effector e le relative coppie $\bar{\tau}$ ai giunti :

$$\bar{\tau} = J^T(q)F_{ee} \quad (4.9)$$

dove $J(q)$ è la matrice ricavata dall'Equazione 1.6 ed indicata con N_E . Sostituendo le Equazioni 4.8 e 4.9 nella 4.6, moltiplicando tutto per $J^{-T}(q)$ con un pò di facchinaggio algebrico si arriva all'espressione seguente :

$$\Omega^{-1}(q)\ddot{X} + h(X, \dot{X}) = F_{ee} \quad (4.10)$$

con :

$$\begin{aligned} \Omega(q) &= J(q) \left[S^T \tilde{B} S \right]^{-1} J^T(q) \\ h(X, \dot{X}) &= J^{-T}(q)h(q, \dot{q}) - \Omega^{-1}(q)\dot{J}(q)\dot{\bar{q}} \\ h(q, \dot{q}) &= \left[S^T \tilde{B} \dot{S} + S^T C S \right] \dot{\bar{q}} \end{aligned}$$

Scegliendo la forza F_{ee} linearizzata nella forma :

$$F_{ee} = \Omega^{-1}(q) \left[\ddot{X}_d + K_v \dot{\tilde{X}} + K_p \tilde{X} \right] + h(X, \dot{X})$$

e sostituendola nell'Equazione 4.10 si arriva alla dinamica dell'errore di posizione $\tilde{X} = X_d - X$ nello spazio operativo :

$$\ddot{\tilde{X}} + K_v \dot{\tilde{X}} + K_p \tilde{X} = 0$$

che può essere resa asintoticamente stabile mediante una scelta opportuna delle matrici K_v e K_p . Infine la coppia di controllo ai giunti risulta :

$$\bar{\tau} = J^T(q)F_{ee} = J^T(q) \left[\Omega^{-1}(q) \left(\ddot{X}_d + K_v \dot{\tilde{X}} + K_p \tilde{X} \right) + h(X, \dot{X}) \right]$$

Gli stessi test effettuati per il controllo nello *spazio dei giunti* sono stati effettuati per lo *spazio operativo*. Di seguito si riportano i risultati delle simulazioni. Come ci si poteva aspettare, a parità di condizioni, l'errore di posizionamento dell'end-effector con il controllo nello *spazio operativo* risulta minore di quello ottenuto con il controllo nello *spazio dei giunti* per i motivi esposti ad inizio capitolo.

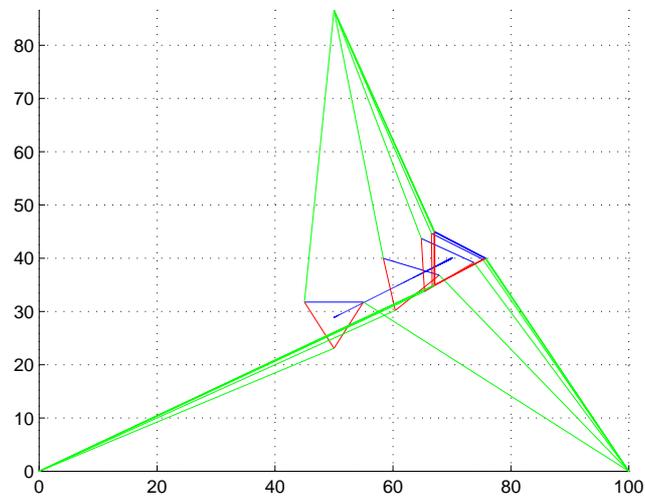


Figura 4.9: Traiettoria manipolatore (Test 1 spazio operativo)

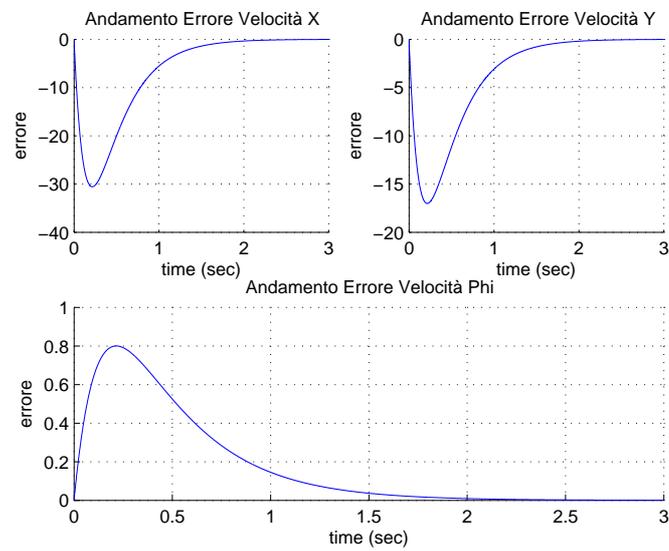


Figura 4.10: Andamento errore velocità dell'end-effector (Test 1 spazio operativo)

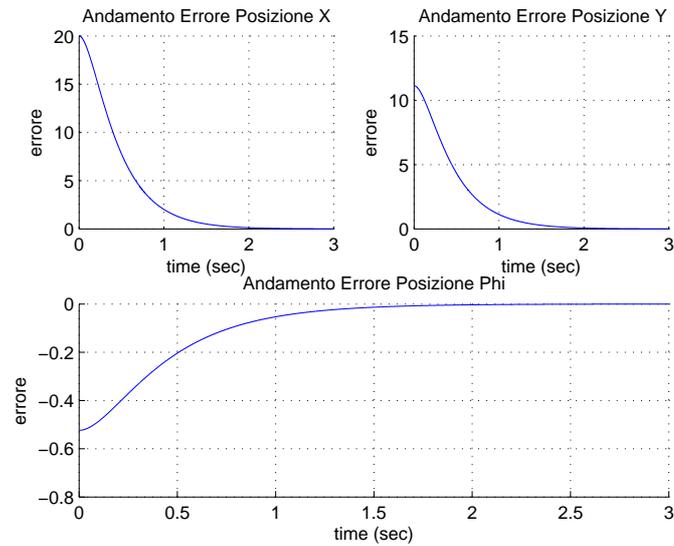


Figura 4.11: Andamento errore posizione e orientazione dell'end-effector (Test 1 spazio operativo)

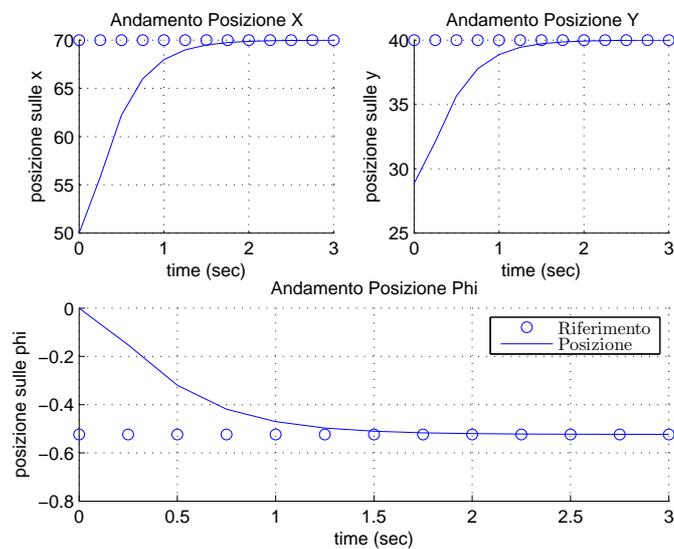


Figura 4.12: Andamento posizione e orientazione dell'end-effector (Test 1 spazio operativo)

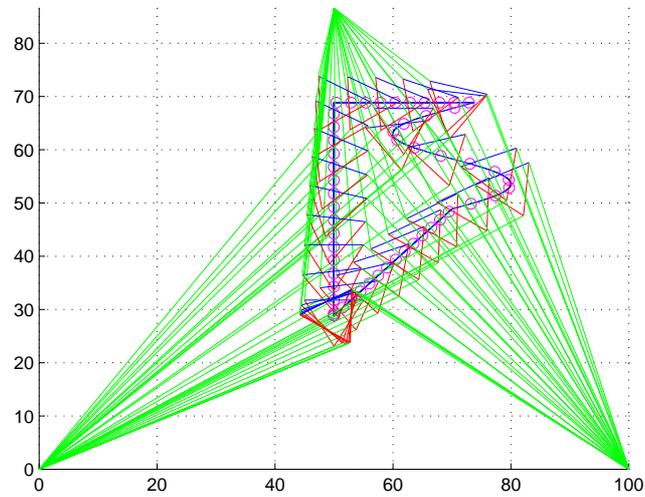


Figura 4.13: Traiettoria manipolatore (Test 2 spazio operativo)

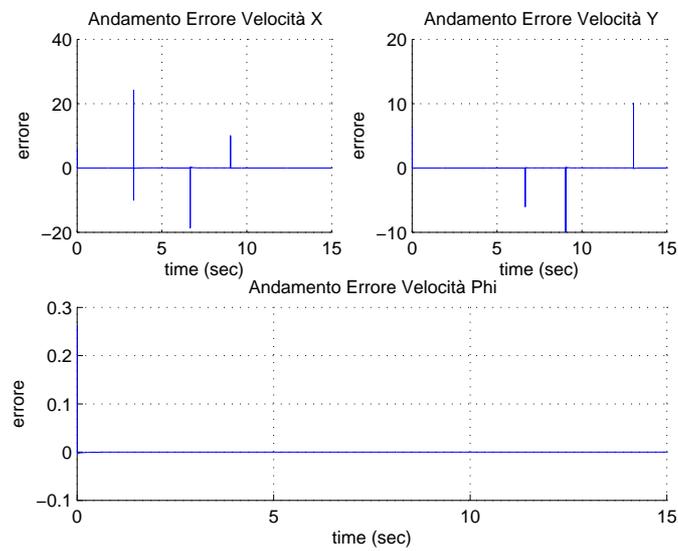


Figura 4.14: Andamento velocità dell'end-effector (Test 2 spazio operativo)

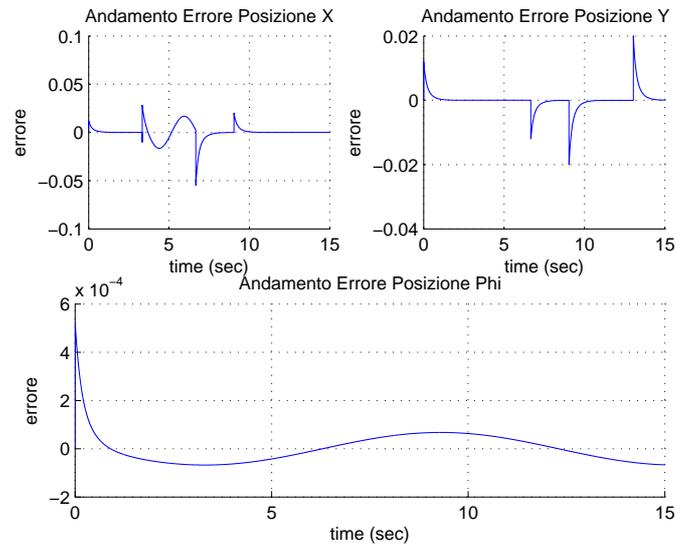


Figura 4.15: Andamento errore posizione e orientazione dell'end-effector (Test 2 spazio operativo)

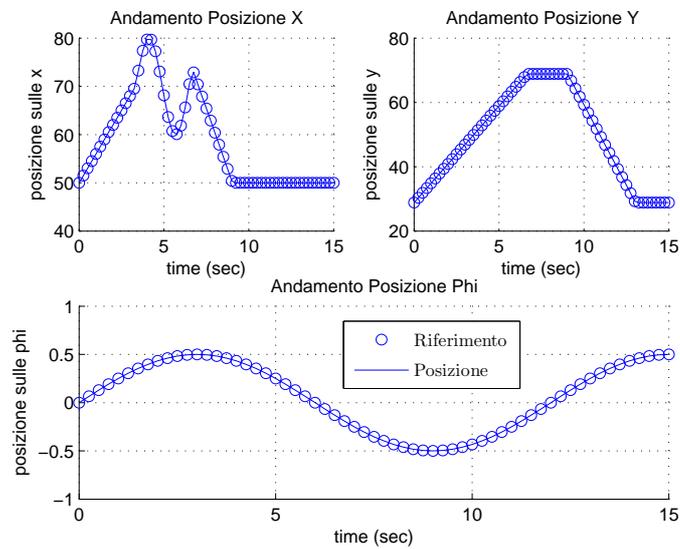


Figura 4.16: Andamento posizione e orientazione dell'end-effector (Test 2 spazio operativo)

Capitolo 5

Identificabilità : osservabilità del sistema aumentato

In questo capitolo si analizza la possibilità di ricavare i parametri dinamici e fisici di un manipolatore ricorrendo a tecniche di *identificazione* che si possono avvalere convenientemente della *proprietà di linearità* $\tau = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\pi$ del modello rispetto ad un'opportuno insieme di parametri. Tali tecniche consentono infatti di ricavare il vettore di parametri π sulla base di misure effettuate, durante l'esecuzione di opportune traiettorie imposte al manipolatore, sulle coppie ai giunti τ e sulle grandezze che consentono di specificare numericamente la matrice $Y(q, \dot{q}, \ddot{q})$.

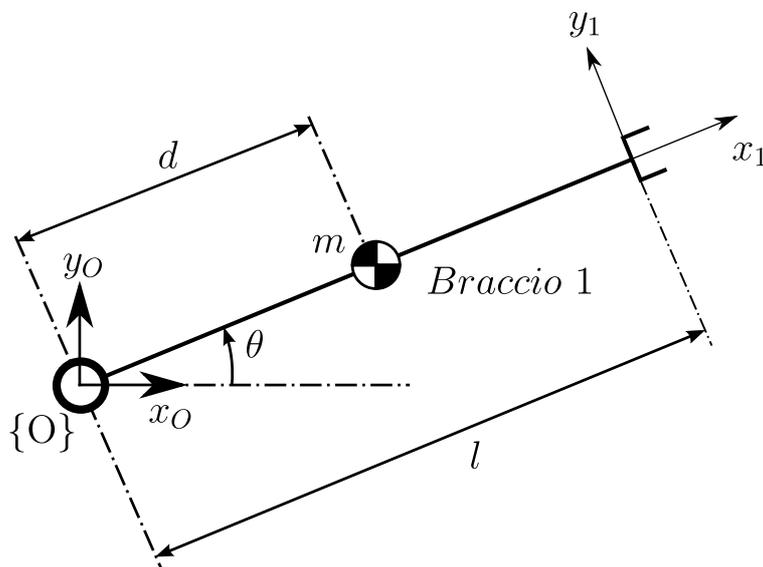


Figura 5.1: Manipolatore

Tuttavia le suddette tecniche non sempre permettono la determinazione di tutti i parametri prestabiliti. Per questo motivo è opportuno uno studio più approfondito del modello dinamico non lineare di un manipolatore. In particolare è indispensabile effettuare un'analisi di *osservabilità* ed *identificabilità* del sistema. Di seguito applicheremo tali metodologie ad un semplice manipolatore (vedi Figura 5.1). Più in dettaglio ricaveremo la cinematica e la dinamica del manipolatore ed affronteremo il problema dell'*identificabilità* riconducendolo al problema di *osservabilità del sistema aumentato*. Si andranno quindi a determinare le condizioni per cui è possibile ricostruire lo stato completo del sistema, includendo anche i parametri.

5.1 Cinematica diretta

In questo paragrafo si riportano dettagliatamente i passaggi fondamentali per ricavare la cinematica diretta del manipolatore.

Braccio	a_i	d_i	α_i	θ_i
1	l	0	0	θ

Tabella 5.1: D-H per il manipolatore

$$A_1^O = \left[\begin{array}{ccc|c} C_\theta & -S_\theta & 0 & C_\theta l \\ S_\theta & C_\theta & 0 & S_\theta l \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$J(q) = \left[\begin{array}{c} z_0 \times (p - p_0) \\ z_0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} -S_\theta l \\ C_\theta l \\ 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{c} \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{\theta}_E \end{array} \right] = J(q)\dot{\theta} = \left[\begin{array}{c} -S_\theta l \\ C_\theta l \\ 1 \end{array} \right] \dot{\theta}$$

$$p = \left[\begin{array}{c} C_\theta l \\ S_\theta l \\ 0 \end{array} \right]; \quad p_0 = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]; \quad z_0 = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right];$$

5.2 Dinamica

In questo paragrafo si riportano dettagliatamente i passaggi fondamentali per ricavare la dinamica del manipolatore (vedi Equazione 5.1).

$$B(q) = mJ_P^T J_P + J_O^T R_1 I_l^1 R_1^T J_O$$

$$J_P = [j_{P1}] = [z_0 \times (p_l - p_0)] = \begin{bmatrix} -S_\theta d \\ C_\theta d \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$p_l = A_1^O p_l^1 = \left[\begin{array}{ccc|c} C_\theta & -S_\theta & 0 & C_\theta l \\ S_\theta & C_\theta & 0 & S_\theta l \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} -l + d \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\theta d \\ S_\theta d \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_O = [j_{O1}] = [z_0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$I_l^1 = \begin{bmatrix} I_{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_1} \end{bmatrix}$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} C_\theta & -S_\theta & 0 \\ S_\theta & C_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} B(q) &= [md^2 + I_{z_1}] \\ C(q, \dot{q}) &= 0 \end{aligned}$$

$$g(q) = -mg_0^T j_{P1} = -m \begin{bmatrix} 0 & -g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S_\theta d \\ C_\theta d \\ 1 \end{bmatrix} = mgC_\theta d$$

$$B(q)\ddot{\theta} + g(q) = [md^2 + I_{z_1}] \ddot{\theta} + mgC_\theta d = \tau \quad (5.1)$$

5.3 Osservabilità

In riferimento alla dinamica del manipolatore (Equazione 5.1) e definendo i parametri da identificare π_1 e π_2 come :

$$\begin{cases} B(q)\ddot{q} + g(q) = \tau \\ \pi_1 = [md^2 + I_{z_1}] \\ \pi_2 = mgd \\ \pi_1\ddot{\theta} + \pi_2 C_\theta = \tau \end{cases}$$

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\pi = \tau \Rightarrow \begin{bmatrix} \ddot{\theta} & C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \tau$$

si nota subito la proprietà di linearità dei parametri che permette di esplicitare la dinamica del manipolatore stesso in funzione del *regressore* $Y(q, \dot{q}, \ddot{q})$.

Analizzando la dinamica del manipolatore come un sistema non lineare in forma di stato (vedi Equazione 5.2) possiamo riscrivere il tutto come in Equazione 5.3 (nella forma *affine nel controllo*).

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, p, u), & x \in \mathbb{R}^n \\ y = h(x, p, u), & y \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\begin{cases} x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \theta & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T \\ \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = f(x) + g(x)\tau = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{\pi_2}{\pi_1} C_{x_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\pi_1} \end{bmatrix} \tau \\ y = h(x) = x_1 \end{cases} \quad (5.3)$$

Allo scopo di studiarne l'*identificabilità* è conveniente ricondurre tale problema all'analisi di *osservabilità del sistema aumentato* definito in 5.4. L'utilizzo del sistema aumentato permette di definire i parametri come variabili di stato. Studiare l'*osservabilità del sistema aumentato* significa verificare sotto quali condizioni è possibile ricostruire lo stato ed i parametri del sistema non lineare di partenza.

$$\begin{cases} \dot{p} = 0, & p \in \mathbb{R}^q \\ \dot{x} = f(x, p, u), & x \in \mathbb{R}^n \\ y = h(x, p, u), & y \in \mathbb{R}^p \end{cases} = \begin{cases} \xi = [p \ x]^T \\ \dot{\xi} = f(\xi, u), & \xi \in \mathbb{R}^{(n+q)} \\ y = h(\xi, u), & y \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (5.4)$$

Nel caso in esame si ottiene :

$$\begin{cases} \xi = [\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3 \ \xi_4]^T = [\pi_1 \ \pi_2 \ \theta \ \dot{\theta}]^T \\ \dot{\xi} = \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \\ \dot{\xi}_4 \end{bmatrix} = f(\xi) + g(\xi)\tau = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi_4 \\ -\frac{\xi_2}{\xi_1}C_{\xi_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\xi_1} \end{bmatrix} \tau \\ y = h(\xi) = \xi_3 \end{cases}$$

5.3.1 Codistribuzione di osservabilità del sistema *lineare nei parametri*

L'osservabilità dei sistemi non lineari si basa sull'analisi delle dimensioni della *codistribuzione di osservabilità* (Equazione 5.5) costruita utilizzando le *Lie-derivatives*.

$$d\mathcal{O} = \text{span}\{d\Delta_0, d\Delta_1, d\Delta_2, d\Delta_3, \dots\} \quad (5.5)$$

nel nostro caso si ha :

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \{h\} = \{\xi_3\} \\ \Delta_1 &= \{L_f h, L_g h\} \\ \Delta_2 &= \{L_f^2 h, L_f L_g h, L_g L_f h, L_g^2 h\} \\ \Delta_3 &= \{L_f^3 h, L_f^2 L_g h, L_f L_g L_f h, L_f L_g^2 h, L_g L_f^2 h, L_g L_f L_g h, L_g^2 L_f h, L_g^3 h\} \end{aligned}$$

Svolgendo i calcoli per gli elementi precedenti si ottiene :

$$\begin{aligned}
L_f \xi_3 &= \frac{\partial \xi_3}{\partial \xi} f(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi_4 \\ -\frac{\xi_2}{\xi_1} C_{\xi_3} \end{bmatrix} = \xi_4; \\
L_g \xi_3 &= \frac{\partial \xi_3}{\partial \xi} g(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\xi_1} \end{bmatrix} = 0; \\
L_f^2 \xi_3 &= L_f(L_f \xi_3) = L_f \xi_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi_4 \\ -\frac{\xi_2}{\xi_1} C_{\xi_3} \end{bmatrix} = -\frac{\xi_2}{\xi_1} C_{\xi_3}; \\
L_f L_g \xi_3 &= L_f(L_g \xi_3) = 0; \\
L_g L_f \xi_3 &= L_g \xi_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\xi_1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\xi_1}; \\
L_g^2 \xi_3 &= L_g(L_g \xi_3) = 0 \\
L_f^3 \xi_3 &= L_f(L_f^2 \xi_3) = \begin{bmatrix} * & * & \frac{\xi_2}{\xi_1} S_{\xi_3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi_4 \\ -\frac{\xi_2}{\xi_1} C_{\xi_3} \end{bmatrix} = \frac{\xi_2}{\xi_1} S_{\xi_3} \xi_4; \\
L_f^2 L_g \xi_3 &= L_f^2(L_g \xi_3) = 0; \\
L_f L_g L_f \xi_3 &= L_f \left(\frac{1}{\xi_1} \right) = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi_4 \\ -\frac{\xi_2}{\xi_1} C_{\xi_3} \end{bmatrix} = 0; \\
L_f L_g^2 \xi_3 &= 0; \\
L_g L_f^2 \xi_3 &= L_g \left(-\frac{\xi_2}{\xi_1} C_{\xi_3} \right) = \begin{bmatrix} * & * & * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\xi_1} \end{bmatrix} = 0; \\
L_g L_f L_g \xi_3 &= 0; \\
L_g^2 L_f \xi_3 &= L_g(L_g L_f \xi_3) = L_g \xi_4 = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\xi_1} \end{bmatrix} = 0; \\
L_g^3 \xi_3 &= 0;
\end{aligned}$$

Eliminando i termini nulli si arriva ad avere :

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= \{h\} = \{\xi_3\} \\ \Delta_1 &= \{L_f h\} = \{\xi_4\} \\ \Delta_2 &= \{L_f^2 h, L_g L_f h\} = \left\{ -\frac{\xi_2}{\xi_1} C_{\xi_3}, \frac{1}{\xi_1} \right\} \\ \Delta_3 &= \{L_f^3 h\} = \left\{ \frac{\xi_2}{\xi_1} S_{\xi_3} \xi_4 \right\}\end{aligned}$$

$$d\mathcal{O} = \{d\Delta_0, d\Delta_1, d\Delta_2, d\Delta_3\} = \begin{bmatrix} dh \\ dL_f h \\ dL_f^2 h \\ dL_g L_f h \\ dL_f^3 h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \xi_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \left(-\frac{\xi_2}{\xi_1} C_{\xi_3} \right)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \left(\frac{1}{\xi_1} \right)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \left(\frac{\xi_2}{\xi_1} S_{\xi_3} \xi_4 \right)}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Nel caso del sistema aumentato se $\dim(d\mathcal{O}) = n + q$ (in questo caso $n = 2$ e $q = 2$) il sistema risulta essere *localmente osservabile* (in un punto o in un insieme) cioè tra i punti vicini a $\bar{\xi}$, l'unico indistinguibile è $\bar{\xi}$ stesso. L'*osservabilità locale* è una proprietà che non implica l'*osservabilità globale*, come è giustificato attendersi per sistemi non lineari. Sviluppando l'Equazione 5.6 :

$$d\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\xi_2 C_{\xi_3}}{\xi_1^2} & -\frac{C_{\xi_3}}{\xi_1} & \frac{\xi_2 S_{\xi_3}}{\xi_1} & 0 \\ -\frac{1}{\xi_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\xi_4 \xi_2 S_{\xi_3}}{\xi_1^2} & \frac{\xi_4 S_{\xi_3}}{\xi_1} & \frac{\xi_4 \xi_2 C_{\xi_3}}{\xi_1} & \frac{\xi_2 S_{\xi_3}}{\xi_1} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 0^{2 \times 2} & B = I^{2 \times 2} \\ \hline C & D \end{array} \right];$$

La *codistribuzione di osservabilità* ha rango pieno se almeno uno dei seguenti determinanti è diverso da zero :

$$\begin{aligned}
D_1 &= \begin{vmatrix} dh \\ dL_f h \\ dL_f^2 h \\ dL_g L_f h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\xi_2 C_{\xi_3}}{\xi_1^2} & -\frac{C_{\xi_3}}{\xi_1} & \frac{\xi_2 S_{\xi_3}}{\xi_1} & 0 \\ -\frac{1}{\xi_1^2} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0^{2 \times 2} & I^{2 \times 2} \\ D_{11} & D_{12} \end{vmatrix} = \det(D_{11}) \\
D_2 &= \begin{vmatrix} dh \\ dL_f h \\ dL_f^2 h \\ dL_f^3 h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\xi_2 C_{\xi_3}}{\xi_1^2} & -\frac{C_{\xi_3}}{\xi_1} & \frac{\xi_2 S_{\xi_3}}{\xi_1} & 0 \\ -\frac{\xi_4 \xi_2 S_{\xi_3}}{\xi_1^2} & \frac{\xi_4 S_{\xi_3}}{\xi_1} & \frac{\xi_4 \xi_2 C_{\xi_3}}{\xi_1} & \frac{\xi_2 S_{\xi_3}}{\xi_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0^{2 \times 2} & I^{2 \times 2} \\ D_{21} & D_{22} \end{vmatrix} = \det(D_{21}) \\
D_3 &= \begin{vmatrix} dh \\ dL_f h \\ dL_g L_f h \\ dL_f^3 h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\xi_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\xi_4 \xi_2 S_{\xi_3}}{\xi_1^2} & \frac{\xi_4 S_{\xi_3}}{\xi_1} & \frac{\xi_4 \xi_2 C_{\xi_3}}{\xi_1} & \frac{\xi_2 S_{\xi_3}}{\xi_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0^{2 \times 2} & I^{2 \times 2} \\ D_{31} & D_{32} \end{vmatrix} = \det(D_{31})
\end{aligned}$$

$$\det(D_{11}) = -\frac{C_{\xi_3}}{\xi_1^3} = 0 \quad \text{se} \quad \xi_3 = 90^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{N};$$

$$\det(D_{21}) = \left(\frac{\xi_2 C_{\xi_3}}{\xi_1^2} \right) \left(\frac{\xi_4 S_{\xi_3}}{\xi_1} \right) - \frac{\xi_4 \xi_2 S_{\xi_3} C_{\xi_3}}{\xi_1^3} = 0, \quad \text{sempre};$$

$$\det(D_{31}) = -\frac{\xi_4 S_{\xi_3}}{\xi_1^3} = 0 \quad \text{se} \quad \xi_4 = 0 \quad \text{oppure} \quad \xi_3 = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{N}$$

Da notare che $\xi_1 = \pi_1 = [md^2 + I_{z_1}]$ è sempre diverso da zero (per la presenza dell'inerzia I_{z_1}). Un'altro aspetto interessante è quello di verificare l'*identificabilità* del sistema autonomo cioè con ingresso $\tau = 0$. In questo caso la *codistribuzione di osservabilità* è :

$$d\mathcal{O}|_{\tau=0} = \begin{bmatrix} dh \\ dL_f h \\ dL_f^2 h \\ dL_f^3 h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\xi_2 C_{\xi_3}}{\xi_1^2} & -\frac{C_{\xi_3}}{\xi_1} & \frac{\xi_2 S_{\xi_3}}{\xi_1} & 0 \\ -\frac{\xi_4 \xi_2 S_{\xi_3}}{\xi_1^2} & \frac{\xi_4 S_{\xi_3}}{\xi_1} & \frac{\xi_4 \xi_2 C_{\xi_3}}{\xi_1} & \frac{\xi_2 S_{\xi_3}}{\xi_1} \end{bmatrix}$$

Come già evidenziato in precedenza non ha mai rango pieno e quindi il sistema autonomo **non** è *completamente osservabile* e gli stati iniziali $\bar{\xi}$ e $\hat{\xi} = \bar{\xi} + \xi_0$ con

$$\xi_0 \in \ker \{d\mathcal{O}|_{\tau=0}\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

sono **indistinguibili**. Come detto in precedenza il $\text{rank}(d\mathcal{O})$ ci dice se il nostro sistema è o meno *localmente osservabile*, ovvero se abbiamo o meno la possibilità di ricostruire integralmente lo stato. Qualora $d\mathcal{O}$ non abbia massimo rango sarà tuttavia possibile ricostruire un sottoinsieme dello stato (di dimensioni pari al $\text{rank}(d\mathcal{O})$). Analizzando la struttura della matrice $d\mathcal{O}$ e ricollegando il tutto al sistema non lineare di partenza notiamo come, grazie al $\det(B)$ sempre diverso da zero, sia possibile in qualsiasi condizione ricostruirne lo stato (dato che B è una matrice di costanti il sistema 5.3 risulta essere *globalmente osservabile*) e come sia possibile identificarne, parzialmente o totalmente, i parametri solo in particolari condizioni (quelle che mantengono il $\text{rank}(d\mathcal{O}) \geq 3$).

5.3.2 Codistribuzione di osservabilità del sistema *non lineare nei parametri*

In questa sezione si vuole verificare l'*identificabilità* del sistema considerando ogni singolo parametro parte dello stato del *sistema aumentato*. A tale scopo ripercorriamo la procedura fatta per il caso precedente. Si ottiene quindi :

$$\begin{cases} x = [x_1 & x_2]^T = [\theta & \dot{\theta}]^T \\ \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = f(x) + g(x)\tau = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{mgd}{md^2+I_{z_1}}C_{x_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{md^2+I_{z_1}} \end{bmatrix} \tau \\ y = h(x) = x_1 \end{cases}$$

da cui si ricava il seguente *sistema aumentato* :

$$\begin{cases} \xi = [\xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5]^T = [m & d & I_{z_1} & \theta & \dot{\theta}]^T \\ \dot{\xi} = \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \\ \dot{\xi}_4 \\ \dot{\xi}_5 \end{bmatrix} = f(\xi) + g(\xi)\tau = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \xi_5 \\ -\frac{g\xi_1\xi_2}{\xi_1\xi_2^2+\xi_3}C_{\xi_4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\xi_1\xi_2^2+\xi_3} \end{bmatrix} \tau \\ y = h(\xi) = \xi_4 \end{cases}$$

La *codistribuzione di osservabilità* è la seguente :

$$d\mathcal{O} = \text{span}\{d\Delta_0, d\Delta_1, d\Delta_2, d\Delta_3, d\Delta_4, \dots\} \quad (5.7)$$

con :

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \{h\} = \{\xi_4\} \\ \Delta_1 &= \{L_f \xi_4\} = \{\xi_5\} \\ \Delta_2 &= \{L_f \xi_5, L_g \xi_5\} = \left\{ -\frac{g\xi_1\xi_2}{\xi_1\xi_2^2+\xi_3}C_{\xi_4}, \frac{1}{\xi_1\xi_2^2+\xi_3} \right\} \\ \Delta_3 &= \{L_f^2 \xi_5\} = \left\{ \frac{g\xi_1\xi_2}{\xi_1\xi_2^2+\xi_3}S_{\xi_4}\xi_5 \right\} \\ \Delta_4 &= \{L_f^3 \xi_5, L_g L_f^2 \xi_5\} = \left\{ \frac{g\xi_1\xi_2}{\xi_1\xi_2^2+\xi_3}C_{\xi_4}\xi_5^2 - \frac{g^2\xi_1^2\xi_2^2}{(\xi_1\xi_2^2+\xi_3)^2}C_{\xi_4}S_{\xi_4}, \frac{g\xi_1\xi_2}{(\xi_1\xi_2^2+\xi_3)^2}S_{\xi_4} \right\} \end{aligned}$$

$$d\mathcal{O} = \{d\Delta_0, d\Delta_1, d\Delta_2, d\Delta_3, d\Delta_4\} = \begin{bmatrix} dh \\ dL_f h \\ dL_f^2 h \\ dL_g L_f h \\ dL_f^3 h \\ dL_f^4 h \\ dL_g L_f^3 h \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Andando ad analizzare il $rank(d\mathcal{O})$ si nota che qualsiasi sia la combinazione di righe utilizzata insieme alle prime due per ottenere una matrice quadrata di dimensione 5 otteniamo sempre $rank(d\mathcal{O}) < 5$. Ci sono delle combinazioni che portano ad avere $rank(d\mathcal{O}) = 4$ ovvero la possibilità di *identificare* 4 delle 5 variabili di stato ammessa la conoscenza di una. Nel caso in cui $rank(d\mathcal{O}) = 4$, gli stati iniziali $\bar{\xi}$ e $\hat{\xi} = \bar{\xi} + \xi_0$ con

$$\xi_0 \in \ker \{d\mathcal{O}\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\xi_2^2} \\ \frac{-1}{\xi_1 \xi_2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

risultano essere **indistinguibili**. Qualora sia noto uno dei tre parametri fisici (m , d o I_{z_1}) la *codistribuzione di osservabilità* risulta avere rango massimo (ovvero 4). Questo evidenzia che è indispensabile avere un numero minimo di parametri non noti da identificare.

5.4 Ricostruzione algebrica

In riferimento al sistema *lineare nei parametri* (Sezione 5.3.1) qualora $rank(d\mathcal{O}) = 4$ siamo certi che il sistema 5.3 è identificabile completamente. Un particolare metodo per ricavare sia lo stato che i parametri è quello della ricostruzione algebrica :

si ottengono delle equazioni algebriche derivando l'uscita del sistema $y = x_1$. Tale metodo consiste nel mettere a sistema le equazioni ottenute dal derivare $(n + q - 1)$ volte l'uscita ottenendo così un sistema di $(n + q)$ equazioni in $(n + q)$ incognite facilmente risolvibile per via algebrica.

$$\left\{ \begin{array}{l} y = x_1 \\ \dot{y} = \dot{x}_1 = x_2 \\ \ddot{y} = \dot{x}_2 = -\frac{\pi_2}{\pi_1} C_y + \frac{\tau}{\pi_1} \\ \dddot{y} = \frac{\pi_2}{\pi_1} S_y \dot{y} + \frac{\dot{\tau}}{\pi_1} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ \pi_1 = \frac{-\pi_2 C_y + \tau}{\ddot{y}} \\ \pi_2 = \frac{-\dot{\tau} \dot{y} + \tau \ddot{y}}{\ddot{y} S_y \dot{y} + \dot{y} C_y} \end{array} \right.$$

Ovviamente non sempre è possibile ottenere un'identificazione dei singoli parametri (ad esempio m, d, I_{z_1}) infatti una volta ottenuti π_1 e π_2 bisogna avere la conoscenza di almeno due dei quattro parametri per riuscire ad ottenere gli altri (ad esempio m e g per ricavare d e I_{z_1}).

5.5 Linearizzazione Ingresso-Stato

Una volta ottenuti i parametri del modello può essere interessante procedere alla *linearizzazione ingresso-stato* del manipolatore. Per la teoria della *linearizzazione ingresso-stato* si rimanda ai testi specifici (vedi [2], [3] e [4]); di seguito ci limiteremo ad illustrare i passaggi fondamentali per l'applicazione di tale metodo.

- Costruire i *vettori di campo* $\mathbf{g}, ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g}, \dots, ad_{\mathbf{f}}^{m-1}\mathbf{g}$ per il sistema assegnato;
- Verificare se le condizioni di controllabilità ed involutività sono soddisfatte :
 - *Controllabilità* : vettori di campo $[\mathbf{g}, ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g}, \dots, ad_{\mathbf{f}}^{m-1}\mathbf{g}]$ linearmente indipendenti;
 - *Involutività* : $\forall i, j = 0, \dots, (n - 2)$
 $rank(\mathbf{g}, ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g}, \dots, ad_{\mathbf{f}}^{m-2}\mathbf{g}) = rank(\mathbf{g}, ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g}, \dots, ad_{\mathbf{f}}^{m-2}\mathbf{g}, [ad_{\mathbf{f}}^i\mathbf{g}, ad_{\mathbf{f}}^j\mathbf{g}]);$
- Se entrambe le condizioni sono soddisfatte, trovare il primo stato z_1 dalle equazioni :

$$\begin{aligned} \nabla_{z_1} ad_{\mathbf{f}}^i \mathbf{g} &= 0 \quad i = 0, \dots, (n - 2) \\ \nabla_{z_1} ad_{\mathbf{f}}^{n-1} \mathbf{g} &\neq 0 \end{aligned}$$

- Calcolare la trasformazione di stato $z(x) = [z_1 \ L_f z_1 \ \dots \ L_f^{n-1} z_1]^T$ e la trasformazione di ingresso $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ con :

$$\alpha(x) = -\frac{L_f^n z_1}{L_g L_f^{n-1} z_1}$$

$$\beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} z_1}$$

$$\begin{cases} x = [x_1 \ x_2]^T = [\theta \ \dot{\theta}]^T \\ \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = f(x) + g(x)u = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{\pi_2}{\pi_1} C_{x_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\pi_1} \end{bmatrix} \tau \\ y = x_1 \end{cases} \quad (5.9)$$

In riferimento al sistema 5.9 eseguiamo i passi sopra descritti. Per quanto riguarda il primo passo, ricordando che $n = 2$ e

$$ad_f^i \mathbf{g} = [\mathbf{f}, ad_f^{i-1} \mathbf{g}]$$

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = L_f \mathbf{g} - L_g \mathbf{f} = \nabla \mathbf{g} \mathbf{f} - \nabla \mathbf{f} \mathbf{g} = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}$$

otteniamo i vettori di campo :

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\pi_1} \end{bmatrix}$$

$$ad_f^1 \mathbf{g} = [\mathbf{f}, \mathbf{g}] = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{\pi_2}{\pi_1} C_{x_1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\pi_2}{\pi_1} S_{x_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\pi_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\pi_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

È molto semplice verificare sia la proprietà di *controllabilità* che di *involutività* infatti i vettori di campo :

$$[\mathbf{g} \quad ad_f^1 \mathbf{g}] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\pi_1} \\ \frac{1}{\pi_1} & 0 \end{bmatrix}$$

sono *linearmente indipendenti* e dato che \mathbf{g} è un vettore costante la proprietà di *involutività* è automaticamente soddisfatta. Risolvendo il sistema di equazioni :

$$\begin{cases} \nabla_{z_1} ad_{\mathbf{f}}^0 \mathbf{g} = \frac{\partial z_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g} = 0 \\ \nabla_{z_1} ad_{\mathbf{f}}^1 \mathbf{g} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\pi_1} \end{bmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\pi_1} \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z_1}{\partial x_2} \frac{1}{\pi_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z_1}{\partial x_2} = 0 \\ -\frac{\partial z_1}{\partial x_1} \frac{1}{\pi_1} \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \neq 0 \end{cases}$$

si ottiene che z_1 deve essere solo funzione di x_1 . La soluzione più semplice della precedente equazione è $z_1 = x_1$. Lo stato z_2 si ricava come mostrato nell'ultimo passo, ovvero $z_2 = L_{\mathbf{f}} z_1 = x_2$. La trasformazione di ingresso risulta essere quindi :

$$\tau = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (5.10)$$

dove

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= -\frac{L_{\mathbf{f}}^2 z_1}{L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^1 z_1} = \pi_2 C_{x_1} \\ \beta(x) &= \frac{1}{L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^1 z_1} = \pi_1 \end{aligned}$$

Come risultato delle precedenti trasformazioni di stato e di ingresso concludiamo con il seguente sistema di equazioni lineari :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = \dot{x}_2 = -\frac{\pi_2}{\pi_1} C_{x_1} + \frac{\tau}{\pi_1} = -\frac{\pi_2}{\pi_1} C_{x_1} + \frac{\alpha(x) + \beta(x)v}{\pi_1} = v \end{cases}$$

Controllore basato sulla linearizzazione Ingresso-Stato

Con l'equazione di stato trasformate in forma lineare possiamo facilmente ricavare un controllore sia per la stabilizzazione, sia per un inseguimento di traiettoria. La dinamica lineare equivalente può essere espressa come :

$$\ddot{z}_1 = v$$

Assumiamo di volere che la posizione del giunto rotoidale z_1 insegua una traiettoria specificata $z_{d1}(t)$. La legge di controllo viene :

$$v = \ddot{z}_{d1} - a_1 \dot{\tilde{z}}_1 - a_0 \tilde{z}_1$$

dove $\tilde{z}_1 = z_1 - z_{d1}$ porta ad ottenere la seguente dinamica dell'errore :

$$\ddot{\tilde{z}}_1 + a_1 \dot{\tilde{z}}_1 + a_0 \tilde{z}_1 = 0$$

La dinamica di cui sopra è *astintoticamente stabile* scegliendo in maniera opportuna le costanti positive a_i . Per ricavare l'ingresso fisico τ del sistema è possibile utilizzare l'Equazione 5.10.

5.6 Conclusioni

La trattazione svolta, se pur semplice, aveva lo scopo di illustrare l'analisi di sistemi non lineari. Nel caso in esame (sistema di Equazioni 5.3) il grado relativo r coincide con il grado del sistema n (occorre derivare due volte l'uscita affinché vi compaia l'ingresso); di conseguenza non vi è alcuna dinamica interna. Qualora avessimo avuto $r < n$ sarebbe tuttavia stato possibile eseguire una trasformazione di coordinate tale da isolare la dinamica interna e studiarne la stabilità attraverso la *zero-dinamica*.

Appendice A

Codice Matlab

A.1 Cinematica_diretta.m

```
function [A1primo_O , A2primo_O , A1sec_O , A2sec_O , A1terzo_O , A2terzo_O , ...  
          TEO, J, H, G, Sa, Sna] = Cinematica_diretta  
  
% Impostazione variabili simboliche  
syms xe ye phi q1 q2 q3 theta1 theta2 theta3 l L real  
  
% Trasformazioni omogenee dalla terna di taglio  
% alla terna dell'end-effector TAE, TBE, TCE  
  
TAE_E = [ cos(phi) sin(phi) 0 0;  
          -sin(phi) cos(phi) 0 -l/sqrt(3);  
          0 0 1 0;  
          0 0 0 1];  
  
TBE_E = [ cos(phi) sin(phi) 0 l/2;  
          -sin(phi) cos(phi) 0 l/(2*sqrt(3));  
          0 0 1 0;  
          0 0 0 1];  
  
TCE_E = [ cos(phi) sin(phi) 0 -l/2;  
          -sin(phi) cos(phi) 0 l/(2*sqrt(3));  
          0 0 1 0;  
          0 0 0 1];  
  
% Trasformazione omogenea dalla terna base all'end-effector TEO  
TEO = [cos(phi) -sin(phi) 0 xe;  
       sin(phi)  cos(phi) 0 ye;  
       0 0 1 0  
       0 0 0 1];
```

```
% Trasformazioni omogenee dalla terna di taglio alla terna base
% a passando dalla terna dell'end-effector : TAE_O, TBE_O, TCE_O
```

```
TAE_O = simple(TEO*TAE_E);
TBE_O = simple(TEO*TBE_E);
TCE_O = simple(TEO*TCE_E);
```

```
% Trasformazioni omogenee dalla terna di taglio alla terna base
% dei vari bracci seriali utilizzando la convenzione
% di Denavit-Hartenberg
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%%                               Seriale q1                               %%
%%-----%%
%%      Braccio | ai | di | alphas | thetai |                               %%
%%-----%%
%%      1primo | 0 | 0 | pi/2 | theta1 |                               %%
%%      2primo | 0 | q1 | -pi/2 | 0 |                               %%
%%-----%%
%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
A1primo_O = [cos(theta1) 0 sin(theta1) 0;
             sin(theta1) 0 -cos(theta1) 0;
             0 1 0 0;
             0 0 0 1];
```

```
A2primo_1primo = [1 0 0 0;
                  0 0 1 0;
                  0 -1 0 q1;
                  0 0 0 1];
```

```
A2primo_O = A1primo_O*A2primo_1primo;
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%%                               Seriale q2                               %%
%%-----%%
%%      Braccio | ai | di | alphas | thetai |                               %%
%%-----%%
%%      0sec   | L | 0 | 0 | 0 |                               %%
%%      1sec   | 0 | 0 | pi/2 | theta2 |                               %%
%%      2sec   | 0 | q2 | -pi/2 | 0 |                               %%
%%-----%%
%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
A0sec_O = [1 0 0 L;
           0 1 0 0;
           0 0 1 0];
```



```

Vincolo_3 = TCE_O(1:2,4) - A2terzo_O(1:2,4);

%Vettori p di ogni gamba
p_primo = A2primo_O(1:3,4);
p_sec   = A2sec_O(1:3,4);
p_terzo = A2terzo_O(1:3,4);

%Vettori p0 di ogni gamba
p0_primo = [0; 0; 0];
p0_sec   = A0sec_O(1:3,4);
p0_terzo = A0terzo_O(1:3,4);

%z0 di ogni gamba
z0_primo = [0; 0; 1];
z0_sec   = A0sec_O(1:3,3);
z0_terzo = A0terzo_O(1:3,3);

%z1 di ogni gamba
z1_primo = A1primo_O(1:3,3);
z1_sec   = A1sec_O(1:3,3);
z1_terzo = A1terzo_O(1:3,3);

J_1 = [cross(z0_primo, p_primo-p0_primo) z1_primo;
       z0_primo                          [0;0;0]];
J_1 = [J_1(1:2,:); J_1(6,:)];

J_2 = [cross(z0_sec, p_sec-p0_sec) z1_sec;
       z0_sec                       [0;0;0]];
J_2 = [J_2(1:2,:); J_2(6,:)];

J_3 = [cross(z0_terzo, p_terzo-p0_terzo) z1_terzo;
       z0_terzo                          [0;0;0]];
J_3 = [J_3(1:2,:); J_3(6,:)];

J = blkdiag(J_1, J_2, J_3);

pAE_E = TAE_E(1:3,4);
pAE_E = [0      -pAE_E(3)  pAE_E(2)
         -pAE_E(3)  0      -pAE_E(1)
         -pAE_E(2)  pAE_E(1)  0];

pBE_E = TBE_E(1:3,4);
pBE_E = [0      -pBE_E(3)  pBE_E(2)
         -pBE_E(3)  0      -pBE_E(1)
         -pBE_E(2)  pBE_E(1)  0];

pCE_E = TCE_E(1:3,4);
pCE_E = [0      -pCE_E(3)  pCE_E(2)
         -pCE_E(3)  0      -pCE_E(1)];

```

```

        -pCE_E(2)  pCE_E(1)  0];

B_AE = [eye(2) -pAE_E(1:2,3)
        zeros(1,2) eye(1)];

B_BE = [eye(2) -pBE_E(1:2,3)
        zeros(1,2) eye(1)];

B_CE = [eye(2) -pCE_E(1:2,3)
        zeros(1,2) eye(1)];

B = [B_AE; B_BE; B_CE];

G = B';

F = [0 0 1]';

H = [1 0 0
     0 1 0];

H = blkdiag(H, H, H);

A = [H*J -H*G'];

Sa = [0 1 0 0 0 0;0 0 0 1 0 0;0 0 0 0 0 1];
Sna = [1 0 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;0 0 0 0 1 0];

JaJna = J*[Sa;Sna]^-1;

Ja = JaJna(:,1:3);
Jna = JaJna(:,4:6);
HJa = H*Ja;
HJna = H*Jna;
HG = -H*G';
A = simple([H*Ja H*Jna -H*G']);

```

A.2 kernel_A.m

```

function ker_A = kernel_A(Avinc)

syms u4 u5 u6 u7 u8 u9

Eq1 = Avinc(1,:) * [1;0;0;u4;u5;u6;u7;u8;u9];
Eq2 = Avinc(2,:) * [1;0;0;u4;u5;u6;u7;u8;u9];
Eq3 = Avinc(3,:) * [1;0;0;u4;u5;u6;u7;u8;u9];
Eq4 = Avinc(4,:) * [1;0;0;u4;u5;u6;u7;u8;u9];
Eq5 = Avinc(5,:) * [1;0;0;u4;u5;u6;u7;u8;u9];
Eq6 = Avinc(6,:) * [1;0;0;u4;u5;u6;u7;u8;u9];

sol = solve(Eq1, Eq2, Eq3, Eq4, Eq5, Eq6, u4, u5, u6, u7, u8, u9);
u41 = sol.u4;
u51 = sol.u5;
u61 = sol.u6;
u71 = sol.u7;
u81 = sol.u8;
u91 = sol.u9;

Eq1 = Avinc(1,:) * [0;1;0;u4;u5;u6;u7;u8;u9];
Eq2 = Avinc(2,:) * [0;1;0;u4;u5;u6;u7;u8;u9];
Eq3 = Avinc(3,:) * [0;1;0;u4;u5;u6;u7;u8;u9];
Eq4 = Avinc(4,:) * [0;1;0;u4;u5;u6;u7;u8;u9];
Eq5 = Avinc(5,:) * [0;1;0;u4;u5;u6;u7;u8;u9];
Eq6 = Avinc(6,:) * [0;1;0;u4;u5;u6;u7;u8;u9];

sol = solve(Eq1, Eq2, Eq3, Eq4, Eq5, Eq6, u4, u5, u6, u7, u8, u9);
u42 = sol.u4;
u52 = sol.u5;
u62 = sol.u6;
u72 = sol.u7;
u82 = sol.u8;
u92 = sol.u9;

Eq1 = Avinc(1,:) * [0;0;1;u4;u5;u6;u7;u8;u9];
Eq2 = Avinc(2,:) * [0;0;1;u4;u5;u6;u7;u8;u9];
Eq3 = Avinc(3,:) * [0;0;1;u4;u5;u6;u7;u8;u9];
Eq4 = Avinc(4,:) * [0;0;1;u4;u5;u6;u7;u8;u9];
Eq5 = Avinc(5,:) * [0;0;1;u4;u5;u6;u7;u8;u9];
Eq6 = Avinc(6,:) * [0;0;1;u4;u5;u6;u7;u8;u9];

sol = solve(Eq1, Eq2, Eq3, Eq4, Eq5, Eq6, u4, u5, u6, u7, u8, u9);
u43 = sol.u4;
u53 = sol.u5;
u63 = sol.u6;
u73 = sol.u7;

```

```
u83 = sol.u8;
u93 = sol.u9;

ker_A = [1  0  0
         0  1  0
         0  0  1
         u41 u42 u43
         u51 u52 u53
         u61 u62 u63
         u71 u72 u73
         u81 u82 u83
         u91 u92 u93];

ker_A = simple(ker_A);
```

Appendice B

Codice Matlab

B.1 Cinematica_inversa.m

```
function [det_J E_0_i] = Cinematica_inversa()

% E_0_i => Coordinate dei giunti rotoidali sull'E.E.
%         rispetto alla terna base

% E_E_i => Coordinate dei giunti rotoidali sull'E.E.
%         rispetto alla terna solidale all'E.E.

% P_E_0 => Posizione del centro dell'E.E. rispetto
%         alla terna base

% Reo_E => Matrice di rotazione dalla terna dell'E.E.
%         alla terna base

% B_0_i => Coordinate dei giunti rotoidali alla base rispetto
%         alla terna base

clc
%clear all
syms xe ye phi l L real
l = 10;
L = 100;
xe = L/2
ye = L/(sqrt(3)*2);
phi = 0;

P_E_0 = [xe; ye];
Reo_E = [cos(phi) -sin(phi); sin(phi) cos(phi)];

%E_E_i = [x1,x2,x3;y1,y2,y3];
```

```

E_E_i = [0, l/2, -l/2; -l/sqrt(3), l/(2*sqrt(3)), l/(2*sqrt(3))];

%E_0_i = [x1,x2,x3;y1,y2,y3]
E_0_i = [P_E_0 + Reo_E*E_E_i(:,1), P_E_0 + Reo_E*E_E_i(:,2), ...
        P_E_0 + Reo_E*E_E_i(:,3)]

B_0_i = [0, L, L/2; 0, 0, L*sqrt(3)/2];

%Calcolo della lunghezza delle gambe Q
G1 = E_0_i(:,1) - B_0_i(:,1);
G2 = E_0_i(:,2) - B_0_i(:,2);
G3 = E_0_i(:,3) - B_0_i(:,3);
Q1 = sqrt(G1'*G1);
Q2 = sqrt(G2'*G2);
Q3 = sqrt(G3'*G3);

%Calcolo delle theta di base
th_1 = atan(G1(2,:)/G1(1,:))
th_2 = atan(G2(2,:)/G2(1,:))
th_3 = atan(G3(2,:)/G3(1,:))

%Calcolo delle theta di base con convenzione DH
th_1-dh = (atan(G1(2,:)/G1(1,:))+pi/2)
th_2-dh = (atan(G2(2,:)/G2(1,:))+3*pi/2)
th_3-dh = (atan(G3(2,:)/G3(1,:))+7*pi/6)

%Calcolo delle gamma sull'end-effector
T_E_O = [Reo_E [0;0] P_E_0; 0 0 1 0; 0 0 0 1]^1;

%Trasformazione dalla terna EE alla terna base
G1_E = T_E_O*[G1;0;1];
G2_E = T_E_O*[G2;0;1];
G3_E = T_E_O*[G3;0;1];
gamma_1 = atan(G1_E(2,:)/G1_E(1,:));
gamma_2 = atan(G2_E(2,:)/G2_E(1,:));
gamma_3 = atan(G3_E(2,:)/G3_E(1,:));

% theta_i = giunti rotoidali
% th_i = simple([abs(th_1)+pi/2; (3*pi)/2-abs(th_2); ...
%             abs(th_3)+(4*pi)/3]);
th_i = simple([th_1; th_2; th_3]);

% q_i = giunti prismatici
q_i = simple([Q1; Q2; Q3]);

% gamma_i = giunti rotoidali all'E.E.
gamma_i = simple([gamma_1; gamma_2; gamma_3]);

var = [xe, ye, phi];

```

```
% Calcolo dello Jacobiano analitico
J = jacobian(q_i , var)

% Calcolo dello Jacobiano analitico inverso
Jinv = J^-1;

% Calcolo dello Jacobiano analitico trasposto
Jtras = J';

% Calcolo dello Jacobiano inverso smorzato
% con k = fattore di smorzamento
% k = 1;
% Jsmorz = J'*(J*J'+k^2*eye(3))^-1
det_J = simple(det(J));
```

Bibliografia

- [1] L. Sciavicco and B. Siciliano. *Robotica industriale : Modellistica e controllo di manipolatori*. McGraw-Hill, 2000.
- [2] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems - Third Edition*. Springer, 1995.
- [3] Jean-Jacques E. Slotine and Weiping Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1990.
- [4] A. Bicchi. *Appunti del Corso di Robotica*. Centro E. Piaggio, 2005/2006.
- [5] R. M. Murray, Z. Li, and S. S. Sastry. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press, 1994.
- [6] M. Spong and M. Vidyasagar. *Robot Dynamics and Control*. John Wiley and Sons, 1989.
- [7] A. Bicchi and D. Prattichizzo. Manipulability of cooperating robots with unactuated joints and closed-chain mechanisms. *IEEE Trans. Robot. Automat.*, vol. 16, no. 4, pp. 336-345, Aug. 2000.
- [8] A. Bicchi, C. Melchiorri, and D. Balluchi. On the mobility and manipulability of general multi limb robots. *IEEE Trans. Robot. Automat.*, vol. 11, no. 2, pp. 215-228, Apr. 1995.
- [9] D. Prattichizzo and J. Trinkle. Grasping. In *Handbook on Robotics*, chapter 28. Springer, 2008.