

UNIVERSITA' DI PISA  
Dipartimento di Ingegneria Meccanica, Nucleare e della Produzione  
FACOLTA' DI INGEGNERIA  
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Automazione

# Metodo diretto per il calcolo della dinamica nel regressore

**Robotica**

**Docente supervisore**

Ing. Marco Gabiccini

**Supervisore**

Ing. Andrea Bracci

**Studenti**

Davide De Carli

Marco Fredianelli

Anno Accademico 2007/2008



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Formulazione del problema</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Calcolo diretto del regressore</b>	<b>9</b>
3.1	Termini derivanti dall'espressione dell'energia cinetica . . . . .	9
3.1.1	Termini derivanti da $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^{(i)}}{\partial \dot{q}} \right)^T$ . . . . .	10
3.1.2	Termini derivanti da $\left( \frac{\partial T^{(i)}}{\partial q} \right)^T$ . . . . .	13
3.2	Termini derivanti dall'espressione dell'energia potenziale . . . . .	15
3.3	Costruzione del Regressore . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Controllo adattativo e calcolo diretto del regressore di Slotine-Li</b>	<b>17</b>
<b>5</b>	<b>Calcolo diretto del regressore per un manipolatore di Stanford</b>	<b>21</b>
5.1	Studio di cinematica diretta, cinematica differenziale e dinamica . . .	22
5.2	Calcolo diretto della dinamica nel regressore . . . . .	27
<b>6</b>	<b>Controllo adattativo di Slotine-Li per un manipolatore di Stanford</b>	<b>28</b>
<b>7</b>	<b>Appendice</b>	<b>33</b>
<b>8</b>	<b>Bibliografia</b>	<b>38</b>

# Elenco delle figure

2.1	Sistemi di riferimento link i-esimo . . . . .	8
4.1	Schema a blocchi controllo adattativo di Slotine-Li . . . . .	18
5.1	Manipolatore di Stanford . . . . .	21
5.2	Convenzione di Denavit-Hartenberg per un manipolatore di Stanford	23
6.1	Inseguimento del riferimento della variabile di giunto $q_1$ . . . . .	29
6.2	Inseguimento del riferimento della variabile di giunto $q_2$ . . . . .	29
6.3	Inseguimento del riferimento della variabile di giunto $q_3$ . . . . .	30
6.4	Inseguimento del riferimento della variabile di giunto $q_4$ . . . . .	30
6.5	Inseguimento del riferimento della variabile di giunto $q_5$ . . . . .	31
6.6	Inseguimento del riferimento della variabile di giunto $q_6$ . . . . .	31
6.7	Inseguimento del riferimento dell'end effector (componenti x,y,z) . . .	32

# Capitolo 1

## Introduzione

Le equazioni del moto di un sistema meccanico scleronomo possono essere scritte direttamente nella forma

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (1.1)$$

dove il prodotto  $B(q)\ddot{q}$  rappresenta le forze d'inerzia corrispondenti alle accelerazioni tangenziali,  $C(q, \dot{q})\dot{q}$  i termini relativi alle accelerazioni centripete e di Coriolis,  $G(q)$  le forze gravitazionali ed elastiche dipendenti dall'energia potenziale  $U(q)$  del sistema e  $\tau$  le forze generalizzate attive non conservative. Quest'ultimo termine, nel caso di un manipolatore robotico, rappresenta le forze e le coppie ai giunti e le forze d'interazione con l'ambiente con effetto riportato sui giunti.

Considerando un opportuno insieme di parametri dinamici  $\pi = [\pi_1 \pi_2 \dots \pi_r]^T$ , è possibile scrivere le equazioni della dinamica in una forma lineare del tipo

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q}, \delta)\pi = \tau \quad (1.2)$$

dove  $Y(q, \dot{q}, \ddot{q}, \delta) \in \mathfrak{R}^{n \times r}$  è la matrice *regressore* funzione di  $q, \dot{q}, \ddot{q}$  e dei parametri geometrici  $\delta$ .

La possibilità di condurre le equazioni dinamiche del sistema nella forma (1.2) lineare nei parametri  $\pi$  garantisce l'applicabilità di leggi di controllo di tipo adattivo. Questa rappresentazione è quindi utile per l'identificazione dei parametri dinamici del sistema.

L'approccio classico adoperato per ottenere tale formulazione lineare consiste nell'applicazione delle equazioni di Lagrange considerando l'energia globale del sistema.

---

Successivamente, mediante una particolare e spesso non banale scelta dei parametri dinamici, i coefficienti che moltiplicano i parametri individuati sono raccolti nel regressore.

L'obiettivo del presente lavoro è la formalizzazione di un metodo diretto e sistematico utile per il calcolo del regressore e del corrispondente vettore dei parametri. La forma lineare nei parametri dinamici è ricavata direttamente considerando il Lagrangiano come somma dei contributi di ciascun link all'energia cinetica  $T(q, \dot{q})$  e potenziale  $U(q)$ ; il vettore dei parametri adoperato per ognuno dei link è

$$\pi_i = [m_i \ m_i l_{G_{ix}} \ m_i l_{G_{iy}} \ m_i l_{G_{iz}} \ \bar{J}_{ixx} \ \bar{J}_{ixy} \ \bar{J}_{ixz} \ \bar{J}_{iyy} \ \bar{J}_{iyz} \ \bar{J}_{izz}]^T \in \mathfrak{R}^{10 \times 1} \quad (1.3)$$

dove  $m_i$  rappresenta la massa,  $m_i l_{G_i}$  e  $J_i$  costituiscono i momenti primi e secondi di inerzia del link  $i$ -esimo.

Successivamente si verifica l'efficienza di tale approccio considerando come caso di studio una catena seriale costituita da un manipolatore di Stanford.

## Capitolo 2

### Formulazione del problema

La linearità nei parametri dinamici inerziali delle equazioni del moto di un manipolatore ad  $n$  gradi di libertà garantisce la possibilità di scrivere tali relazioni nella forma (1.2).

Le proprietà inerziali del link  $i$ -esimo della catena siano definite dal vettore dei parametri  $\pi^{(i)} \in \mathfrak{R}^{r_i \times 1}$ . Inoltre siano  $T^{(i)}(q, \dot{q})$  e  $U^{(i)}(q)$  rispettivamente l'energia cinetica e potenziale associate al link  $i$ -esimo. Il Lagrangiano complessivo del sistema può essere definito considerando la somma dei contributi di ciascun link all'energia cinetica e potenziale:

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q) = \sum_{i=1}^n (T^{(i)}(q, \dot{q}) - U^{(i)}(q)) = \sum_{i=1}^n L^{(i)}(q, \dot{q}). \quad (2.1)$$

Allo stesso modo, adoperando le equazioni di Lagrange, le forze di inerzia e conservative globali possono essere scritte come

$$\left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right]^T = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial L^{(i)}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L^{(i)}}{\partial q} \right]^T = \tau. \quad (2.2)$$

Considerando i contributi di ciascun link è possibile partizionare il regressore  $Y$  e il vettore dei parametri  $\pi$  ottenendo la relazione

$$\sum_{i=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial L^{(i)}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L^{(i)}}{\partial q} \right]^T \equiv \sum_{i=1}^n Y^{(i)} \pi^{(i)} \quad (2.3)$$

dove  $Y^{(i)} \in \mathfrak{R}^{n \times r_i}$  è il blocco della matrice regressore relativo al link  $i$ -esimo e  $\pi^{(i)} \in \mathfrak{R}^{r_i \times 1}$  è la corrispondente porzione del vettore dei parametri dinamici.

Quindi avendo  $n$  corpi rigidi si ottengono  $n$  vettori partizione dei parametri e  $n$  blocchi regressore in modo che globalmente  $Y = [Y^{(1)} \dots Y^{(1)}] \in \mathfrak{R}^{n \times r}$  e  $\pi = [\pi^{(1)} \dots \pi^{(n)}]^T \in \mathfrak{R}^{r \times 1}$ , con  $r = \sum_{i=1}^n r_i$ .

Esplicitando le energia cinetica e potenziale relative al generico link  $i$  si ha

$$\left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T^{(i)}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T^{(i)}}{\partial q} + \frac{\partial U^{(i)}}{\partial q} \right]^T \equiv Y^{(i)} \pi^{(i)}. \quad (2.4)$$

A questo punto, considerando i sistemi di riferimento baricentrico, centrato in  $G_i$ , e di Denavit-Hartenberg  $\{i\}$ , centrato in  $O_i$ , relativi al link  $i$ -esimo e rappresentati in figura 2, si definiscono l'energia cinetica  $T^{(i)}$  e potenziale  $U^{(i)}$  in modo da poter mettere in evidenza i termini inerziali.

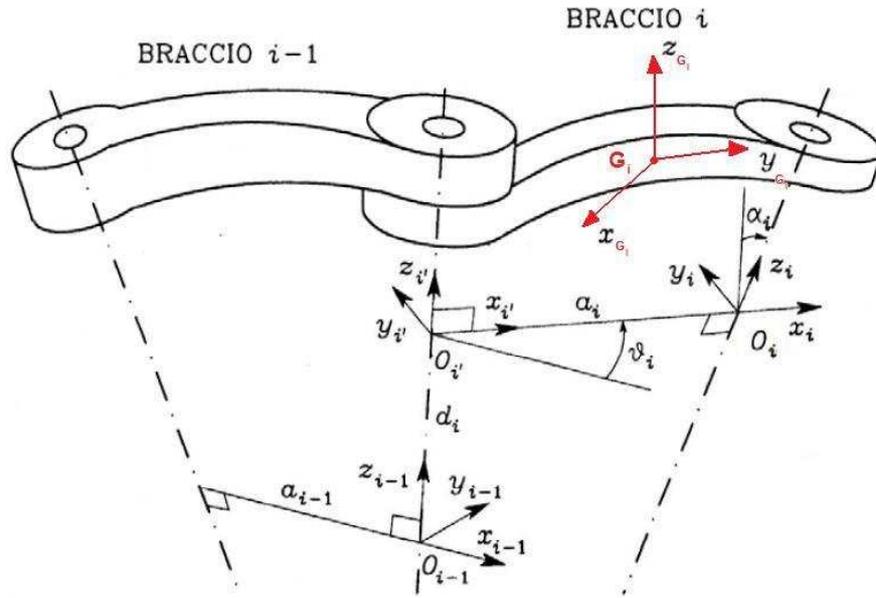


Figura 2.1: Sistemi di riferimento link  $i$ -esimo

# Capitolo 3

## Calcolo diretto del regressore

### 3.1 Termini derivanti dall'espressione dell'energia cinetica

Si considera l'espressione dell'energia cinetica  $T^{(i)}$  del link  $i$ -esimo ottenuta prendendo il baricentro  $G_i$  e il tensore d'inerzia baricentrico  ${}^i I_{G_i}$  con componenti in terna  $\{S_i\}$  centrata in  $O_i$ . Adoperando il sistema di riferimento fisso  $\{S_0\}$ , solidale alla base del manipolatore, è possibile applicare il teorema di König:

$$T^{(i)} = \frac{1}{2} m_i {}^0 v_{G_i}^T {}^0 v_{G_i} + \frac{1}{2} {}^i \omega_i^T {}^i I_{G_i} {}^i \omega_i \quad (3.1)$$

Inoltre si ha:

$${}^i \omega_i = {}^i R_0 {}^0 \omega_i = {}^0 R_i^T {}^0 \omega_i. \quad (3.2)$$

Successivamente si esprimono le velocità lineari e angolari del link in funzione delle velocità ai giunti  $\dot{q}$  tramite l'utilizzo dei Jacobiani relativi ai frames di Denavit-Hartenberg:

$$\begin{aligned} {}^0 v_{G_i} &= {}^0 v_i + {}^0 \omega_i \times {}^0 P_{iG_i} = J_{v_i} \dot{q} + J_{\omega_i} \dot{q} \times {}^0 R_i P_{iG_i} \\ {}^0 \omega_i &= J_{\omega_i} \dot{q}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

dove  $P_{iG_i}$  indica il vettore posizione del baricentro  $G_i$  del link  $i$ -esimo definito rispetto al frame  $\{i\}$ ,  $J_{v_i}$  e  $J_{\omega_i}$  rappresentano rispettivamente il Jacobiano di posizione e di orientazione dell'origine del sistema di riferimento  $i$ -esimo di Denavit-Hartenberg.

Sostituendo le relazioni (3.2) e (3.3) nell'espressione (3.1) dell'energia cinetica, si ottiene:

$$T^{(i)} = \frac{1}{2} m_i (\dot{q}^T J_{v_i}^T + (J_{\omega_i} \dot{q} \times {}^0R_i P_{iG_i})^T) (J_{v_i} \dot{q} + J_{\omega_i} \dot{q} \times {}^0R_i P_{iG_i}) + \frac{1}{2} \dot{q}^T (J_{\omega_i}^T {}^0R_i {}^iI_{G_i} {}^0R_i^T J_{\omega_i}) \dot{q}. \quad (3.4)$$

Considerando l'operatore *skew* definito come

$$S(\mathbf{f}) = S([f_1 \quad f_2 \quad f_3]^T) = \begin{pmatrix} 0 & -f_3 & f_2 \\ f_3 & 0 & -f_1 \\ -f_2 & f_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

La matrice *skew* risultante è antisimmetrica ( $S(\mathbf{f}) = -S(\mathbf{f})^T$ ) e, considerando una matrice di rotazione  $R$  e un vettore  $a$ , si ha che  $S(Ra) = RS(a)R^T$ . Utilizzando queste ultime relazioni, si ottiene la seguente espressione dell'energia cinetica:

$$T^{(i)} = \frac{1}{2} m_i \dot{q}^T (J_{v_i}^T J_{v_i}) \dot{q} - \frac{1}{2} m_i \dot{q}^T \{ J_{v_i}^T S({}^0R_i P_{iG_i}) J_{\omega_i} \} \dot{q} + \frac{1}{2} m_i \dot{q}^T \{ J_{\omega_i}^T S({}^0R_i P_{iG_i}) J_{v_i} \} \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \{ J_{\omega_i}^T {}^0R_i [{}^iI_{G_i} + m_i S^T(P_{iG_i}) S(P_{iG_i})] {}^0R_i^T J_{\omega_i} \} \dot{q} \quad (3.6)$$

A questo punto si calcolano i termini che compongono le equazioni di Lagrange di ogni link (2.4). Successivamente si mettono in evidenza i parametri dinamici (1.3) presenti in ciascun termine.

### 3.1.1 Termini derivanti da $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^{(i)}}{\partial \dot{q}} \right)^T$

Derivando l'espressione dell'energia cinetica (3.6) rispetto a  $\dot{q}$  risulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{(i)}}{\partial \dot{q}} &= m_i \dot{q}^T (J_{v_i}^T J_{v_i}) - m_i \dot{q}^T \{ J_{v_i}^T S({}^0R_i P_{iG_i}) J_{\omega_i} \} \\ &\quad + m_i \dot{q}^T \{ J_{\omega_i}^T S({}^0R_i P_{iG_i}) J_{v_i} \} \\ &\quad + \dot{q}^T \{ J_{\omega_i}^T {}^0R_i [{}^iI_{G_i} + m_i S^T(P_{iG_i}) S(P_{iG_i})] {}^0R_i^T J_{\omega_i} \} \end{aligned} \quad (3.7)$$

dove  ${}^iI_i = {}^iI_{G_i} + m_i S^T(P_{iG_i}) S(P_{iG_i})$  è il tensore d'inerzia del link  $i$ -esimo riferito al frame di origine  $O_i$ .

Considerando la proprietà di simmetria della matrice  ${}^iI_i$  e le caratteristiche delle

matrici antisimmetriche definite tramite l'utilizzo dell'operatore *skew*, si ottiene

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial T^{(i)}}{\partial \dot{q}} \right)^T &= (J_{v_i}^T J_{v_i}) \dot{q}^T m_i \\ &+ \{ J_{v_i}^T S(J_{\omega_i} \dot{q})^0 R_i - J_{\omega_i}^T S(J_{v_i} \dot{q})^0 R_i \} m_i P_{iG_i} \\ &+ J_{\omega_i}^T {}^0 R_i {}^i I_i {}^0 R_i^T J_{\omega_i} \dot{q} \end{aligned} \quad (3.8)$$

A questo punto si hanno i primi due termini lineari rispettivamente in  $m_i$  e  $m_i P_{iG_i}$  e il terzo è funzione di  ${}^i I_i$ .

Al fine di isolare i termini inerziali del secondo ordine contenuti in  $J_{\omega_i}^T {}^0 R_i {}^i I_i {}^0 R_i^T J_{\omega_i} \dot{q}$ , si scrive  ${}^i I_i$  come prodotto interno tra un tensore  $E$  del terzo ordine e il vettore dei parametri  $\pi$ :

$${}^i I_i = E \pi_2^{(i)} \quad (3.9)$$

dove

$${}^i I_i = \begin{bmatrix} \bar{J}_{ixx} & -\bar{J}_{ixy} & -\bar{J}_{ixz} \\ -\bar{J}_{ixy} & \bar{J}_{iyy} & -\bar{J}_{iyz} \\ -\bar{J}_{ixz} & -\bar{J}_{iyz} & \bar{J}_{izz} \end{bmatrix} \quad \pi_2^{(i)T} = [\bar{J}_{ixx} \ \bar{J}_{ixy} \ \bar{J}_{ixz} \ \bar{J}_{iyy} \ \bar{J}_{iyz} \ \bar{J}_{izz}] \quad (3.10)$$

$$E = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ -E_2 \\ -E_3 \\ E_4 \\ -E_5 \\ E_6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3 \times 6} \quad (3.11)$$

In questo modo il terzo termine di (3.8) diventa

$$J_{\omega_i}^T {}^0 R_i {}^i I_i {}^0 R_i^T J_{\omega_i} \dot{q} = [J_{\omega_i}^T {}^0 R_i E_1 {}^0 R_i^T J_{\omega_i} \dot{q} | \dots | J_{\omega_i}^T {}^0 R_i E_6 {}^0 R_i^T J_{\omega_i} \dot{q}] \begin{bmatrix} \bar{J}_{ixx} \\ \bar{J}_{ixy} \\ \bar{J}_{ixz} \\ \bar{J}_{iyy} \\ \bar{J}_{iyz} \\ \bar{J}_{izz} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Riassumendo si ha

$$\left(\frac{\partial T^{(i)}}{\partial \dot{q}}\right)^T = X_0^{(i)} \pi_0^{(i)} + X_1^{(i)} \pi_1^{(i)} + X_2^{(i)} \pi_2^{(i)} \quad (3.13)$$

dove

$$X_0^{(i)} = (J_{v_i}^T J_{v_i}) \dot{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (3.14)$$

$$X_1^{(i)} = \{J_{v_i}^T S(J_{\omega_i} \dot{q}) - J_{\omega_i}^T S(J_{v_i} \dot{q})\} {}^0R_i \in \mathbb{R}^{n \times 3} \quad (3.15)$$

$$X_2^{(i)} = J_{\omega_i}^T {}^0R_i [E_1 | -E_2 | \dots | E_6] J_{\omega_i} \dot{q} \in \mathbb{R}^{n \times 6} \quad (3.16)$$

$$\pi_0^{(i)} = m_i \quad (3.17)$$

$$\pi_1^{(i)} = \begin{bmatrix} m_i P_{iG_{ix}} \\ m_i P_{iG_{iy}} \\ m_i P_{iG_{iz}} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\pi_2^{(i)} = \begin{bmatrix} \bar{J}_{ixx} \\ \bar{J}_{ixy} \\ \bar{J}_{ixz} \\ \bar{J}_{iyy} \\ \bar{J}_{iyz} \\ \bar{J}_{izz} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Quindi la prima parte di regressore derivante dalle equazioni di Lagrange è

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^{(i)}}{\partial \dot{q}}\right)^T = \dot{X}_0^{(i)} \pi_0^{(i)} + \dot{X}_1^{(i)} \pi_1^{(i)} + \dot{X}_2^{(i)} \pi_2^{(i)} \quad (3.20)$$

### 3.1.2 Termini derivanti da $\left(\frac{\partial T^{(i)}}{\partial q}\right)^T$

Si considera l'espressione dell'energia cinetica presentata in 3.6 e di seguito riportata

$$\begin{aligned} T^{(i)} &= \frac{1}{2} m_i \dot{q}^T (J_{v_i}^T J_{v_i}) \dot{q} - \frac{1}{2} m_i \dot{q}^T \{J_{v_i}^T S({}^0R_i P_{iG_i}) J_{\omega_i}\} \dot{q} \\ &+ \frac{1}{2} m_i \dot{q}^T \{J_{\omega_i}^T S({}^0R_i P_{iG_i}) J_{v_i}\} \dot{q} \\ &+ \frac{1}{2} \dot{q}^T \{J_{\omega_i}^T {}^0R_i [{}^iI_{G_i} + m_i S^T(P_{iG_i}) S(P_{iG_i})] {}^0R_i^T J_{\omega_i}\} \dot{q} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Derivando rispetto a  $q$  si ottiene

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\partial T^{(i)}}{\partial q} \right) &= \frac{1}{2} \dot{q}^T \left\{ \frac{\partial}{\partial q} (J_{v_i}^T J_{v_i}) \right\} \dot{q} m_i \\
 &+ \frac{1}{2} \dot{q}^T \left\{ \frac{\partial}{\partial q} [J_{v_i}^T S(J_{\omega_i} \dot{q}) {}^0 R_i - J_{\omega_i}^T S(J_{v_i} \dot{q}) {}^0 R_i] \right\} m_i P_{iG_i} \\
 &+ \frac{1}{2} \dot{q}^T \left\{ \frac{\partial}{\partial q} [J_{\omega_i}^T {}^0 R_i {}^i I_i {}^0 R_i^T J_{\omega_i}] \right\} \dot{q} = \\
 &= W_0^{(i)T} m_i + W_1^{(i)T} m_i P_{iG_i} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \left\{ \frac{\partial}{\partial q} [J_{\omega_i}^T {}^0 R_i {}^i I_i {}^0 R_i^T J_{\omega_i}] \right\} \dot{q}
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Utilizzando la relazione 3.9 il terzo termine dell'espressione precedente risulta

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial q} [J_{\omega_i}^T {}^0 R_i {}^i I_i {}^0 R_i^T J_{\omega_i}] \right\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q} (J_{\omega_i}^T {}^0 R_i E_1 {}^0 R_i^T J_{\omega_i}) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial q} (J_{\omega_i}^T {}^0 R_i E_6 {}^0 R_i^T J_{\omega_i}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{J}_{ixx} \\ \bar{J}_{ixy} \\ \bar{J}_{ixz} \\ \bar{J}_{iyy} \\ \bar{J}_{iyz} \\ \bar{J}_{izz} \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

Infine, eseguendo la trasposizione dei termini risultanti, si ha

$$\left( \frac{\partial T^{(i)}}{\partial q} \right)^T = W_0^{(i)} \pi_0^{(i)} + W_1^{(i)} \pi_1^{(i)} + W_2^{(i)} \pi_2^{(i)} \tag{3.24}$$

dove

$$W_0^{(i)} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} (J_{v_i}^T J_{v_i}) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial q_n} (J_{v_i}^T J_{v_i}) \end{bmatrix} \dot{q} \tag{3.25}$$

$$W_1^{(i)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} [{}^0 R_i^T S^T(J_{\omega_i} \dot{q}) J_{v_i} \dot{q} - {}^0 R_i^T S^T(J_{v_i} \dot{q}) J_{\omega_i} \dot{q}] \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial q_n} [{}^0 R_i^T S^T(J_{\omega_i} \dot{q}) J_{v_i} \dot{q} - {}^0 R_i^T S^T(J_{v_i} \dot{q}) J_{\omega_i} \dot{q}] \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

$$W_2^{(i)} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} (J_{\omega_i}^T {}^0 R_i E {}^0 R_i^T J_{\omega_i}) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial q_n} (J_{\omega_i}^T {}^0 R_i E {}^0 R_i^T J_{\omega_i}) \end{bmatrix} \dot{q} \tag{3.27}$$

## 3.2 Termini derivanti dall'espressione dell'energia potenziale

Riferendosi alla relazione (2.4), si calcola l'energia potenziale del link  $i$ -esimo definendo i vettori posizione rispetto al frame base  $\{0\}$ :

$$U^{(i)} = -m_i g^T ({}^0p_i + {}^0R_i P_{iG_i}) \quad (3.28)$$

Per ottenere i termini contenuti nelle equazioni di Lagrange è necessario derivare tale energia potenziale rispetto a  $q$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial q} \right)^T &= -m_i \left\{ g^T \frac{\partial {}^0p_i}{\partial q} + g^T \frac{\partial {}^0R_i}{\partial q} P_{iG_i} \right\}^T = \\ &= -J_{v_i}^T g m_i - \left[ \frac{\partial (g^T {}^0R_i)}{\partial q} m_i P_{iG_i} \right]^T \end{aligned} \quad (3.29)$$

Considerando il secondo termine dell'espressione precedente, è possibile scrivere:

$$\left[ \frac{\partial (g^T {}^0R_i m_i P_{iG_i})}{\partial q} \right]^T = \left[ \frac{\partial}{\partial q} \left\{ (m_i P_{iG_i})^T {}^0R_i^T g \right\} \right]^T = \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial ({}^0R_i^T g)}{\partial q_1} \right)^T \\ \vdots \\ \left( \frac{\partial ({}^0R_i^T g)}{\partial q_n} \right)^T \end{bmatrix} m_i P_{iG_i}$$

A questo punto si l'espressione della derivata dell'energia potenziale rispetto a  $q$  può essere espressa come somma di due termini lineari rispettivamente in  $m_i$  e in  $m_i P_{iG_i}$ :

$$\left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial q} \right)^T = Z_0^{(i)} m_i + Z_1^{(i)} m_i P_{iG_i} \quad (3.30)$$

dove

$$Z_0^{(i)} = -J_{v_i}^T g \quad (3.31)$$

$$Z_1^{(i)} = - \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial ({}^0R_i^T g)}{\partial q_1} \right)^T \\ \vdots \\ \left( \frac{\partial ({}^0R_i^T g)}{\partial q_n} \right)^T \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

### 3.3 Costruzione del Regressore

La porzione di equazioni di Lagrange relativa al link  $i$ -esimo è definita come segue:

$$\left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T^{(i)}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T^{(i)}}{\partial q} + \frac{\partial U^{(i)}}{\partial q} \right]^T \equiv Y^{(i)} \pi^{(i)} = \begin{bmatrix} Y_0^{(i)} & Y_1^{(i)} & Y_2^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_0^{(i)} \\ \pi_1^{(i)} \\ \pi_2^{(i)} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

dove i blocchi che compongono le colonne della porzione di regressore relativa al link  $i$ -esimo  $Y_j^{(i)}$  sono stati ordinati sulla base dell'ordine dei momenti d'inerzia cui si riferiscono:

$Y_0^{(i)}$  = vettore colonna che moltiplica il momento d'inerzia di ordine zero  $m_i$

$Y_1^{(i)}$  = porzione che moltiplica i momenti d'inerzia del primo ordine  $m_i P_{iG_i}$  (3.18)

$Y_2^{(i)}$  = porzione che moltiplica i momenti d'inerzia del secondo ordine  $\pi_2^{(i)}$  (3.19)

Considerando le definizioni delle  $X_j^{(i)}$  (3.14, 3.15, 3.16), delle  $W_j^{(i)}$  (4.14, 4.15, 3.27) e delle  $Z_j^{(i)}$  (4.17, 4.18) si può procedere al calcolo diretto del regressore del link  $i$ -esimo mediante le formule

$$Y_0^{(i)} = \dot{X}_0^{(i)} - W_0^{(i)} + Z_0^{(i)} \quad (3.34)$$

$$Y_1^{(i)} = \dot{X}_1^{(i)} - W_1^{(i)} + Z_1^{(i)} \quad (3.35)$$

$$Y_2^{(i)} = \dot{X}_2^{(i)} - W_2^{(i)} + Z_2^{(i)} \quad (3.36)$$

Le relazioni precedenti possono essere adoperate per calcolare la porzione di regressore relativa a ciascun link  $Y^{(i)} = \begin{bmatrix} Y_0^{(i)} & Y_1^{(i)} & Y_2^{(i)} \end{bmatrix}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; il regressore completo si ottiene giustapponendo i regressori parziali:

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \begin{bmatrix} Y^{(1)} & \dots & Y^{(n)} \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Analogamente si ottiene il vettore colonna dei parametri dinamici:

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi^{(1)} \\ \vdots \\ \pi^{(n)} \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

# Capitolo 4

## Controllo adattativo e calcolo diretto del regressore di Slotine-Li

Il controllo adattativo permette di adattare in linea il modello computazionale al modello dinamico del manipolatore nel caso in cui i due modelli corrispondano per quanto riguarda la struttura, ma esiste incertezza nella stima dei parametri che caratterizzano il manipolatore.

Leggi di controllo di tipo adattativo possono essere definite adoperando la proprietà di linearità nei parametri dinamici del modello. In particolare il controllo adattativo di Slotine-Li si basa su un approccio che considera una legge di controllo a coppia precalcolata mediante inversione della dinamica, supponendo che il modello computazionale sia coincidente con il modello dinamico.

La legge di controllo considerata è

$$\tau = B(q)\ddot{q}_r + C(q, \dot{q})\dot{q}_r + G(q) + K_D \sigma \quad (4.1)$$

con  $K_D$  matrice definita positiva e

$$\begin{aligned} \dot{q}_r &= \dot{q}_d + \Lambda \tilde{q} & \ddot{q}_r &= \ddot{q}_d + \Lambda \dot{\tilde{q}} \\ \sigma &= \dot{q}_r - \dot{q} = \dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q} \\ \tilde{q} &= q_d - q \end{aligned} \quad (4.2)$$

con  $\Lambda$  matrice definita positiva.

Tale formulazione permette di non utilizzare le misure delle accelerazioni ai giunti

$\ddot{q}$ , spesso affette da notevoli disturbi. La legge di controllo 4.1, nel caso in cui i parametri non siano valutati esattamente, si modifica in

$$\begin{aligned}\tau &= \hat{B}(q)\ddot{q}_r + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \hat{G}(q) + K_D \sigma, \\ &= Y_r(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) \hat{\pi} + K_D \sigma,\end{aligned}\quad (4.3)$$

dove  $\hat{\pi}$  rappresenta la stima effettuata dei parametri e, di conseguenza,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$ ,  $\hat{G}$  rappresentano le funzioni stimate dei termini del modello dinamico.

La stima del vettore dei parametri è aggiornata nel tempo con la legge di adattamento

$$\dot{\hat{\pi}} = K_\pi^{-1} Y_r^T(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) \sigma \quad (4.4)$$

Lo schema a blocchi che rappresenta l'implementazione del controllo adattativo di Slotine-Li è riportato in figura 4.1.

Il regressore di Slotine-Li  $Y_r(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)$  utilizzato sia nella legge di controllo che

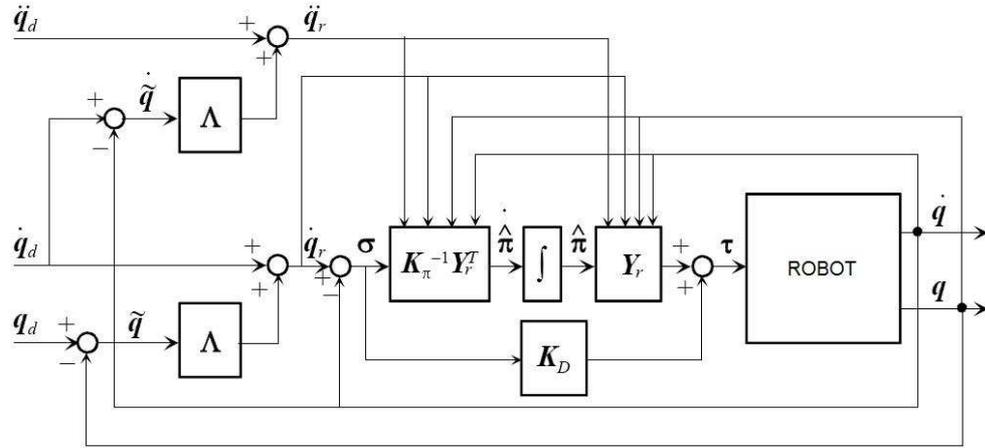


Figura 4.1: Schema a blocchi controllo adattativo di Slotine-Li

nella legge di adattamento non è semplice da calcolare e la maggiore difficoltà risiede nella possibilità di definire la matrice C in modo non univoco.

Si considerano delle forme di energia cinetica che, tramite l'utilizzo delle equazioni di Lagrange, riconducano alla

$$\left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T_2}{\partial q} \right]^T = B(q)\ddot{q}_r + C(q, \dot{q})\dot{q}_r. \quad (4.5)$$

---

Le definizioni di energia cinetica considerate sono

$$T_1 = \dot{q}_r^T B(q) \dot{q} \quad T_2 = \frac{1}{2} \dot{q}_r^T B(q) \dot{q}. \quad (4.6)$$

Si esplicitano i termini derivanti dal primo membro dell'equazione 4.5:

$$\left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}} \right]^T = B(q) \ddot{q}_r + \dot{B} \dot{q}_r \quad (4.7)$$

$$\left[ \frac{\partial T_2}{\partial q} \right]^T = \frac{1}{2} \dot{q}_r^T \frac{\partial B(q)}{\partial q} \dot{q}_r. \quad (4.8)$$

In questo modo si ottiene

$$\left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T_2}{\partial q} \right]^T = B(q) \ddot{q}_r + \left[ \dot{B} - \frac{1}{2} \dot{q}_r^T \frac{\partial B(q)}{\partial q} \right] \dot{q}_r \quad (4.9)$$

dove, per definizione, si ha  $C(q, \dot{q}) = \dot{B} - \frac{1}{2} \dot{q}_r^T \frac{\partial B(q)}{\partial q}$ .

Successivamente si adopera la definizione della matrice d'inerzia

$$\begin{aligned} B(q) &= \sum_{i=1}^n B(q)^{(i)} \\ B(q)^{(i)} &= m_i (J_{v_i}^T J_{v_i}) - m_i \{ J_{v_i}^T S({}^0 R_i P_{iG_i}) J_{\omega_i} \} \\ &\quad + m_i \{ J_{\omega_i}^T S({}^0 R_i P_{iG_i}) J_{v_i} \} \\ &\quad + \{ J_{\omega_i}^T {}^0 R_i [{}^i I_{G_i} + m_i S^T(P_{iG_i}) S(P_{iG_i})] {}^0 R_i^T J_{\omega_i} \} \end{aligned} \quad (4.10)$$

e, utilizzando un procedimento analogo a quello impiegato per il calcolo diretto del regressore nel capitolo 3, si costruiscono i termini che compongono il regressore di

Slotine-Li.

$$X_{0_r}^{(i)} = (J_{v_i}^T J_{v_i}) \dot{q}_r \quad (4.11)$$

$$X_{1_r}^{(i)} = \{ J_{v_i}^T S(J_{\omega_i} \dot{q}_r) - J_{\omega_i}^T S(J_{v_i} \dot{q}_r) \} {}^0R_i \quad (4.12)$$

$$X_{2_r}^{(i)} = J_{\omega_i}^T {}^0R_i [E_1 | -E_2 | \dots | E_6] J_{\omega_i} \dot{q}_r \quad (4.13)$$

$$W_{0_r}^{(i)} = \frac{1}{2} \dot{q}_r^T \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} (J_{v_i}^T J_{v_i}) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial q_n} (J_{v_i}^T J_{v_i}) \end{bmatrix} \dot{q} \quad (4.14)$$

$$W_{1_r}^{(i)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} [{}^0R_i^T S^T(J_{\omega_i} \dot{q}) J_{v_i} \dot{q}_r - {}^0R_i^T S^T(J_{v_i} \dot{q}) J_{\omega_i} \dot{q}_r] \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial q_n} [{}^0R_i^T S^T(J_{\omega_i} \dot{q}) J_{v_i} \dot{q}_r - {}^0R_i^T S^T(J_{v_i} \dot{q}) J_{\omega_i} \dot{q}_r] \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$W_{2_r}^{(i)} = \frac{1}{2} \dot{q}_r^T \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} (J_{\omega_i}^T {}^0R_i E {}^0R_i^T J_{\omega_i}) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial q_n} (J_{\omega_i}^T {}^0R_i E {}^0R_i^T J_{\omega_i}) \end{bmatrix} \dot{q} \quad (4.16)$$

Infine i termini derivanti dall'energia potenziale sono analoghi a quelli definiti nel paragrafo 3.2, in quanto il termine  $G(q)$  non viene influenzato dall'introduzione delle velocità di riferimento  $\dot{q}_r$ .

$$Z_0^{(i)} = -J_{v_i}^T g \quad (4.17)$$

$$Z_1^{(i)} = - \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial ({}^0R_i^T g)}{\partial q_1} \right)^T \\ \vdots \\ \left( \frac{\partial ({}^0R_i^T g)}{\partial q_n} \right)^T \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Il regressore completo di Slotine-Li si ottiene giustapponendo le porzioni di regressore relative a ciascun link:

$$Y_{0_r}^{(i)} = \dot{X}_{0_r}^{(i)} - W_{0_r}^{(i)} + Z_0^{(i)} \quad (4.19)$$

$$Y_{1_r}^{(i)} = \dot{X}_{1_r}^{(i)} - W_{1_r}^{(i)} + Z_1^{(i)} \quad (4.20)$$

$$Y_{2_r}^{(i)} = \dot{X}_{2_r}^{(i)} - W_{2_r}^{(i)} + Z_2^{(i)} \quad (4.21)$$

$$Y_r^{(i)} = \begin{bmatrix} Y_{0_r}^{(i)} & Y_{1_r}^{(i)} & Y_{2_r}^{(i)} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.22)$$

$$Y_r(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ddot{q}_r) = \begin{bmatrix} Y_r^{(1)} & \dots & Y_r^{(n)} \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

## Capitolo 5

# Calcolo diretto del regressore per un manipolatore di Stanford

Il manipolatore è costituito da una catena seriale a sei link di tipo R-R-P-R-R-R (vedi Fig. 5.1). Per la costruzione del regressore di tale robot, è stato utilizzato il

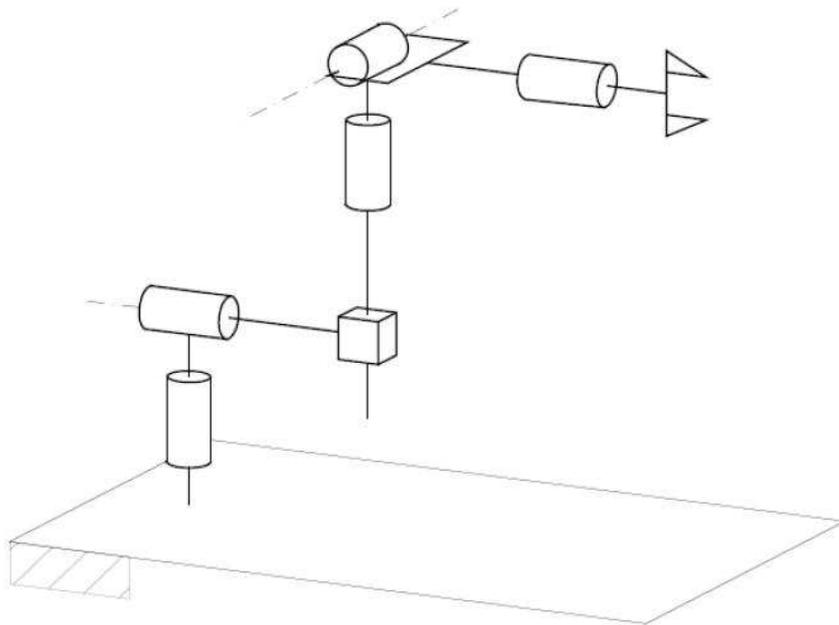


Figura 5.1: Manipolatore di Stanford

software di calcolo simbolico Wolfram Mathematica 6.0, con il quale è stato possibile verificare la correttezza del metodo diretto per il calcolo del regressore attraverso

un confronto con i termini che si ottengono dallo studio della dinamica in maniera classica.

## 5.1 Studio di cinematica diretta, cinematica differenziale e dinamica

Utilizzando la convenzione di Denavit-Hartenberg, sono state costruite le terne di riferimento mostrate in Fig. 5.2 e la Tabella (5.1). Dopo la costruzione della tabella

Link	$\mathbf{a}_i$	$\alpha_i$	$\mathbf{d}_i$	$\theta_i$
1	0	$-\pi/2$	0	$\theta_1(t)$
2	0	$\pi/2$	$d_2$	$\theta_2(t)$
3	0	0	$d_3(t)$	0
4	0	$-\pi/2$	0	$\theta_4(t)$
5	0	$\pi/2$	0	$\theta_5(t)$
6	0	0	$d_6$	$\theta_6(t)$

Tabella 5.1: Tabella di Denavit-Hartenberg per il manipolatore di Stanford

sono state calcolate le matrici di trasformazione  ${}^{i-1}A_i$  che permettono di ricavare la funzione cinematica diretta semplicemente per composizione.

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

$${}^0A_6 = \prod_{i=1}^6 {}^{i-1}A_i = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 {}^3A_4 {}^4A_5 {}^5A_6$$

Di seguito si riporta il codice Mathematica che implementa tale procedura.

Cinematica Diretta

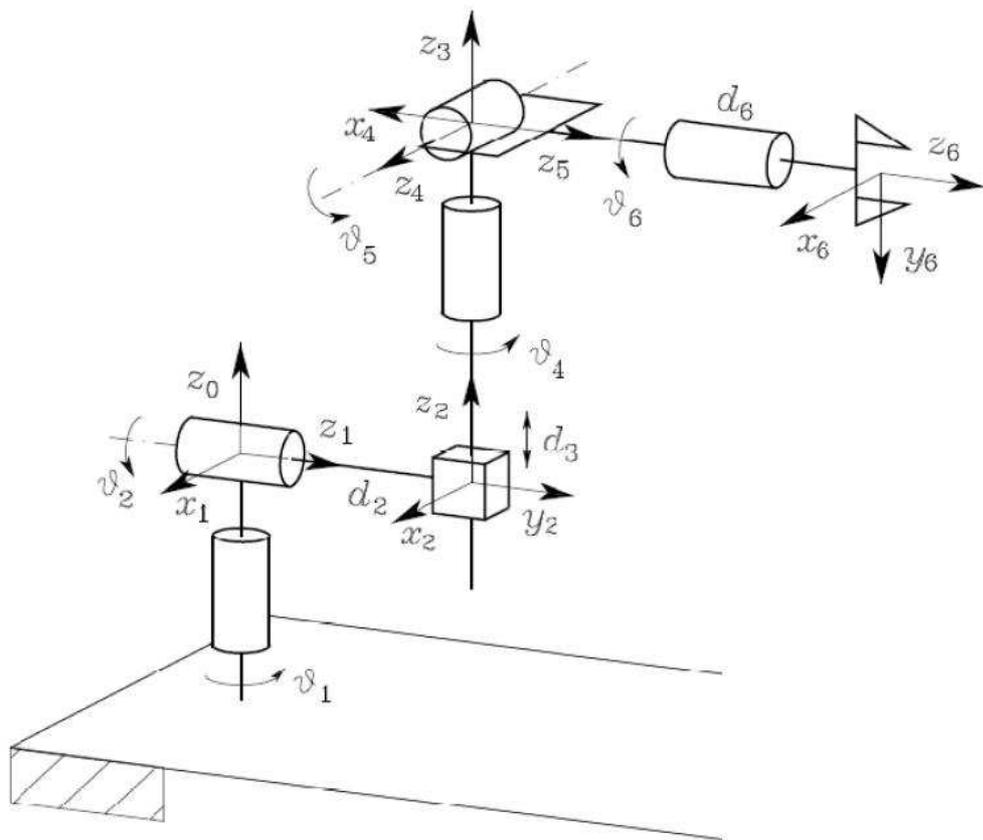


Figura 5.2: Convenzione di Denavit-Hartenberg per un manipolatore di Stanford

Matrice di Trasformazione dal sistema di riferimento  $\{i-1\}$  a  $\{i\}$  (di D-H)

```
A[i_] := {{Cos[link[i][[4]]], -Sin[link[i][[4]]]*Cos[link[i][[2]]],
Sin[link[i][[4]]]*Sin[link[i][[2]]],
link[i][[1]]*Cos[link[i][[4]]]}, {Sin[link[i][[4]]],
Cos[link[i][[4]]]*Cos[link[i][[2]]], -Cos[link[i][[4]]]*Sin[link[i][[2]]],
link[i][[1]]*Sin[link[i][[4]]]}, {0, Sin[link[i][[2]]],
Cos[link[i][[2]]], link[i][[3]]}, {0, 0, 0, 1}};
```

```
A01 = A[1];
A12 = A[2];
A23 = A[3];
A34 = A[4];
A45 = A[5];
A56 = A[6];
```

Matrice di trasformazione da terna base a end-effector

```
A06 = A01.A12.A23.A34.A45.A56;

n06 = A06[[1 ;; 3, 1]];

s06 = A06[[1 ;; 3, 2]];

a06 = A06[[1 ;; 3, 3]];

p06 = A06[[1 ;; 3, 4]];
```

Successivamente è stata studiata la cinematica differenziale del manipolatore, che caratterizza i legami tra le velocità dei giunti e le corrispondenti velocità lineare e angolare dell'*end effector*. Tali legami sono descritti dalla matrice di trasformazione denominata Jacobiano geometrico.

A questo punto si procede affrontando lo studio della dinamica del manipolatore di Stanford considerato. Tale studio è condotto allo scopo di verificare l'efficienza del metodo per il calcolo diretto della dinamica nel regressore, tramite un confronto tra le  $\tau$  ottenute eseguendo il prodotto  $\tau = Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \pi$  e considerando il modello dinamico nello spazio dei giunti  $\tau = B(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q)$ .

Per la definizione di quest'ultimo modello sono stati costruiti i Jacobiani relativi ai baricentri di ciascun link. La matrice  $B(q)$  è ottenuta adoperando tali Jacobiani, le caratteristiche inerziali dei bracci e le matrici di rotazione calcolate nell'ambito della risoluzione della cinematica diretta; la matrice  $C(q, \dot{q})$  è costruita a partire

dalla matrice  $B$  tramite l'utilizzo dei simboli di Christoffel; infine la matrice  $G(q)$  è ottenuta per derivazione diretta dell'energia potenziale  $U(q)$  rispetto al vettore delle variabili di giunto  $q$ .

Il codice Mathematica che implementa il calcolo della forma matriciale del modello dinamico è presentato di seguito.

```

Dinamica

Calcolo di B (matrice d'inerzia)

Formule per il calcolo dei Jacobiani dei vari link

Jacobiano di posizione

jpl[i_, j_] := z[2] /; j == 3; (* giunto prismatico *)
jpl[i_, j_] := S[z[j - 1]].(pg[i] - p[j - 1]); (*giunto rotoidale*)

Jacobiano di orientazione

jol[i_, j_] := {0, 0, 0} /; j == 3; (* giunto prismatico *)
jol[i_, j_] := z[j - 1]; (*giunto rotoidale*)

Calcolo del Jacobiano del link 1

Jp[1] = Transpose[{jpl[1, 1], {0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0,
0, 0}}];
Jo[1] = Transpose[{jol[1, 1], {0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0,
0, 0}}];

Calcolo del Jacobiano del link 2

Jp[2] = Transpose[{jpl[2, 1],
jpl[2, 2], {0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}];
Jo[2] = Transpose[{jol[2, 1],
jol[2, 2], {0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}];

Calcolo del Jacobiano del link 3

Jp[3] = Transpose[{jpl[3, 1], jpl[3, 2],
jpl[3, 3], {0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}];
Jo[3] = Transpose[{jol[3, 1], jol[3, 2],
jol[3, 3], {0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}];

Calcolo del Jacobiano del link 4

```

```
Jp[4] = Transpose[{jpl[4, 1], jpl[4, 2], jpl[4, 3],
  jpl[4, 4], {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}];
Jo[4] = Transpose[{jol[4, 1], jol[4, 2], jol[4, 3],
  jol[4, 4], {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}];
```

Calcolo del Jacobiano del link 5

```
Jp[5] = Transpose[{jpl[5, 1], jpl[5, 2], jpl[5, 3], jpl[5, 4],
  jpl[5, 5], {0, 0, 0}}];
Jo[5] = Transpose[{jol[5, 1], jol[5, 2], jol[5, 3], jol[5, 4],
  jol[5, 5], {0, 0, 0}}];
```

Calcolo del Jacobiano del link 6

```
Jp[6] = Transpose[{jpl[6, 1], jpl[6, 2], jpl[6, 3], jpl[6, 4], jpl[6, 5],
  jpl[6, 6}}];
Jo[6] = Transpose[{jol[6, 1], jol[6, 2], jol[6, 3], jol[6, 4], jol[6, 5],
  jol[6, 6}}];
```

Calcolo dei tensori d'inerzia baricentrici in terna fissa

```
IO[i_] := R0[i].Ig[i].Transpose[R0[i]];
```

Calcolo dei contributi alla matrice d'inerzia B

```
Bp[i_] := m[i]*Transpose[Jp[i]].Jp[i];
Bo[i_] := Transpose[Jo[i]].IO[i].Jo[i];
```

Costruzione della matrice d'inerzia B

```
B = Sum[Bp[i] + Bo[i], {i, 1, 6}];
```

Calcolo di C (matrice delle forze centrifughe e di Coriolis)

calcolo i simboli di Christoffel

```
ch[i_, j_, k_] :=
  1/2 (D[B[[i, j]], q[t][[k]]] + D[B[[i, k]], q[t][[j]]] -
  D[B[[j, k]], q[t][[i]]])
```

calcolo gli elementi della matrice C

```
c[i_, j_] := Sum[ch[i, j, k]*qp[t][[k]], {k, 1, 6}]
```

Costruzione della matrice C

```
Coriolis = {{c[1, 1], c[1, 2], c[1, 3], c[1, 4], c[1, 5], c[1, 6]}, {c[2, 1],
```

```
c[2, 2], c[2, 3], c[2, 4], c[2, 5], c[2, 6]}, {c[3, 1], c[3, 2], c[3, 3],
c[3, 4], c[3, 5], c[3, 6]}, {c[4, 1], c[4, 2], c[4, 3], c[4, 4], c[4, 5],
c[4, 6]}, {c[5, 1], c[5, 2], c[5, 3], c[5, 4], c[5, 5],
c[5, 6]}, {c[6, 1], c[6, 2], c[6, 3], c[6, 4], c[6, 5], c[6, 6]}];
```

Calcolo di G (vettore dei contributi gravitazionali)

```
G = -Sum[m[i] Transpose[Jp[i]].g0, {i, 1, 6}];
```

## 5.2 Calcolo diretto della dinamica nel regressore

Il regressore e il vettore dei parametri dinamici relativi al manipolatore di Stanford è ottenuto adoperando le relazioni matematiche analizzate nel Capitolo 3.

Il codice che implementa la procedura in Mathematica è presentato in Appendice (7).

Infine si verifica la correttezza del metodo considerato confrontando le  $\tau$  ottenute rispettivamente utilizzando la formulazione classica della dinamica e il calcolo diretto del regressore

$$\begin{aligned}\tau_{din} &= B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) \\ \tau_{reg} &= Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\pi\end{aligned}\tag{5.2}$$

tramite la differenza  $\tau_{din} - \tau_{reg}$ .

## Capitolo 6

# Controllo adattativo di Slotine-Li per un manipolatore di Stanford

Il calcolo diretto del regressore di Slotine-Li e il relativo controllo adattativo sono stati applicati al manipolatore di Stanford descritto nel capitolo 5. Le simulazioni relative a tale applicazione sono state implementate adoperando il software Mathematica 6.0. Sono state scelte delle traiettorie di riferimento nello spazio dei giunti costituite da tratti sinusoidali aventi frequenze diverse alternati a segnali costanti. Inoltre sono stati considerate le seguenti matrici

$$\begin{aligned}\Lambda &= \text{diag}(10, 5, 5, 5, 5, 5) \\ K_\pi &= 100 I_{60} \\ K_D &= 10 I_6\end{aligned}\tag{6.1}$$

dove  $\text{diag}()$  definisce una matrice diagonale i quali argomenti sono gli elementi della diagonale e  $I_n$  è la matrice identità di dimensioni  $n \times n$ .

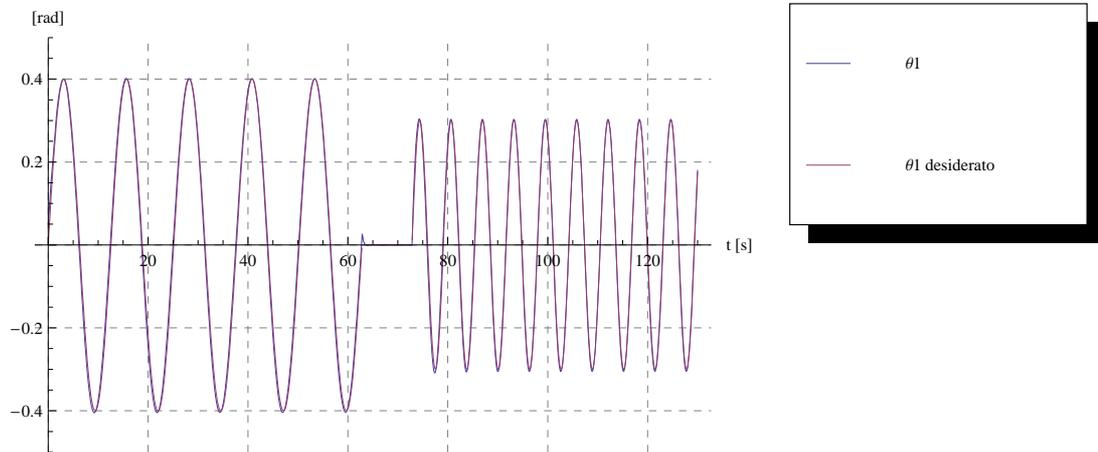


Figura 6.1: Inseguimento del riferimento della variabile di giunto  $q_1$

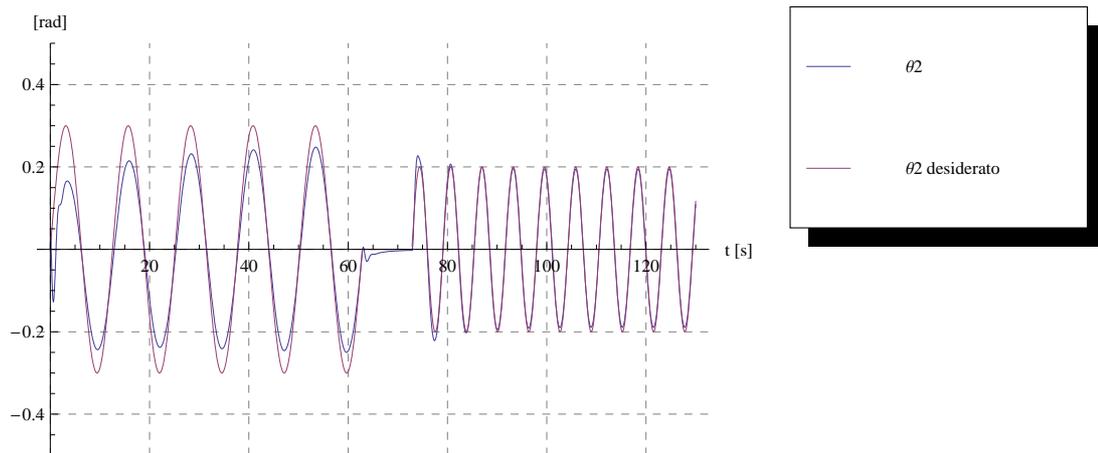


Figura 6.2: Inseguimento del riferimento della variabile di giunto  $q_2$

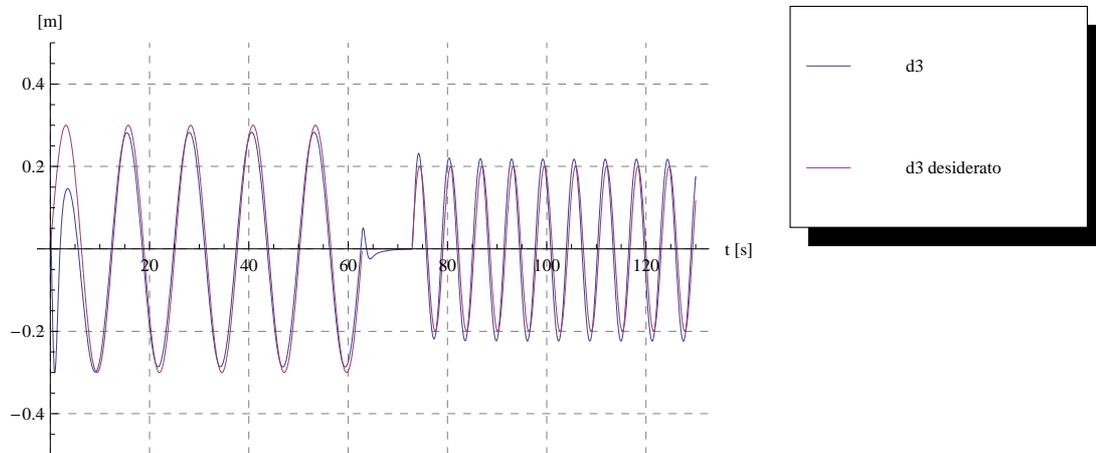


Figura 6.3: Inseguimento del riferimento della variabile di giunto  $q_3$

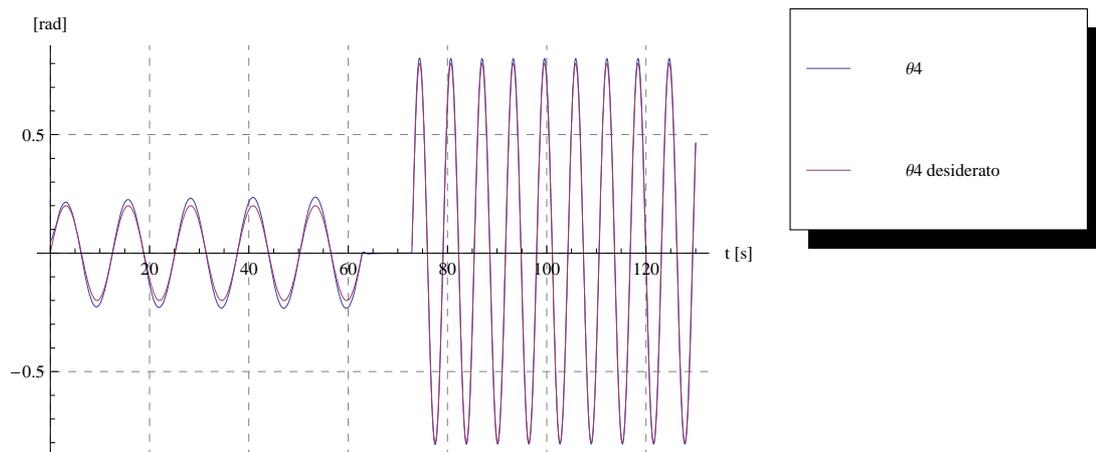


Figura 6.4: Inseguimento del riferimento della variabile di giunto  $q_4$

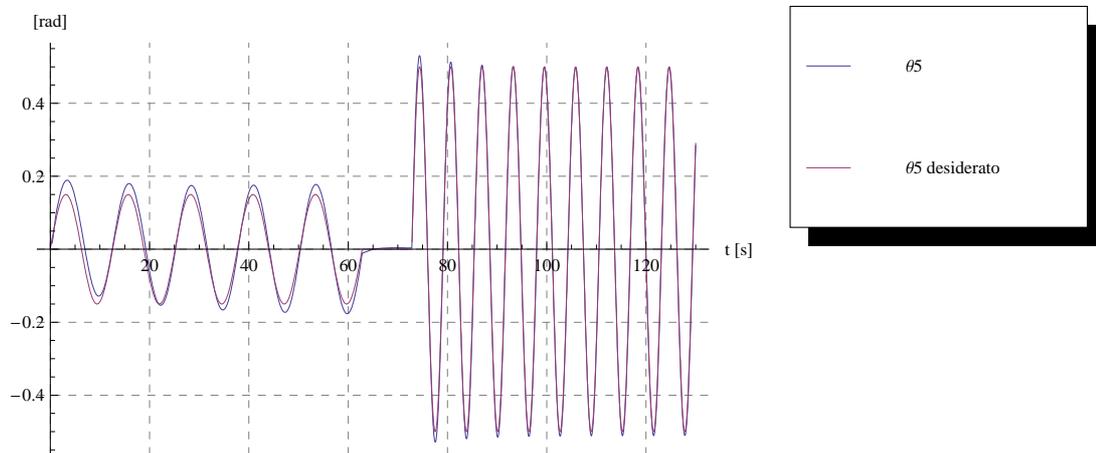


Figura 6.5: Inseguimento del riferimento della variabile di giunto  $q_5$

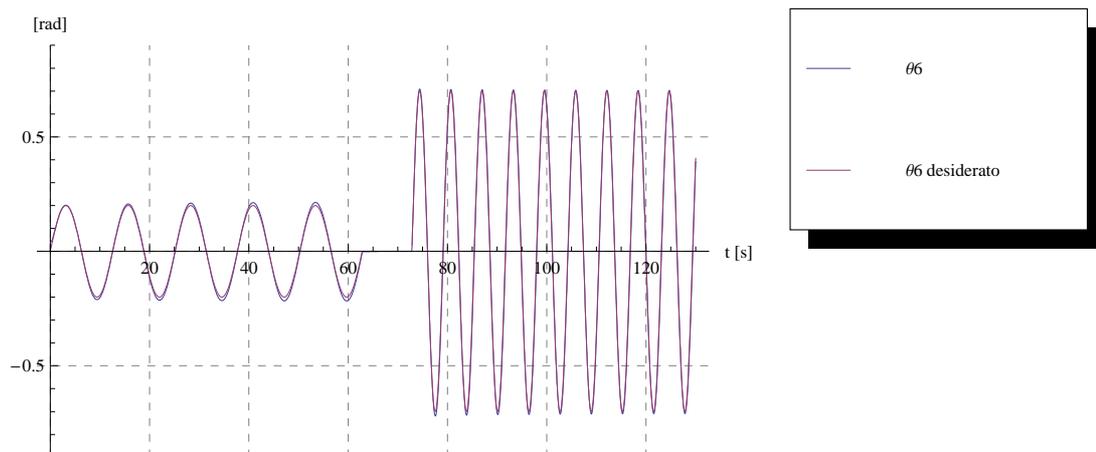


Figura 6.6: Inseguimento del riferimento della variabile di giunto  $q_6$

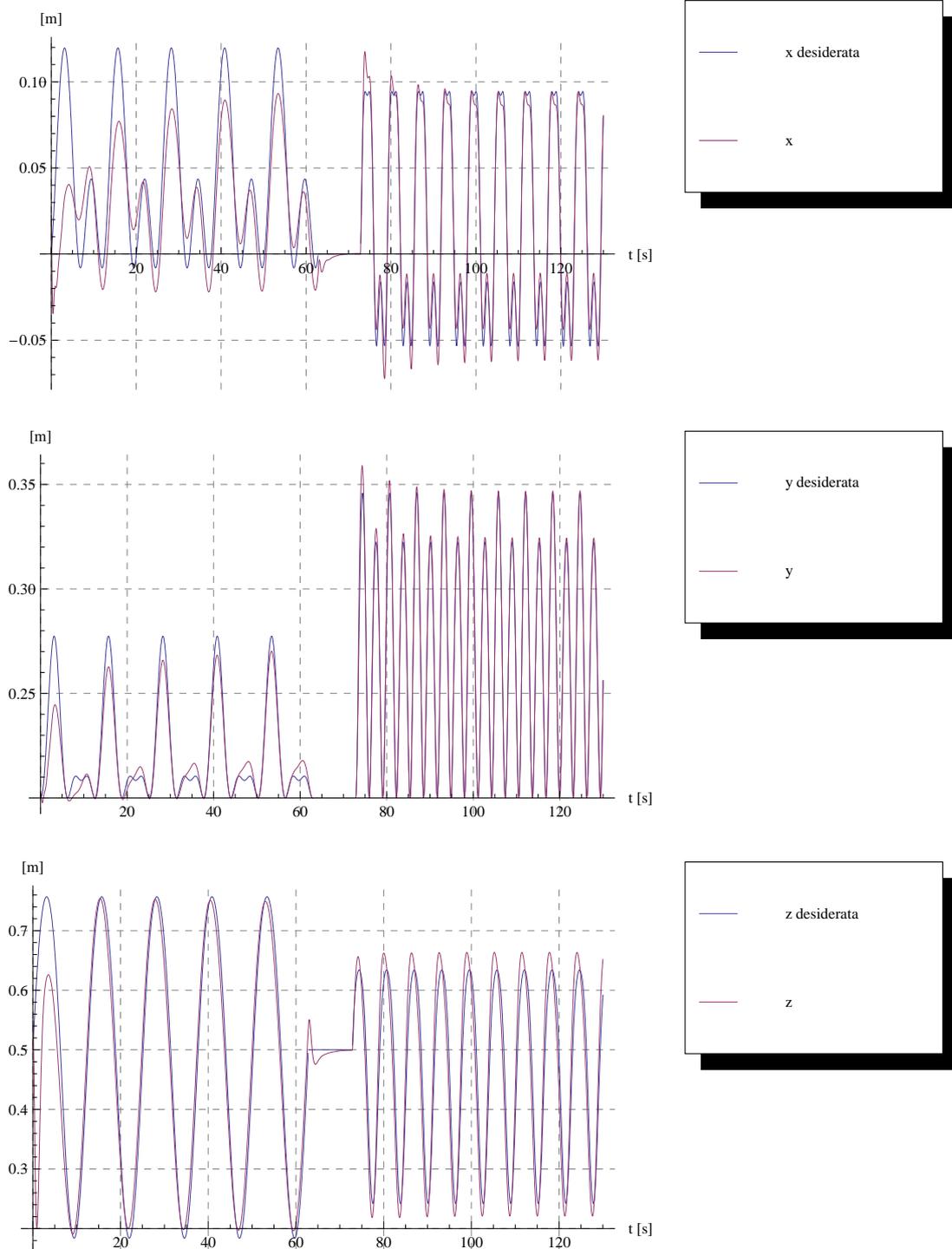


Figura 6.7: Inseguimento del riferimento dell'end effector (componenti x,y,z)

# Capitolo 7

## Appendice

Utilities

Operatore Wedge

```
S[w_] := {{0, -w[[3]], w[[2]]},  
          {w[[3]], 0, -w[[1]]},  
          {-w[[2]], w[[1]], 0}}
```

Matrici di base del tensore d'inerzia

```
E1 = {{1, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}};
```

```
E2 = {{0, 1, 0}, {1, 0, 0}, {0, 0, 0}};
```

```
E3 = {{0, 0, 1}, {0, 0, 0}, {1, 0, 0}};
```

```
E4 = {{0, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 0}};
```

```
E5 = {{0, 0, 0}, {0, 0, 1}, {0, 1, 0}};
```

```
E6 = {{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 1}};
```

```
EE = {E1, -E2, -E3, E4, -E5, E6};
```

```
EEE = Transpose[EE, {2, 1, 3}];
```

Costruzione dei Jacobiani dei frames di D-H

Formule per il calcolo dei Jacobiani dei frames di D-H

Jacobiano di posizione

---

```

jpdh[i_, j_] := z[2] /; j == 3; (* giunto prismatico *)
jpdh[i_, j_] := S[z[j - 1]].(p[i] - p[j - 1]); (*giunto rotoidale*)

Jacobiano di orientamento

jodh[i_, j_] := {0, 0, 0} /; j == 3; (* giunto prismatico *)
jodh[i_, j_] := z[j - 1]; (*giunto rotoidale*)

Calcolo del Jacobiano del frame {1}

Jpdh[1] =
  Transpose[{jpdh[1, 1], {0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0,
    0}}];
Jodh[1] =
  Transpose[{jodh[1, 1], {0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0,
    0}}];

Calcolo del Jacobiano del frame {2}

Jpdh[2] =
  Transpose[{jpdh[2, 1],
    jpdh[2, 2], {0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}];
Jodh[2] =
  Transpose[{jodh[2, 1],
    jodh[2, 2], {0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}];

Calcolo del Jacobiano del frame {3}

Jpdh[3] =
  Transpose[{jpdh[3, 1], jpdh[3, 2],
    jpdh[3, 3], {0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}];
Jodh[3] =
  Transpose[{jodh[3, 1], jodh[3, 2],
    jodh[3, 3], {0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}];

Calcolo del Jacobiano del frame {4}

Jpdh[4] =
  Transpose[{jpdh[4, 1], jpdh[4, 2], jpdh[4, 3],
    jpdh[4, 4], {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}];
Jodh[4] =
  Transpose[{jodh[4, 1], jodh[4, 2], jodh[4, 3],
    jodh[4, 4], {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}];

Calcolo del Jacobiano del frame {5}

Jpdh[5] =

```

---

```

Transpose[{jpdh[5, 1], jpdh[5, 2], jpdh[5, 3], jpdh[5, 4],
jpdh[5, 5], {0, 0, 0}}];
Jodh[5] =
Transpose[{jodh[5, 1], jodh[5, 2], jodh[5, 3], jodh[5, 4],
jodh[5, 5], {0, 0, 0}}];

Calcolo del Jacobiano del frame {6}

Jpdh[6] =
Transpose[{jpdh[6, 1], jpdh[6, 2], jpdh[6, 3], jpdh[6, 4], jpdh[6, 5],
jpdh[6, 6]}];
Jodh[6] =
Transpose[{jodh[6, 1], jodh[6, 2], jodh[6, 3], jodh[6, 4], jodh[6, 5],
jodh[6, 6]}];

Quantità che contribuiscono al regressore

Termini da  $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$ 
\!\(\*\overscriptBox["q", "."]\)

Ordine 0

X0pL[i_] := D[(Transpose[Jpdh[i]].Jpdh[i]).qp[t], t];

Ordine 1

X1pL[i_] :=
D[(Transpose[Jpdh[i]].S[Jodh[i].qp[t]] -
Transpose[Jodh[i]].S[Jpdh[i].qp[t]])].R0[i], t];

Ordine 2

X2pL[i_] :=
D[Transpose[Jodh[i]].R0[i].EEE.Transpose[R0[i]].Jodh[i].qp[t], t];

Termini da  $\frac{\partial T}{\partial q}$ 

Ordine 0

W0L[i_] := (1/2) D[qp[t].Transpose[Jpdh[i]].Jpdh[i].qp[t], {q[t]}];

Ordine 1

W1L[i_] :=
Transpose[
D[Transpose[R0[i]].Transpose[S[Jodh[i].qp[t]]].Jpdh[i].qp[t], {q[t]}]];

```

---

Ordine 2

$W2L[i_] := (1/2) \text{Transpose}[$   
 $D[qp[t].\text{Transpose}[Jodh[i]].RO[i].EEE.\text{Transpose}[RO[i]].Jodh[i].qp[t], \{q[$   
 $t\}]]];$

Termini da  $\partial U / \partial q$

Ordine 0

$Z0L[i_] := -\text{Transpose}[Jpdh[i]].g0;$

Ordine 1

$Z1L[i_] := -\text{Transpose}[D[g0.RO[i], \{q[t]\}]]];$

Blocco di regressore relativo al link i-esimo

Ordine 0

$Y0L[i_] := X0pL[i] - W0L[i] + Z0L[i];$

Ordine 1

$Y1L[i_] := X1pL[i] - W1L[i] + Z1L[i];$

Ordine 2

$Y2L[i_] := X2pL[i] - W2L[i];$

Blocco completo

$Y[i_] := \text{StackCols}[Y0L[i], Y1L[i], Y2L[i]];$

Regressore completo

$Y = \text{StackCols}[Y[1], Y[2], Y[3], Y[4], Y[5], Y[6]];$

Costruzione del vettore dei parametri dinamici

Costruzione di  $\Pi$  del link i-esimo

$\Pi_{0L}[i_] := \{m[i]\};$

$\Pi_{1L}[i_] := m[i]*pgl[i];$

$I_{dh}[i_] := I_g[i] + m[i]*\text{Transpose}[S[pgl[i]]].S[pgl[i]];$

---

```
\[Pi]2L[i_] := {Idh[i][[1, 1]], Idh[i][[1, 2]], Idh[i][[1, 3]],  
  Idh[i][[2, 2]], Idh[i][[2, 3]], Idh[i][[3, 3]]};
```

```
Costruzione Vettore Completo dei parametri
```

```
P[i_] := Join\[Pi]0L[i], \[Pi]1L[i], \[Pi]2L[i];
```

```
P = Join[P[1], P[2], P[3], P[4], P[5], P[6];
```

```
Verifica Regressore
```

```
taureg = Y.P;
```

```
taudin = B.qpp[t] + Coriolis.qp[t] + G;
```

```
prova = (taureg - taudin);
```

```
prova[[1]] // Simplify
```

```
0
```

```
prova[[2]] // Simplify
```

```
0
```

```
prova[[3]] // Simplify
```

```
0
```

```
prova[[4]] // Simplify
```

```
0
```

```
prova[[5]] // Simplify
```

```
0
```

```
prova[[6]] // Simplify
```

```
0
```

# Capitolo 8

## Bibliografia

M. Gabbicini, *Dispense del Corso di Robotica I*, Facoltà di Ingegneria, Università di Pisa, a.a. 2007/2008

L. Sciavicco, B. Siciliano, *Robotica Industriale*, seconda edizione, McGraw-Hill, Milano, 2000

M. W. Spong, M. Vidyasagar, *Robot Dynamics and Control*, John Wiley & Sons, New York, 1989